凡庸な数学者にも，偶然に，浮ぶことがあるからだ.’

‘もちろん才能だけでは数学はできない．性格の力も重要だ.(環境も大切だが.).才能さえあれば,良いアイディアが，inspiration のように浮んで来ると考えてはいけない．アイディアに値する人とは，アイディアなしに永い間研究を持続する秘訣を心得ている人だ．それは性格の力だ.’

‘アイディアを言葉で定義することはできない．それは丁度，fox-terrier に鼠の定義を聞くようなものだ．然し定義はできなくても fox-terrier は，匂いによつて鼠をかぎわけることができる．或る論文がアイディアを含んでいるかどうかをかぎわけるのは易しい.’

‘他人の研究を follow したものの中にアイディアがあるかどうかは，場合によつて異なる．それは fox-terrier の問題だ．例えば Galois の研究は，その萠芽はすでに Lagrange その他の中に見られるが，どんな貧弱な fox-terrier でも，Galois の中にすぐれたアイディアをかぎわけることができる.’

‘私の最初のアイディアは私の thèse だ．私は Mordell の論文を一晩で読んで，一つのアイディアを得た．それを先生に話したが信用されなかつた．私には自信があつたので，多くの人々に話したが，誰も信用しなかつた．或るとき Siegel に会つたのでそれを話した所，彼は大変喜んで大いに激励して呉れた．そのときにはもう大体できかかつていたのだが，それでも私は大変嬉しかつた．それから 20 年程たつて，また Siegel に会つたとき，彼がいうには，‘あのとき私 (Siegel) は君のアイディアに従つてうまくいくとは思わなかつた．にも拘わらず私は君を激励した．若い人が，何かアイディアを持つて大問題と取組んでいるのを見ると，私はいつもそうするのだ．なぜなら，大問題と取組むことは非常な不安があるものなので，名の知れた数学者がそれを激励しないと，途中で止めてしまうかも知れない，云々.’ 私は大変感心して，自分でもそうすることにした．もし激励されて，偶然にでも解ければ，数学に取つて非常に喜ばしいことだ．一方もしできなくても，それは本人の不幸たるに止まり，数学に取つてはもともとだ.……ただし，Riemann 予想だけは例外で，それをやることだけは思いとどまらせたい．これは全く hopeless だ.……’

(及川広太郎・杉浦光夫・谷山豊)

問　　題

代数的整数論シムポジュームの機会に多くの人から問題を集めて出席者に配布した．ここに，それらの問題を再録する．ただしすでに解決されたために，或いはその他の理由によつて，一部除外されたものもあることをおことわりする．これらの問題に対する御意見，或いは解決があればお知らせいただきたい．

問題 1.　k は 1 の原始 n 乗根を含む有限次代数体とする．このとき，$\mathfrak{p}\nmid n$ ならば次の式が成り立つ．

$$\left(\frac{a,\ b}{\mathfrak{p}}\right)\equiv\left(a_0^{\nu_{\mathfrak{p}}(b)}\, b_0^{-\nu_{\mathfrak{p}}(a)}\right)^{\frac{N\mathfrak{p}-1}{n}}\quad(\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p})$$

ただし，$a=a_0t^{\nu_{\mathfrak{p}}(a)}$，$b=b_0t^{\nu_{\mathfrak{p}}(b)}$ $(v_{\mathfrak{p}}(t)=1)$ とする，このことを用いて，$a\equiv 1$ 又は $b\equiv 1$ (mod. n) の場合，類体論の結果を用いずに，直接次の式を証明したい．

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{a,\ b}{\mathfrak{p}}\right)=1.$$

(佐武一郎)

問題 2.　k を代数体，k の一つのイデアル類を c とする．c が単項化するような k の Abel 拡大体はどのようなものであろうか．その十分条件を求めよ．(寺田文行)

問題 3.　k を有限次代数体，A_k を k 上の最大 Abel 拡大体，A_k/k の Galois 群を G_k とする．二つの体 k_1, k_2 に対して，

$$G_{k_1}\cong G_{k_2}\quad(\text{代数的又は位相的に})$$

となるための(必要又は十分)条件は何か．(久保田富雄)

問題 4.　有限次代数体 k でその上に無限次の非分岐拡大体を有する如きものは存在するであろうか．もし存在すれば，その実例を示せ．(久保田富雄)

問題 5.　k は $\mathfrak{p}$-進数体，また素数 $p\in\mathfrak{p}$ に対して Ω を k 上最大 p-拡大体とする．このとき，Galois 群 $G=G(\Omega/k)$ を explicit に決定せよ．

註.　(i) k が 1 の原始 p 乗根を含むとき．この場合 G は $[k:Q_p]+1$ 箇の自由生成元を有する自由群の p-completion である．(Šavarevič)

(ii) k が 1 の原始 p 乗根を含まないとき．この場合 G は $[k:Q_p]+2$ 箇の生成元と一つの有限又は無限基本関係を有する群の p-completion である．(Y. Kawada, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, (1954))

(iii) k が 1 の原始 p^n 乗根を含むとき．Galois 群 $G_n=G(k_n/k)$ が階数 n を有するような k の最大 p-拡大体を k_n とする．(階数が n であるとは，正規部分群列，$G_n\supset G_{n-1}\supset G_{n-2}\supset\cdots\supset G_1\supset 1$ が存在して G_i/G_{i-1} $(1\leqq i\leqq n)$ が $(p,\cdots,p)$ 型 Abel 群になることとする.) そうすれば G_n は $2g=[k:Q_p]+2$ 箇の生成元 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_g$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_g$ を有し (G_n が階数 n であるという trivial な条件を除いては唯一つの) 基本関係

$$\prod_{i=1}^{g}\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\beta_i^{-1}=1$$

によつて結ばれる群である．(Skopin, Doklady, U.R.S.S. (1954))

更に Q_p の代数的閉体を $\widetilde{\Omega}$ とするとき，Galois 群 G

$=G(\widetilde{\Omega}/Q_p)$ の構造を定めよ．

註．(i) Q_p 上 maximal tamely ramified（定義は E. Artin, Algebraic numbers and algebraic functions I）な拡大体の Q_p 上の Galois 群は，S, T 2 箇の生成元と基本関係，$TST^{-1}S^{-p}=1$ を有する群の（有限指数部分群で入れた位相による）completion である．

(ii) k を有限定数体をもつ形式的冪級数体とすれば k 上最大分離的拡大体 Ω の k 上の Galois 群 $G(\Omega/k)$ は C. Arf によつて決定されている．(cf. Abh. Hamburg, 19 (1955))　　（河田敬義）

問題 6．k を有理数体 Q（又は p-進拡大体 Q_p）の無限次代数拡大体とするとき，k の上の類体論を構成せよ．

註．(i) 無限次数 $[k:Q]$（又は $[k:Q_p]$）$=\prod_p p^{\nu_p}$ 中 $\nu_p=\infty$ なる p と素な次数 $[K:k]$ を有する Abel 拡大 K/k の類体論は守屋美賀雄氏により出来ている．(北大紀要，6 (1937))．また河田敬義はこの理論をイデールの言葉で書きかえたが，同じ結果に止つている．(J. Math. Soc. Japan, 3 (1951))．これは無限次代数体におけるイデールの定義が不十分なことによるのではないか．

(ii) k が 1 の冪根全部を含む場合の abstract な類体論（それは本質的には Kummer 拡大の理論）も出来ている．(Y. Kawada, Class formations, Duke. Math. J. 22 (1955))．

従つて問題はこの二つの場合を含む理論を構成することである．　　（岩沢健吉，河田敬義）

問題 7．k を有限体 $GF(p^r)$ を係数体とする1変数函数体とするとき，k 上の類体論を代数幾何学的に構成することを考えよう．(i) 拡大次数 $[K:k]$ が p と素な場合には，既知の代数幾何学の理論によつて構成することができる．また $[K:k]$ が p の冪である場合も Witt vectors を用いて構成できるであろう．問題は，二つの場合を別々に構成して，後から結果を合せて一般の理論にまとめるのでなくて，はじめから同一の方法で構成することにある．この場合には，Witt vectors の理論を含む何等かの fibre space の理論を必要とするのではないであろうか．(ii) 今までの類体論は，すべて separable な拡大に限られていたが，inseparable な拡大をも含めた理論を構成すること．(iii) 代数曲線の場合でなく，n 次元代数的多様体の場合には，どうなるであろうか．　　(A. Weil)

問題 8．射影空間内にうめこまれた non-singular な代数多様体上の有理型函数全体のつくる函数体を k とする．このとき，k 上の非分岐拡大に対する class formation の理論を構成せよ．(cf. K. Kodaira, Ann. of Math. 59 (1954), §12)　　（河田敬義）

問題 9．k を p-進数体，K を k 上の Abel 拡大体とする．また，D/k を rank が $[K:k]^2$ なる normal division algebra で $D\supset K$ とする．$[K:k]$ が奇数なるとき，次の同型が成立する．

$$D^*/K^*\cdot D^{*\prime}\cong G(K/k).$$

ここに D^* は D の 0 以外の元のなす乗法群，$D^{*\prime}$ は D^* の交換子群である．この同型は局所類体論における同型定理ともみなすことができる．さて，非 Abel 拡大 K/k の場合にもこれと類似の同型を考えることはできないであろうか．　　（淡中忠郎）

問題 10．相対 Abel 体 K/k の Galois 群 $G=G(K/k)$ が2箇の生元成を有するものとする．G の直積成分に対応する中間体を K_1, K_2 とすれば

$$H^3(G,K^*)\cong N_{K_1/k}(K_1^*)\cap N_{K_2/k}(K^*)/N_{K/k}(K^*).$$

(T. Tannaka and S. Takahashi, J. Math. Soc. Japan, 6 (1954))

ここで更に $H^3(G,K^*)=1$ と仮定すれば，

$$N_{K_1/k}(K_1^*)\cap N_{K_2/k}(K_2^*)=N_{K/k}(K^*).$$

この式は局所類体論のいう所に外ならない．これは3次元コホモロジー群と局所類体論の密接な関係を示している．このような関係を更に深く考えよ．　　（淡中忠郎）

問題 11．k を総実な代数体，$F(\tau)$ を k 上の Hilbert modular form とする．$F(\tau)$ を適当にえらぶと，量指標 λ の Hecke の L-級数の体系が得られて，この $F(\tau)$ と Mellin 変換により，1対1に対応する．このことは Hecke の作用素 T の理論を Hilbert modular 函数に拡張することによつて証明される．(cf. Hermann)

問題はこの理論を（必ずしも総実でない）一般の代数体 k に拡張することである．即ち，k の量指標 λ の L-級数が得られる如き多変数の automorphic form を見出して Hecke の作用素 T の理論をこの automorphic function に拡張するのである．

この問題の目的の一つは，k の量または類指標の L-級数を特性づけることにある．現在では k が総実の場合にもまだできていない．　　（谷山　豊）

問題 12．C を代数体 k 上で定義された楕円曲線とし k 上 C の L-函数を $L_C(s)$ とかく：

$$\zeta_C(s)=\zeta_K(s)\zeta_K(s-1)/L_C(s)$$

は k 上 C の zeta 函数である．もし Hasse の予想が $\zeta_C(s)$ に対し正しいとすれば，$L_C(s)$ より Mellin 逆変換で得られる Fourier 級数は特別な形の -2 次元の automorphic form でなければならない．(cf. Hecke) もしそうであればこの形式はその automorphic function の体の楕円微分となることは非常に確からしい．

さて，C に対する Hasse の予想の証明は上のような考察を逆にたどつて，$L_C(s)$ が得られるような適当な automorphic form を見出すことによつて可能であろうか．　　（谷山　豊）

問題 13．問題 12 に関連して，次のことが考えられる．"Stufe" N の楕円モジュラー函数体を特性づけること，特にこの函数体の Jacobi 多様体を isogenus の意味で単純成分に分解すること．また $N=q=$素数，且 $q\equiv 3$ (mod. 4) ならば，J が虚数乗法をもつ楕円曲線をふくむことはよく知られているが，一般の N について はどうであろうか．　　（谷山　豊）

問題 14.　k を総実な h 次代数体とする．G を

$$Z'^{(i)}=(A^{(i)}Z^{(i)}+B^{(i)})(C^{(i)}Z^{(i)}+D^{(i)})^{-1} \quad (i=1,\,2,\,\cdots,\,h)$$

なる変換のなす群，即ち k における Siegel–Hilbert の n 次モジュラー群とする．$n\geqq 2$ の場合に基本領域 F の尖点の数を求めよ．　(Maaß)

註．　$n=1$ の場合尖点の数は k の類数 h_0 に等しい．$n\geqq 2$ の場合もやはりそうであることを Ramanathan が予想している．　(河合良一郎)

問題 15.　$\mathfrak{M}_l^{(n)}$ を総実な代数体 k 上の n 次，重さ l なるモジュラー形式全体の作るベクトル空間とする．このとき，$\mathfrak{M}_l^{(n)}$ は有限次元であろうか．

(Maaß–Ramanathan)　(河合良一郎)

問題 16.　次数 $n\geqq 2$ なるモジュラー函数体は有理函数体であろうか．(Siegel)

註．　$n=2$ の時は正しいように思われる．

(河合良一郎)

問題 17.　n 次モジュラー形式である Eisenstein 級数

$$\varphi_k(Z)=\sum_{\{C,D\}}|CZ+D|^{-k} \qquad k\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ 2)$$

を "ϑ-Nullwerte" によりあらわせ．

註．　(i) 楕円モヂュラー形式の場合 ($n=1$)

$$g_2=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4(\vartheta_2^8(0)+\vartheta_3^8(0)+\vartheta_4^8(0)),$$

$$g_3=\frac{2^2}{3^3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6(\vartheta_2^4(0)+\vartheta_3^4(0))(\vartheta_4^4(0)+\vartheta_3^4(0))\cdot(\vartheta_4^4(0)-\vartheta_2^4(0)).$$

(ii) $n=2$ の場合にも結果は知られているが複雑である．Ramanathan はこの問題を非常に困難であろうと考えている．　(河合良一郎)

問題 18.　$\displaystyle\sum_{\substack{\{C,D\}\\ C\equiv C_1\\ D\equiv D_1}(m)}|CZ+D|^{-s}$ を Siegel の n 次合同モジュラー形式とする．この形式の生成するベクトル空間の次元を求めよ．　(Ramanathan)

註．　$n=1$ の場合次のことが知られている．

$$E(z,a_1,b_1,m,s)=\sum_{\substack{a\equiv a_1\\ b\equiv b_1}(\mathrm{mod.}\ m)}(az+b)^{-s}$$

とおく．このときこれらのモジュラー形式の生成するベクトル空間の次元は合同モジュラー群

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad (\mathrm{mod.}\ m)$$

の基本領域の尖点の数に等しい．　(河合良一郎)

問題 19.　Γ を次元 n の unimodular 群とし，

$$\Gamma(m)=\{U\,;\,U\in\Gamma\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ m)\}\ (m\ は自然数)$$

とおく．この群は実係数正値対称行列全体のつくる空間の不連続変換群と見ることができる．$\Gamma(m)$ の適当な基本領域で $n(n+1)/2$ 箇の超平面でかこまれるものの存在するためには，m にどのような条件が必要か．(佐武一郎)

問題 20.　$\widetilde{\mathfrak{B}}$ を複素多様体，$\mathfrak{G}$ を $\widetilde{\mathfrak{B}}$ に作用する真正不連続変換群とする．このとき商空間 $\mathfrak{G}\backslash\widetilde{\mathfrak{B}}$ は V-多様体である (定義は本号の記事参照)．一般の V-多様体の中で，このように定義した V-多様体と同型にならないものは存在するであろうか．　(佐武一郎)

問題 21.　Q : 有理数体．

$\widetilde{\mathfrak{R}}$: Q の adèle 環，即ち加法的イデール環．

J^0 : Q の体積 1 なるイデール全体のつくる群．

$\widetilde{\mathfrak{R}}^{n^2}$: $\widetilde{\mathfrak{R}}$ を係数とする行列全体のつくる空間．

$\mathfrak{G}^0$: $\widetilde{\mathfrak{R}}^{n^2}$ の元 X で $\det(X)\in J^0$ なるもの全体のつくる位相群．

$G=GL(n,Q)$: Q 上 n 次の general linear group，G は $\mathfrak{G}^0$ の discrete な部分群である．

Ω : $\Omega=\{X\,|\,X\in\mathfrak{G}^0,\ {}^tXX=E\ (単位行列)\}$．

Homogeneous space $\Omega\backslash\mathfrak{G}^0$ は対称行列 $\mathfrak{S}$ の空間と同一視される：

$$\Omega\backslash\mathfrak{G}^0=\mathfrak{S}=\{S\,|\,S={}^tXX,\ X\in\mathfrak{G}^0\}$$

$$\Lambda=\mathfrak{S}\cap GL(n,\,Q)$$

$G\backslash\Omega$ 及び $\Omega\backslash\mathfrak{G}^0$ はそれぞれ不変測度 dX, dS を有す．この測度を (適当な方法で) 正規化しておく．$\mathfrak{S}$ 上に compact carrier をもつすべての連続函数に対して

$$\int_{G\backslash\mathfrak{G}^0}\sum_{T\in\Lambda}f(T[X])\,dX=c\int_{\mathfrak{S}}f(T)\,dT$$

が成立することが容易にわかる．ただし c は f によらぬ定数であり，Siegel の正値 2 次形式に関する公式

$$M(E)^{-1}=\frac{1}{2}\alpha_\infty(E)\Pi_{\mathfrak{p}}\alpha_{\mathfrak{p}}(E)$$

によつて計算される．逆に c が他の方法で計算できるならば，Siegel の公式の新しい証明ができる．c を直接計算する方法はないであろうか．　(久賀道郎)

問題 22.　$O^+(n,R)$: 実係数，行列式が $+1$ なる n 次直交行列全体のつくる群．

k : 正の整数．

M_k : $(a_{ij})\in O^+(n,\,Q)$ で係数 a_{ij} の分母が k より小なるもの全体の集合．

この時，$O^+(n,R)$ の有限部分集合の系列 $\{M_k\}$ が得られて，

$$M_1\subset M_2\subset M_3\subset\cdots\subset M_k\subset\cdots\subset O^+(n,Q)\subset O^+(n,R)$$

となる．$O^+(n,R)$ 上の任意の連続函数を f，dX は $O^+(n,R)$ の Haar 測度で

$$\int_{O^+(n,R)}dX=1$$

と正規化しておく．この時次の式は成立するであろうか．

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{\sum_{X\in M_K}f(X)}{M_k\,の元の箇数}\right\}=\int_{O^+(n,R)}f(X)\,dX.$$

註．　$n=2$ のとき上式は成立することが証明できる．

(久賀道郎)

問題 23.　K : 有限次代数体．

G,G' : K を係数体とする n 次行列のつくる algebraic group.

$K_{\mathfrak{p}}$: K の $\mathfrak{p}$-進拡大体．

$G_{\mathfrak{p}}$, $G'_{\mathfrak{p}}$: G,G' の $K\to K_{\mathfrak{p}}$ なる係数拡大．

このとき次の主張の成立するための G の条件を求め

よ．'$G_{\mathfrak{p}} \sim G'_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p}$-adic full linear group 中で共軛) がすべての $\mathfrak{p}$ について成立するならば，$G \sim G'$ (K 上の full linear group 中で共軛)．'　（小野　孝）

問題 24. 問題 23 は Chevalley の理論によつて Lie algebra についての命題に reduce される．それは次のもつと一般な代数体 K 上のベクトル空間の問題に含まれている．即ち，V, V' を K 上の一定の寸法の正方行列で張られる同次元のベクトル空間とする．いますべての $\mathfrak{p}$ について，$K_{\mathfrak{p}}$ の逆のある行列 $T_{\mathfrak{p}}$ があつて，$V' = T_{\mathfrak{p}}^{-1} V T_{\mathfrak{p}}$ となるならば K の行列 T をとつて，$V' = T^{-1}VT$ とすることができるか．このことは成立する場合もあるが，反例があるかどうかは不明である．　（小野　孝）

問題 25. K：標数 0 である賦値により完備な体．

$\mu(K)$：(Dieudonné) 指数が 0，即ち $\nu(f)=0$ なる μ 変数 2 次形式 f の存在するような μ の最大値．

G：K を係数体とする行列のつくる半単純なる algebraic group で $\dim_K G \leqq \mu(K)$．

σ：G の Lie algebra 上の基本 2 次形式．

$\nu(\sigma)$：σ の指数．

このとき，G の有界性に対し，$\nu(\sigma)=0$ は必要且十分条件であろうか．

註． 十分条件であることは証明できる．必要条件は問題 26 と関連がある．　（小野　孝）

問題 26. 問題 25 の記号を用いる．$GL(n, K)$ 中に maximal bounded (K が $\mathfrak{p}$-進数体のときは maximal compact) な algebraic subgroup は存在するであろうか．　（小野　孝）

問題 27. K^n を位相体 K 上の n 次元座標空間とする．位相群 G が K-連結であるとは，G の単位元 ε の近傍 U 及び U 上で定義され K の値をとる函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が存在のて $\sigma \to (x_1(\sigma), x_2(\sigma), \cdots, x_n(\sigma))$ が U から K^n の原点の近傍 V への homeomorphism になることとする．更に原点の近傍 $V_1 (\subseteqq V)$ と，$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in V_1$，$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in V_1$ で定義される (K の位相に関し) 解析的な函数，$f_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ が存在し，$(x_1(\sigma), x_2(\sigma), \cdots, x_n(\sigma)) \in V_1$，$(x_1(\tau), x_2(\tau), \cdots, x_n(\tau)) \in V_1$ ならば，$\sigma\tau^{-1} \in U$，$x_i(\sigma\tau^{-1}) = f_i(x_1(\sigma), \cdots, x_n(\sigma); x_1(\tau), \cdots, x_n(\tau))$ $(1 \leqq i \leqq n)$ が成立するとき，G を K-Lie 群と呼ぶ．

さて，$k_{\mathfrak{p}}$ を代数体 k の $\mathfrak{p}$-進拡大体とするならば，$k_{\mathfrak{p}}$-連続群は，$k_{\mathfrak{p}}$-Lie 群であろうか．　（小野　孝）

問題 28. K を標数 $p \neq 0$ なる定数体 k 上の種数 g なる 1 変数代数函数体とする．K の non-singular モデル C の Jacobi 多様体を J，A を K の Hasse-Witt 行列とする．また $A \cdot A^p \cdot \cdots \cdot A^{p^{g-1}}$ の階数を r とする．このとき J の p-分点の数が p^r であることを証明せよ．

註． k が有限体の場合は K の類体論より主張は正しい．　（玉河恒夫）

問題 29. 記号は問題 28 の通りとする．行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & 0 \\ & & \boxed{A_3} & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

の形に変形されるが，そのとき $A_1, A_2, A_3, \cdots$ の寸法は K の不変数である．(cf. Hasse-Witt)　この不変数は C の Jacobi 多様体に対してどのような意味を有するであろうか．

註． K が $y^2 = 1 - x^5$ で定義される場合は次のことがいえる．

a)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　$(p \equiv 1 \bmod. 5)$，

b)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　$(p \equiv 2$ または $3 \bmod. 5)$，

c)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　$(p \equiv 4 \bmod. 5)$．

しかも b) の場合は Jacobi 多様体は可約である．類似の結果が $y^2 = 1 - x^q$ (q は素数) で定義される K のときも成立することは，極めて確からしい．　（谷山　豊）

問題 30. $K(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を K 上 n 変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の有理函数体とする．また G を $K(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の有限自己同型群で，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の 1 次変換により表現されるものとする．

G により不変に保たれる元全体のなす $K(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の部分体 A はまた有理函数体となるであろうか．(ただし，K が十分多くの 1 の冪根を含むものと仮定する．)

（国吉秀夫）

問題 31. K を有理数体，$f(X, Y) \in K[X, Y]$ を X, Y に関し次数がそれぞれ m, n なる絶対既約な多項式とする．定数 $c = c(f, m, n)$ $(1 \geqq c \geqq 0)$ でほとんどすべての素数 p に対し (有限箇をのぞき) 次の条件を満すものを初等的な方法で求めることは可能であろうか．

'cp より大なる自然数箇の $Y = y$ に対して $f(X, y)$ が modulo p で既約である．'

K が有限次代数体の場合にも同じ問題を考えよ．

註． (i) この問題は多項式 $f(X) \in k[X]$ の modulo p での値の分布をしらべるときに生ずる．

(ii) 或る種の既約多項式および p に対し定数 $c > 0$ の存在しないものがあることはほとんど明らかである．例えば，$f(X) - Y^p$ ($f(X) \in K[X]$) は絶体既約であるが $f(X) - y^p$ はすべての y (mod. p) に関し可約である．Weil 及び Lang により与えられた例である．

(iii) $f(X, Y) = AX^2 + BY^2 + C$ $(ABC \neq 0)$ に対しては $C = 1/2$ (ただし $p \nmid 2ABC$) にとることができる．

(iv) よく知られているように Ostrowski の定理から $f(X, Y) \in K[X, Y]$ が絶体既約ならほとんどすべての p に対してやはり絶体既約である．

(v) またこのような $f(X, Y)$ は無限箇の $Y = y \in K$ に対して既約である (Hilbert の既約性定理)　(内山三郎)

問題 32. k を標数 $p\neq 0$ の体で素体上代数的でないとする．A^n を k 上の Abel 多様体とすれば，A^n 上の点 α で k 上代数的且無限の位数をもつものは存在するであろうか．

志村五郎氏の註． $k=GF(p)\,(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ を $GF(p)$ の超越拡大体として，endomorphism ring R が或る代数体の principal order に等しい場合には容易に証明されるであろう．　（中井喜和）

問題 33. V_1, V_2 をそれぞれ k_1, k_2 上で定義される代数多様体とする．V_i に如何なる条件をつければ次のことは成立するであろうか．

‘V_1, V_2 が互に双有理的同等ならば，$k_1\cap k_2$ 上定義される多様体 V があつて，$V_i\,(i=1,2)$ と双有理的同等である．’

註． A. Weil は適当な，広義 Kummer 多様体 V_1, V_2 に対し上のことの成立することを注意している．　（志村五郎）

問題 34. ζ：1 の p 乗根．また $g=\dfrac{p-1}{2}$ とおく．

σ_ν：$Q(\zeta)/Q$ の自己同型で $\zeta^{\sigma_\nu}=\zeta^\nu\ (1\leqq\nu\leqq g)$ で定義する．

$Q(\zeta)$ のイデアル $\mathfrak{m}$ に対しイデアル群 $H_{\mathfrak{m}}$ (mod. $\mathfrak{m}$) を次の式で定義する：

$$H_{\mathfrak{m}}=\{\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{a}\text{ は }Q(\zeta)\text{ のイデアル，}(\mathfrak{a},N\mathfrak{m})=1,\ \mathfrak{a}^{\sigma_1-1}\cdot\mathfrak{a}^{\sigma_2-1}\cdot\cdots\cdot\mathfrak{a}^{\sigma_g-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{m})\}.$$

このとき，$H_{\mathfrak{m}}$ に対応する類体は何か．また $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ の構造はどのようなものか．そしてその位数は何か．

註． $Q(\zeta)$ のすべてのイデアル $\mathfrak{b}$ に対し $\mathfrak{b}^{\sigma_1-1}\cdots\mathfrak{b}^{\sigma_g-1}$ は $Q(\zeta)$ の単項イデアルである．

上の問題は更に一般化される．

K：Q 上の $2n$ 次正規拡大体．

$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$：$K/Q$ の自己同型群ですべての K の自己同型 $\sigma\neq 1$ に対して次の性質をもつとする．

$$\text{集合}\ \{\sigma\sigma_1,\sigma\sigma_2,\cdots,\sigma\sigma_n\}\neq\text{集合}\ \{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}.$$

$H(\mathfrak{m})$：$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ に対し上と同じに定義された類群．

このとき $H(\mathfrak{m})$ に対応する類体は何か．

註． この場合 $\mathfrak{a}^{\sigma_1-1}\cdots\mathfrak{a}^{\sigma_g-1}$ は主イデアルとは限らない．　（志村五郎）

問題 35. 代数多様体上の微分形式に対し性質 (F) を次の如く定義する．

定義 (F)．抽象多様体 U 上の微分形式を ω とし，ω, U は共は体 k 上で定義されるとする．Pを k 上 U の generic point とする．ω が U 上の点 P' で性質 (F) を有するとは，ω を適当に，

$$\omega=\sum_i u_i\,dv_i$$

のかたちにかけば，u_i, v_i は $k(P)$ の中で P' における specialization ring に入ることとする．

更に次の定義をする．

定義 (F')．同じ記号を用い，ω が点 P' において性質 (F') を有するとは，u_i 及び v_i が $k(P)$ の中で P' における specialization ring 上整であることとする．

ω が P' において性質 (F) をもてば，P' において性質 (F') をみたす．更に ω が完備な多様体 U の各点において性質 (F) 又は (F') をもてば，ω が U 上第 1 種であることがわかる．

この事の逆は成立するであろうか．　（小泉正二）

問題 36. V を射影空間内の多様体，l を自然数とする．V' も射影空間内の多様体で，V, V' の間には，双有理的対応 T があるものとする．さて V' を適当にえらんで V' の次数が l と互に素となる様に出来るであろうか．もしこのことが可能であれば，更にいたる所双正則な T に制限してもこのことはやはり成立するであろうか．（最も興味のあるのは l が universal domain の標数に等しい場合である．）　（中井喜和）

問題 37. k を標数 0 の体，L^n を k 上 n 次元射影空間とする．L^n 上 m 次の 0–サイクルの Chow–多様体を $L^n(m)$ とする．$L^n(m)$ は arithmetically normal であろうか．　（永田雅宜）

問題 38. V を射影空間にうめこまれた代数多様体，U を V の開集合とする（Zariski topology の意味で）．U が V のアファインモデルになる為に U につける可き適当な条件を求める．　（中井喜和）

問題 39. P, Q を同一函数体の spots とする．このとき (1) P と Q が同じモデルに入るための必要且十分条件は $P[Q]$ が P 及び Q の商環となることである．

また一方，

(2) P, Q が同じアファインモデルに入るための必要且十分条件は $(P\cap Q)_{\mathfrak{p}\cap(P\cap Q)}=P$, $(P\cap Q)_{\mathfrak{q}\cap(P\cap Q)}=Q$, ここに $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ は P, Q の極大イデアルである．

(1) 及び (2) は終結のかたちは似ているが，その条件は論理的に非常に違うように思われる．このことははたして本当であろうか．　（永田雅宜）

問題 40. よく知られている素イデアル鎖の問題とは次のようなものである：

‘A を Noether 整域とし $\mathfrak{p}_0\supset\mathfrak{p}_1\supset\mathfrak{p}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{p}_r=0$ を A の素イデアル鎖，$\mathfrak{p}_0$ は極大イデアル，且 $\mathrm{rank}(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i+1})=1\ (i=1,2,\cdots,r-1)$ とする．このとき $\mathrm{rank}\ \mathfrak{p}_0=r$ であろうか．’

素イデアル鎖の問題が完全に解決されれば次のことがいえる．

‘任意の Hensel–Noether 局所整域は unmixed(equidimensional) である．’

この主張は正しいように思われるが，実さいにはどうであろうか．（素イデアル鎖の問題に関しては，A が Noetherian である条件をはぶけば正しくないことは確信している．　（永田雅宜）

（問題 41 から問題 47 までは次号）