Strings on Orbifolds, Nucl. Phys. B261 : 678, 1985.
[11. b] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, E. Witten, Strings on Obifolds. 2, Nucl. Phys. B274 : 285, 1986.
[12. a] E. Witten, Noncommutative Geometry and String Field Theory, Nucl. Phys. B268 : 253, 1986.
[12. b] E. Witten, Interacting Field Theory of Open Superstrings, Nucl. Phys. B276 : 291, 1986.
[13. a] E. Witten, Topological Quantum Field Theory, Commun. Math. Phys. 117 : 353, 1988.
[13. b] E. Witten, Topological Sigma Models, Commun. Math. Phys. 118 : 411, 1988.
[14] E. Witten, Quantum Field Theory and the Jones Polynomial, Commun. Math. Phys. 121 : 351, 1989.
[15. a] E. Witten, On the Structure of the Topological Phase of Two-Dimensional Gravity, Nucl. Phys. B340 : 281, 1990.
[15. b] R. Dijkgraaf, E. Witten, Mean Field Theory, Topological Field Theory, and Multimatrix Models, Nucl. Phys. B342 : 486, 1990.
[16] E. Witten, Two Dimensional Gravity and Intersection Theory on Moduli Space, Preprint IASN=HEP-90/45, May, 1990.
[17] E. Witten, インタビュー, 1990 年 8 月.
[18] 深谷賢治, E. Witten 氏の業績 II.

(えぐち とうる・東京大学理学部物理)

E. Witten 氏の業績 II

深 谷 賢 治

§1. 序

今回の E. Witten 氏(以後敬称略)のフィールズ賞受賞はいろいろな意味で注目すべきできごとである．その一つの理由は Witten が物理学者であることである．以前にも物理学者が数学に転じすぐれた数学上の業績を挙げた例は多い．それが Witten の場合とちがうのは，彼らは数学者に転向して業績を挙げたのであって，その物理の素養は意味深い問題を発見する過程で生かされてはいても，彼らの仕事はあくまで数学者と同じやり方で数学のわくの中でなされている点である．この点，Witten は現在でもあくまで物理学者であり，数学上の業績も，物理学者としての立場で，物理の手法を用いて，数学のわくの外で，挙げられている．そのような業績が数学に対してフィールズ賞受賞が当然であるような莫大な影響を与えるようになっているという状況は 20 世紀になって現代数学が確立して以来始めてであろう．

聞くところによると，いくつかの素粒子論の研究室では 2, 3 ケ月に 1 度コピーの使用量が突然多くなる日があり，それは Witten のプレプリントが到着した日であるという．数学の研究室では，Witten のプレプリントの殆んどが解読不能であるので，そういうことはないが，ここ数年の間に，Witten が何か新しいことを言い出したということが伝わり，面白そうな内容なのによく分らず，物理学者に聞きに行ったりなどしておろおろする，といった経験を何度もした．Witten がいなければこの数年間の幾何学は実にさびしかっただろうと思う．

物理学と数学の接近がいわれてひさしいが，Witten はそれを象徴する人物であり，数学の中ではその影響は特に幾何学において著しい．物理学特に場の量子論が幾何学に大きな影響をもつようになった背景には，空間全体にかかわる大域的な性質が場の理論においても大きな意味をもつことが発見されたことがあるように思われる．一昔前の印象では，物理屋さんが興味をもつのは座標を入れてテンソル計算して出てくる式だけで大域的な不変量などは数学者のお遊びぐらいに思っているのではないか，と感じていたのであるが，最近ではそんな印象はけしとび大域幾何学は場の理論での日常語になりつつある．さらに Witten にいたっては物理的なやり方で，位相幾何学の新しい定理を予言したりさえしている．

空間全体に関わる大域的な性質を研究する事は，今世紀初頭の，‘物理学と数学の不幸な別れ’，以後に幾何学の主流になった問題意識であると思われるが，再会の時である今その物理学上の意味が発見されているのであろう．

以上とりとめのない感想を書いてしまったが，Witten の仕事の，幾何学上の，筆者なりの，位置づけである．

さて，Witten の幾何学上の仕事について述べるが，

Wittenの仕事の重要性は，‘新しい定理を証明したこと’や‘新しいテクニックを開発したこと’にあるのではなく，また，‘既知の問題の解決’でもない．従って，証明された定理を並べるという解説は不可能かつ無意味である．そこで筆者が比較的よく知っている3つの仕事にしぼりそれぞれ若干内容まで立ち入って説明を加える．数学者が‘数学’に書く解説であるので，どの命題が証明されているか又どれが数学的に定式化されうるのか，にはこだわったが，数学的に定式化できない命題を軽く見ることはしなかった．

§2. Morse 理論

[1]はWittenが純粋数学(こういう分け方はあまり意味がないが)について書いた最初の論文でいろいろな意味で彼のその後の数学上の仕事の雛形になっている．この論文は含蓄に富んでいて要約するのは困難であるが，まずとりあえず数学的に定式化できる部分だけを取り出してのべてみる．(こうしてしまうことは矮小化であることを始めにおことわりしておく．)

向きの付いたn次元多様体Mとその上のMorse関数fをとる．つまりfは局所的には座標変換で

(2.1)　$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto x_1$

又は

(2.2)　$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$

の形に移るものとする．fがその回りで(2.2)の形になっている点，いいかえると$df=0$となる点は有限個である．これらを$p_1, \cdots, p_k$とする．各p_jの回りで(2.2)のようにfを表わしたとき，$\varepsilon_i=-1$であるようなiの数をp_jでのfのMorse index と呼びn_jとおく．Morse理論はfを用いてMのhomologyを調べるものであった．

M上にRiemann計量を1つとり，それによってLaplacian $\Delta = dd^* + d^*d$を定める．Δのk-型式$\Lambda^k T^*$への作用の0固有値の重複度がBetti数rank $H^k(M; \boldsymbol{R})$であった．(以後Δが$\Lambda^k T^*$に作用しているときΔ^kと書くことにする．)

fを用いてdとd^*を

$$\begin{cases} d_t = e^{-ft} d e^{ft} \\ d_t^* = e^{ft} d^* e^{-ft} \end{cases}$$

と変形し$\Delta_t^k = d_t d_t^* + d_t^* d_t$とおく．$\Delta_t^k$の0固有値の重複度は$t$によらないから，$H^k(M; \boldsymbol{R})$を調べるのに$\Delta_t^k$を使うことができる．$t \to \infty$の極限では次のことが成り立つ．

定理 2.3. $\varepsilon > 0$に対してtを十分大きくとると次が成り立つ．

(1)　Δ_t^kのεより小さい固有値に属する固有空間の直和をC_k^tとおくと，C_k^tの次元は$n_j=k$となるjの数に等しい．

(2)　$n_j=k$なるjに対して，$\varphi_j \in C_k^t$があって

$$|\varphi_j(x)| \le C \exp(-t \operatorname{dist}(x, p_j)^2 / C)$$

が成り立つ(ここでdist(x, p_j)はxとp_jの距離)．いいかえると，φ_jはp_jの小さな近傍に殆んど集中していて，p_jからはなれると指数オーダーで0に近づく．

定理2.3はΔ_tを各点の近傍で計算してみることで比較的容易に示せる．すなわち，φをΔ_t^kの小さい固有値に属する固有関数とし，$x \neq p_1, \cdots, p_k$とすると，xの回りで，

$$\Delta_t = \Delta + t^2 |df|^2 + \cdots$$

となり$|df| \neq 0$である．このことから$t \to \infty$では$|\varphi(x)|$が小さくなることが分る．又p_jの回りでは

$$\Delta_t = \Delta + \sum t^2 x_i^2 + \sum \varepsilon_i \left[i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), dx_i \wedge \right] + \cdots$$

となる．ここで$i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, $dx_i\wedge$は

$$\begin{cases} i\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) w(x_1, \cdots, x_l) = w\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, x_i, \cdots, x_l\right) \\ dx_i \wedge w = dx_i \text{ と } \omega \text{ の外積} \end{cases}$$

で与えられる作用素で，[　，　]は交換子．これから，$\varepsilon_i = -1$となるiが$1, 2, \cdots, k$であるとすると，

$$\rho = \exp(\Sigma - tx_i^2/2) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

に対して$\Delta_t \varphi \fallingdotseq 0$が成り立つ．この$\varphi$を少しずらしたものが$\varphi_j$である．(以上の部分は[2] Chapter 12に解説されている．)

定理2.3からrank $H^k(M; \boldsymbol{R}) \le$‘$n_j=k$となる$j$の数’が直ちに分る．これが古典的なMorse不等式である．

より進んで，$H^k(M; \boldsymbol{R})$を求めるには，次のような考察を行なう．定義から分るように$d_t \Delta_t = \Delta_t d_t$である．よって$d_t$は$C_k^t$を$C_{k+1}^t$に移す．このことから

(2.4)　$H^k(M; \boldsymbol{R}) = \dfrac{\operatorname{Ker} d_t|_{C_k^t}}{\operatorname{Im} dt|_{C_{k-1}^t}}$

$n_{j_1} = k-1$, $n_{j_2} = k$であるj_1, j_2をとり，定理2.3(2)のφ_jについて

(2.5)　$\langle d_t \varphi_{j1}, \varphi_{j2} \rangle$

を考える．(2.5)が計算できれば，φ_jたちはC_k^tの基底

であるから，(2.4)により $H^k(M;\boldsymbol{R})$ が求まる．(2.5)は次のようにして計算できる(と[1]にはのべられている．) f の gradient vector 束 grad f の軌道で p_{j_1} と p_{j_2} を結ぶものを考えると，$n_{j_1}+1=n_{j_2}$ より，generic な f に対しては，これらはちょうど有限本である．これらに符号 $\varepsilon_l=\pm 1$ を与える．(各軌道は p_{j_1} での不安定多様体と p_{j_2} での安定多様体の交点に対応するが，その交点の交点数への寄与を q_l とする．) $n(p_{j_1}, p_{j_2})=\sum \varepsilon_l$ とおく．

主張 2.6.

$$\langle d_t\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}\rangle \sim \exp\{-t(f p_{j_2})-f(p_{j_1})\}n(p_{j_1}, p_{j_2}).$$

このことの数学的に厳密な証明は知られていないようなので定理とは書かなかった．証明の困難さは，右辺が $t\to\infty$ で指数巾で0に近づき，普通の漸近展開ではつかまらない点にある．

[1]では他にも M に Killing vector 場 K があるとき，d を $d+t_i(K)=d_t$ と変形し同様な義論を用いることで，vector 束の指数公式を示している．

以上は[1]の数学的に定式化しやすい部分の要約である．始めに述べたように，このように要約することは[1]の矮小化である．その理由は，たとえば，2つある．

第1に[1]では随所に場の理論の用語が使われ，数学的概念がそれによっていいかえられている．たとえば，作用素 $d_t+d_t^*$ や $\sqrt{-1}(d_t-d_t^*)$ は super charge，$\varDelta_t$ は対応するハミルトニアン，又，$dx_i\wedge$ や $i\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)$ はフェルミオンの生成，消滅作用素と呼ばれ，又，$E_\pm=\{w\in\oplus_{\Lambda^k}M \mid *\omega=\pm\omega\}$ とした時，super charge $d+d^*$ が $\varDelta$ の E_+ 上の0でない固有空間と E_- のそれとの間の1対1対応を与えること(index　theory では有名な事実)は super symmetry として，又，0固有空間についてはそうではない事(即ち，符号作用素(signature operator)の index が0でない事)は超対称性(super symmetry)の破れ(spontaneous breaking)として説明される．

これらのうちどれが Witten によって新たにもたらされたものでどれが前から知られていたことなのか筆者には定かでないが，このような幾何学と場の理論の対応を考えていくという動きの(特に物理側での)中心人物が Witten であることは確かであろう．(数学側でそれを挙げれば Atiyah である．)

上のような言いかえは単に言葉の問題ではなく，幾何学に新しい大きな見通しを開くもので，実用上でもたとえば次のような利点がある．ある幾何学的概念(たとえば index)が場の理論の言葉にいいかえられたとする．場の量子論にはいくつかの等価な表現(正準量子化，Feynman 径路積分 e.t.c.)があるので，数学的概念が1つの表現にいいかえられるとそれをただちに他のものにおきかえることができる．又場の理論で広く受け入れられている手法(たとえば WKB 近似，Ward identy)を適用することができる．このようにして，一見かけはなれた数学的事象の間に関係を見出すことができる．その実例には§3,4で出会うであろう．

注意すべきことは上でのべた場の理論での諸手法やいくつかの表現の等価性は物理学では広く受け入れられているが，一般的な定式化や数学的に厳密な証明があるわけではないという点である．従ってそれによる議論は，論理的には，証明を与えるというより，事象の関係を発見的に明らかにする役割りをはたす．又，そのような議論は，一定の処方箋に従って行なうことはできず，常に独創的なアイデアを要する．

すでにのべた Morse 理論の場合には，(2.6)の‘証明’にそのような手法が表われる．Witten は(2.6)の左辺をトンネル効果と解釈し，又考えている理論がどのようなラグランジアンに対応する場の理論であるかを明らかにした上で，トンネル効果を計算する手法としての WKB 法を適用して(2.6)を導く．

本節前半の記述で失なわれている第2の点は，[1]が常に無限次元の場合を意識して書かれていることである．有限次元の場合にのみ記述がなされているのは(おそらくこの論文が数学の雑誌に発表され数学者の読者を想定しているために)数学的に定式化ができる場合に限ったせいであろう．[3]の(特に始めの数ページ)は[1]の無限次元化が念頭におかれている．)場の量子論の主要な困難は自由度が無限大であることに由来し，したがって有限自由度の場合に限った記述は場の理論としてはおもちゃにすぎない．[1]の意義は，数学的な定式化が可能な場合に限って，幾何学と場の理論の対応を与える手続きを明確に述べたことにあるといってよいように思う．§3,4で述べるのは無限自由度の場合であるが，これらでは Witten は場の理論との対応をもとに幾何学的に深い洞察を与えている．[4]による Atiyah-Singer の index theorem の‘証明’も同系列に属する．

T氏によると，‘論文の価値はそれがどのくらい妄想を引き起こすかで決まる’，そうであるが，その意味では最高の論文である．

§ 3. Elliptic cohomology

Witten の Elliptic cohomology についての論文には [5] と [6] がある．本節ではこれらについて解説する．Elliptic cohomology についてのどのアイデアが Witten のものでどれが他の人(Landweber, Stong, Ochanine, Taubes, Bott, Zagier, Hirzebruch etc.)のものか筆者にははっきりしない部分が多いのでここではそれにはこだわらない．Elliptic cohomology についての基本文献は [7] である．

向きのついた $4k=d$ 次元多様体 M 上の vector 束 V に対して $\Lambda^k V$ で k 次の外積の作る vector 束，$S^k V$ で k 次の対称積の作る vector 束を表わす．楕円種数 (Elliptic genus) は下の (3.1), (3.2) 式のようにして定義される．(正確な定義はすぐ後にのべる．)

$$(3.1)\quad F(q)=q^{-d/24}\langle \hat{A}(M)\mathrm{ch}\bigotimes_{l=1}^{\infty}S_{q^l}T,\ M\rangle.$$

$$(3.2)\quad H(q)=q^{-d/16}\langle \hat{A}(M)\mathrm{ch}\bigotimes_{l=1}^{\infty}S_{q^l}T\otimes\bigotimes_{m=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots}\Lambda_{q^m}T,\ M\rangle$$

ここで $\hat{A}(M)\in H^*(M\,;\boldsymbol{Z})$ は M の $\hat{A}$ genus, ch は chern 指標，q は不定元，T は接束．

(3.2) をもう少し正確にのべる．0 以上の整数 n, r_1, r_2 に対して

$$c(n;r_1,r_2)=\#\left\{(l_1,\cdots,l_{r_1},m_1,\cdots,m_{r_2})\ \middle|\ \begin{array}{l}\sum l_i+\sum m_i=n/2\\ l_i\in\{1,2,\cdots\}\\ m_i\in\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots\right\}\end{array}\right\}$$

とおき，$R_n=\bigoplus_{r_1,r_2}c(n;r_1,r_2)S^{r_1}T\otimes\Lambda^{r_2}T$ としたとき $H(q)=q^{-d/16}\sum_n\langle\hat{A}\ \mathrm{ch}\ R_n,\ M\rangle q^{n/2}$.

たとえば，$R_1=T$，$R_2=\Lambda^2T\oplus T$，$R_3=\Lambda^3T\oplus(T\otimes T)\oplus T$．(3.1) の方も同様である．これらを M の楕円種数という．(正確には M によらない q の関数比の分だけちがったものをいうがここではこだわらない．)

楕円種数について数学的に一番はっきりとした定理は，

定理 3.3. M が Spin 構造をもち又自明でない S 作用をもてば $H(q)$ は定数である．(つまり q^0 以外の係数は 0 である．)

これは $\hat{A}$ 種数についての Atiyah-Hirzebruch [8] の定理の一般化である．

定理 3.3 はそれが全体の目的というより楕円種数をめぐるさまざまな考察の 1 つの帰結というべきである．それらについて若干の解説を行なう前に定理 3.3 そのものについてもう少し述べる．この定理は現在は数学的に厳密な証明が与えられている．それらのうち最初のものは Taubes [9] によるものでこれは Witten [5] のアイデアの正当化に近い(そうである.)この Taubes の論文は大変難解であったがその後 Bott-Taubes [10] によりより読みやすい証明が与えられた．この後者の証明も単独の $\langle\hat{A}\ \mathrm{ch}\ R_n,\ M\rangle$ を論ずるのでなく無限個の n について同時に論じるのが Key になっている．

さて楕円種数についてもう 1 つの数学的に定式化できる結果はつぎのものである．

$$\eta(q)=q^{1/24}\prod_{l=1}^{\infty}(1-q^l)\quad(\text{Dedekind }\eta\text{ 函数})$$

とし

$$\Phi(q)=\eta(q)F(q)$$
$$f(\tau)=\Phi(e^{2\pi\sqrt{-1}\tau})$$

とおく．

定理 3.4. $P_1(M)=0$ であるとき，f は $SL(2,\boldsymbol{Z})$ に対する重さ $d/2$ の保型形式である．すなわち $\begin{pmatrix}a & b\\ c & e\end{pmatrix}\in SL(2,\boldsymbol{Z})$ に対して

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+e}\right)=(c\tau+e)^d f(\tau)$$

が成り立つ．($p_1(M)$ は M の第 1 ポントリャーギン類)

$H(q)$ に対しては $\Gamma_0(2)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & e\end{pmatrix}\in SL(2,\boldsymbol{Z})\ \middle|\ c\equiv 0 \bmod 2\right\}$ に対して同様な保型性が成り立つ．(この場合は $p_1(M)=0$ のかわりに M が Spin 構造をもつことを仮定する.)又，$SL(2,\boldsymbol{Z})/\Gamma_0(2)\cong\boldsymbol{Z}_2$ の 0 でない元で $H(q)$ は $G(q)=\langle\hat{A}(M)\,\mathrm{ch}\bigotimes_{l=1}^{\infty}S_{q^l}T\otimes\Delta T\otimes\bigotimes_{m=1}^{\infty}\Lambda_{q^m}T,\ M\rangle$ に変換される．ここで ΔT は M の Spin 構造と，Spinor 群の Spin 表現から得られる vector 束．

以上の事柄の数学的に正確な証明は [11] にあるが，これらの内在的理由を Witten は後でのべる主張 (3.6) を通じて与えている．

[5] の重要な発見は楕円種数と Loop 空間上の楕円型微分作用素の指数との関係を見出したことである．(蛇足ながらつけ加えると楕円種数の楕円は楕円函数又は楕円曲線に由来し楕円型微分作用素の楕円から来たのではない(と思う.)) $\mathcal{L}M$ で M の free loop space つまり S^1 から M への写像全体を表わす．$\mathcal{L}M$ には自然な S^1 作用がある．つまり $e^{2\pi\sqrt{-1}t}\in S^1$，$v: S^1\to M\ (v\in\mathcal{L}M)$ とき，$(e^{2\pi\sqrt{-1}t}\cdot u)(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})=u(e^{2\pi\sqrt{-1}(t+\theta)})$ とおく．

主張 3. 5.

'$\mathcal{L}M$ が Spin 構造をもつ' $\Longleftrightarrow$ '$p_1M=0$'

'$\mathcal{L}M$ は向き付け可能' $\Longleftrightarrow$ '$w_2M=0$'

$\Longleftrightarrow$ 'M は Spin 構造をもつ.'

$\mathcal{L}M$ は無限次元なのでその上の向き付けや Spin 構造を有限次元のときと同じやり方では定義できない. それらの数学的な定式化は知られていないので 3. 5 は定理でありえない. 3. 5 の内容をなす洞察は [5] § 3 をみていただきたい.

有限次元の多様体 X には, Spin 構造をもてば Dirac 作用素 ð, 向き付け可能なら符号作用素なる楕円型微分作用素が定義され, その指数 index ð$(=\langle\hat{A}(X), X\rangle)$ や Sign X は特性数(この場合はあるいは種数)と呼ばれていた. さらに X に群 G が作用していると指数は G の表現環 $R(G)$ の元として定まった.

$\mathcal{L}M$ は無限次元であるからその上には Dirac 作用素等は普通のやり方では定義できず又その数学的な定義も知られていない. しかし, とりあえず, 何らかの意味でそれらが定義されたとすると, $\mathcal{L}M$ には S^1 作用があるから, index ð や Sign $\mathcal{L}M$ は $R(S^1)=\boldsymbol{Z}[q, q^{-1}]$ の元となるであろう.

主張 3. 6.　index ð$=F(q)$

sign $\mathcal{L}M=G(q)$.

上式の左辺の定義はないから, 主張 3. 6 は定理ではない. その主張の内容を述べる. 一般に, 有限次元多様体 X に compact 群 G が作用している時, 指数(ð 等の)は G の不動点集合 X_G の特性類と X_G の法束への G の作用の言葉で表わす事ができる(不動点公式, [12]). $\mathcal{L}M$ への S^1 の作用の場合, 不動点集合は定値写像からなり M 自身に同一視される(不動点集合が有限次元になる事に注目). これにより, 不動点公式が無限次元の場合にもそのまま成り立つと仮定すると, $\mathcal{L}M$ の作用素の指数を求める事ができる. その結果が 3. 6 である.

Witten は 3. 6 をもとに 2 つの定理 3. 3 と 3. 4 の説明を与えている.

(3. 4) についてはまず Feynman 径路積分による楕円型作用素の指数の表示を知る必要がある. 有限次元多様体 X の場合にはこれは [4] にのべられている. この場合には

$$\mathcal{P}=\left\{(u\ \psi)\middle|\begin{array}{l}u: S^1\to X\\ \psi \text{ は } u^*(\varDelta T) \text{ の切断}\end{array}\right\}$$

とすると($\varDelta T$ は X の Spin 束)

$$\text{index ð}=\int_{\mathcal{P}}\mathfrak{D}u\mathfrak{D}\psi\exp-S(u\ \psi)$$

ここで $\mathfrak{D}u\mathcal{L}\psi$ は Feynman 測度で S はある作用(action)で(u, ψ)に対して数を与えるもの. S の形は [4] にあるので略す.

ここで扱っているのは $X=\mathcal{L}M$ であるから $\mathcal{P}$ のかわりに S^1 から $\mathcal{L}M$ への写像つまりトーラスから M への写像を考える必要がある. $R(S^1)=\boldsymbol{Z}[q, q^{-1}]$ の元としての index ð を考え $q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ での値を求めるには $T_\tau=\boldsymbol{C}/\boldsymbol{Z}\oplus\tau\boldsymbol{Z}$ なるトーラスを考え

$$\mathcal{P}_\tau=\left\{(f, \psi)\middle|\begin{array}{l}f: T_\tau\to M\\ \psi \text{ は } f^*(\varDelta T) \text{ の切断}\end{array}\right\}$$

上で径路積分をとる必要がある(そうである.)すなわち

$$\text{index ð}(e^{2\pi\sqrt{-1}\tau})=\int_{\mathcal{P}_\tau}\mathrm{D}f\mathrm{D}\psi\exp-S(f, \psi)$$

($X=\mathcal{L}M$ のときの S の形は [5], [6] には書かれていない. 専門家には容易に分ることではないかと思うが, 素人芸で嘘を書くとまずいのでここには書かない.)

ここで注目すべきなのは T_τ は $SL(2, \boldsymbol{Z})$ の元で (3. 4) のように τ を変換しても(複雑構造もこめて)同じトーラスになることである. 従って $S(f, \psi)$ が T_τ^2 の正則同型に対する不変性をもてば index ð の不変性が導かれる. これが 3. 4 の説明である. p_1 についての条件があらわれるのは 3. 5 のためである.

$G(q)$ に対しては $SL(2, \boldsymbol{Z})$ 全体でなく $\Gamma_0(2)$ についてのみ保型性が成り立つのは, この場合は符号作用素であるので, 時間方向に 1 回りしたとき -1 倍になる直線束を考える必要があることからくる. ([4] でいう ABC 境界条件, P 168 をみよ). この直線束を保つ T_τ^2 の正則自己同型が $\Gamma_0(2)$ である. この直線束を $SL(2, \boldsymbol{Z})/\Gamma_0(2)$ の 0 でない元で動かすと空間方向に 1 回りしたとき -1 倍になる直線束になる. これが [6] でいう Neveu-Schwartz 境界条件で, $H(q)$ に対応する.

定理 3. 3 の '証明' には M 上の S^1 作用を使って $\mathcal{L}M$ とその上の作用素を変形する. つまり $\theta\in[0, 2\pi]$ に対して

$$\mathcal{L}_\theta M=\{u:[0, 1]\longrightarrow M|u(1)=\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\theta}\cdot u(0)\}$$

$(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}u(0)$ は $e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}S^1$ の $u(0)\in M$ への作用) を考え, $\mathcal{L}_\theta$ 上の作用素を考える. これらは θ に対して連続的に動くと考えられるので, その指数は θ によらないはずである. 一方 $\mathcal{L}M=\mathcal{L}_0M=\mathcal{L}_{2\pi}M$ であるから, $\mathcal{L}M$ 上の作用素の指数の間に等式が得られる. この等式を用いるのである.

楕円種数は，代数的位相幾何学，保型関数，群作用，超弦理論など，多くの分野にまたがり奥深い内容をもっている．筆者の能力のために一部分しか述べられず，たとえば楕円関数との関係などには触れられなかった．[7] をご覧いただきたい．

§4. Jones-Witten 不変量

向きのついた 3 次元多様体 M と単連結な compact Lie 群 G をとり自明なファイバー束 $M\times G$ を考える．G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし

$\mathfrak{A} = M\times G$ の接続全体 $=\mathfrak{g}$ 値 1 型式全体．

$\mathfrak{G} = M\times G$ のゲージ変換全体

とおく．接続 $A\in\mathfrak{A}$ の Chern-Simon 不変量とは

$$\mathcal{L}(A)=\frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)$$

である．Witten は [13] で Feynman 径路積分

$$(4.1)\quad Z_k(M)=\int_{\mathfrak{A}}\mathcal{D}A\exp\left(\sqrt{-1}\,k\mathrm{L}(A)\right)$$

を考えた．(ここで $\mathcal{D}A$ は $\mathfrak{A}$ の Feynman 測度で普通の測度論の意味では存在しない．したがって(4.1)も数学的には意味づけのなされていない式である．) Witten がこれに対して [13] でしたことは，

(イ)　$k\to\infty$ での $Z_k(M)$ のふるまいを停留位相の方法を準用して調べたこと．

(ロ)　M が境界をもつ場合を考察し，境界になっている曲面の共形的場の理論とのかかわりを発見したこと．

(ハ)　共形的場の理論から得られる情報から $Z_k(M)$ を計算するアルゴニズムを与えたこと．

(ニ)　M がリンクを含む場合への(4.1)の一般化が，$M=S^3$, $G=SU(N)$ の場合，Jones 多項式と等価であることを見出したこと．

の 4 つが主である．それぞれについて若干の説明を与える．

(4-イ)

有限次元の多様体 X 上の Morse 関数 f が与えられたとき，積分

$$\int_X e^{\sqrt{-1}kf(x)}dx$$

の $k\to\infty$ での漸近的ふるまいは f の特異点の近くでのふるまいだけから決まり，より正確には各特異点での f の Hessian の固有値で決まる．(4.1)式での $\mathfrak{A}$ は有限次元ではないが，この積分に対しても同様のことが成り立つとしよう．この場合 $f=k\mathcal{L}$ である．まず，$\mathcal{L}$ のゲージ不変性より積分は $\mathfrak{A}$ 上ででなく $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ 上でとることができることに注意する．次に $f=k\mathcal{L}$ の特異点(停留点)つまり Chern-Simon 不変量の停留点は平坦(曲率$=0$)の接続である．3 番目に，$\mathcal{L}$ の Hessian は無限次元空間の線形作用素であるが，この場合それは楕円型の微分作用素で基本的には(接続でねじった) Laplacian になる．最後に，Laplacian の固有値を使って作った有理型関数の特殊値が Ray-Singer Torsion や η-不変量で，η-不変量の小数部分が，あらくいえば，Chern-Simon の不変量である．

以上のような考え方で Witten が得た極限公式が

$$(4.2)\quad Z_k(M)\sim e^{\sqrt{-1}\pi\eta(0)/2}\sum_\alpha e^{\sqrt{-1}(k+C_2(G)/2)I(A^{(\alpha)})}T_\alpha$$

([13](2.17)) である．ここで総和は M の平坦 G 接続 α たち全体についてとり，$I(A^{(\alpha)})$，T_α は α の Chern-Simon 不変量及び Ray-Singer Torsion，$C_2(G)$ は群 G のみによる数である．Ray-Singer Torsion の位相不変性は有名な定理である (Cheeger-Müller)．$\eta(0)$ はある実数で，従って $e^{\sqrt{-1}\pi\eta(0)/2}$ は絶対値 1 の複素数(位相因子)である．(4.2)式の位相因子は微妙な問題をはらんでいて，たとえば M の接束の自明化のとり方(M の framing)によって変ってしまう．この点には触れないことにする．

(4-ロ)

Chern-Simon 不変量の径路積分と共形的場の理論の関係を見出したことが [13] の最も著しい発見である．共形的場の理論で conformal block と呼ばれているものがあり，さまざまなやり方で作られているが，でき上った結果だけを記述すると次のようになる．Σ を 2 次元向きづけ可能多様体とし，$\mathcal{T}(\Sigma)$ で Σ の複素構造全体を表わす．自然数 k と compact Lie 群 G に対して，$\mathcal{T}(\Sigma)$ 上の正則 vector 束 $\mathcal{H}_\Sigma$ とその上の射影的に平坦な接続 ∇ (0 ホモトピックな閉曲線にそったホロノミーが定数である接続) が定まる．この $(\mathcal{H}_\Sigma\nabla)$ を conformal block という．

これを使うと，境界 Σ をもつ 3 次元多様体 M の場合への $Z_k(M)$ の拡張は次のようになる．

$J\in\mathcal{T}(\Sigma)$ に対して $Z_k(M;J)$ なる $\mathcal{H}_\Sigma^J$ ($=\mathcal{H}_\Sigma$ の J でのファイバー) の元が定まる．J を動かすと，$\mathcal{H}_\Sigma$ の切断 $Z_k(M;\cdot)$ が得られるが，これは

$$(4.3)\qquad \nabla Z_k(M;\cdot)=0$$

をみたす．

$\mathcal{T}(\Sigma)$ や $\mathcal{H}_\Sigma$ が表われる理由を説明する紙数がないのが残念である．そのための議論では Feynman 径路積分による量子化と正準量子化の等価性が本質的に用いられる．もう少しだけ説明を加える．今，$M=\Sigma\times\boldsymbol{R}$ とすると，$\partial M=\Sigma u\Sigma^-$ ($\Sigma^-=\Sigma$ の向きを逆にしたもの) になる．$\mathcal{H}_{\Sigma^-}=\mathcal{H}_\Sigma^*$ (双対) であるので，$Z_k(M)$ は，$\mathcal{H}_\Sigma^*\otimes\mathcal{H}_\Sigma$ の元つまり $\mathcal{H}_\Sigma$ から $\mathcal{H}_\Sigma$ への準同型を与える．$M=\Sigma\times\boldsymbol{R}$ であるとき，Σ は空間 $\boldsymbol{R}$ は時間とみなされ，$\mathcal{H}_\Sigma$ はある瞬間に場がとりうる状態全体を表わす．(これを quantum Hilbert Space という．) 線形写像 $Z_k(M):\mathcal{H}_\Sigma\to\mathcal{H}_\Sigma$ は初期条件 $u\in\mathcal{H}_\Sigma$ を与えたときそれが $Z_k(M)(u)\in\mathcal{H}_\Sigma$ に変化することを示す．もっとも実はここで扱っているのは何の力も働いていない理論なので，$M=\Sigma\times\boldsymbol{R}$ のときは $Z_k(M)$ は恒等写像である．$\mathcal{H}_\Sigma^J$ が Σ だけでなく J にもよっていることが事態を見えずらくしているが，接続 ∇ があることで $\mathcal{H}_\Sigma^{J_1}$ と $\mathcal{H}_\Sigma^{J_2}$ を(ある弱い意味で)同一視できる．つまり $\mathcal{H}_\Sigma^J$ はある意味で J によらない．(理論が位相不変になるためにはそうでないと困る．)

ここで注目すべきことは $\mathcal{H}_\Sigma$ が有限次元であるという事実である．一般に場の理論ではとりうる状態の空間は無限次元になり，従って何か意味のある量を計算しようとすると発散がおこり，又発散しない場合でも通常答は有限回の手続きでは求まらない．$\mathcal{H}_\Sigma$ が有限次元であるという事実は，$Z_k(M)$ は数学的に厳密な形で定式化でき，又，計算可能であろう，ということを示唆する．これが Witten がこの理論は exactly soluble であるといっている意味と思われる．

(4-ハ)

M_1, M_2 を2つの境界付き3次元多様体とし，$\partial M_1=\Sigma$, $\partial M_2=\Sigma^-$ とする．M で M_1 と M_2 を境界 Σ にそってはり合わせた空間とする．$J\in T(\Sigma)$ をとると

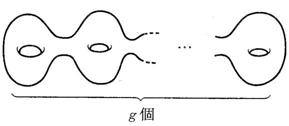
$$\begin{cases} Z_k(M_1;J)\in\mathcal{H}_\Sigma^J \\ Z_k(M_2;J)\in\mathcal{H}_{\Sigma^-}^J\cong(\mathcal{H}_\Sigma^J)^* \\ Z_k(M)\in\boldsymbol{C} \end{cases}$$

が定まるが，これらに対して Witten は

(4.4)　$Z_k(M)=\langle Z_k(M_1;J), Z_k(M_2;J)\rangle$

を主張した．((4.3)より(4.4)の右辺は J によらない．) (4.4)は Z_k の物理的意味からは当然成り立つべき式であるがこれを用いると $Z_k(M)$ を計算するやり方が得られる．

3次元多様体を構成する(あるいは表示する)やり方の代表的なものに Heegard 分解と Dehn surgery があるがそれぞれについて $Z_k(M)$ の求め方が得られる．



図イ

ここでは前者についてのべる．M が $M=H_g^1\cup H_g^2$ で表わされ H_i は図イのようなハンドル体であるとする．

$\partial H_g^i=\Sigma_g$ (genus g の曲面) である．$J\in\mathcal{T}(\Sigma_g)$ に対して $u_g=Z_k(H_g;J)\in\mathcal{H}_{\Sigma_g}^J$ は各 g ごとに定まる元である．この元は分っているとしよう．

$\partial\mathcal{H}_g^1=\Sigma_g$ から $\partial\mathcal{H}_g^2=\Sigma_g$ へのはり合わせの写像を φ とする．$\pi_1(\mathcal{T}(\Sigma_g))$ は Σ_g の自己同相の作る群の連結成分たちの作る群と一致する．従って φ は $\pi_1(\mathcal{T}(\Sigma_g))$ の元を定める．ここで(4.3)を用いると，

$$Z_k(H_g^2, J)=\varphi_*(u_g).$$

ここで φ_* は $\varphi\in\pi_1(\mathcal{T}(\Sigma_g))$ にそった ∇ のホロノミーである．従って(4.4)より

$$Z_k(M)=\langle u_g, \varphi_*(u_g)\rangle$$

この式により $Z_k(M)$ は，vector 空間 $\mathcal{H}_\Sigma$，元 u_g，及びホロノミー表現 $\varphi_1\mapsto\varphi_*$ が分れば求まることになる．これらは((4.1)の径路積分の式とちがって)いづれも数学的に厳密に定式化されている対象である．

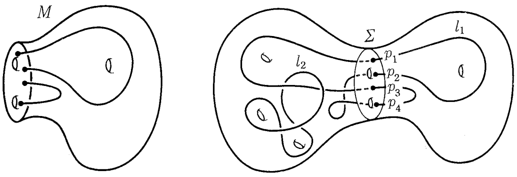
Dehn surgery による計算法も本質的なアイデアは同様である．

(4-ニ)

Jones 多項式との関係を説明するために，(4.1)の M がリンクを含む場合への一般化から始める．$l_1,\cdots,l_r$ を M の S^1 と同相な互いに交わらない部分多様体としそれぞれに向きを与えておく．各 $i=1,\cdots,r$ に対して G の表現 $R_i: G\to Gl(n_i;\boldsymbol{C})$ を与える．$A\in\mathfrak{A}$ は l_i にそったホロノミー $h_{l_i}(A)\in G$ を定める．このとき

$$(4.5)\quad Z_k(M;l_1,\cdots,l_r;R_1,\cdots,R_r)=\int\mathcal{D}A\exp(\sqrt{-1}k\mathcal{L}(A))\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Tr}\,R_i(h_{l_i}(A))$$

とおく．Witten が見出したことはこの不変量が $M=S^3$, $G=SU(N)$, $R_i: SU(N)\hookrightarrow Gl(N;\boldsymbol{C})$ (普通のうめ込み) のとき Jones 多項式と等価になることである．($q=e^{\sqrt{-1}k}$ のたぐいの変数変換をする．) この発見は(ロ)，(ハ)の M がリンクを含む場合への一般化にもとづく．リンクを含む3次元多様体を曲面 Σ で切ると，Σ は generic にはリンクと有限個の点で交れる．これらを $p_1,\cdots,p_s$ としよう．Σ で切り分けられた破片の一方を



図ロ

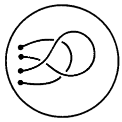
M とする．(M はいくつかの S^1 とアーク([0, 1])を含んでおりアークの端点が $p_1, \cdots p_s$ である．)(図ロ．)この M に対しての Z_k は $(\Sigma; p_1, \cdots, p_s)$ (及び $G, k, R_1, \cdots, R_r$) に対して決まる $\mathscr{H}_{(\Sigma\, p_1, \cdots, p_s)}$ の切断を決めるべきである．(実際共形的場の理論での conformal block は Riemann 面 (Σ, J) とその上の点の組 $(p_1, \cdots, p_s)$ に対して vector 空間を定めている．)さて $S^2 = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ とその上の点 $(S^2; 0, 1, 2, \infty)$ の場合を考える．その場合の $\mathscr{H}_{(S^2; 0, 1, 2, \infty)}$ は 2 次元であることが知られている．

さて図ハのような $(B^3; l_1, \cdots, l_r)$ が与えられると，Z_k は $\mathscr{H}_{(S^2; 0, 1, 2, \infty)}$ の元 u を定める．次に図ニの 3 つの場合を考える．これらはやはり $\mathscr{H}_{(S^2; 0, 1, 2, \infty)}$ の元 v_a, v_b, v_c を定める．ところで $\mathscr{H}_{(S^2; 0, 1, 2, \infty)}$ は 2 次元であったからこれらは 1 次従属で定数 α, β, γ に対して，

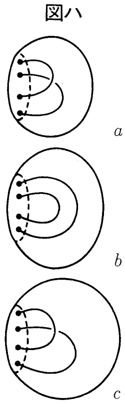
(4. 6)　$\alpha v_a + \beta v_b + \gamma v_c = 0$

なる関係をみたす．そこで(ハ)にならって図ハと図ニのリンクたちのはり合わせでできたものを L_a, L_b, L_c とする．すると(4. 4)と同様に

$$\begin{cases} Z_k(S^3; L_a) = \langle u, v_a \rangle \\ Z_k(S^3; L_b) = \langle u, v_b \rangle \\ Z_k(S^3; L_c) = \langle u, v_c \rangle \end{cases}$$



図ハ

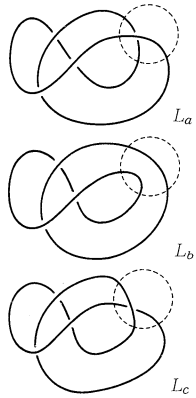


図ニ

が得られる．これと(4. 6)式より

(4. 7)　$\alpha Z_k(S^3; L_a) + \beta Z_k(S^3; L_b) + \gamma Z_k(S^3; L_c) = 0$

を得る．L_a, L_b, L_c は書きなおすと，図ホのような関係にある．(4. 7)のような関係式を skein relation といい，これを与えるとリンクの不変量は(well defined ならば)一意に定まることが知られている．Z_k と Jones 多項式をくらべるには α, β, γ (これは G と表現 R_i と k のみで決まる)を求めなければならないが，$G = SU(N)$, R_i ; $SU(N) \hookrightarrow Gl(N; \boldsymbol{C})$ のときはこれらは共形的場の理論から求まり，Jones 多項式の skein relation に表わされるものと本質的には一致する．



図ホ

以上 [13] の内容のあらましをのべたが，全体についての説明を少しつけ加える．

数学で新しい不変量を導入する場合，まずいろいろな余分なものを固定して量を定め次に決まった量がそれら固定したもののとり方によらないことを示すやり方と，始めから不変量であることがあからさまになるように定義するやり方とがある．(数学では普通後者の方が好まれる．)

(4. 1)を見るとこの式自体が $Z_k(M)$ が M の位相不変量であることを示している．一方(ハ)でのべたように M の Heegard 分解とか Dehn surgery による表示とかいった余分なのを 1 つ与えると，$Z_k(M)$ の計算法ができ，それによって $Z_k(M)$ を定義することができる．この場合，定義された量が M によってのみ決まり，たとえば Heegard 分解のとり方によらないことは別に証明されなければならない．

今の場合が上にのべた普通の場合とちがうのは，(4. 1)式がそのままでは数学的に正当化できず，従って(4. 1)は，論理的には，後者のやり方で(数学的に厳密に)定義された量が不変量であることの内在的理由を示すためのシンボリックな式にとどまらざるを得ないという点にある．ICM での Witten の講演の言葉を(筆者の不完全な記憶から)引くと，‘径路積分を用いた定式化では相対論的共変性はあらわであるが，数学的に厳密な取り扱いをするためにはこの対称性をくずさざるを得ない．’

Heegard 分解や Dehn surgery による表示を用いて，$Z_k(M)$ に当たるべき不変量が多くの G に対して，Reshetikhin-Turaev [15]，河野 [16]，によって，(数学的に厳密に)定義され，M の不変量であることが確かめられている．(Reshetikhin-Turaev は Dehn surgery を河野は Heegard 分解を用いている．)これらについて(4. 2)に当たる極限公式を示すことはまだ未解決のようである．

[13] の内容は [17] において solubable lattice model と関係がつけられ，又，[18] では compact でない G を扱うことで Thurston 流の 3 次元多様体の幾何構造論との関係をつけることが試みられているようである．

Gauge 理論からくる不変量たとえば Floer homology と $Z_k(M)$ の関係について，[13] にはいくつかの示唆がなされているが，はっきりしたことは何も知られていないようである．

§5. 後記

始めに書いた理由で，Witten の 100 近い論文のうちから 4 つしか紹介しなかった．他の仕事についても一言づつぐらいの解説はすべきであろうが，筆者の読んだ Witten の論文は 10 にみたず，いずれにしても全体像を描くことは望むべくもない．江口先生の解説の方に期待して，他の業績にはここではふれない．

Witten の講演を聞いて，予想に反して，理解しやすい(理解可能)であるのに驚いた．内容は多岐に渡り，数学と物理の広大な領域を駆けめぐるが，一見無関係な事柄を結びつけるやり方は，大胆であるがゆえに実に明晰である．天才の証であろうか．

文献(引用した順：最小限にとどめた．)

§2
[1] E. Witten, Super symmetry and Morse theory, J. Diff. Geom., **17** (1982), 661-692.
[2] J. Roe, Elliptic operators, topology, and asymptotic method, Longman Scientific & Technical, Harlow Essex UK., 1988.
[3] E. Witten, Topological Quantum Field Theory, Comm. Math. Phy., **117** (1988), 353-386.
[4] Alvarez-Gaumé, Super Symmétry and Atiyah-Singer Index Theorem, Comm. Math. Phy., **90** (1983), 161-173.
§3
[5] E. Witten, The index of the Dirac operator in Loop space, in [7].
[6] E. Witten, Elliptic Genera and Quantum Field Theory, Comm. Math. Phy., **109** (1987), 525-536.
[7] P. Landweber (ed.), Elliptic curves and Modular Forms, Lecture note in Math. 1326, Springer, Berlin, 1988.
[8] M. Atiyah-F. Hirzebruch, Spin manifolds and group actions, in 'Memoires dédiés à Georges de Rham' 18-28, Springer Berlin, 1970.
[9] C. Taubes, S^1 action and elliptic genera, unpublished.
[10] R. Bott-C. Taubes, On the rigidity theorems of Witten, J. A. MS., **2** (1989), 137-186
[11] D. Zagier, Note on the Landweber-Stong Elliptic Genus, in[7].
[12] M. Atiyah-G. Segal, Index of Elliptic operator II, Ann. Math., **87** (1988), 531-545.
§4
[13] E. Witten, Quantum field theory and Jones Polynomial, Comm. Math. Phy., **121** (1989), 351-399.
[14] V. Jones, A Polynomial invariant for links via von Neumann algebras, Bull. AMS., **12**, (1985), 103-111.
[15] N. Reshetikhin - V. Turaev, Invariants of 3manifalds via Link Polynomials and Quantum Groups, preprint.
[16] T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups I, preprint.
[17] E. Witten, Gauge theories and integrable Lattice Models, Nuclear phy., B **322**-3 (1989), 629-697.
[18] E. Witten, 2+1 dimensional gravity as exactly soluble system, Nuclear phy. **B311**-1 (1988/89), 46-78.

(ふかや　けんじ・東京大学理学部)

国立京都国際会館

ICM 90 休憩風景