

## ICM-90 フィールズ賞受賞者の横顔

荒木 不二洋  
飯 高 茂

本年8月21日から29日まで京都宝池の国立京都国際会館において国際数学会議が開催され、初日の開会式でフィールズ賞受賞者の発表と授賞式が行われた。以下受賞者の横顔を紹介する。森氏の紹介は飯高、その他の3氏の紹介は荒木が担当した。授賞式と同じ、姓のアルファベット順で紹介する。

### Vladimir Gershonovich DRINFELD

1954年2月14日ソビエト連邦のKharkovに生まれた。1969年にモスクワ大学数学科に入学、1974年に卒業、さらに1977年まで同大学院在学、Yu. I. Maninの指導を受け1979年にPh. D.に相当するcandidateの学位を取得。

1978年から1980年までBashkir大学助教授、1980年から1981年までKharkov大学助教授、1981年から1985年までハルコフのウクライナ科学アカデミー低温研究所若手研究員、1985年から同研究所上級研究員、1989年に博士の学位を取得している。

DrinfeldはDrinfeld加群の発見、Langlands予想に関する諸結果、擬Hopf代数の導入等、数論において輝かしい成果をあげるとともに、物理学の可解模型について表現論とのかかわりから解の構成、分類等の重要な諸結果を与え、特に量子群について系統的な全体像を与えている。



V. G. Drinfeld 氏

(a) **Drinfeld 加群**[D1], [D2]. Drinfeldが1975年頃発見したDrinfeld加群は、現在、有限体上の関数体の研究の主要な道具のひとつになっている。標数0の世界でアーベル多様体の族の研究がもたらしたと同様の深い成果を、標数 $p$ の世界でDrinfeld加群の族の研究により、主としてDrinfeld自身もたらした。

(b) **保型関数論**[D3], [D4], [D5]. 行列群 $GL(n)$ の大域的保型表現と、 $n$ 次元 $l$ 進ガロア表現系の間には一種の双対性が期待(Langlands哲学)されている。Drinfeldは基礎体が指数 $p$ の場合に、この双対性の解明の研究に長足の進歩をもたらした。特に $n=2$ のときのGalois表現系の構成、及び不分岐な $l$ 進表現と対応する保型表現の構成に関して決定的諸結果を得た。

(c)  **$N$  インスタントンの構成**[D6]. 自己双対ヤン・ミルズ場の方程式の解の表示を与えた。これにより、インスタントンの空間のモジュライの構造が明らかになった。

(d) **ソリトン方程式の研究**[D7]. 古典群における余随伴軌道の量子化という方法を、アフィンリー環に適用すると、2次元のソリトン方程式が系統的に得られることを示した。

$U_i$  は  $P_i f \in R(\text{rot}^{(i)})$  と  $Q_i g \in R(\text{div}^{(i)})$  の対(ついで)に対する [F0] の解に一致し,  $p \in W_i$  は  $\text{grad } p = 0$  の解である.

証明. (3.3) の第 1 式において,  $v = \text{grad } p$  とおけば,  $\text{grad } p = 0$  であることがわかる. この結果を代入した上で, (3.3) を  $u \in U_i$  について作用素表示で書けば, 次式を得る.

$$\text{rot}^{(i)} u = P_i f, \quad \text{div}^{(i)} u = Q_i g.$$

これに定理 1 を適用すれば, 証明が終わる.  $\square$

[F1] において,  $p$  が **Lagrange の未定乗数** に相当する. なお, 混合型変分原理の立場からの本定理の証明は [22] に与えられており,  $\{u, p\}$  はある 2 次汎関数の **あん点** となっている. この種の定式化とそれに基づく有限要素近似については, 理論がほぼ確立している [6], [18]. なお,  $p$  は最終的には 0 と見なしてよく, 元の定式化 [F0] には  $p$  のような量が現われないことと対応している.

#### §4. 摂動問題—— $p$ の消去——

前記の混合法は, 理論的にはしっかりした方法であり, また実際に有限要素法の定式化の基礎にも使用できる [22], [28]. ただし  $p$  は結局は不要な量であるのに, 形式的に未知関数に加わっていることに難があり, そのため有限要素法で得られる近似方程式の元数が大きくなる. この難点を克服する方法の一つとして以下に提案するのは, 一種の**摂動問題**の利用であり, 求められる  $u$  は [F1] に基づく  $u$  の近似にしかならないが, その代わりに方程式は  $u$  のみの式となり,  $p$  は現われない. ただし以下に示すとおり, 適用できるのは  $g=0$  のときに限られるので, 元の問題としては静磁場問題 (1.2) の方だけが意味を持つ.

まず,  $\tau$  を小さな正のパラメータとし, [F1] で  $g=0$  の場合の (3.3) の第 1 式に対し, 摂動項を加えた次式を考える.

$$(4.1) \quad (\text{rot } u, \text{rot } v) + (\text{grad } p, v) + \tau(u, v) = (f, \text{rot } v) \quad (\forall v \in U_i).$$

$q \in W_i$  に対し, 上式で  $v = \text{grad } q \in U_i$  と置くと,

$$(\text{grad } p, \text{grad } q) + \tau(u, \text{grad } q) = 0$$

となるが, これと (3.3) の第 2 式 ( $g$  は 0) を連立させると,  $\text{grad } p = 0$  を得る. そこで, (4.1) の  $p$  の項を落とした式を考え, 次の定式化を得る.

[F2]  $i=1, 2$  について,  $f \in L_2(\Omega)^3$  とパラメータ  $\tau > 0$  を与えたとき,  $u \in U_i$  として次式を満たすものを見いだせ.

$$(4.2) \quad (\text{rot } u, \text{rot } v) + \tau(u, v) = (f, \text{rot } v) \quad (\forall v \in U_i).$$

この問題と元の [F1] との関係は, 次の定理にまとめられる.

**定理 3.**  $i=1, 2$  について,  $f \in L_2(\Omega)^3$ ,  $\tau > 0$  を任意に与えたとき, [F2] の解  $u \in U_i$  は一意に存在し, しかも  $R(\text{rot}^{(3-i)}) \subset N(\text{div}^{(i)})$  にも属す(したがって, (3.3) の第 2 式で  $g=0$  と置いた式も満たす). さらに,  $u$  を  $\tau$  の関数と見て  $u(\tau)$  と書いたとき,  $\tau$  が十分小さければ  $u$  は  $\tau$  のべき級数として次のように表される.

$$(4.3) \quad u(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j u^{(j)}$$

ここで,  $u^{(j)} \in U_i \cap R(\text{rot}^{(3-i)})$  であって, 次式で一意に決定される.

$$(4.4a) \quad \begin{cases} (\operatorname{rot} u^{(0)}, \operatorname{rot} v) + (\operatorname{grad} p^{(0)}, v) = (f, \operatorname{rot} v) & (\forall v \in U_i). \\ (u^{(0)}, \operatorname{grad} q) = 0 & (\forall q \in W_i). \end{cases}$$

$$(4.4b) \quad \begin{cases} (\operatorname{rot} u^{(j)}, \operatorname{rot} v) + (\operatorname{grad} p^{(j)}, v) = -(u^{(j-1)}, v) & (\forall v \in U_i). \\ (u^{(j)}, \operatorname{grad} q) = 0 & (\forall q \in W_i). \end{cases}$$

ただし, (4.4b) で  $j=1, 2, \dots$  であり, また  $p^{(j)}$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) は  $W_i$  の元であり, すべて 0 としても差し支えない. また,  $u^{(0)}$  は  $g=0$  に対する [F1] の解となっており,  $\tau > 0$  が小さいとき,  $u(\tau)$  と  $u^{(0)}$  の差について次の評価が成立する.

$$(4.5) \quad \|u(\tau) - u^{(0)}\|_{H(\operatorname{rot}, \Omega)} \leq C\tau \|f\|$$

ここで,  $C$  は  $\tau$  や  $f$  に依存しない正定数である.

**注意 4.**  $u(\tau)$  も  $u^{(0)}$  も  $N(\operatorname{div}^{(i)})$  に属するので, (4.5) は  $Z_i$  での評価とも見なせる.

証明(概略). (4.2) の左辺に現われる双 1 次形式は, 各  $\tau > 0$  について  $U_i$  で強圧的 (coercive) であることに注意すれば,  $u$  の一意存在が示される. また, (4.2) の  $v$  に (2.11) の直交分解を適用すれば,  $u \in R(\operatorname{rot}^{(3-i)})$  であることもわかる. ベキ級数展開については, 通常的手法 [18], [31] を用いればよいので詳細は省略するが, (4.3) を形式的に (4.2) に代入して係数比較をすれば, (4.4) が得られることはすぐ確認できる. また, 摂動が有界であることにも注意しておく. |

上記によれば,  $u(\tau)$  と  $u^{(0)}$  (すなわち, [F1] で  $g=0$  のときの  $u$  で  $U_i \cap R(\operatorname{rot}^{(3-i)})$  に属すもの) の差が  $O(\tau)$  となるから, 有限要素法等で [F2] を利用する際には, 数値的不安定性が生じない範囲で  $\tau > 0$  の値を 0 に近く選べばよいであろう. また [F0], [F1] では,  $\Omega$  によっては必ずしも解の一意性は成立しないが, [F2] では成立する. この事実は, 数値計算で便利に利用できよう.

## § 5. ベクトル・ポテンシャルを用いた静磁場問題の混合法的定式化

ここでは特に静磁場の問題を取り上げ, 前節までとは異なる手法を論ずる. なお, 以下では問題に即して, § 0, § 1 の記法を用いる. 静磁場の問題 (1.2) において, 磁束密度  $B = \mu H$  に対する式  $\operatorname{div} B = 0$  ( $\Omega$  内) と  $B \cdot n = 0$  ( $\partial\Omega$  上) に着目すれば,  $L_2$ -理論の範囲ではこの条件は  $B \in H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$  と表される. 特に仮定 1 が成立し  $\Omega$  が単連結であれば,  $N(\operatorname{rot}^{(2)}) = H(\operatorname{rot}^0, \Omega) = \operatorname{grad} H^1(\Omega)$  であることが知られているので [9], [11], (2.7) と (2.12) により,  $H_0(\operatorname{div}^0, \Omega) = R(\operatorname{rot}^{(1)})$  となる. すなわち, 各  $B \in H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$  に対し  $B = \operatorname{rot} A$  なる  $A \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$  が存在する. このような  $A$  は  $B$  に対するベクトル・ポテンシャルと呼ばれる [38]. こうして, (1.2) で残るのは第 1 式のみとなり, これは次のように書ける.

$$(5.1) \quad \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} A) = J.$$

さらに, 一意性を保証するためと称し (?), 次の **Coulomb ゲージ** を課することが多い [38].

$$(5.2) \quad \operatorname{div} A = 0.$$

これらの式に対し, 先と同様に次の混合法的定式化を得る [22]. ただし, (5.1) を超関数の意味で記述するため, 試験関数の空間を  $H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$  と選ぶ.

[F3]  $J \in L_2(\Omega)^3$  を与えたとき,  $A \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ ,  $p \in H_0^1(\Omega)$  として次式を満たすものを見いだせ.

$$(5.3) \quad \begin{cases} (\mu^{-1} \operatorname{rot} A, \operatorname{rot} A^*) + (\operatorname{grad} p, A^*) = (J, A^*) & (\forall A^* \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)). \\ (A, \operatorname{grad} q) = 0 & (\forall q \in H_0^1(\Omega)). \end{cases}$$

本問題の解の存在は, 仮定 1 が成立すれば保証され,  $\partial\Omega$  が連結であれば一意性も成立する. さ

らに,  $J \in H(\text{div}^0, \Omega)$  であれば,  $p=0$  を示せる. また  $J \in H(\text{div}^0, \Omega)$  のときは  $p$  は一般には 0 でなくなるが, その場合も含め,  $\Omega$  が単連結であれば, 得られる  $B = \text{rot } A$  は [F1] の  $i=2$  に対応する静磁場問題の解の  $B = \mu H$  に一致する.

この方法に類似の手法は有限要素法において以前から用いられているが, ベクトル・ポテンシャルの意味付け, 境界条件やゲージの取扱いが不明確のように見受けられる. 著者には Coulomb ゲージの物理的意味はわからないが,  $\partial\Omega$  が連結集合の場合には  $H_0(\text{rot}^0, \Omega) = \text{grad } H_0^1(\Omega)$  となるので [9], [11], この条件は境界条件と組になって,  $U_1$  で  $A$  が零空間  $H_0(\text{rot}^0, \Omega)$  へ直交するという条件を表している. したがって, 数学的にはきわめて自然な条件に思われる.

なお, 静電場問題については, (1.1) 中の  $\text{rot } E = 0$  を利用して, スカラー・ポテンシャルを用いる解法が大勢をしめている. この場合は, 解くべき問題は Poisson 方程式の境界値問題になり, それに対する有限要素法は十分に発達している [8]. また, スカラー・ポテンシャルは電位という物理的意味を持ち, 先に述べたような解の一意性の成り立たない場合の処理にも便利であるので, 特前節までの手法を用いる必要はないであろう. しかし, 静磁場問題については, 磁場  $H$  とベクトル・ポテンシャル  $A$  のどちら(あるいは別の関数)を用いるのが便利かは未決着である. ここでは, どちらの方法でも, ある範囲では利用可能なこと, 現れる関数空間は類似なものになることを示した.

### § 6. 有限要素法

以下では, [F1] 等を基礎とする有限要素法について概説する. 有限要素法においては, まず領域  $\Omega$  を有限要素と呼ばれる小領域に分割する. 次に, 弱定式化に現われる関数空間の有限次元部分空間(有限要素空間)を構成する必要があるが, 有限要素法では有限要素分割と密接に関連した構成がされるのが普通である. 例えば [F1] を用いるときには,  $U_i$  と  $W_i (i=1, 2)$  の有限要素空間を用意しなければならないが, 各有限要素分割に付随した区分多項式を用い, 各分割ごとに 1 組ずつ有限要素空間が構成されるのが通例である. 有限要素分割の族を  $\{T^h\}_{h>0}$  と書くことにする. ここで  $h$  は各有限要素分割  $T^h$  における有限要素の最大直径を表す. 各  $T^h$  に付随する  $U_i, W_i$  の有限要素空間を  $U_i^h, W_i^h (i=1, 2)$  と記す.

このとき, 例えば [F1] に基づく有限要素スキームは, Galerkin 法の原理により次のようになる.

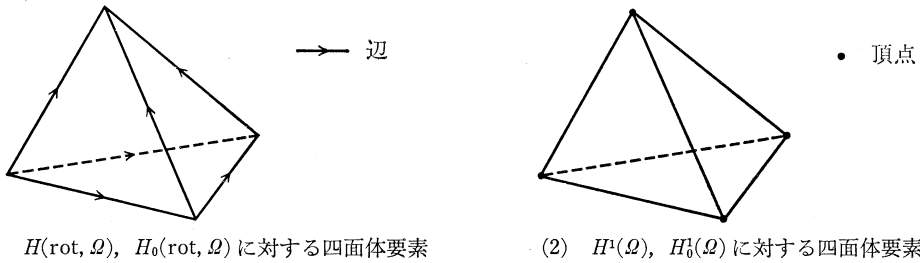
[F1]<sub>h</sub>  $f \in L_2(\Omega)^3, g \in L_2(\Omega)$  を与えたとき,  $u \in U_i^h, p \in W_i^h$  として次式を満たすものを見いだせ ( $i=1, 2$ ).

$$(6.1) \quad \begin{cases} (\text{rot } u_h, \text{rot } v_h) + (\text{grad } p_h, v_h) = (f, \text{rot } v_h) & (\forall v_h \in U_i^h). \\ (u_h, \text{grad } q_h) = -(g, q_h) & (\forall q_h \in W_i^h). \end{cases}$$

[F2] や [F3] に基づく有限要素スキームも同様に構成できる. ただし [F2] の場合は有限要素空間は  $U_i^h$  のみでよく, 少なくとも見かけ上は  $W_i^h$  が不要になるのが利点である.

#### 有限要素空間の例 (図 1)

簡単のためここでは  $\Omega$  は多面体領域とし,  $\{T^h\}_{h>0}$  として  $\Omega$  の正則な 4 面体分割族を考える. ここで正則とは, 族の中から  $h \rightarrow 0$  となるものが選べ, その際に四面体が限りなく平たくはならないことを意味する(詳しくは [8] 参照). なお, 2 次元問題については, 多角形領域に正則な三角形分割族を考えたとき, 以下に示すものに対応する三角形要素を構成でき, 同様な結果が得られる.



(1)  $H(\text{rot}, \Omega), H_0(\text{rot}, \Omega)$  に対する四面体要素 (2)  $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$  に対する四面体要素

図 1 四面体有限要素

$H(\text{rot}, \Omega) = U_2$  の近似空間としては, Nedelec[32], [33] に従い次のような関数の全体を考える.

' $T^h$  の各 4 面体要素内ではベクトル関数  $v_h = \{v_{h1}, v_{h2}, v_{h3}\}$  は次の形である.

$$(6.2) \quad \begin{cases} v_{h1} = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3. \\ v_{h2} = \alpha_4 - \alpha_2 x_1 + \alpha_5 x_3. \\ v_{h3} = \alpha_6 - \alpha_3 x_1 - \alpha_5 x_2. \end{cases}$$

しかも 4 面体間の共通面(三角形)では接平面成分が連続とする.'

このような  $v_h$  の全体は  $U_2$  の有限次元部分空間であることを示せる. これを  $U_2^h$  とする. さらに  $U_2^h$  の元で  $\partial\Omega$  上では接平面成分が 0 なものの全体は  $U_1 = H_0(\text{rot}, \Omega)$  の有限次元部分空間であることがわかる. これを  $U_1^h$  とする.

次に  $W_2 = H^1(\Omega)$  の近似空間として, 次のようなスカラー関数の全体を考える.

' $T^h$  の各四面体要素内で  $q_h$  は 1 次多項式:

$$(6.3) \quad q_h = \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 + \beta_4 x_3$$

であり,  $\bar{\Omega}$  では, 連続である.'

このような関数の全体は  $W_2$  の有限次元部分空間とみなせる. これを  $W_2^h$  とする. さらに  $W_2^h$  の元で  $\partial\Omega$  上で 0 となるもの全体は,  $W_1 = H_0^1(\Omega)$  の有限次元部分空間となっている. これを  $W_1^h$  とする. これらは 1 階の Sobolev 空間に対する古典的な有限要素空間であり, 四面体の頂点は節点と呼ばれる[8].

このような有限要素空間の組合せを用い, 各種の電磁気問題が近似的に解かれている.  $U_i$  に対する有限要素では, 自由度(補間パラメータ)として四面体でのベクトルの辺方向成分が用いられるので, 辺要素とも呼ばれる. また, この例よりも高次の区分多項式を用いた有限要素空間も知られており, 数値例も得られている.

§ 7. 有限要素スキームの妥当性

前節で導入した有限要素法により得られた近似解の厳密解への収束を保証するため, 有限要素空間の族  $\{U_i^h \times W_i^h\}_{h>0} (i=1, 2)$  に対し, 下記の仮定を考える.

**仮定 3**(近似能力). 各  $\{v, q\} \in U_i \times W_i$  に対し, 族  $\{\{v_h, q_h\}\}_{h>0}$  として, 各  $h>0$  に対しては  $\{v_h, q_h\} \in U_i^h \times W_i^h$  で, 次の条件を満たすものが存在する ( $i=1, 2$ ).

$$(7.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (\|v_h - v\|_{H(\text{rot}, \Omega)} + \|p_h - p\|_{H^1(\Omega)}) = 0.$$

**仮定 4**(Brezzi 条件の十分条件). 各  $h>0$  に対し,

$$(7.2) \quad \text{grad } W_i^h \subset U_i^h \quad (i=1, 2).$$

**仮定5**(離散コンパクト性). 族  $\{v_h\}_{h>0}$  として, 各  $h>0$  に対し  $v_h \in U_i^h$ ,  $\|v_h\|_{H(\text{rot}, \Omega)}=1$  と  $(v_h, \text{grad } q_h)=0 (\forall q_h \in W_j^h)$  を満たす任意のものを考える ( $i=1, 2$ ). このとき, この族の部分族(同じ  $\{v_h\}_{h>0}$  で表す)として,  $h \downarrow 0$  のとき  $U_i$  のある元  $v$  に  $U_i$  では弱収束し,  $L_2(\Omega)^3$  では強収束するようなものが必ず存在する(なお, ここで仮定3も成立していれば,  $(v, \text{grad } q)=0 (\forall q \in W_i)$ , すなわち,  $v \in N(\text{div}^{(i)})$  となることを示せる).

上記で, 仮定5の離散コンパクト性は仮定2.1の離散版であることに注意しよう. 仮定2.1と仮定2.2は同等なのに別々に記述したのは, この理由による. また, 仮定4は混合型の有限要素法の議論では常に現われる **Brezi 条件**[6](Babuska-Brezi 条件, inf-sup 条件ともいう)のための十分条件であり,  $[F1]_h$  で  $\text{grad } p_h=0$  を保証するための条件にもなっている(定理4参照). 仮定3の近似能力は, 近似解が厳密解に収束するためには当然必要な条件ではあるが, 今の場合は,  $[F1]$  の解では事実上  $p=0$  であるから, 一般の  $W_i$  の元まで近似できることを要求するのは, 少し行き過ぎに見えるかも知れない. しかし, 仮定3は, 実際には仮定4や仮定5と組み合わせて用いるので, 上記のような形の方が自然に思われる.

このような仮定の下で, 近似問題  $[F1]_h$  について次の定理を得る.

**定理4.**  $i=1, 2$  について, 仮定1および  $N(\text{rot}^{(i)}) \cap N(\text{div}^{(i)})=\{0\}$  が成立し, 有限要素空間族について仮定3, 4, 5が成立しているとする.  $f \in L_2(\Omega)^3$ ,  $g \in L_2(\Omega)$  を任意に与えたときの  $[F1]$  の解を  $\{u, p\} \in U_i \times W_i$  と記す.  $h>0$  が十分小さければ, 同じ  $f, g$  に対する  $[F1]_h$  の解  $\{u_h, p_h\} \in U_i^h \times W_i^h$  は存在し,  $u_h$  は一意で  $p_h$  は  $\text{grad } p_h=0$  を満たす. さらに,  $h$  が十分小なる範囲では,  $h$  に依存しない正定数  $C$  が存在し, 次の不等式が成立する.

$$(7.3) \quad \|u_h\|_{H(\text{rot}, \Omega)} \leq C(\|f\| + \|g\|).$$

また,  $h$  が十分小ならば次の誤差評価式が成立する.

$$(7.4) \quad \|u_h - u\|_{H(\text{rot}, \Omega)} \leq C' \inf_{v_h \in U_i^h} \|v_h - u\|_{H(\text{rot}, \Omega)}$$

ここで,  $C'$  は  $C$  と同様な正定数である.

**注意5.**  $N(\text{rot}^{(i)}) \cap N(\text{div}^{(i)}) \neq \{0\}$  の場合に, この集合に対する近似集合の性質を論ずることも可能であるが, ここでは省略する.

上記の定理の証明はよく知られているもの[6], [22]の変形にすぎないので, 省略する. また,  $[F2]$ ,  $[F3]$ に基づく有限要素スキームについても, 類似の結果が得られる. 特に  $[F2]$ については, (4.3)に対応する展開と(4.5)に相当する評価が近似解において成立し, また(7.4)に対応する誤差評価式が各  $\tau > 0$  で成り立つ.

前節で例示した Nedelec の要素については, 仮定3と仮定4は Nedelec 自身により示されている[32], [33]. したがって残る仮定5の確認が重要である. 著者は  $\Omega$  に対する補題1と同様な仮定の下に(したがって, 前節の例のように  $\Omega$  が多面体領域の場合には問題ない), これを示した[23]. 証明には, 補題1が本質的に使用されている. また, 厳密解がある程度なめらかであれば, (7.4)の右辺は  $O(h)$  となることも, 比較的容易に示せる. なお, 前節の例で示したものの以外の Nedelec 要素については, 著者の知る限りでは, 未だ仮定5が証明されていないようであり, 今後の進展が望まれる.