

V. F. R. Jones 氏の業績 II

村 上 順

Vaughan. F. R. Jones は 1984 年に、現在 Jones 多項式と呼ばれている新しい結び目 (knot) や絡み目 (link) の不変量 [8], [13] を発表した。これは非常に強力な不変量であり、結び目理論の研究者達に大変な興奮を巻き起こした。また、組み紐群の表現を作用素環上につくって不変量を構成するという代数的な方法で発見されたことも大きな衝撃を与えた。作用素環上のトレースと対応しているのである。このことから実は様々な物理量とも対応することもわかった。このように Jones 多項式は結び目理論と物理学とを密接に結びつけたという意味でも画期的であった。そして数学者ばかりでなく多くの物理学者も結び目理論に興味をもつようになった。Jones 多項式の発見を契機として多くの新しい結び目の不変量が構成されたが、これらは Jones 多項式と同様統計物理学での可解格子模型や共形場の理論 (Conformal Field Theory) とも関係している。これらの不変量の多くは Drinfel'd や Jimbo によって導入された、量子群と呼ばれる Lie 環の普遍展開環の量子化を用いて統一的に説明できる。さらに、Witten などにより、一般の 3 次元多様体の不変量にも拡張された。このように Jones 多項式の発見とその後の発展は最近の理論物理学と純粋数学との歩み寄りを示す一つの大きな流れになっている。そして Jones 自身も引き続き統計物理、結び目の不変量およびそれらの関係について精力的に研究している。[16], [10]

Jones の考え方の基礎にある作用素環論については河東氏の記事に譲り、ここでは Jones 多項式とそれにまつわる話題や、その後の発展ぶりを解説する。

§ 1. 結び目と組み紐群

結び目は 3 次元球面 S^3 中の自分自身とは交わらない向きのついた閉曲線のことである。 S^3 中のいくつかの互いに交わらない結び目からなるものを絡み目という。2 つの結び目や絡み目 L_1, L_2 が互いに同値であるとは S^3 の向きを保つ同相写像 h で $h(L_1) = L_2$ となるものが存在することである。結び目理論ではこの同値関係での結び目の分類を問題にしている。ところで、結び目や絡

み目の同値関係は組み紐を用いてあらわすことができる。組み紐については [17] にわかりやすく解説されている。 n 本の紐からなる組み紐とは、 n 個の点が指定されている空間中の平行な上下におかれた 2 直線に対し、 n 本の紐で上の直線上の n 点と下の直線上の n 点とを結んだものである。但し、紐はいつも上から下に向かい、折り返してこないことがないとし、それぞれの点はただ一つの紐に結ばれているものとする。二つの n 本の紐よりなる組み紐 x, y に対して、これらを上下に並べることにより新しい組み紐ができる。これを x と y の積と呼び、 xy と書く。この積により組み紐の全体は半群となる。二つの組み紐を切らずに一方から他方に変形できるとき、これらを同値であるという。以下同値な組み紐は同じものと見なす。すると n 本の紐からなる組み紐の同値類の全体 B_n は群となる。単位元は図 1 a) であらわされる。 σ_i から σ_{n-1} を図 1 b) であらわされる絡み目とすると B_n はこれらで生成される。 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ の逆元は図 1 c) のようになり、 B_n のすべての元が逆元をもつことがわかる。 B_n は次であらわされる有限表示群である。

生成元: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$

$$\text{関係式: } \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \tag{B1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \tag{B2}$$

さて、組み紐群 B_n の元 b に対して、その上下を n 本

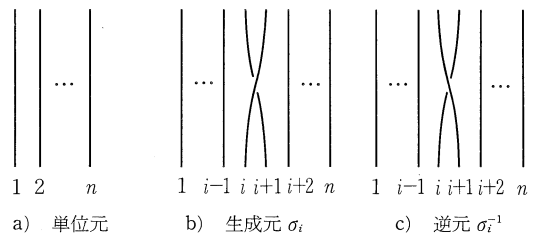


図 1

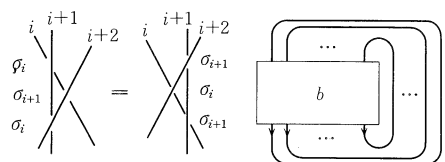


図 2 関係式 (B1)

図 3 組み紐の閉包

の平行な紐で図3のように結ぶと絡み目が得られる。これを b^{\wedge} と書き、 b の閉包という。J. Alexander [2] によれば、任意の絡み目はある組み紐の閉包と同値になる。さらに A. Markov [14], [4] は二つの組み紐の閉包が同値になるための条件を与えた。B を組み紐の全体、すなわち $B = \{(b, n) | b \in B_n, n = 1, 2, \dots\}$ とし \sim を下の (M1), (M2) で生成される B の同値関係とする。

$$bb' \sim b'b \quad (b, b' \in B_n), \quad (M1)$$

$$b\sigma_n^{-1} \sim b \quad (b \in B_n). \quad (M2)$$

この同値関係を Markov の同値関係と呼ぶ。もし二つの組み紐が \sim で同値だったら、それらの閉包が同値な絡み目になることは明かだが、逆も正しい。すなわち絡み目の同値類の全体と B/\sim とが 1対1 で対応する。 B/\sim の完全な決定は難しいが、B からある集合への写像 f が \sim で不変だとすると f の値が異なる絡み目は同値でないことがわかる。このような関数 f を絡み目の不変量と呼ぶ。

§ 2. Jones 多項式の発見

Jones は因子環 (factor) の部分因子環 (subfactor) とその指数についての研究から、組み紐群の因子環への表現を見た。さらにこの表現と因子環のトレースとを組み合わせると、さきの Markov の同値関係 \sim で不変な写像となり、結び目の不変量となることを発見した。このトレースについては河東氏の記事でも解説されているが、簡単に復習しておく。

M_1 を因子環とし、 M_0 をその部分因子環とする。このとき、基本構成法 (basic construction) を繰り返して、因子環の列 $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, \dots$ が得られる。 M_{i-1} は M_i の部分因子環である。 M_i から M_{i-1} への直交射影を e_i とする。 A_n を e_1, e_2, \dots, e_n で生成される M_n の部分代数とする。 τ を M_0 と M_1 の指数 $[M_0, M_1]$ とすると e_i 達は次の関係式をみたす。

$$e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i \quad (E1)$$

$$e_i e_j = e_j e_i, \quad (|i-j| \geq 2) \quad (E2)$$

$$e_i^2 = e_i. \quad (E3)$$

M_{n-1} が M_n の部分代数なので、自然に A_{n-1} は A_n の部分代数である。さて、 M_n 上のトレースを A_n 上に制限したものを Tr_n とおくと、 Tr_n は次の性質をもつ。

$$\text{Tr}_n(xy) = \text{Tr}_n(yx), \quad (x, y \in A_n) \quad (T1)$$

$$\text{Tr}_n(xe_n) = \tau^{-1} \text{Tr}_{n-1}(x), \quad (x \in A_{n-1}) \quad (T2)$$

$$\text{Tr}_n(x) = \text{Tr}_{n-1}(x). \quad (x \in A_{n-1}) \quad (T3)$$

このとき B_{n+1} から A_n への表現を次のように構成できる。 t を $\tau = t^{-1}(1+t)^2$ をみたす数とする。そして B_n の生成元 σ_i に対応する A_n の元 $\rho_i(\sigma_i)$ を $\rho_i(\sigma_i) = (t^{3/2} + t^{1/2})e_i - t^{1/2}$ とおくと、関係式 (E1), (E3) より $\rho_i(\sigma_i) \rho_i(\sigma_{i+1}) \rho_i(\sigma_i) = \rho_i(\sigma_{i+1}) \rho_i(\sigma_i) \rho_i(\sigma_{i+1})$ となり、また、(E2) より $\rho_i(\sigma_i) \rho_i(\sigma_j) = \rho_i(\sigma_j) \rho_i(\sigma_i) (|i-j| \geq 2)$ となる。従って ρ_i は組み紐群 B_n の A_n への表現を定める。この表現とトレース Tr_n とを組み合わせると絡み目の不変量が得られる。 B_n の元 b に対し、 $\bar{V}_{b,n}(t) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})^{n-1} \text{Tr}_n(b)$ とおくと (T1)~(T3) より次が成り立つ。

定理2. 二つの組み紐 $b, b' \in B_n$ に対し、 $b \sim b'$ ならば $\bar{V}_{b,n}(t) = \bar{V}_{b',n}(t)$ が成り立つ。

結び目又は絡み目 L に対し、 $b \in B_n$ を、閉包 b^{\wedge} が L と同値になる組み紐とする。そして $V_L(t) = \bar{V}_{b,n}(t)$ とすると、定理2により、 $V_L(t)$ は b の選び方によらない。すなわち、

系。 $V_L(t)$ は絡み目の不変量である。

定義. 絡み目 L に対して $V_L(t)$ を L の Jones 多項式と呼ぶ。

§ 3. 組み合わせ論的アプローチ

§2 では、組み紐群の表現から Jones 多項式を導いたが、この節では絡み目の図から直接計算する方法について述べる。関係式 (E3) を組み紐群の生成元 σ_i の像 $\rho(\sigma_i)$ を用いて書き直す。 e_i を $\rho(\sigma_i)$ であらわすと $e_i = (t+1)^{-1}(t^{-1/2}\rho(\sigma_i)+1)$ となることより $t^{-1}\rho(\sigma_i)^2 - (t^{1/2} - t^{-1/2})\rho(\sigma_i) - t = 0$ となる。これは $\rho(\sigma_i)^{-1}$ をかけると $t^{-1}\rho(\sigma_i) - (t^{1/2} - t^{-1/2}) - t\rho(\sigma_i^{-1}) = 0$ となる。従って、§2 の \bar{V} と $b, b' \in B_{n+1}$ に対して

$t^{-1}\bar{V}_{b\sigma_1 b'}(t) - (t^{1/2} - t^{-1/2})\bar{V}_{bb'}(t) + \bar{V}_{b\sigma_1^{-1}b'}(t) = 0$ (*) が成り立つ。この関係は次のように言い換えられる。ある絡み目のある交点の近傍が図4 a) のようになっていたとする。この絡み目 L_+ の注目している交点での上下の紐を、図4 b) のように入れ換えた絡み目を L_- とする。また図4 c) のように紐を切りつないで交点を除いた絡み目を L_0 とする。関係式 (*) よりこれら3つの絡み目

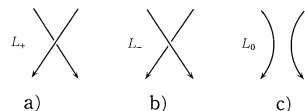



図4

の間には次の関係式が成り立つ。

$$t^{-1}V_L(t) - (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t) - tV_{L'}(t) = 0 \tag{R1}$$

定理 3. Jones 多項式 $V_L(t)$ は上の関係式 (R1) と $V_0(t) = 1$ とから一意的に定まる。ただし O は自明な (絡まっていない) 結び目である。

例 1. 2 個の自明な結び目からなる絡み目  の Jones 多項式

$$t^{-1}V_{\infty}(t) - tV_{\infty}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{\text{ob}}(t), \quad V_{\infty}(t) = 1, \quad V_{\text{ob}}(t) = 1 \text{ より } V_{\text{ob}}(t) = (-t^{1/2} - t^{-1/2}) \text{ となる。}$$

2. Hopf の絡み目  の Jones 多項式

$$t^{-1}V_{\text{Hopf}}(t) - tV_{\text{Hopf}}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{\infty}(t) \text{ より } V_{\text{Hopf}}(t) = (-t^{5/2} - t^{1/2}) \text{ となる。}$$


3. 三つ葉結び目  の Jones 多項式

$$t^{-1}V_{\text{trefoil}}(t) - tV_{\text{trefoil}}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{\text{Hopf}}(t) \text{ より } V_{\text{trefoil}}(t) = -t^4 + t^3 + t \text{ となる。}$$

一般に n 個の結び目よりなる絡み目に対して $t^{(n-1)/2} \cdot V_L(t)$ は t のローラン多項式になる。

§ 4. Jones 多項式の特徴

ここでは Jones 多項式 $V_L(t)$ を Alexander 多項式 $\Delta_L(t)$ [3] と比べる。まず、 L' を絡み目 L の鏡像とすると組み合わせ的な定義から $\Delta_{L'}(t) = \pm \Delta_L(t)$ だが、 $V_{L'}(t) = V_L(t^{-1})$ となることがわかる。これから、例えば三つ葉結び目はその鏡像とは同値でないことがわかる。

また、Jones 多項式を用いて Tait の予想が解決され、交代結び目と呼ばれる広いクラスの結び目最小交点数が決定できた。**交代結び目**とは一つの交点上を通った紐は次の交点では下を通るような図であらわされる結び目のことである。例えば三つ葉結び目は交代結び目である。結び目の**最小交点数**とは図であらわしたときの交点の数の最小数のことである。Tait の予想は、交代結び目の交代的に表示された図が  のような明かに消去される交点をもたない限り、その交点数は表示の仕方によらず一定であるというものである。Jones 多項式の組み合わせ論的な定義から結び目 K の図の交点数は $V_K(t)$ の最高次数と最小次数の差以上であることがわかるが、交代結び目 L に対しては、交代的に表示された図がこのような明かに除ける交点をもたない限り、その交点数は $V_L(t)$ の最高次数と最小次数の差に等しくなるのである。従って L の最小交点数もこの差に等しい。

さらに、結び目の平行化とか satellite に関しても

Alexander 多項式とは際違った違いがある。結び目 K を交点の符号の和が 0 となったような図で表示し、 K の紐を r 重に平行化したものを $K^{(r)}$ とする。2 つの結び目 K と K' に対してこれらの Alexander 多項式が等しければ $K^{(r)}$ と $K'^{(r)}$ の Alexander 多項式も等しくなるが、 K と K' の Jones 多項式が等しくても $K^{(r)}$ と $K'^{(r)}$ の Jones 多項式は異なることがある。[15], [22]

このように Jones 多項式は大変強力である。異なる結び目で Jones 多項式が一致する例があるので、結び目すべてを分類することはできないが、Alexander 多項式とは違って、自明でない結び目で Jones 多項式が 1 となるものは発見されていない。

§ 5. Iwahori-Hecke 代数からのアプローチ

最初に Jones 多項式が定義されたときは作用素環が使われたが、実際に必要なのは、 A_n という代数への組み紐群の表現と A_n 上のトレースである。この節では A_n の生成元の間関係式 (E1)~(E3) とトレースの性質 (T1)~(T3) に注目して、Jones 多項式を再構成する。0 でない複素数 t に対し、複素数体上の単位元をもつ代数 $J_n(t)$ を次で定義する。

$$\text{生成元: } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$$

$$\text{関係式: } \varepsilon_i \varepsilon_{i \pm 1} \varepsilon_i = \frac{t}{(1+t)^2} \varepsilon_i \tag{J1}$$

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i, \quad (|i-j| \geq 2) \tag{J2}$$

$$\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i. \tag{J3}$$

$J_n(t)$ を n 次の Jones 代数と呼ぶ。 ε_i を e_i に移す $J_n(t)$ から A_n への準同型がある。 A_n のときと同様 $\varphi_n(\sigma_j) = (t^{3/2} + t^{1/2})\varepsilon_i - t^{1/2}$ により B_{n+1} から $J_n(t)$ への表現 φ_n が定まる。 $J_n(t)$ は半単純で Iwahori-Hecke 代数 $H_n(t)$ の部分代数と同型である。ここで $H_n(t)$ は次で定義される。

$$\text{生成元: } T_1, T_2, \dots, T_n$$

$$\text{関係式: } T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \tag{H1}$$

$$T_i T_j = T_j T_i, \quad (|i-j| \geq 2) \tag{H2}$$

$$T_i^2 - (t-1)T_i - t = 0. \tag{H3}$$

$\varphi_n(T_i) = (t+1)\varepsilon_i - 1$ により $H_n(t)$ から $J_n(t)$ への射影 φ_n が定義される。 t が 1 の中根でなければ $H_n(t)$ は $(n+1)$ -次対称群の群環と同型であり、半単純である。そして既約表現(単純な部分代数)は $n+1$ の分割をあらわす Young 図形で分類される。 $J_n(t)$ は深さが 2 以下の Young 図形に対応する $H_n(t)$ の単純な部分代数の直和と同型であり

$$J_n(t) = M_{d(n,0)}(\mathbf{C}) \oplus M_{d(n,1)}(\mathbf{C}) \oplus \dots \\ \dots \oplus M_{d(n, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)}(\mathbf{C})$$

となる。ただし、 $M_{d(n,k)}(\mathbf{C})$ は深さが 2 以下で 2 段目が k 個の箱からなる Young 図形 $\begin{array}{c} \square \square \square \\ \square \square \end{array}$ $n+1-k$ 個 に対応する単純成分(全行列環)である。次数 $d(n, k)$ は $d(n, 0) = d(1, 1) = 1$, $d(n, k) = (n+k-1)k^{-1}{}_{n-2}C_{k-1}$ ($n \geq 2, k \geq 1$) となる。 $J_n(t)$ の $M_{d(n,k)}(\mathbf{C})$ 成分を取り出す写像を $\Psi_{n,k}$ と書き、 $\Psi_{n,k}$ と $M_{d(n,k)}(\mathbf{C})$ でのトレース(対角成分の和)との合成を $\chi_{n,k}$ とする。そして $b \in B_{n+1}$ に対し、

$$\text{tr}_n(b) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} a_{n,k} \chi_{n,k}(\varphi_n(b)) \\ \left(\text{但し } a_{n,k} = (-1)^n \frac{t^{(n-2k+2)/2} - t^{-(n-2k+2)/2}}{t - t^{-1}} \right)$$

とおく。すると次の式が成り立つ。

定理 5. tr_n は Markov の同値関係 \sim で不変であり $b \in B_{n+1}$ に対し $\text{tr}_n(b)$ は Jones 多項式 $V_b(t)$ に等しい。Iwahori-Hecke 代数の表現の構成法は知られているので、上の定理から Jones 多項式が計算できる。

§ 6. 可解格子模型と共形場の理論との関係

t を 1 の原始 r 乗根とする。Jones はこの場合には因子環から作った代数 A_{2n+1} が Temperley-Lieb 代数に一致することを指摘した。この代数は統計物理での r -状態 Potts 模型に関する幅 $n+1$ の転移行列(transfer matrix)から生成される代数である。さらにこの模型での分配関数が Jones 多項式に対応している(Jones による解説が [10] にある)。そこで絡み目の図の上で直接統計物理的な模型をつくる試みがされ、Kauffman [12] により単純明解な模型が得られた。 L を向きのついた絡み目の図とし、 $|L|$ を L から向きを除いた図とする。

そして交点 \times に対して二つの状態 $\left(\begin{array}{c} \text{と} \\ \text{と} \end{array} \right)$ を対応させる。統計物理にならってこれらの状態をスピンと呼ぶ。最初のスピンを 0, あとのを 1 とする。 $|L|$ のすべての交点に 0, 1 どちらかのスピンを対応させたものを $|L|$ の一つの状態と呼び ϕ と書こう。これは図としてはいくつかの自明な結び目からなる絡まっていない絡み目になるので、このときの結び目の数を $c(\phi)$ とかく。また、 ϕ の交点のうちスピン 0 のものの個数を $s_0(\phi)$, スピン 1 のものの個数を $s_1(\phi)$ とかく。交点の符号を $\times \rightarrow 1, \times \rightarrow -1$ で定め、 L の交点の符号の和を $w(L)$ とする。こうすると、 L の Jones 多項式は次で計

算される。

$$V_L(t) = (-t^{3/4})^{w(\phi)} \sum_{\phi: |L| \text{ の全ての状態}} t^{-s_0(\phi)/4} t^{s_1(\phi)/4} \\ \cdot (-t^{1/2} - t^{-1/2})^{c(\phi)-1}. \quad (\text{S1})$$

Jones 多項式を上 (S1) で定義すると絡み目の不変量になることが容易に示せる。そしてこの方法で Jones 多項式を定義すると、3次元多様体に関する予備知識(基本群など)なしで Hopf の絡み目や三つ葉結び目がほどけないことが理解できる。

一方、Jones の作った組み紐群の A_{2n+1} への表現が、共形場の理論での n 点関数のみたす微分方程式に関するモノドロミー群の表現にもなることが [20] で明かにされた。ここでは Jones のトレースは共形場の理論での観測期待値と対応している。さらに Jones 多項式は 6-vertex model と呼ばれる可解格子模型とも密接に関係しているが、これについては次の節で述べる。

§ 7. 量子群との関係

Jones 多項式と 6-vertex model と呼ばれる可解格子模型との関係は量子群を用いると次のように述べられる。 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$ を Lie 環 $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ の普遍展開環 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$ の量子化とする。量子群とも呼ばれることもある。 $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ と同じ様に $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$ も 2次元の表現をもつ。この表現の表現空間を V とする。 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$ は Hopf 代数なので $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$ は $V^{\otimes n}$ にも自然に作用する。 $\text{End}(V^{\otimes n})$ の元で $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$ の作用と可換なもの全体からなる部分代数を C_n と書く。このとき C_{n+1} と $J_n(q)$ とは同型である。 $J_n(q)$ 中の組み紐群の生成元 σ_i に対応する元には、 $\text{End}(V^{\otimes n})$ 中の R -行列と呼ばれるものが対応している。Jimbo [7] などにより古典型の量子群とそれに対応する Yang-Baxter 方程式の解 $R(u)$ が構成されている。量子群の表現空間 W に関する Yang-Baxter 方程式とは $\text{End}(W \otimes W)$ の 1 パラメータ u を含む量子群の作用と可換な元 $R(u)$ に関する次の関係式のことである。

$$R_1(u) R_2(uv) R_1(v) = R_2(v) R_1(uv) R_2(u) \quad (\text{YBE})$$

但し $R_i(u) = \text{id}^{\otimes i-1} \otimes R(u) \otimes \text{id}^{\otimes 2-i} \in \text{End}(W^{\otimes 3})$ である。 $R = R(0)$ とおき、 $R_i = \text{id}^{\otimes i-1} \otimes R \otimes \text{id}^{\otimes n-i} \in \text{End}(W^{\otimes n+1})$ とおくとこれらは組み紐群の関係式 (B1) をみたす。そして σ_i に R_i を対応させることにより組み紐群の $\text{End}(W^{\otimes n+1})$ への表現が得られる。 C_{n+1} と $J_n(q)$ とを同一視したとき Jones によって得られた

$J_n(q)$ への表現はこの表現に一致する. R は Drinfel'd の普遍 R -行列の方法からも構成される. このとき $J_n(q)$ 上のトレース tr_n は C_{n+1} をもちいても表示できる. V の基底 e_1, e_{-1} を $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$ の生成元のひとつ q^h に対して, $q^h e_1 = q e_1, q^h e_{-1} = q^{-1} e_{-1}$ となるものとする. ここで, $\text{End}(V^{\otimes n+1})$ から複素数への関数 trace_q を $x \in \text{End}(V^{\otimes n+1})$ に対して

$$\text{trace}_q(x) = \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}=1, -1} \left(\prod_{j=1}^{n+1} -q^{\frac{i_j}{2}} \right) x_{i_1, \dots, i_{n+1}} \quad (\text{Q1})$$

と定義する. 但し $x_{i_1, \dots, i_{n+1}}$ は x の基底 $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{n+1}}$ に関する対角成分をあらわす. このとき,

定理 7. Jones 代数 $J_n(q)$ と C_{n+1} とを同一視すると $b \in B_{n+1}$ に対して $\text{tr}_n(b) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})^n \text{trace}_q(\varphi_n(b))$ となる.

§ 8. Jones 多項式の一般化

今まで Jones 多項式の背景を様々な角度からみてきた. そしてこのような背景が明らかになるにつれて, それぞれの立場から Jones 多項式を一般化する試みがなされ, 多くの新しい不変量が生み出された. 最初の一般化は組み合わせ論的な関係式 (R1) を次のように一般化することによって得られた.

$$a^{-1} P_L(a, t) - (t^{1/2} - t^{-1/2}) P_{L_0}(t) - a P_L(t) = 0 \quad (\text{R2})$$

こうしてもやはり絡み目の多項式になる. [5] この不変量 P は 2 変数 Jones 多項式, スケイン多項式とか, 発見者の頭文字を並べて HOMFLY 多項式などと呼ばれている. これは $a=t$ とすると Jones 多項式に, $a=1$ とすると Alexander-Conway 多項式になり, 両方を含む. また, P は組み紐群の Iwahori-Hecke 代数への表現からも定義できる. 詳しくは Jones による解説 [9] がある. Iwahori-Hecke 代数は Jones 代数と同じように $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}))$ の n の次元の自然表現から, § 6 のようにしても得られるが [20], この場合の trace_q が P で $a=t^{n/2}$ とおいたものに対応している.

同じ様に Kauffman [11] による 2 変数化もあるが, これは B, C, D 型の量子群の自然表現が対応している [21].

一方統計物理の模型から出発して一般化する試みもなされている. 各辺が 2 状態をもつ 6-vertex 模型が Jones 多項式と対応したが, これを 3 状態模型に一般化したものからも結び目の不変量が構成され [1], N 状態

模型の場合にも一般化されている. これは $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}))$ の高いスピンの表現に対応している.

§ 4 での結び目の平行化からも新しい不変量ができる [16] が, これも, 量子群の既約表現と対応している. [19] さらに, S^3 に埋め込まれたグラフの不変量にも一般化されている. [23] これは分子の異性体の判定に使える. そして, 3次元多様体の不変量への一般化が Witten をはじめとして多くの人によってなされている.

おわりに

Jones 多項式の発見は結び目の分類問題に全く新しい手段を導入した. そして現在は 3次元多様体の分類にもこの新しい手法が使われている. Jones 多項式を理解するには決して深い数学的知識を必要とはしないが, 単純ながら大変強力であり, 物理的にも自然なものである. そして, 数学や物理学だけでなく, 化学や生物学にまで広く影響を及ぼしている.

文 献

- [1] Y. Akutsu, M. Wadati, Knot invariants and the critical statistical systems, J. Phys. Soc. Japan, **56** (1987), 839-842.
- [2] J. W. Alexander, A lemma on systems of knotted curves, Proc Nat. Acad., **9** (1923), 93-95.
- [3] J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc., **30** (1928), 275-306.
- [4] J. Birman, Braids, links and mapping class groups, Ann. Math. Studies, **82** (1974).
- [5] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millet, A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc., **12** (1985), 183-312.
- [6] D. M. Goldschmidt, V. F. R. Jones, Metaplectic link invariants, Geom. Dedicata, **31** (1989), 165-191.
- [7] M. Jimbo, A q -difference analogue of $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(H))$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys., **10** (1985), 63-69.
- [8] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc., **12** (1985), 103-111.
- [9] V. F. R. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Ann. Math. Soc., **12** (1985), 103-111.
- [10] V. F. R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pacific J. Math., **137** (1989), 311-334.
- [11] L. Kauffman, An invariant of regular isotopy, Trans. Amer. Math. Soc., **318** (1990), 417-471.

- [12] L. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology*, **26** (1987), 395-407.
- [13] 小林毅, 絡み目理論の新しい不変量—作用素環に由来する Jones 多項式とその一般化—, *数学*, **38** (1986), 1-14.
- [14] A. A. Markov, Uber die freie Aquivalenz geschlossener Zöpfe, *Recueil Mathématique Moscov*, **1** (1935), 73-78.
- [15] H. R. Morton, H. B. Short, The 2-variable polynomial of cable knots, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **101** (1987), 267-278.
- [16] J. Murakami, The parallel version of polynomial invariants of links, *Osaka J. Math.*, **26** (1989), 1-55.
- [17] 村杉邦男, 組み紐の幾何学, ブルーバックス B500, 講談社
- [18] K. Murasugi, Jones polynomials and classical conjectures in knot theory, *Topology*, **26** (1987), 187-194.
- [19] N. Yu. Reshetikhin, Quasitriangular Hopf algebras and invariants of links, *Algebra i analiz*, **1** (1989), 169-188.
- [20] A. Tsuchiya, Y. Kanie, Vertex operators in conformal field theory on PI and monodromy representation of braid group, *Conformal field theory and solvable lattice models* (Kyoto, 1986), *Adv. Stud. Pure Math.* **16**, 297-372.
- [21] V. Turaev, The Yang-Baxter equation and invariants of links, *Invent. Math.*, **92** (1988), 527-553.
- [22] S. Yamada, On the 2-variable Jones polynomial of satellite links, *Topology and Computer Science*, 295-300, Kinokuniya, Tokyo 1987.
- [23] S. Yamada, An invariant of spatial graphs, *J. Graph Theory*, **13** (1989), 537-551.
(むらかみ じゅん・大阪大学理学部)

森重文氏の業績

向 井 茂

京都における今回の国際数学会議でフィールズ賞を受賞した森重文氏は1951年に名古屋市に生まれた。1969年に京都大学理学部に入学、6年間の学生生活を京都で過ごし、京都大学助手、Harvard大学助教授、名古屋大学教授を経て今年の4月に京都大学数理解析研究所教授に着任、現在にいたっている。

氏の専門は代数幾何学。1979年にHartshorne予想を解決して以来、高次元代数多様体の研究を強力に推進し続けてきた。1982年に発表された端射線の理論は高次元多様体の多くの問題に応用されるとともに、それまで夢でしかなかった3次元極小モデル問題に解決の道を開いた。それ以来、内外の研究者の重要な貢献の下に多くの困難を乗り越え、遂に[22]において、この難問を解決し、今回の受賞にいたった。この機会に高次元多様体論における氏の十数年間の業績を振り返ってみたい。(文中敬称は略する。)

§1 Hartshorne 予想

射影空間 P^n の特徴付けがこの方面の最初の仕事となった。 X をコンパクト Riemann 面とする。 X は向き付け可能な閉曲面で、穴(またはハンドル)の個数 g は

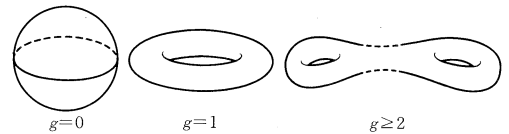


図1 Riemann 面の種数

X の種数と呼ばれる(図1)。 X に計量が与えられているとき、その(Gauss)曲率の平均値は種数のみによる。実際、Gauss-Bonnet の公式より

$$\frac{1}{2\pi} \int_X (\text{曲率}) = 2-2g$$

が成立する。特に、曲率が(いたるところで)正になるのは $g=0$, X が Riemann 球の時に限る。

Riemann 球は複素平面 C を1点コンパクト化したものだが、これの自然な一般化が(複素)射影空間 P^n である。 P^n は C^{n+1} の1次元部分空間全体のなす多様体で、 C^n のコンパクト化になっている。最も基本的な代数多様体であると同時に、Fubini-Study 計量により Kähler 多様体でもある。 Riemann 球 P^1 の曲率による特徴付けを一般化したものとして Frankel 予想がある。

(F-n) n 次元コンパクト Kähler 多様体 X で正則断面曲率(holomorphic bisectional curvature)が正なもの