Birth of New Branching Problems.

小林俊行 (Toshiyuki Kobayashi) [*]
東京大学大学院 数理科学研究科
Kavli 数物連携宇宙研究機構

Abstract

群の表現を部分群に制限したときの既約分解を分岐則という．テンソル積表現の分解はその一例である．等質空間 X 上の関数を表現論を用いて展開するプランシュレル定理も多くの場合，分岐則の特殊な場合と同値になる．また整数論におけるテータ対応は Weil 表現のある意味での分岐則から定まる．一方，微分幾何において部分多様体をその上の関数空間と変換群という観点から見ると，表現の制限の問題が自然な形で生じる．

さて，連結なコンパクトリー群の有限次元表現に対しては，分岐則を求めるアルゴリズムが存在し，組合せ論に帰着する．ところが，$GL_n(\mathbb{R})$ などの非コンパクトな簡約リー群の無限次元表現に対しては，分岐則を求めるアルゴリズムは一般に存在しない．それどころか，連続スペクトラムの重複度が無限になり，精密な解析が望めないほど悪い振る舞いをする場合もある．その一方で，分岐則が離散的になり純代数的なアプローチが有効な場合や，分岐則が無重複になり明示的な展開公式が期待できる場合も無限次元表現の範疇で存在する．

この講演では，さまざまな現象が起りうる簡約リー群の無限次元表現の分岐則において，連続スペクトラムの出現や重複度の有界性などがどのような数学と結びついているのかといった，表現の制限の様相を大まかに俯瞰する一般理論を概説する．さらに一般理論によるアプリオリ評価から抽出できる「有望な枠組」において分岐則をどのように精密に理解できるのか？という問題，それらに関連した幾何学や大域解析の理論について最先端でどのようなことが進行しているか？という話題のいくつかを取り上げる．また，分岐則の新しい現象の「発見」の過程において異分野から生まれた発想—とりわけ，不連続群論から生まれた発想についても触れたい．

[*]日本数学会 70 周年記念・企画特別講演 (2016 年 9 月 17 日 (土) 関西大学)

1　表現の分岐則—はじめに

日本数学会の 70 周年の記念行事ということで，前回，1996 年に開催された 50 周年の記念行事以降の 20 年間くらいの分野の発展をふりかえり，今後の展望を話してほしいという依頼を受けた．網羅的に述べるのはとても不可能なので，筆者自身が携わり，しかもこの 20 年位の間に著しい発展があった「簡約リー群の表現の分岐則の理論」を主軸とし，それに関連する話題にも触れようと思う．紙面に限りがあるため，取り上げることができない，いくつもの重要な話題があることを予めお断りしたい．

下の (1.1) のように群 G の表現 (Π, V) が与えられたとき，それを部分群 G' に制限し，G' の表現とみなして得られる表現を $\Pi|_{G'}$ と表記することにする．

$$G' \subset G \xrightarrow{\Pi} GL(V). \tag{1.1}$$

一般には，Π が G の既約表現であっても，制限 $\Pi|_{G'}$ は既約とは限らない．G' の表現として $\Pi|_{G'}$ を既約分解する公式を分岐則 (branching law) という．Π がユニタリ表現ならば，G' のユニタリ双対 $\widehat{G'}$ 上のボレル測度 μ と可測関数 $m : \widehat{G'} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ が存在して，

$$\Pi|_{G'} \simeq \int_{\widehat{G'}} m_\pi(\tau)\tau d\mu(\tau)$$

と既約表現に直積分分解されることが知られている．Π がユニタリ表現ではない無限次元表現の場合，制限 $\Pi|_{G'}$ の既約分解のかわりに，部分群 G' の各既約表現 π に対して，$\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ を研究することによって制限 $\Pi|_{G'}$ が G' の表現としてどのように振舞うかを考えることができるであろう（なお，$\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ と $\mathrm{Hom}_{G'}(\pi, \Pi|_{G'})$ の差異やその代数的アプローチとの比較については [47] を参照されたい）．

単に，既約分解を考えるだけでなく，より広く，制限 $\Pi|_{G'}$ が G' の表現としてどのように振舞うかについても理解する問題を（広い意味での）**分岐則の問題** (branching problem) と呼ぼう．特別な場合として，

- テンソル積表現の分解 $\cdots$ (G, G') が $(G_1 \times G_1, \mathrm{diag}(G_1))$ の形をしているときの分岐則

- 指標の理論 $\cdots$ G' が 簡約リー群（特にコンパクトなリー群）G の極大トーラス（可換な部分リー群）のときの制限 $\Pi|_{G'}$ の理論

- $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の理論 $\cdots$ G' が G の極大コンパクト部分群 K のときの制限 $\Pi|_K$ の情報（大域的情報）とリー環 $\mathfrak{g}$ の微分表現（無限小の情報）によって簡約リー群 G の表現を代数的に捉える考え方

などのトピックでは，いずれも制限 $\Pi|_{G'}$ の理解（広い意味での分岐則の問題）が鍵になる．

しかし，(G, G') が簡約リー群の組であり，G' がコンパクトでも可換でもなく，Π が無限次元表現の場合には，制限 $\Pi|_{G'}$ の理解は非常に難しい．

実際，1980 年代の半ばごろまでは，Weil 表現などの最高ウェイト表現などの特殊な事例研究を除いて，簡約リー群のユニタリ表現の分岐則についての一般理論の構築は殆ど絶望的であると考えられていた．$SL(2,\mathbb{R})$ より大きな群を扱うと「悪い現象」が立ちはだかり，あまり筋の良さそうな方向が見えないのである．筆者は時間をかけて悪い現象を徹底的に分析すると共に，幾度か「偶然に」発見できた「良い現象」を梃子にして一般理論を拡げようとしてきた．この 20 年余りにわたって，分岐則というテーマの進展のいろいろな段階で，今後有望だと考える問題意識を筆者は提起してきたが，幸運にも，次第に多くの数学者がこのテーマに参入され，かつて絶望的と考えられていた「無限次元表現の分岐則」のテーマが活発な領域となってきたように感じる．

実は，無限次元表現の分岐則において「新しい良い現象」を発見する際に，(技術的なことではなく，思想的な面において）不定符号の計量をもつ多様体における不連続群の理論から得た発想が何度か役に立った．このテーマも同じくこの 30 年間ほどで著しく発展した領域である．これについては第 2，第 3 節で触れる．

2　局所から大域へ—不定値計量の世界のふしぎな現象

幾何学において局所的な構造を指定したとき，

「大域的な形としてはどの程度の自由度があり，どのような制約を受けるか?」

という問は

$$局所的性質 \rightsquigarrow 大域的な形$$

というモチーフの典型的なものである．このモチーフは，20 世紀の幾何学の大きな潮流であり，とりわけリーマン幾何学の範疇で，著しい発展を遂げてきた．一方，リーマン幾何学の枠組を超えた場合には，局所から大域への研究は，この大きな潮流に乗り遅れた感があった．

「局所から大域」といっても，どのような局所的性質に着目するかによって，それに関わる数学の分野が大きく異なる．局所性として“均質”という性質に着目すると，リー群論や整数論との結びつきが強くなり，不連続群とよばれる離散的な代数構造が大域的な形を統制する主役になる．

リーマン幾何の範疇での不連続群の研究においては，1950 年代以降，Selberg，Weil, Borel, Mostow, Margulis 等の華やかな活躍があり，リーマン対称空間・リー群論・整数論から微分幾何学・トポロジーにまたがる不連続群の研究が大きく発展していた．

一方，相対論時空に用いられるローレンツ多様体，あるいはもっと一般の不定形量をもつ擬リーマン多様体など,（通常の）リーマン幾何学の枠組を超えた空間に対する，不連続群の本格的な一般理論が始まったのは，1980 年代の後半の [22] からであり，比較的 “若い” 分野である．

擬リーマン多様体においては，等長変換からなる離散群の作用が固有不連続とは限らない．さらに，その上の大域解析を考えるときも基本的な作用素であるラプラシアンがもはや楕円型微分作用素ではなく双曲型あるいは一般型の微分作用素になる．このように，大域幾何学においても解析学においても不連続群論はリーマン幾何学の場合と大きな違いが生じると考えられる．リーマン多様体とは違って，“自然な距離” が存在しない世界では，研究手法そのものも開発する必要があったが，ここでは，手法の議論には入らず，リーマン多様体の場合と異なる現象のみ 3 つを取り上げてみることにする．

定理 2.1 (Calabi–Markus 現象 [9, 22])**.** ド・ジッター多様体はコンパクトになりえない．

ここで，ローレンツ幾何では正の定曲率空間をド・ジッター多様体，負の定曲率空間を反ド・ジッター多様体という．

定理 2.2 (小林 [31])**.** いくらでも高い次元の既約な対称空間で，剛性をもたない既約格子をもつものが存在する（$\Rightarrow$ 高次元タイヒミュラー空間）．

例 2.3 (Kassel–小林 [19, 48])**.** 3 次元の反ド・ジッター閉多様体の固有値 λ をタイヒミュラー空間上の関数とみなしたとき，定数関数となっているような正の実数 λ が無限個存在する（安定スペクトラムの存在）．

これらはリーマン幾何における以下の古典的な定理と正反対に近い現象である．

定理 2.4 (Myers)**.** 完備で，リッチ曲率が ε (> 0) より大きいリーマン多様体はコンパクトである．

定理 2.2 と対比するために，Selberg–Weil–Mostow–Margulis $\cdots$ と系譜が続く古典的な剛性定理を思い出そう．

定理 2.5. *3 次元以上の既約リーマン対称空間の格子は剛性をもつ．*

逆に 2 次元の局所リーマン対称空間である閉リーマン面の場合には剛性定理が成り立たず，古典的なタイヒミュラー空間論がその変形理論を与える．一方，定理 2.2 では，局所半単純対称空間では，高次元でも非自明不連続群の変形による “タイヒミュラー空間論” が考えられる場合があることを示唆している．

定理 2.6 (Wolpert [81])**.** 閉リーマン面のラプラシアンの固有値 λ をタイヒミュラー空間上の関数とみなすと，$\lambda > \frac{1}{4}$ のとき，それは定数関数ではありえない．

3　コンパクト的なるもの

さて，非コンパクト群の作用の性質を理解するために，まず，コンパクト群（あるいは有限群）の作用の際立った性質をいくつか述べてみよう．

多様体への（非線形な）作用と，ベクトル空間における線型な作用（すなわち，表現）の両方を並べて書くことにする．

$$\text{非線形な作用} \longleftrightarrow \text{線型な作用}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{与えられた作用が等長変換となる}\\ \text{ようなリーマン計量が存在する}\end{array}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{与えられた表現がユニタリ表現}\\ \text{となるような内積が存在する}\end{array}}$$

$$\boxed{\text{固有 (proper) な作用}} \overset{?}{\longleftrightarrow} \boxed{\text{離散分解するユニタリ表現}}$$

注意 3.1. 上段の 2 つの性質はコンパクト群上で平均するという共通の初等的な方法で証明される．一方，下段の対応は，幾何 X 上の性質は，X 上の関数空間に反映されるはずだという philosophical でゆるやかな関係であって，直接の因果関係があるわけではない (cf. Margulis [63], 小林 [32])．

上図における 4 つの性質はいずれもコンパクト群ならば自動的に満たされる性質であるが，非コンパクトな群の場合は，必ずしも成り立たない．しかし，無限次元の群である同相群 Homeo(X) やユニタリ変換のなす群 $U(\mathcal{H})$ の中で，非コンパクトな（有限次元の）リー群があたかもコンパクト部分群のように振る舞うことがある．

以下では G を（非コンパクトな）簡約リー群とし，下段の性質の判定条件を述べよう．

<u>非線形な作用の場合</u>　次の定理は，連結部分群の固有な作用に関する小林 [22] の判定条件を離散部分群の固有不連続な作用に拡張したものである (Benoist [3], 小林 [27])．

定理 3.2 (固有不連続性の判定条件)**.** Γ を G の離散部分群，H を G の閉部分群とするとき，(Γ, G, H) に関する次の *2* つの条件は同値である．

(i) Γ の G/H への作用は固有不連続である．

(ii) カルタン部分代数においてワイル群の作用を法として

$$\mu(\Gamma) \cap \mu(H)_\varepsilon = \text{相対コンパクト} \quad ({}^\forall \varepsilon > 0)$$

ここで，$\mu(\Gamma)$, $\mu(H)$ はそれぞれ Γ, H のカルタン射影であり，$\mu(H)_\varepsilon$ はその管状近傍である．

線型な作用（表現） 次の定理は，分岐則において連続スペクトルが現れないという現象を一般的に捉えようとした結果の 1 つである．

定理 3.3 (ユニタリ表現の離散分解の判定条件 [28]). Π を G の任意の既約ユニタリ表現とし，G' を G の簡約部分群とする．このとき (ii) $\Rightarrow$ (i) が成り立つ．

(i) 制限 $\Pi|_{G'}$ は離散的に分解し，かつ，その重複度は有限である．

(ii) $\mathrm{AS}(\Pi) \cap C(G') = \{0\}$.

ここで，$\mathrm{AS}(\Pi)$ は表現 Π から定まる錐 (柏原–Vergne による K タイプの漸近錐), $C(G')$ は部分群 G' から定まる錐（リー環の構造論 [28]，あるいはシンプレクティック多様体のモーメント写像を用いて定義できる [34, Theorem 6.4.3]）である．

注意 3.4. Π が G の離散系列表現の場合には，定理 3.3 において (i) $\Leftrightarrow$ (ii) が成り立つ [34]．より一般に，代数的な離散分解に関する必要条件は [29] で与えられた．

定理 3.2（トポロジー）と定理 3.3 （ヒルベルト空間の分解）は，証明に用いる手法は大きく異なるが，コンパクト群のようにふるまうという性質を特徴づけるという問題意識において共通性があり，その判定条件にも形式的な類似がある．実は，ユニタリ表現の離散的な分岐則の最初の例 [23] は不定値計量をもつ多様体 X に対し，

$G : X$ の（不定値計量に関する）等長変換群

$G' : G$ の部分群で X に固有に作用する極大なもの

とし，G の既約ユニタリ表現 Π をヒルベルト空間 $L^2(X)$ に実現することによって発見された（この例の幾何的な背景は砂田利一氏の提起したスペクトル幾何の問題とも関連している．詳しい解説は小林–小野 (薫)–砂田 [54] および小林 [39] を参照されたい）．最近,「隠れた対称性における大域解析」という設定の下で，“固有な作用” と “離散分解するユニタリ表現” の密接な関係が証明された（小林 [49]）．

4 より根源的なものを求めて—“既約” の分類と “既約” への分解

表現の分岐則についての最新の結果を説明する前に，リー群の表現論の中で分岐則の問題がどのような位置づけにあるか全体像を考えてみることにする．

リー群 (連続群) は，1870 年代 偏微分方程式の解の変換群として，Sophus Lie (1842-1899) によって生み出された概念である．リー群やその表現論は，現在に至るまで解析，幾何，代数 が幾重にも交わる場となっている．リー群の表現論にどのような数学の諸分野が結びつき，現在までに何が解決し何が未解決なのか？ まずは,「既約なものの分類」と「既約なものへの分解」という観点に沿って，現状を整理してみよう．

4.1 リー群とリー代数

<u>既約な対象</u>: 非自明なイデアルを持たない（$\mathbb{R}$ 上の有限次元）リー代数 $\mathfrak{g}$ は，可換リー環 $\mathbb{R}$ または単純リー代数に限る．$\mathbb{R}$ 上の単純リー代数は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(p,q)$, $\mathfrak{su}^*(2n)$, $\mathfrak{so}^*(2n)$, $\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{sp}(p,q)$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ という古典型の 10 系列と 22 個の例外型に分類される (E. Cartan, 1914)．単純リー代数の分類は，単連結な既約 Riemann 対称空間の分類と同値である．
<u>既約なものへの分解</u>: 任意の有限次元リー代数は 単純リー代数と $\mathbb{R}$ たちの拡大 (extension) によって得られる．但し，低次元の場合を除いてはリー代数の拡大を完全に記述する手段は現状では知られていない（例えば，冪零リー代数は低次元の場合しか分類されていない）．一方，拡大のない場合，すなわち，$\mathbb{R}$ と単純リー代数の直和で表されるとき，そのリー代数を**簡約リー代数**といい，単純リー代数だけの直和で表されるリー代数を**半単純リー代数**という．
<u>リー群</u>: 群と多様体の構造を合わせ持つのがリー群である．リー理論によりリー群の (局所的な) 性質がすべて そのリー代数の性質として記述できる．非自明な連結正規部分群を持たない連結リー群は，$\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$（トーラス）または 単純リー代数に対応したリー群 に限る．$SL(n,\mathbb{R})$, $Sp(n,\mathbb{R})$, $SU(p,q)$, $\cdots$ などがその例である．対応するリー代数が 簡約であるようなリー群を簡約リー群 という．簡約リー群は $\mathbb{R}$ および単純リー群の直積に局所同型である．

4.2 リー群の表現論の基本課題

<u>表現論の中心課題</u>: 数学のそれぞれの分野の対象に，それぞれの対称性があり，そこから群や表現が自然に生じる．その具体的設定を（形式的に）捨象して，作用および群論的性質を研究するのが群の表現論である．しかし（というより当然のことながら），表現論は，表現論独自の手法よりも，何らかの数学の分野の言葉で表現を実現し，その分野の観点と手法を用いて飛躍することも多い．リー群の表現論では，100 年近い歳月に亘って，関数解析，微分方程式，代数幾何，代数解析，微分幾何，複素多様体論，組み合せ論等，様々な数学の分野を取り込み，互いに影響を与えながら発展してきた．また，ひとたび表現論的な結果が得られれば，異質の対象間に新しい結びつきを予知したり，異なる分野に新しい手法を与えたりすることも期待される．

このように，表現論では常に表現論の外部との接触が重要であり，筆者の興味も主にその部分にあるが，それを踏まえた上で表現論内部の中心課題は次の 2 つに大別される：

(1) 既約な表現（の同値類）を分類し，それを理解せよ．

(2) 与えられた表現を既約分解せよ．

(1）には，既約表現の構成，分類のパラメータ（指標やその他種々の不変量）の発見と計算，ユニタリ性の判定などの問題が含まれる．

群 G の既約ユニタリ表現の同値類全体を $\widehat{G}$ と表す．リー群 G の任意のユニタリ表現は既約ユニタリ表現の直積分 (direct integral) に分解される（[77] 参照）．ある場合には既約分解は可算直和で記述される（離散分解可能であるという）．

(2) については，H を G の部分群として以下の典型的な 2 つの場合を考える．[1]

2-a）制限の分解：Π を G の既約ユニタリ表現とする．Π を H の表現に制限すると H の表現としては一般に既約でない．$\mathrm{Rest}_H^G(\Pi) = \Pi|_H$ の既約分解を（表現の）分岐則という．テンソル積表現 $\pi_1 \otimes \pi_2$ の分解も分岐則の特別な場合である．

2-b）誘導表現の分解：$H \subset G$ を部分群，σ を今度は H の既約ユニタリ表現とする．表現の制限の双対的な概念として，誘導表現 $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ が定義される．これは既約とは限らない G の表現である．関数空間やベクトル束の切断の空間，あるいはコホモロジーとして幾何的に実現される G の表現は基本的に誘導表現のタイプである．特に等質空間上の大域解析は σ が自明表現 $\mathbf{1}$ の場合に対応する．

4.3 リー群の表現論の基本課題に関する現状

リー群の既約表現の分類について：群拡大に対する既約ユニタリ表現の構造を解析することにより，一般の代数的なリー群の既約ユニタリ表現の分類は，原理的には単純リー群の既約ユニタリ表現に帰着する．そこで，以下では．単純リー群（あるいは少し一般に簡約リー群）の既約表現を扱おう．

既約有限次元表現の分類： Cartan-Weyl の最高ウェイト理論によって既約有限次元表現の分類が完成した (1925)．すなわち，G の既約有限次元表現 F は Borel 部分代数の 1 次元表現 χ によって分類される．逆に χ から F を構成する方法には，Verma 加群の既約商加群をとる代数的方法や Borel-Weil-Bott による複素多様体上の幾何的構成法などが知られている．

簡約リー群の既約表現の分類：1970 年代から 1980 年代初頭に（位相を類別しない立場での）分類が完成した．大別して次の 3 種類の方法が知られている．

[1] 20 年前に論説でこのように併記したときは，(2-b) が ($\sigma = \mathbf{1}$ の場合), Harish-Chandra, Gelfand, 大島利雄 [67]，Delorme [12] 等によって，大きく進展していたのに比し，(2-a) (分岐則) は一般理論が未発達であった．

(1) 行列要素の漸近挙動に注目した Langlands による解析的な手法と Knapp-Zuckerman による R 群を用いた緩増加表現の記述に基づく分類,

(2) Vogan の minimal K-type 理論と Zuckerman の導来函手加群（Borel-Weil-Bott 理論の一般化）およびリー代数のコホモロジー（最高ウェイトの一般化）を用いる代数的な分類,

(3) Beilinson-Bernstein, Brylinski-柏原による旗多様体上の $\mathcal{D}$-加群の理論と $K_{\mathbb{C}}$-軌道の幾何に基づく分類.

注意 4.1. 分岐則の立場から見ると，Cartan–Weyl の最高ウェイト理論，Vogan の $(\mathfrak{g}, K)$-加群の分類理論では，それぞれ極大トーラス，極大コンパクト部分群への制限が離散分解可能であり，その分岐則の（ある半順序に関する）“端” が分類の不変量として大事な役割を果たしている [34].

簡約リー群の既約ユニタリ表現の分類：既約表現（分類済み）の中でユニタリ内積を持つものは，まだ完全には決定されていない.

V. Bargmann による $SL(2, \mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の分類 (1947 Ann. Math.) 以来，Gel'fand–Naimark, Vakhutinski，土川眞夫，平井武，Dixmier, Thieleker, Kraljevic, Silva, Duflo, Speh, Barbasch, Vogan 等による個々の場合の分類結果があるが，Bargmann の論文から約 70 年経過した 2016 年現在においても，簡約リー群の既約ユニタリ表現は，まだ十分に理解されたとは言い難い．分類が完成した単純リー群は，実ランク 1 すべてと若干の低ランクの単純リー群の他，$SL(n, \mathbb{R})$, $SU^*(2m)$, $SL(n, \mathbb{C})$, $SO(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$ などである．逆に，古典型の単純リー群でも $SO(p, q)$ などの既約ユニタリ表現の分類は p, q が一般の場合は未完成である.

5 最小単位 — 軌道法と幾何学的量子化

リー群の既約表現，あるいは既約ユニタリ表現はどのくらいあるのだろうか．その全貌を “近似的に” 把握する便利な考え方 [2] として，軌道法に触れよう.

リー群 G はそのリー環 $\mathfrak{g}$ に随伴表現 $\mathrm{Ad} : G \to GL_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ を通じて作用する．ベクトル空間としての $\mathfrak{g}$ の双対を $\mathfrak{g}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ と表記すると，随伴表現の反傾表現として，余随伴表現

$$\mathrm{Ad}^* : G \to GL_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^*)$$

が定義される.

[2]「軌道法は近似的に成り立つ」という言葉遣いは軌道法の創始者達の意図とは異なるかも知れないが，簡約リー群の軌道法を論じた [25] で用いた.

さて，G のユニタリ双対

$$\widehat{G} := G \text{ の既約ユニタリ表現の全体}$$

は，例えば $G = SL(n, \mathbb{R})$ ならば，互いに同値でない連続無限濃度の無限次元既約ユニタリ表現（の同値類）からなる集合に 1 個の有限次元表現（自明な 1 次元表現）を付け加えた集合である．この "巨大な" 対象がたった 1 つの有限次元表現である余随伴表現 $(\mathrm{Ad}^*, \mathfrak{g}^*)$ によって統制されるというのが Kirillov–Kostant–Duflo による「軌道法」の考え方である．理想的には，次のような全単射写像を期待するのである:

$$\begin{array}{lll} (5.1) \qquad & \mathfrak{g}^*/\sim \mathrm{Ad}^*(G) & \doteqdot \widehat{G} \\ & \text{余随伴軌道の空間} & G \text{ の既約ユニタリ表現の同値類全体.} \end{array}$$

実際，G が冪零リー群の場合は $\mathfrak{g}^*/\sim \mathrm{Ad}^*(G)$ と $\widehat{G}$ の間に自然な全単射が存在し (Kirillov, 1962)，さらにこの全単射は $\widehat{G}$ に Fell 位相を入れたとき商空間 $\mathfrak{g}^*/\sim \mathrm{Ad}^*(G)$ と同相になる.（指数型の可解リー群への拡張は藤原英徳 [14] を参照されたい.）また，G がコンパクトリー群ならば，(5.1) の左辺の部分集合としてある種の整数条件を課した余随伴軌道のなす集合と $\widehat{G}$ に全単射写像がある.

一方，G が非コンパクトな簡約リー群の場合は何らかの自然性をもたせた形で対応 (5.1) が全単射になることは期待できないが，(5.1) の両辺のかなり大きな部分集合に対しては自然な対応を与えることができる．たとえば，$M(n, \mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$ 上の Jordan 標準形と $GL_n(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現が近似的に対応しているというわけである.

対応 (5.1) をシンプレクティック多様体の幾何的量子化の立場から解釈してみよう.

$$\text{古典力学} \rightsquigarrow \text{量子力学}$$

に倣って

$$\text{シンプレクティック多様体 } M \rightsquigarrow \text{ヒルベルト空間 } \mathcal{H}$$
$$M \text{ におけるシンプレクティックな変換} \rightsquigarrow G \text{ の } \mathcal{H} \text{ 上のユニタリ作用素}$$

という対応を幾何学的量子化 (geometric quantization) と呼ぶことにする．この対応がある設定の下で，自然に定義できるとすると，

$$\text{群 } G \text{ の } M \text{ へのシンプレクティックな作用} \rightsquigarrow \text{群 } G \text{ の } \mathcal{H} \text{ 上のユニタリ表現}$$
$$M \text{ への作用が推移的} \rightsquigarrow \mathcal{H} \text{ 上の表現は既約} \qquad (5.2)$$

という図式が成り立つと想定される．

さて，余随伴軌道 $\mathcal{O}_\lambda = \mathrm{Ad}^*(G)\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{g}^*)$ には Kirillov–Kostant–Soureau によるシンプレクティック構造が入り，群 G は $\mathcal{O}_\lambda$ にシンプレクティックに作用する．この作用は明らかに推移的である．従って (5.2) が成り立つとする．軌道法 (5.1) の左辺から右辺への対応が得られることになる．

例えば，n 次の実正方行列で ($GL_n(\mathbb{R})$ に関して) 互いに共役であるもの全体は偶数次元の多様体になり，自然なシンプレクティック構造をもつ．ある場合には実偏極，また別の場合には複素偏極，あるいはその中間的な偏極に対応した幾何学的量子化を用いて $GL_n(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の多くが得られる，というのが，幾何学的量子化からみた軌道法の対応である．半単純軌道[3]の幾何学的量子化については 20 年程前に，その当時の最先端の結果を論説 [25] にまとめたので，参照されたい．その後，簡約リー群における分岐則の進展を投影するような形で，軌道法に関連したいくつかの新しい結果が生まれている（小林–Nasrin [53] 他, Duflo–Vargas [13]）．また，冪零軌道の幾何的量子化や，対応するユニタリ表現の大域解析については，筆者自身も携わって，過去 20 年間に新しい動きがあった [5, 46, 51] が，これについては，独立した形の解説を別の機会に譲りたい．

6　非可換調和解析の構想

非コンパクトな多様体 X 上の大域解析を行うためには，X の無限遠における何らかの「統制」が必要であると考えられる．その「統制」はリーマン多様体上の大域解析の場合ならば，例えば曲率による条件を与えるのが 1 つの考え方であろう．一方，リー群 G が作用している場合は，無限遠における「統制」として G が X に推移的に作用する (すなわち X が G の等質空間) という仮定[4]が 1 つの候補であろう．しかし，ここで指摘したいポイントは，大域解析を行うに当たって，群が推移的に作用しているという仮定はそれほど強いものではなく，固定部分群の “サイズ” によって，その大域解析に顕著な濃淡がある，ということである．まず，次の問題を考えてみよう．

問題 6.1. リー群 G が X に推移的に作用しているという仮定の下で，X の関数空間は G の表現論によって掌握できるのであろうか？

この漠然とした問題を数学的に定式化するために,「原理的に，制御しきれない」という状況はどのようなものかを表現論の立場で考えてみることにしよう．

[3]簡約線型群のリー環の余随伴軌道の場合，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視すると，各元が複素数体上で対角化できることに対応する．

[4]群が推移的に作用せず，連続無限個の軌道をもつときでも，微分方程式と合わせるとその大域解析に十分「統制」ができる設定を見出しうる．可視的作用の理論 [35, 43] はその最初の例である．

群が多様体 X に作用しているときは，X 上の関数空間 $\Gamma(X)$ ($\Gamma = C^\infty$, L^2, $\mathcal{D}'$, $\cdots$) には，群 G の元 g が関数の引き戻し

$$f(\cdot) \mapsto f(g^{-1}\cdot)$$

によって，線型に作用する．そこで，X 上の大域解析において群 G の表現論が何らかの形で寄与することが期待される．これが非可換調和解析の考え方である．

ところで，ベクトル空間 V に，自明に作用する群 G は V を理解する手がかりを与えない．一方，ある可逆な線型変換 $A \in \mathrm{End}(V)$ の固有値がすべて異なるとき，G を A が生成する巡回群とすると，表現 V の既約分解は，作用素 A の固有空間分解と同等であり，G の表現論はベクトル空間 V （と作用素 A）の理解に直結する．2 つの初等的な観察における著しい差異は，表現論的には，

異なる既約表現を区別することはできるが，
同じ既約表現が重複して現れる部分はそれを区別できない，

ということに由来する．

このことに留意して，問題 6.1 を以下のように再定式化してみよう．

問題 6.2. X をリー群 G が推移的に作用している多様体とする．このとき，以下の条件 (1) あるいは (2) をみたすような (G, X) に関する必要十分条件をそれぞれ求めよ．

(1) (有限重複度) G の任意の既約表現 π に対して

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(X)) < \infty.$$

(2) (一様有界な重複度) ある定数 $C > 0$ が存在して G の任意の既約表現 π に対して

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(X)) \leq C.$$

条件 (2) の方が (1) より強い，すなわち，群 G が X 上の大域解析をよりよく制御できていると考えられる．なお，(2) において $C = 1$ の場合は $C^\infty(X)$ は無重複な表現であり，より理想的といえるが，ここでは深入りしない．

G が簡約リー群の場合は上記の問題は小林–大島利雄 [57] により以下のように完全に解決された．H を簡約な代数的部分群とし，$X = G/H$ とおく．

定理 6.3 (重複度の有限性の判定条件)**.** *簡約リー群の組* (G, H) *に対して，次の* 2 *条件は同値である．*

(i) (表現論的条件) $C^\infty(X)$ *に含まれる* G *の任意の既約表現の重複度は有限である．*

(ii) (幾何的条件) X は *real spherical* である．すなわち，G の極小放物型部分群 P は X に開軌道をもつ．

定理 6.4 (重複度一様有界性の判定条件)**.** (G,H) に関する次の *2* 条件は同値である．

(i) (表現論的条件) $C^\infty(X)$ に含まれる G の任意の既約表現の重複度は一様有界である．

(ii) (複素幾何的条件) X の複素化 $X_{\mathbb{C}}$ は *spherical* である．すなわち，$G_{\mathbb{C}}$ の *Borel* 部分群は $X_{\mathbb{C}}$ に開軌道をもつ．

注意 6.5. 上記の 2 定理は，関数のクラスを C^∞ から $\mathcal{D}'$（超関数）に広げても成り立つ．また部分群 H が簡約であるという仮定を外しても（少し定式化を変えることで）両定理が成り立つように拡張できる [57].

注意 6.6. 定理 6.4 では,「一様有界性」という性質が，驚くべきことに実形によらず複素化のみに依存するということを主張している．この発見は，同種の定理が p 進体のような局所体上の簡約代数群に対しても成り立つのではないかという予想を導く．この方向では，Sakellaridis–Venkatesh の最近の仕事 (preprint) がある．

<u>球多様体の分類理論</u> 上記の判定条件において，具体的にはどのような (G,X) が定理 6.3 あるいは定理 6.4 の幾何的な条件 (ii) をみたすかについて，分類の現状を述べよう．まず，

$$X=G/H \text{ が対称空間} \Rightarrow X_{\mathbb{C}} \text{ は spherical} \Rightarrow X \text{ は real spherical}$$

が成り立つ（Wolf, 小林–大島 [57]）．簡約対称空間は無限小レベルで Berger [6] が分類した．定理 6.4 に現れた，spherical な $G_{\mathbb{C}}$ 空間 $X_{\mathbb{C}}$ の分類については，Krämer [62], Brion [8], Mikityuk [65] の結果がある．より広い “real spherical” の分類については

- triple space $(G\times G\times G)/\operatorname{diag} G$ の場合（小林 [26]; 例 8.5 参照），
- 対称対 (G,H) に関する分岐則で用いる $(G\times H, \operatorname{diag} H)$ の場合 (小林–松木 [52]),
- G が実 rank 1 の場合 (Kimelfeld)

に知られている．

これらの分類から，定理 6.3 や定理 6.4 の枠組には，従来より詳しく研究されてきた下記の対象に加え，これまで未発達の新しい対象も含まれている．

- 群多様体 (Plancherel 型定理，Harish-Chandra 1976),

- 半単純対称空間 (Plancherel 型定理等，大島利雄 [67]，Delorme [12])，
- Whittaker 模型 (Kostant–Lynch, 松本久義他)，
- Gross–Prasad 予想 [15].

球多様体でない場合の解析: 定理 6.3 や定理 6.4 の枠組にあてはまらない場合でも，正則表現 $L^2(X)$ を "粗い立場" で解析することはできないだろうか？その 1 つの試みを述べよう．まず，$X_{\mathbb{C}}$ が球多様体でないと，X 上の G 不変な微分作用素環が可換環とならないことに注意する．従って，X 上の関数を不変微分作用素で同時固有関数展開するという従来の手法が使えないので，手法自身を新たに開発する必要がある．今，

問題 6.7. 正則ユニタリ表現 $L^2(X)$ が緩増加表現となるための，簡約リー群の組 (G, H) に関する必要十分条件を決定せよ．

という基本問題を考えてみよう．これは Plancherel 型定理に較べて "粗い" 問題のように見えるが，Plancherel 型定理がある意味で証明されている ([12]) 半単純対称空間 $X = G/H$ の場合にも（特異なパラメータの）離散系列表現の消滅に関する複雑な条件が障害となって，問題 6.7 は完全には解決していなかった．しかし，全く新しいアプローチとして幾何学的群論の発想を用いることによって，簡約リー群の組 (G, H) に一切の仮定を置くことなしに，最近，問題 6.7 が完全に解決した (Benoist–小林 [4]).

7　分岐則の研究のプログラム

簡約リー群の分岐則は，その潜在的な重要性にも関わらず，特別な事例研究を除いて，1990 年頃まで，本格的な研究が行われていなかった．その主因は，例えば，$SL(3, \mathbb{R})$ の 2 つの (generic な) 既約表現のテンソル積の分解には連続スペクトルが重複度無限で現れるというように，悪い現象が現れ，その先に何があるのか見通せなかったことにあったと思われる．筆者は 1980 年代の後半，非リーマン多様体における不連続群の理論という別の分野の研究をしている中で，離散スペクトルのみが無重複で現れるという「良い分岐則」をたまたま発見した．これはこれまでには見つかっていなかったタイプの良い分岐則であり，混然としていた分岐則の問題の突破口として，スペクトルの離散性や重複度に焦点をあててその後の構想を描いた．次のような 3 つの段階に分けてそれを説明しよう．ステージ A, B, C の役割は §10.1, §10.2 の初等的な例で解説する．詳細は [47] も参照されたい．

ステージ A: 表現の制限における一般理論 (abstract feature of restriction)
ステージ B: 分岐則の決定 (branching law)
ステージ C: 対称性破れ作用素の構成 (construction of symmetry breaking operator)

8　分岐則：ステージ A

ステージ A は，漠とした分岐則の問題の中から，分岐則の理論の深化する方向の見通しを与え，ステージ B や C の設定を自然に抽出する役割をも担う．例えば以下のような性質がどのような条件の下で起こりうるかについての，一般理論を構築するのがステージ A である．

- (連続スペクトルの有無) ユニタリ表現の制限を既約分解したとき，その分岐則において連続スペクトルが現れるか？あるいは離散的に分解するか？
- （重複度）小さな群 G' の既約表現 π が大きな群 G の既約表現 Π に現れる回数（重複度）は有限か？より理想的な状況として，いつ重複度は一様有界となるか？もっとも理想的な状況として，どのようなときに無重複定理が成り立つか？
- （分岐則の台）分岐則に現れる既約表現についての性質．

8.1　離散的分岐則

まず，分岐則に連続スペクトルが存在するかどうかを考えてみよう．

分岐則に連続スペクトルが存在する場合は，その精密な研究には解析的な手法が自然に中心的な役割を果たすであろう．一方，分岐則が離散的な場合は，純代数的・組合せ論の手法だけでも分岐則の問題に切り込めると期待される．

最高ウェイト加群という（無限次元であっても）“半ば有限次元的な” 表現の場合には，ある種の部分群への制限が離散的になることは容易に分かり，実際，古くより認識されていた（例 8.2 参照）．一方，最高ウェイトをもたない “真に無限次元的な” 表現を非コンパクトな部分群に制限しても離散的に分解することは起り得ないだろうというのが，長い間の専門家の “常識” であったようである．しかし，実はこのような例が存在することが不連続群の研究の中で発見された (1988)．そこで，これは極めて特別な現象か?，あるいはランクが高いリー群に対しても起こりうる現象か？という疑問が浮かぶ．1990 年代の離散分岐則の 3 部作 [24, 28, 29] はそれに答えたものである．ここでは厳密さは犠牲にして，定理 3.3 と注意 3.4 を標語的に述べると，

定理 8.1. π を G の既約ユニタリ表現，G' を G の簡約部分群とする．制限 $\pi|_{G'}$ が離散的に分解するかどうかは，表現 π のある *“不変量”* と部分群 G' のある *“不変量”* が *“別の方向”* を向いているかどうかで決定される．

正確な定式化は原論文 [28, 29], あるいは講義録 [34] を参照されたい．定理 8.1 の初等的な例を 1 つ述べよう．

例 8.2 ([28]). Π を G のユニタリ最高ウェイト表現とし，(G, G') が正則型ならば，制限 $\Pi|_{G'}$ は離散的に分解する．

上記の用語を説明しておこう．G がエルミート型，すなわち G を極大コンパクト部分群 K で割った商空間 $X = G/K$ がエルミート対称空間（特に複素多様体）の構造をもつときのみ，最高ウェイトをもつ無限次元の既約ユニタリ表現 Π が存在する．さらに Π は，K の適当な有限次元既約表現 (τ, W) を選ぶと，X 上の G 同変ベクトル束 $\mathcal{W} := G \times_K (\tau, W)$ の正則切断の空間 $\mathcal{O}(X, \mathcal{W})$ に実現される．いま，G' を G の簡約部分群とする．$K' := G' \cap K$ が G' の極大コンパクト部分群と仮定しても一般性を失わない．G' もエルミート型であって，自然な埋め込み $G'/K' \hookrightarrow G/K$ が正則 (holomorphic) であるとき，(G, G') を正則型という．

<u>離散的に分解する分岐則の分類理論</u>: 定理 8.1 の不変量を計算することによって，(G, G') が簡約対称対のとき大島芳樹君との論文で次の分類理論が完成した．

- Π が楕円軌道の幾何的量子化 ($\Leftrightarrow$ Π_K が Zuckerman 導来函手加群）の場合 [58],
- Π が極小冪零軌道の幾何的量子化 ($\Leftrightarrow$ Π が極小表現）の場合 [59],
- 2 つの表現のテンソル積 $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ の場合 [59].

8.2　重複度

次に分岐則の重複度に着目してみよう．表現の既約分解において同じ既約表現が何度現れるかを重複度という．重複度が 1 のときは最も理想的な状況であり既約分解が自然な意味をもつ．

一方，その正反対で重複度が無限となるときは，表現論的にはその空間を制御しているとは言い難い．そこで，分岐則の問題においても

$$\text{重複度が無限} \supset \text{重複度が有限} \supset \text{重複度が一様有界} \supset \text{無重複}$$

となる順に群論 (あるいは表現論) が空間を強く制御し，それに応じて精密な解析ができると期待される．

分岐則に現れる重複度が有限になることが常に保証されるような設定を特徴付けるのが次の定理である（[26, 45, 57]）．

定理 8.3 (分岐則の重複度). 簡約リー群の組 (G, G') に関する次の *2* 条件は同値である．

(i) (重複度の有限性) G の任意の既約表現 Π と G' の任意の既約表現 π に対して

$$\dim \mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi) < \infty.$$

(ii) (幾何的条件) G, G' の極小放物型部分群をそれぞれ P, P' とすると，P' は実旗多様体 G/P に開軌道をもつ．

例 8.4. G' が G の極大コンパクト部分群 K のとき，ガウス–岩澤分解 $G = KP$ より，定理 8.3 (ii) の条件が成り立つ．一方，定理 8.1 (i) の条件は既約表現が認容表現 (admissible representation) となるための条件に相当する．

例 8.5 (小林 [26, 45])**.** G を単純リー群とするとき，次の 4 つの条件は同値である．

(i) (三重線型形式) G の任意の 3 つの既約認容表現 π_1, π_2, π_3 に対して，G 不変かつ連続な三重線型形式の空間 $\mathrm{Hom}_G(\pi_1 \widehat{\otimes} \pi_2 \widehat{\otimes} \pi_3, \mathbb{C})$ は有限次元である．

(ii) (テンソル積表現) G の任意の 3 つの既約認容表現 π_1, π_2, π_3 に対して

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi_1 \widehat{\otimes} \pi_2, \pi_3) < \infty.$$

(iii) (幾何的条件) $(G \times G \times G)/\operatorname{diag}(G)$ は real spherical.

(iv) (分類) $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{o}(n, 1)$ $(n \geq 2)$ または G はコンパクト．

例 8.5 から，G 不変な三重線型形式を精密に研究するという深化（ステージ C）は $G = O(n, 1)$ の場合に期待できる．実際，この方向の解析に関して，近年，

$n = 2$ の場合	Bernstein–Reznikov [7],
n: 一般の場合	Clerc–小林–Ørsted–Pevzner [10]

などの研究がある．

分岐則における重複度が単に「有限」であるというだけではなく,「一様有界性」まで課した場合には，次の特徴づけが成り立つ．

定理 8.6 ([26, 57])**.** 簡約リー群の組 (G, G') に関する次の *2* 条件は同値である．

(i) (表現論的条件) ある定数 $C > 0$ が存在し，G の任意の既約表現 Π と G' の任意の既約表現 π に対して，$\dim \mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi) \leq C$ が成り立つ．

(ii) (複素幾何的条件) $G_{\mathbb{C}}$, $G'_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群をそれぞれ B, B' とすると，B' は旗多様体 $G_{\mathbb{C}}/B$ に開軌道をもつ．

注意 8.7. G 空間上の正則表現における重複度の一様有界性定理（定理 6.4）と同様に，定理 8.6 は分岐則における一様有界性が実形によらず，複素化のみによることを主張している．これはまた，同種の結果が他の局所体上の簡約代数群で成り立つことを示唆しているが，実際，非アルキメデス的局所体上で (ii) $\Rightarrow$ (i) $(C = 1)$ が Aizenbud, Gourevitch, Rallis, Schiffmann [2] によって証明されている．また，実簡約リー群の場合にも $(G, G') = (GL_n(\mathbb{R}), GL_{n-1}(\mathbb{R}))$, $(O(p,q), O(p-1,q))$ などのとき，定理 8.6 (i) における定数 C を 1 にとることができる ([1], Sun–Zhu [75])．

分岐則が有限重複度をもつ簡約リー群の組の分類理論 : (1) 定理 8.6 (ii) の条件をみたす $(G_{\mathbb{C}}, G'_{\mathbb{C}})$ の組は 1970 年代に分類された (Kostant, Krämer)．このことより定理 8.6 (i) を満たす簡約リー群の組は，$(GL_n(\mathbb{C}), GL_{n-1}(\mathbb{C}))$, $(SO_n(\mathbb{C}), SO_{n-1}(\mathbb{C}))$, および $(GL_n(\mathbb{R}), GL_{n-1}(\mathbb{R}))$ や $(SO(p,q), SO(p-1,q))$ など, これらの実形，あるいはこれらと可換リー群の直積と局所同型な場合に限ることが分かる．
(2) 定理 8.3 を満たす対称対 (G, G') は 2013 年に分類が完成した (小林–松木敏彦 [52])．

8.3 可視的作用と無重複性

定理 8.3 や 定理 8.6 は G の すべての 既約表現 Π と部分群 G' の すべての 既約表現 π に関して成り立つ結果であるが，次のステップとして 個別の 既約表現に関して，分岐則の重複度を評価することを考えてみよう．例えば，既述の定理 3.3 は重複度に関する有限性の十分条件も与えている．より強く無重複性を与える 1 つの原理を以下に述べる．

リー群 G が複素多様体 X に双正則的に作用しているとする．

定義 8.8 ([33])**.** 複素多様体 X 上の反正則な微分同相写像 σ および X の実部分多様体 S (スライス) が存在して，

$$\sigma|_S = \mathrm{id} \quad \text{かつ} \quad G \cdot S = X$$

をみたすとき G は X に強可視的 (strongly visible) に作用するという．

注意 8.9. 記述を簡単にするため，定義 8.8 では [33] の強可視性の定義より少し強いものを採用した．またスライス S は定理 8.10 における表現 Π の既約分解のパラメータと近似的に “双対” であると考えられる．

強可視性は表現の無重複性に関して，単純なもの（例えば 1 次元表現）から複雑な無重複表現（既約分解が連続パラメータを含む）を生み出す “からくり” を与える．大まかに，その定式化を述べてみよう．

定理 8.10 (無重複の伝播定理)**.** 群 G が複素多様体 X 上の正則ベクトル束に作用し，底空間 X への作用が強可視的と仮定する．このとき，ファイバーにおける等方部分群の無重複性は，正則切断の空間におけるユニタリ表現 Π の無重複性に伝播する．

定理 8.10 の正確な記述は [43] を参照されたい．応用例を 2 つ述べよう．

例 8.11. (G, G') を対称対，Π を G のスカラー型の正則離散系列表現とする．G' はエルミート対称空間 G/K に強可視的に作用する [37] ので，定理 8.10 から，制限 $\Pi|_{G'}$ の既約分解は無重複であることがわかる．

注意 8.12. (1) (G, G') が正則型（例 8.2 参照），あるいは正則型でないという条件に対応して，例 8.11 における表現の制限 $\Pi|_{G'}$ は，既約分解は離散的か，連続スペクトラムのみで分解し，スペクトルが混合して現れることはない．その完全な分類も知られている（小林 [30] 参照）．

(2) 例 8.11 において，「スカラー型」という条件を簡単な有限次元表現の言葉を用いて緩めることができる（小林 [35]）．(G, G') が正則型の場合には，その逆も成り立つ（北川 [20]）．

例 8.13. 「GL_n の 2 つの既約有限次元表現のテンソル積がいつ無重複に分解するか？」という問題に対し，その完全なリストを組合せ論的に（Stembridge [74]）あるいは幾何学的に（小林 [33]）与えることができる．

他の古典型の群の無重複テンソル積表現の分類に関しても，可視的作用の理論を用いた幾何学的解釈がある (田中雄一郎 [76])．

可視的作用の分類理論: リーマン多様体に関しては Bott–Samelson にさかのぼる極作用 (polar action), シンプレクティック多様体に関しては Guillemin–Sternberg, Huckleberry–Wurzbacher による coisotropic な作用という概念があり，これらはケーラー多様体においては複素多様体における（強）可視的な作用 (visible action) と，かなり近いことがわかる ([35, Theorems 7, 8])．コンパクトリー群の極作用の分類は長い年月に亘って行われている．一方，可視的な作用の分類理論は最近 10 年間，小林 [37, 38]，笹木集夢 [71] 他，田中 [76] によって，かなり進展してきた．

9 分岐則：ステージ B

ステージ A によるアプリオリ評価を指針とすることによって，ステージ B では表現の制限の既約分解を求めることを目指す．いくつかの典型例を述べよう．

無重複表現 表現が無重複であるときは，分岐則の明示公式や，さらにそれに立脚した解析的研究を行うのに，最も適していると考えられる．実際，表現がその背後にあることを普段は意識さえしない古典的な展開定理にも，実は無重複表現が潜んでいることがしばしばある．“無重複性” が展開定理の “自然さ” の代数的な裏づけとなるのである．

例えば，フーリエ級数，フーリエ展開，テイラー展開，球調和関数展開，Gelfand–Zetlin 基底による展開などは，無重複表現による既約分解（ステージ B と C）とみなせる．

ここでは，無重複な分岐則に関してステージ A $\Rightarrow$ ステージ B の例を一つあげる．例 8.11 において，(G, G') が正則型のときは，分岐則が離散的かつ無重複であることが一般理論から保証されている（ステージ A）．この場合の分岐則の明示公式（ステージ B）を述べよう．そのために，いくつかの記号を準備する．

σ を G の包合的自己同型とし，G' を G^σ の単位元を含む連結成分とする．σ と可換な G の Cartan 包合 θ とし，θ に対応する G の極大コンパクト部分群を K とすると，G/K はエルミート対称空間となるので，G のリー環の複素化 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$ と分解され，$\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{p}_+^\sigma + \mathfrak{p}_+^{-\sigma}$ が成り立つ．$\mathfrak{j}^\sigma$ を $\mathfrak{k}^\sigma$ の Cartan 部分代数とし，それを $\mathfrak{k}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{j}$ に拡張する．$\mathfrak{g}^{\sigma\theta}$ を単純リー環 $\mathfrak{g}^{(i)}$ たちと可換リー環 $\mathfrak{g}^{(0)}$ に直和分解し，各 i $(\neq 0)$ に対し，$\{\nu_1^{(i)}, \cdots, \nu_{k_i}^{(i)}\}$ を $\Delta(\mathfrak{p}_+ \cap \mathfrak{g}^{(i)}) (\subset (\mathfrak{j}^\sigma)^*)$ の strongly orthogonal root とし，$\Lambda_i := \{(a_j^{(i)})_{1 \le j \le k_i} \in \mathbb{N}^{k_i} : a_1^{(i)} \ge \cdots \ge a_{k_i}^{(i)} \ge 0\}$ とおく．

G の正則離散系列表現 Π の最小 K タイプの最高ウェイトが $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ であるとき，Π を $\Pi^G(\lambda)$ と表記する．同様に $\pi^{G'}(\mu) \in \widehat{G'}$ を $\mu \in (\mathfrak{j}^\sigma)^*$ に対して定義する．

定理 9.1 (小林 [35]). $\Pi^G(\lambda)$ を G の任意のスカラー型正則離散系列表現とし，(G, G') を正則型の対称対とすると，以下の無重複分解が成り立つ．

$$\Pi^G(\lambda)|_{G'} \simeq \bigoplus_i \sum_{(a_j^{(i)}) \in \Lambda_i}{}^{\oplus} \pi^{G'}(\lambda|_{\mathfrak{j}^\sigma} + \sum_i \sum_{j=1}^{k_i} a_j^{(i)} \nu_j^{(i)}). \tag{9.1}$$

注意 9.2. G' がコンパクト群 K の場合は，右辺の既約成分はすべて有限次元表現となる．公式 (9.1) は，Hua (古典型の場合), Kostant(未発表), Schmid [72] による $\pi^G(\lambda)|_K$ の分岐則を特別な場合（$G' = K$ の場合）として含む．

一方，(G, G') が反正則型の場合は，制限 $\Pi|_{G'}$ の分岐則は連続スペクトラムを含む無重複表現となる．Vershik–Gelfand–Graev による $SL_2(\mathbb{R})$ の “canonical 表現” はこの立場から解釈し，一般化することもできる．これに関しては van Dijk 等の研究がある ([35]，および，そこに挙げた文献を参照されたい).

<u>離散的分岐則</u> Π が最高ウェイトをもつとは限らない，より一般の設定として楕円軌道の幾何的量子化，すなわち，その $(\mathfrak{g}, K)$ 加群が Zuckerman の導来函手加群 $A_\mathfrak{q}(\lambda)$ を

考えよう．この場合の分岐則の最初の非自明な明示公式は (G, G') が下記の隣接する組

$$\begin{array}{ccc} O(4p,4q) & \supset & O(4k)\times O(4p-4k,4q) \\ \cup & & \cup \\ U(2p,2q) & \supset & U(2k)\times U(2p-2k,2q) \\ \cup & & \cup \\ Sp(p,q) & \supset & Sp(k)\times Sp(p-k,q) \end{array}$$

に対して [23, 24] で与えられた．

定理 8.1 で述べた離散分岐則の枠組が確立されたことによって，新しくかつ広範囲な状況の下で，無限次元の既約表現を非コンパクトな部分群に制限したときの分岐則の公式が種々の方法で具体的に決定されてきた．小林 [23, 24, 36, 49]，Gross–Wallach [16], Loke, J.-S. Li, Huang–Pandžić–Savin, Ørsted–Speh [66], Duflo–Vargas [13], 関口（英）[73]，大島（芳）[68], Möllers や講義録 [34] を参照されたい．

注意 9.3. 制限 $\Pi|_{G'}$ が G' の表現として既約（あるいは，やや弱く，有限長）である場合も稀に起こりうる．詳細は，小林 [40, Section 3] を参照されたい．

一様有界な重複度をもつ場合　Π や π がユニタリ表現とは限らない場合でも，分岐則の問題を $\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ を理解する問題として捉えることができる (一例を §10.3 で述べる).

10　分岐則：ステージ C

ステージ C ではさらに一歩踏み込み，単に表現を分解するだけではなく，どのように分解するか（ベクトルの分解）までを視野に入れる．とりわけ，Π と π を幾何的に実現して Π から π への写像 (symmetry breaking operator) を求めることを目指す．その意義を明示するために，簡単な例から始める．

10.1　$\mathbb{R}$ の正則表現とフーリエ変換

フーリエ変換

$$\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \qquad (\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \tag{10.1}$$

はユニタリ写像であり（プランシュレルの定理），さらに，次の関係式

$$\mathcal{F}(\pi(x)f)(\xi) = e^{it\xi}(\mathcal{F}f)(\xi)$$

をみたす．群の表現論の観点からは，実数のなすアーベル群 $\mathbb{R}$ は $L^2(\mathbb{R})$ に正則表現

$$f(\cdot) \mapsto f(\cdot - t)$$

によって作用し,「フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}$ の正則表現 $L^2(\mathbb{R})$ の既約分解を具体的に与えるユニタリ作用素である」と解釈できる．フーリエ変換のこの群論的解釈は，20 世紀の初頭になされ，以降，非可換調和解析の一つの指導的原理となっている．

さらに，$L^2(\mathbb{R})$ の Plancherel の定理は，$SL_2(\mathbb{R})$ の主系列ユニタリ表現を極大ユニポテント群 ($\simeq \mathbb{R}$) に制限したときの分岐則とみなすこともできる [34, Prop. 3.3.2]．ステージ A, B, C の役割をフーリエ変換の場合に書いてみよう．

ステージ A. 正則表現 $L^2(\mathbb{R})$ は連続スペクトルのみで無重複に既約分解される．

ステージ B. ある測度があって，正則表現 $L^2(\mathbb{R})$ は 1 次元ヒルベルト空間 $\mathbb{C}e^{ix\xi}$ の直積分として分解される．

ステージ C. $L^2(\mathbb{R})$ の既約分解はユニタリ作用素 (10.1) によって実現される．

フーリエ変換の場合はステージ A と B を飛び越して，ステージ C が先に分かっていたので無駄なことを書いているように見えるが，非可換な群の無限次元表現ではその差異が大きくなる．これを以下で観察しよう．

10.2 $SL_2(\mathbb{R})$ のテンソル積表現

分岐則のステージ A–C を例示するために，$G = SL_2(\mathbb{R})$ の 2 つの正則離散系列表現 $\pi_{\lambda'}$ と $\pi_{\lambda''}$ のテンソル積表現 $\pi_{\lambda'}\widehat{\otimes}\pi_{\lambda''}$ を考えよう．これは $G \times G \supset \operatorname{diag} G$ に関する分岐則と考えることができる．

- ステージ A では，分岐則の “様相” をアプリオリに評価する (定理 8.1, 定理 8.10)：

$$\pi_{\lambda'}\widehat{\otimes}\pi_{\lambda''} \text{ は離散的かつ無重複に分解する．}$$

- ステージ B では，具体的な分岐則を求める (Repka [70])：

$$\pi_{\lambda'}\widehat{\otimes}\pi_{\lambda''} \simeq \sum_{a\in\mathbb{N}}{}^{\oplus} \pi_{\lambda'+\lambda''+2a} \tag{10.2}$$

- ステージ C では，例えば，分岐則の直和成分への写像 (SBO = symmetry breaking operators) を明示的に記述することを考える．このためには π_λ の幾何的実現が必要である．上半平面 $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ 上の正則関数のなす空間 $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ の元 $f(z)$ に対し，$g \in SL_2(\mathbb{R})$ を

$$(\pi_\lambda(g)f)(z) := (cz+d)^{-\lambda} f(\frac{az+b}{cz+d}) \quad \text{for } g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

として作用させる．この作用と表現空間を合わせて$\mathcal{O}(\mathcal{H})_\lambda$ と略記する．$\mathbb{N} \ni \lambda \geq 2$ のとき，$\mathcal{H}$ 上の測度 $d\mu_\lambda(z) = y^{\lambda-2}dxdy$ に対して $\mathcal{O}(\mathcal{H}) \cap L^2(\mathcal{H}, d\mu_\lambda)$ は非自明なヒルベルト空間となり，そこには $SL_2(\mathbb{R})$ が既約かつユニタリに作用する．これが，正則離散系列表現 π_λ の 1 つの幾何的実現である．($\lambda = 1$ のときは，内積の極限を考えることによってハーディ空間が得られる．) この実現の下で (10.2) の左辺 $\pi_{\lambda'}\widehat{\otimes}\pi_{\lambda''}$ から，右辺の直和成分 $\pi_{\lambda'''}$ ($\lambda''' = \lambda' + \lambda'' + 2a$) への絡作用素は以下の Rankin–Cohen 作用をで表される.

定理 10.1 (Rankin–Cohen の双線型微分作用素)**.** $2a := \lambda''' - \lambda' - \lambda'' \in 2\mathbb{N}$ と仮定する．

$$RC_{\lambda',\lambda''}^{\lambda''} : \mathcal{O}(\mathcal{H})_{\lambda'} \otimes \mathcal{O}(\mathcal{H})_{\lambda''} \to \mathcal{O}(\mathcal{H})_{\lambda'''}$$

を

$$RC_{\lambda',\lambda''}^{\lambda''}(f_1 \otimes f_2)(z) := \sum_{l=0}^{a} \frac{(-1)^l\Gamma(\lambda'+a)\Gamma(\lambda''+a)}{l!(a-l)!\Gamma(\lambda'+a-l)\Gamma(\lambda''+l)} \frac{\partial^{a-l}f_1}{\partial z^{a-l}} \frac{\partial^l f_2}{\partial z^l}$$

とおくと $RC_{\lambda',\lambda''}^{\lambda'''}$ は $SL_2(\mathbb{R})$ のテンソル積表現 $\mathcal{O}(\mathcal{H})_{\lambda'}\widehat{\otimes}\mathcal{O}(\mathcal{H})_{\lambda''}$ から $\mathcal{O}(\mathcal{H})_{\lambda'''}$ への絡作用素である．

注意 10.2. λ が負の整数である場合も（正則離散系列表現は部分表現として含まれないが）$\mathcal{O}(\mathcal{H})_\lambda$ は $SL_2(\mathbb{R})$ の（非ユニタリな）表現である．この場合も定理 10.1 は成り立つが，逆は必ずしも成り立たない．すなわち，Rankin–Cohen の双線型微分作用素が，SBO (symmetry breaking operator) を尽していないことが最近 (2015) に発見された．SBO を構成する新しい手法 (F-method [42]) を用いることにより，

- 超幾何関数の多項式解（例. ヤコビ多項式）の次元
- 可約な Verma 加群同士のテンソル積の組成列の決定

の問題と上記の問題と同値であることも分かる．完全な分類は小林–Pevzner [60] で行われた．

10.3 共形幾何における対称性の破れ作用素の分類理論

リーマン多様体 X とその部分多様体 Y が与えられたとき，

$G := \mathrm{Conf}(X) : X$ の共形変換群，

$G' := \mathrm{Conf}(X; Y) : G$ の元で Y を保つものからなる部分群，

とおく．Conformal factor の冪乗を用いることにより，$C^\infty(X), C^\infty(Y)$ にそれぞれ複素パラメータ λ, ν を含む G, G' の表現 Π_λ, π_ν を定義することができる [55]．モデル空間が $(X, Y) = (S^n, S^{n-1})$ のとき線型作用素 $T : C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$ であって，$\mathrm{Conf}(X; Y)$ 同変な作用素の分類理論は最近数年の間に以下のように進展した．

- T が微分作用素のとき，Juhl（書籍 [18]），小林–Ørsted–Somberg–Souček [56] によって分類された．

- T が積分作用素や特異積分作用素を含めた一般の SBO の場合は小林–Speh（書籍 [61]）によって分類が完成した．

- X 上の i 次微分作用素の空間 $\mathcal{E}^i(X)$ から Y 上の j 次微分作用素の空間 $\mathcal{E}^j(Y)$ への微分作用素 T で共形群 $\mathrm{Conf}(X;Y)$ に関する同変性をみたすものは小林–久保–Pevzner によって，2016 年，完全に分類された（書籍 [50]）．

共形幾何学における Juhl の作用素，保型形式における Rankin–Cohen の双線型微分作用素もいずれも対称性破れ作用素の特殊な場合として本質的には同等なものである [60]．

また共形幾何のモデル空間に現れた上記の例は表現論の立場から見ると，$(G, G') = (O(n+1,1), O(n,1))$ という組に対し，Π, π がそれぞれ G, G' の主系列表現の場合の対称性破れ作用素 (SBO) とみなすことができる．この組 (G, G') は定理 8.6 の条件 (ii) を満たすので，重複度の一様有界性がアプリオリに保証されており（ステージ A），上記の諸結果は分岐則のステージ C まで歩を進めたものと解釈することもできる．微分作用素として記述できる SBO の分類は筆者が導入した ([42, 44]) F-method を証明の主な道具として用いる．より一般の SBO の構成の手法 [61] は実旗多様体 G/P の P' 軌道による stratification に応じた積分核を構成し，その解析接続や関数等式を証明するというものであるが，ステージ A から抽出した，より広いクラスの簡約リー群の組 (G, G')（分類は [52]）を舞台とする一般化が今後期待される．

追辞: この論説を書くにあたり，筆者が 20 代の前半に薫陶を受けた大島利雄先生の数学に対する大らかな考え方と専門分野における開拓精神に大きな影響を再三感じた．改めて，感謝を述べたい．

References

[1] A. Aizenbud, D. Gourevitch, *Multiplicity one theorem for* $(GL_{n+1}(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{R}))$, Selecta Math. **15** (2009), pp. 271–294.

[2] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, G. Schiffmann, *Multiplicity one theorems*, Ann. of Math., **172**, (2010), pp. 1407–1434.

[3] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math., **144**, (1996), pp. 315–347.

[4] Y. Benoist, T. Kobayashi, *Temperedness of reductive homogeneous spaces*, J. Eur. Math. Soc., **17**, (2015), pp. 3015–3036.

[5] S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Ørsted, *Laguerre semigroup and Dunkl operators*, Compositio Mathematica, **148**, (2012), pp. 1265–1336.

[6] M. Berger, *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74** (1957), pp. 85–177.

[7] J. Bernstein, A. Reznikov, *Analytic continuation of representations and estimates of automorphic forms*, Ann. Math., **150**, (1999), pp. 329–352.

[8] M. Brion, *Classification des espaces homogènes sphériques*, Compos. Math. **63**, (1986), pp. 189–208.

[9] E. Calabi, L. Markus, *Relativistic space forms*, Ann. of Math. **75**, (1962), pp. 63–76,

[10] J.-L. Clerc, T. Kobayashi, B. Ørsted, and M. Pevzner, *Generalized Bernstein–Reznikov integrals*, Math. Ann., **349**, (2011) pp. 395–431.

[11] P. B. Cohen, Y. Manin, D. Zagier, *Automorphic pseudodifferential operators*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **26**, Birkhäuser, 1997, pp. 17–47.

[12] P. Delorme, *Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs*, Ann. of Math. (2), **147**, (1998), pp. 417–452.

[13] M. Duflo, J. A. Vargas, *Branching laws for square integrable representations*, Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci., **86**, (2010), pp. 49–54.

[14] 藤原英徳，指数型可解リー群のユニタリ表現ー軌道の方法，数学の杜 1，数学書房, 2010.

[15] B. Gross, D. Prasad, *On the decomposition of a representations of SO_n when restricted to SO_{n-1}*, Canad. J. Math. **44**, (1992), pp. 974–1002.

[16] B. Gross, N. Wallach, *Restriction of small discrete series representations to symmetric subgroups*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **68**, (2000), Amer. Math. Soc., pp. 255–272.

[17] R. Howe, *θ-series and invariant theory*, Proc. Symp. Pure Math. **33**, (1979), Amer. Math. Soc., pp. 275–285.

[18] A. Juhl, Families of conformally covariant differential operators, Q-curvature and holography. Progr. Math., **275**, Birkhäuser, 2009.

[19] F. Kassel, T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math. **287**, (2016), pp. 123–236.

[20] 北川宜稔, *Algebraic structure on the space of intertwining operators*, 東大博士論文, 2016.

[21] A. W. Knapp, D. Vogan, Jr., Cohomological Induction and Unitary Representations, Princeton U.P., 1995.

[22] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285**, (1989), pp. 249–263.

[23] T. Kobayashi, *The restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ to reductive subgroups*, *Proc. Japan Acad.*, **69** (1993), pp. 262–267.

[24] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications*, Invent. Math., **117**, (1994), pp. 181–205.

[25] T. Kobayashi, 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現，数学 **46**，(1994), pp. 124–143; *Harmonic analysis on homogeneous manifolds of reductive type and unitary representation theory, Translations, Series* II, Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants, **183**, (1998), Amer. Math. Soc., pp. 1–31 (英訳).

[26] T. Kobayashi, *Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces*, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" in Nagano (佐藤文広氏編集), 1995, pp. 22–41.

[27] T. Kobayashi, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory **6**, (1996), pp. 147–163.

[28] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups* II*—micro-local analysis and asymptotic K-support*, Ann. of Math., **147**, (1998), pp. 709–729.

[29] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups* III*—restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties*, Invent. Math., **131**, (1998), pp. 229–256.

[30] T. Kobayashi, *Discrete series representations for the orbit spaces arising from two involutions of real reductive Lie groups*, *J. Funct. Anal.*, **152**, (1998), pp. 100–135.

[31] T. Kobayashi, *Deformation of compact Clifford–Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann., **310**, 1998, pp. 395–409.

[32] T. Kobayashi, *Discretely decomposable restrictions of unitary representations of reductive Lie groups—examples and conjectures*, *Advanced Study in Pure Math.*, **26**, (2000), pp. 98–126.

[33] T. Kobayashi, *Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity*, Acta Appl. Math. **81** (2004), pp. 129–146.

[34] T. Kobayashi, *Restrictions of unitary representations of real reductive groups*, Progr. Math. **229**, pp. 139–207, Birkhäuser, 2005.

[35] T. Kobayashi, *Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41**, (2005), pp. 497–549 (数理解析研究所設立 40 周年記念).

[36] T. Kobayashi, *Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs*, Progr. Math., **255**, pp. 45–109, Birkhäuser, 2007.

[37] T. Kobayashi, *Visible actions on symmetric spaces*, Transform. Groups, **12** (2007), pp. 671–694.

[38] T. Kobayashi, *A generalized Cartan decomposition for the double coset space* $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))\backslash U(n)/(U(p) \times U(q))$, Jour. Math. Soc. Japan **59** (2007), pp. 669–691.

[39] T. Kobayashi, *Hidden symmetries and spectrum of the Laplacian on an indefinite Riemannian manifold*, In: Spectral Analysis in Geometry and Number Theory (in honor of T. Sunada), (ed. M. Kotani), Contemp. Math. **484**, pp. 73–87, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[40] T. Kobayashi, *Branching problems of Zuckerman derived functor modules*, In: Representation Theory and Mathematical Physics (in honor of G. Zuckerman), Contemp. Math., **557**, pp. 23–40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[41] T. Kobayashi, *Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs*, Transform. Group, **17**, (2012), pp. 523–546.

[42] T. Kobayashi, *F-method for constructing equivariant differential operators*, Contemp. Math., **598**, pp. 141–148, Amer. Math. Soc., 2013. (Special volume in honor of S. Helgason.)

[43] T. Kobayashi, *Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles*, Progr. Math., **306**, Birkhäuser, 2013, pp. 113–140. (Special volume in honor of J. Wolf.)

[44] T. Kobayashi, *F-method for symmetry breaking operators*, Differential Geom. Appl. **33**, (2014), pp. 272–289, Special issue in honor of M. Eastwood.

[45] T. Kobayashi, *Shintani functions, real spherical manifolds, and symmetry breaking operators*, Developments in Mathematics, **37**, (2014), pp. 127–159.

[46] T. Kobayashi, *Special functions in minimal representations*, In: Perspectives in Representation Theory in honor of Igor Frenkel on his 60th birthday, Comtemp. Math., **610**, pp. 253–266. Amer. Math. Soc., 2014.

[47] T. Kobayashi, *A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups*, In: Representations of Lie Groups: In Honor of D. A. Vogan, Jr. on his 60th Birthday, Progr. Math., **312**, (2015), pp. 277–322, Birkhäuser.

[48] T. Kobayashi, *Intrinsic sound of anti-de Sitter manifolds*, to appear.

[49] T. Kobayashi, *Global analysis with hidden symmetry*, to appear in Special volume in honor of R. Howe.

[50] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, Conformal Symmetry Breaking Operators for Differential Forms on Spheres, Lecture Notes in Mathematics, **2170**, Springer, 2016, viii + 192 pages.

[51] T. Kobayashi, G. Mano, The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p, q)$, Mem. Amer. Math. Soc. (2011), **212**, no. 1000, vi+132 pages.

[52] T. Kobayashi, T. Matsuki, *Classification of finite-multiplicity symmetric pairs*, Transform. Groups, **19** (2014), pp. 457–493, Special issue in honor of Dynkin for his 90th birthday.

[53] T. Kobayashi, S. Nasrin, *Multiplicity one theorem in the orbit method*, Amer. Math. Soc. Transl., Advances in the Mathematical Sciences, Series 2, **210**, pp. 161-169, 2003. Special volume in memory of Professor F. Karpelevič.

[54] T. Kobayashi, K. Ono, T. Sunada, *Periodic Schrödinger operators*, Forum Math. **1**, (1989).

[55] T. Kobayashi, B. Ørsted, *Analysis on the minimal representation of* $\mathrm{O}(p, q)$. Part I, Adv. Math., **180**, (2003), pp. 486–512; Part II, *ibid*, pp. 513–550; Part III, *ibid*, pp. 551–595.

[56] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg, V. Souček, *Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry*, Part I, Adv. Math., **285**, (2015), pp. 1796–1852.

[57] T. Kobayashi, T. Oshima, *Finite multiplicity theorems for induction and restriction*, Adv. Math., **248**, (2013), pp. 921–944.

[58] T. Kobayashi, Y. Oshima, *Classification of discretely decomposable* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ *with respect to reductive symmetric pairs*, Adv. Math., **231** (2012), pp. 2013–2047.

[59] T. Kobayashi, Y. Oshima, *Classification of symmetric pairs with discretely decomposable restrictions of* $(\mathfrak{g}, K)$*-modules*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **2015**, (2015), no.703, pp. 201–223.

[60] T. Kobayashi, M. Pevzner, *Differential symmetry breaking operators.* I. *General theory and F-method*, Selecta Math. (N.S.) **22**, (2016), pp. 801–845; II. *Rankin–Cohen operators for symmetric pairs*, *ibid*, pp. 847–911.

[61] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups, (2015), Memoirs of Amer. Math. Soc. **238**, no.1126, 118 pages.

[62] M. Krämer, *Multiplicity free subgroups of compact connected Lie groups*, Arch. Math. (Basel) **27**, (1976), pp. 28–36.

[63] G. Margulis, *Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients*, Bull. Soc. Math. France **125**, (1997), pp. 447–456.

[64] T. Matsuki, *Orbits on flag manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990, Vol. II (1991), Springer-Verlag, pp. 807–813.

[65] I. V. Mikityuk, *Integrability of invariant Hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces*, Math. USSR-Sbornik **57**, (1987), pp. 527–546.

[66] B. Ørsted, B. Speh, *Branching laws for some unitary representations of $SL(4,\mathbb{R})$*, SIGMA **4**, (2008), doi:10.3842/SIGMA.2008.017.

[67] T. Oshima, *Harmonic analysis on semisimple symmetric spaces*, Sugaku Expositions, **15**, (2002), pp. 151–170, Amer. Math. Soc.

[68] 大島芳樹, *Discrete branching laws of Zuckerman's derived functor modules*, 東京大学，博士論文, 2013.

[69] R. A. Rankin, *The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form*, J. Indian Math. Soc., **20**, (1956), pp. 103–116.

[70] J. Repka, *Tensor products of holomorphic discrete series representations*, *Can. J. Math.* **31** (1979), pp. 836–844.

[71] 笹木集夢，*Visible actions on multiplicity-free spaces*, 早稲田大学博士論文, 2008.

[72] W. Schmid, *Die Randwerte holomorphe Funktionen auf hermetisch symmetrischen Raumen*, Invent. Math. **9**, (1969–70), pp. 61–80.

[73] H. Sekiguchi, *Branching rules of singular unitary representations with respect to symmetric pairs* (A_{2n-1}, D_n), Internat. J. Math. **24** (2013), no. 4, 1350011, 25 pp.

[74] J. R. Stembridge, *Multiplicity-free products of Schur functions*, Ann. Comb., **5**, (2001), pp. 113–121.

[75] B. Sun, C.-B. Zhu, *Multiplicity one theorems: the Archimedean case*, Ann. of Math., **175**, (2012), pp. 23–44.

[76] 田中雄一郎, *Visible actions of reductive algebraic groups on complex algebraic varieties*, 東京大学，博士論文, 2015.

[77] 辰馬伸彦，位相群の双対定理（紀伊國屋数学叢書 32）1994 年.

[78] D. A. Vogan, Jr., *Unitarizability of certain series of representations*, Ann. of Math., **120**, (1984), pp. 141–187.

[79] D. A. Vogan, Jr., G. J. Zuckerman, *Unitary representations with nonzero cohomology*, Compositio Math. **53** (1984), pp. 51–90.

[80] N. R. Wallach, Real reductive groups. I, II, Pure and Applied Mathematics, **132** Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[81] S. A. Wolpert, *Disappearance of cusp forms in special families*, Ann. of Math. **139**, (1994), pp. 239–291.

[82] F. Zhu and K. Liang, *On a branching law of unitary representations and a conjecture of Kobayashi*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **348** (2010), pp. 959–962.