であった．この二書はいずれも朝鮮で刊刻されたもので，朝鮮役のころに日本に伝わった．この二書の中，最初に算学啓蒙の飜刻が寛文12年(1672)に行なわれ一般に普及するとともに，日本の数学者はこの書によって天元術を知った．確実に天元術の意義を理解したのは，大阪の数学者沢口一之であり，この人物は関孝和とほぼ同時代であった．彼は古今算法記を著わしたが，関孝和の発微算法はこの書の遺題15問を解いたもので，したがって沢口は関の先輩とも言えよう．関孝和自身も算学啓蒙によって天元術を学んだが，彼はそれまでの日本数学者の仕事に学ぶとともに，できる限り資料を集めることに努力した．彼が奈良の某寺で中国数学書を写しとり3年かかってその研究をやったという説話が残っている．これが何の書であったかは推測の域を出ない．本朝通俗数学講演集の中で狩野亨吉博士は，この書は李治の測円海鏡であろうと述べられた．しかしこの説話自体も確かなものでなく，むしろ関孝和が熱心に文献をさがし求めたことを示す話として解すべきであろう．測円海鏡が日本に伝わったかどうかは不明であるが，楊輝算法は算学啓蒙と同じころに伝わり，関孝和もこれをみて自ら筆写している．関孝和が写した自筆本は残っていないが，それからの複写本が残っている．楊輝算法は3種類の書物から成り立っているが，特に続古摘奇算法巻上には興味ある算法があって，関孝和の研究に大きなヒントを与えた．

このほか中国の数学書として注意すべきものに西暦3世紀のころ劉徽によって書かれた九章算術注がある．これは注釈の形をとっているが，非常にすぐれた数学的著述であって，円周率の計算にあたって円に内接する正六角形から出発し，辺数を2倍ずつ増して192辺形までを計算し，その後は無限等比級数の極限を使って円周率を求めている．劉徽は中国最大の数学者で，極限とか無限とかについてはっきりした概念をもっていた．しかしこの書が関孝和に知られたかどうかはわからない．

関孝和に影響を与えたのは，以上述べたような数学書だけでなく，中国の暦書中の計算法がある．5世紀のころに元嘉暦をつくった何承天が調日法によって不尽小数を分数で近似する方法をはじめたが，これは関孝和の零約術につながるものであろう．関孝和はまた元の授時暦にみえた招差法を研究した．彼は授時暦について深い研究をし幾つかの著書を残している．招差法は四差以上を零とする補間法であるが，関孝和はこれを一般に拡張している．彼はまた清の黄鼎が書いた天文大成管窺輯要の中から球面三角法に関する問題を抜き書きし，授時発明という著書で詳しい解説を行なっている．これは球面上の問題を，平面上の円の問題に直して計算したもので，この種の方法も関孝和の研究になにがしかのヒントを与えたであろう．

このように述べてくると関孝和の仕事は中国数学にもとづいて単にそれを一般化したに過ぎないと思われるかもしれないが，もちろんそうではなく，あとで小堀，加藤両氏が述べられるようにきわめてオリジナルな研究に富んでいる．私は天才であった関孝和がいかに知識慾に燃え，いかにいろいろと新しい文献を求めたかの事実を強調したかったのである．こうした学者としての熱心な努力に対してわれわれは尊敬の念を禁じえない．

関孝和の数学の成立

細　井　　淙

関孝和の伝記については他にくわしい御執筆があることと思うのでここでは一応の記述に止どめ主としてその数学の成立について考えてみよう．

1.　関孝和(たかかず)は通称新助，字は子豹，自由亭と号した．内山永明(初め上州藤岡の郷士，後幕臣となる)の次男に生まれ関家の養子となる．甲府宰相綱重およびその子綱豊(後の六代将軍家宣)に仕え勘定吟味役(会計方役人)を勤めた．綱豊が五代将軍綱吉の世継となるにおよび，それに従って幕府の御納戸係となり後御納戸組頭(会計課長)に進み御蔵米300俵を給せられた．宝永3年引退して小普請(隠居役)に入り同5年(1708) 10月24日病をもって没す．牛込七軒寺町浄輪寺に葬り諡して法行院宗

達日心居士という．嫡子早世のため甥新七郎をもって跡目相続．享保9年新七郎は甲府勤番となる．享保20年(1735)不行跡のため追放せられ家名断絶した．孝和の生年月日，生地については現在の所不明である．

明治40年関孝和二百年祭に当たり東京数学物理学会は祭典をいとなみ，講演会および関流算法七部書刊行等の記念行事を行なった．同年11月従四位を贈られた．墓所は現在東京都新宿区牛込弁天町95番地浄輪寺にあり史蹟となっている．

2．関孝和の数学がいかにして成立したかについては多くの説があり一概に断ずることはできないがその著書，諸和算家の記録およびその他の文献を参照しつつ考えていきたいと思う．

まずその師伝であるが従来高原吉種(日本珠算の開祖毛利重能の高弟．後一元という)に学んだというのが定説になっている．

その根拠は孝和の高弟荒木村英の談話を筆記した‘荒木先生之茶談’という写本中の一句“先生も初めはこの一元を師とせりとかや”にある．確証とはいい難い文体であるがこれを荒木の言とすれば‘先生’とは孝和を指すことになる．従来そう解釈されており私自身もそう思っていた．ところが今回この小文を草するに当たりも一度念を入れて読み直してみた結果，これは誤読らしいと気づいたのである．

元来この書は荒木の高弟松永良弼の筆記で，書中所々石津直行(松永と同門)の注がはいっている．また荒木のことばとして孝和を指すときは必ず‘関氏’と呼んでいる．同書末のくだりに関備前守へ出入する荒木次左衛門という米屋のことがでてくるが，そこの注に“米屋は先生の族なり”とあり，なお“関先生も備前守殿と関族とて往来ありしも先生の取り持ちなりしとかや”とある．この‘先生’は明らかに荒木村英を指すものである．前述の孝和の師伝と解釈されている文章は，注ではなく本文の続きになっているため荒木の談とみたのであるが，上の理由でこれは石津直行の注と思われる．そう考えればこの一句は荒木村英の師伝で孝和とは何の関係もないことになるのである．このほかに参考となるべき文献の二三をあげてみよう．

武林隠見録(斎東野人著，1738)は和算家の記録ではないが孝和と年代が近く，その内容にもかなりの真実性がある．同書巻5に‘関新助算術に妙有事’と題する一条がある．そのうち師伝および数学の成立に関する部分について略述すれば次のごとくである．関新助は若いころはそろばんの初歩も知らなかったが，あるとき家来の読んでいた塵劫記を借り受けて研究し実際にそろばんを取って計算して見ると一二へんですっかりわかった．それから数学に興味をもち，さまざまの算書を集めて読んでみると何の疑問もなくすらすらと読めた．それから算学啓蒙を熟読して中国の天元術を会得し，それに自分の発明，くふうを加えて演段法を発見し，測量から暦，天文に至るまでことごとく奥儀を極めざるものなく，このことが上に聞こえて大いに賞美せられ甲府家で勘定奉行格に取り立てられた．そのころ，奈良にいつのころか仏書にまじって中国から渡来した書物があり，仏書，儒書，医書のいずれでもなく誰にも読めないという話を新助が聞いて，それは多分算書であろうと暇を貰い奈良に急行してみると果たして算書であった．それを借り受け夜を日についで写しとり，江戸に持ち帰って三年間日夜研究し遂にその奥を極めたという．

この叙述にはある程度事実の裏づけがある．

塵劫記が親切な珠算独習書として当時日本国中に普及していたことはたしかであり孝和がこれから数学にはいったということは相当真実性があり，また孝和の研究中にある算脱，験符は塵劫記の継子立，目付字から取材したものである．

中国算書算学啓蒙(元の朱世傑著大徳3年1299)は秀吉の朝鮮の役の際その朝鮮版が最初に渡来し後には和刻も出版された(1658)．和算家はこの書によって天元術(算木を使って方程式を解く中国の代数)を学んだのである．孝和がこの書を読んだことは著書を通覧してわかり，また宝永元年に門人宮地新五郎に与えた算法許状の目録の内に開方釈鎖術という題目があるが，これは算学啓蒙で天元術の問題を解く部門の名称である．そして後にのべるように天元術にくふうを加えて演段法を発明したのである．奈良の算書については孝和がかつて宋楊輝算法を書き写したという確証がありこの書ではないかといわれている．そのほかいろいろの書名があげられているが現在明確ではない．孝和が算学啓蒙以外に中国数学に関する深い造詣を持っていたことは著書によって明らか

に知られるのである．

以上の理由で武林隠見録は孝和の数学の成立について重要な参考文献と思われる．

これより少し後の時代に和算家の記録が二つある．一は関流三伝（孝和より四代目）山路主住の高弟藤田定資の著わした精要算法(1779)の序文中に孝和は数学において天授の才を有し六才のとき衆人の計算するのを見て各人の誤算の箇所を指摘してあたりの者を驚ろかせた．長ずるに及んで師無くして算数の奥妙を極めたとのべている．前段はいかにも数学者関孝和の幼時にふさわしく作られた感があるが後の師無くして云々は上述武林隠見録の独学説と合っている．しかし偶然の機会から数学の才能を発見したという方が真実性があるように思われる．

第二は水戸彰考館所蔵の関流建部派（孝和の高弟建部賢弘より発する分派）の和算家本多利明(1744-1821)の言を記述する一写本である．それには“関氏に師なしといえども左に非，最初は今村，吉田，高原ら所為之書に依て発明せしかば後には三人之見識の秀逸にして他之及所に非といへり”とある．この三人は日本珠算の開祖毛利重能(しげよし)の三高弟今村知商(ともあき)，吉田光由(みつよし)，高原吉種(よしたね)を指すが実際孝和の数学に今村，吉田の著書特に前者が大きな影響を与えていることはたしかである．この説は孝和が先人の書を師として学んだというのである．

以上三説のいずれも一定の師に就かなかったという点については一致している．

現在見られる諸文献の内には確実に孝和の師伝を示すものはないが，これらを総合してみると，孝和は初め偶然の機会から大衆的な算書に接し，それから数学に興味をもって日本従来の諸算書を独習し，後進んで中国算書を研究して珠算から天元術に至る課程を会得したものと推定される．

次に孝和の主な業績についてその基礎を検討しよう．

3. 毛利重能をわが国珠算の開祖とすれば関孝和は筆算の開祖である．この筆算は孝和の数学の基礎をなすもので，その成立の要因は遺題にある．

遺題とは問題を後にのこす意味で吉田光由の考案したものである．吉田光由はその著塵劫記の寛永 18 年版(1641)小形本（他に大形同年版がある）に新題 12 を設け，その解答をはぶいて読者の力量をためすことを創意した．これは諸学究に研究資材を与え和算の内容を豊富にする役割りをつとめた．12年後に最初の解答書参両録が現れそれには自選の 8 題がのこされていた．以来これに習って前者に解答して新題をのこす風習が流行し約 120 年継続した．これを遺題継承という．

この風習が盛んになるにつれ遺題の数も増し算法闕疑抄(1661)の 100 問より以後 100 問，150 問を載せるものが続出し，孝和の青年時代には正にその絶頂に達したのである．これら各書の遺題は孝和の実力を養成しまた研究課題の多くを彼に与えた．その著書にこれが歴然と現れているのである．関孝和の著書は処女作発微算法(1674 刊)と遺著括要算法(1712 刊)を除くのほか全部写本である．

発微算法は古今算法記（沢口一之著，1670）の遺題解答書である．沢口一之は大阪の橋本正数の門に学んだ人で橋本は日本における天元術の最初の指導者であった．沢口は算法根元記（佐藤正興著，1666）の遺題 150 問を天元術によって解き，新題 15 を設け，古今算法記中に記載した．この書は 7 巻より成り，最初の 3 巻は塵劫記流の日用算をかなまじり文で記し，残り 4 巻は漢文で，4, 5, 6 の 3 巻は根元記 150 問の答術，終巻は自設15問である．孝和がこの書から大きい影響を受けていることは後にその例をのべるが，ここでは特にその遺題について考える．正式に天元術の形式を用いた刊行書はこれが最初で遺題もまた天元術に関する最初のものである．数こそ多くないがどれも複雑な問題で当時の学者をなやませたものである．元来天元術は 1 元方程式の解法で，方形に区画された紙の盤上に 1 未知数（天元之一という）についての方程式の係数を上から下へ常数項，1 次，2 次，3 次，… とならべ組み立て除法によって根を求めるものであるから多元のものをあつかうことができない．また無理方程式も盤上に表現できない．沢口の遺題はこの天元術の欠陥をねらったものである．かような問題を天元術で解くにはなんらかの方法で計算して 1 元方程式をみちびき，それを盤上に列して解くのである．この表面に現れない準備計算のくふうをさせるのが沢口の遺題である．孝和の発微算法を見ると純然たる天元術の形式で準備計算はまったくかげも

見せていない．従っていかなる方法で1元方程式を得たか読者にはわからないのである．中国の数学は問，答，術の順序にのべられ術とは答を得る方法をのべたもので理路は示さない．天元術では未知数を含んだ二つの式を作り前者を‘寄左’後者を‘相消’といい，この両者は差し引き零，つまり相等しくなるものである．こうして方程式を作る．これを開方式という．それを前記のごとく組み立て除法で解くのでHorner法とまったく同じである．術とは寄左，相消二式の作り方をのべるだけでその理由はいわないのである．それだから発微算法の答術は見る人に魔法のような感を与える．それがため孝和の方法は誤りであるというような批評をする学者もでた．孝和の高弟建部賢弘(たけべかたひろ)はこの誤解をさとらせるため発微算法演段諺解(1685)を著わし，この答術が演段法によるものであることを明らかにした．この演段法こそ筆算の最初である．孝和は各書の遺題を研究しているうちに多元方程式から補助未知数を消去することを考案した．算木の記数法を適当にかえて紙の上にうつすのである．算木の記数法は 𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 𝍥 𝍦 𝍧 𝍨 で零は盤上では空位，印刷体では○を用いる．盤上には正数は赤色，負数は黒色のものを使うが書物では負数を卜のように斜線を加えてあらわす．孝和の方法はたとえば甲という数をあらわすには丨甲とする．

丨は算木でその傍に数をかくところからこれを傍書法という．2甲−3乙は𝍡甲𝍢̸乙とする．負数は天元術の記号をそのまま用いている．上のような式は普通縦書するが横書することもある．傍書でかいた式を傍書式という．四則は丨甲丨乙(甲＋乙)，丨甲卜乙(甲−乙)，丨甲乙(甲×乙)，乙丨甲(甲÷乙)で示すが除法記号は孝和の後にできたものである．冪をあらわすのは丨$\substack{\text{甲}\\\text{巾}}$(甲^2)，丨$\substack{\text{甲}\\\text{再}}$(甲^3)，丨$\substack{\text{甲}\\\text{三}}$(甲^4)等とし無理数は丨$\substack{\text{甲}\\\text{商}}$($\sqrt{\text{甲}}$)とする．この方法ならば多元の場合でも無理式でも表現することができる．

こうして傍書代数が生まれたのである．中国では簡単な問題だけ取り扱ったために筆算の必要がなかったが日本では遺題の風習が盛んになったので天元術から筆算代数に進化したのである．傍書代数で補助未知数を消去して1元方程式をみちびくことを演段法というのである．この術語は中国算書からきたもので当時普及していた明の程大位の著算法統宗(そう)(1593刊，塵劫記はこれを飜案したもの)中には演算を片段することと定義してある．その方法は図解が主で演段図という．孝和の演段の意味はこれと異なり消去法をいうのである．孝和の著書の内に闕疑抄一百問答術および勿憚改(ふつだんかい)答術がある．前者は算法闕疑抄(磯村吉徳著，1661)の遺題100問，後者は算法勿憚改(ふつだんかい)(村瀬義益著，1673)の遺題100問の答術で大体発微算法と同時代の著と推定される．これらは珠算時代のものであるがこれによって孝和が青壮年期に各書の遺題を研究し多くの課題を得，またそれが起因となって傍書法，演段法が成立したものと考えられる．

4.　傍書代数は孝和の数学の基礎ですべてはこれから発展していくのである．孝和はこの代数を帰源整法といったというが著書にはこの術語が見当たらない．後，延岡の城主内藤政樹(大名数学者)が点竄(てんざん)と改めこれが定術語となった．点はしるす，竄はけずるの意でおそらく消去法(演段)を意味するものであろう．演段は臨機的な方法であるが孝和はさらにこれを一定の体形に整えた．2元の場合に補助未知数について2式を整頓する．主未知数を真，補助未知数を虚という．両式は虚について同次とする(もし次数がちがえば消去法で低次の方へそろえる)．現代的にいって両式が虚について n 次であれば最高次の項を消去して $n-1$ 次式を得る．この式に虚をかけて n 次式とし，初めの2式から $n-1$ 次の項を消去した式(n 次式)を作り，両 n 次式からまた n 次の項を消去して第二の $n-1$ 次式がでる．その式を n 次式にしたものと初めの2式から $n-2$ 次の項を消去した式とから n 次の項を消去して第三の $n-1$ 次式を作る．これを反復して n 個の $n-1$ 次式を作る．それらから虚を消去して1元方程式を得る．これは行列式による消去法である．整方程式に直すために行列式の展開が必要になる．展開法を斜乗といって $n=2, 3$ の場合は西洋のものとまったく同じである．$n \geqq 4$ のときには方程式の順序をかえる．たてを行と称すれば行の交換である．その方法は最初の式を固定し，のこりの $n-1$ 個の行を輪環式にかえるのである．$n=4$ ならば3種ありおのおの4次行列式で斜乗により8個の項がでるから全部で24項の展開式ができる．行の交換を交式という．方程式を番号で示すと各交式は(1234)，

(1342), (1423) となる. $n=5$ となれば前の交式の番号を一つずつ増して(2345), (2453), (2534) とし最初に1をおいて (12345), (12453), (12534) とし各種について交式を作れば 12 種で各5次行列式の斜乗が 10 だから合計 120 個の項を得る. こうして順次展開されるが各項の符号を定める問題がある. これを生尅というが斜乗した積の符号をそのままとるのを生, 反号するのを尅という. これは解伏題之法という写本に記すところであるが内容は消去法からでた行列式とその展開でこの書は天和3年(1683)重訂とあるから発見はそれ以前で Leibniz より十数年は早いと思われる. 後の時代にこの書の交式や生尅に誤りのある箇所が発見され, また小行列式による展開, Laplace の展開と一致するものなどが発見されたが形式数学でない和算では消去法の手段以外の発展はなかった.

次は方程式論であるが特徴のある病題の起因をしらべよう. 病題とは異常な問題の意で条件の過多, 不足, 答が二様以上出るもの, 答の得られないもの等で最後のものは実根のない方程式の出る場合である. その起因は前述の古今算法記(1670)で答の二つ出るものを飜狂と称し, その処理法として未知数に条件を付し, または題中の数値をかえて答が一つになるようにした. 孝和はこれを拡張し異常題を分類してこれらを正常化する方法を研究した. その結果をまとめたのが病題明致という著述である. 特に無商式(実根のない方程式)では導函数に相当する式を用いて実根条件を求めそれによって問題中の数値を変更して正根の出るようにした.

5. 最後に図形題についてのべよう.

遺著括要算法に記載する角術, 円周率, 弧矢弦, 玉積率等についてその起因をしらべてみよう. 角術は正三角形から正二十角形に至るまで一辺の長さを与えて, 内, 外接円の直径を求める方程式を作るのであるが三角函数を用いず幾何学的に出すのである. これは今村知商の竪亥録(1639)に三角から十角まで論じてあったものを拡張したのであるが今村の後, 村松茂清がその著'算俎'(1663)においてこれを整備し角法と名づけた. 孝和の角術はこの二著が基礎になっている. 円周等分方程式に関係する研究として孝和のたいせつな業績の一つである. 円周率は前記算俎で内接正多角形の辺数を倍加して $2^{15}=32768$ 辺形におよびその周を計算して小数第7位まで正確に求めた(実際は2位で止めた)ことに示唆を受けている. 孝和の方法は $2^{17}=131072$ 辺形の周まで達しているが, これは単に算俎をくわしくしたのではない. 正方形から始まる各周の数列の二隣項の差をとった第二数列の十分先の方がほぼ等比数列をなす(2^{17} まで求めた理由)ことを利用して円周の近似値を求める簡単な公式を作った. n を十分大きくとり, 第二数列の連続する三項を a_n, a_{n+1}, a_{n+2} とすれば, 次の近似等式が成り立つのである.

$$\text{円周の長さ}=a_{n+1}+\frac{(a_{n+1}-a_n)(a_{n+2}-a_{n+1})}{(a_{n+1}-a_n)-(a_{n+2}-a_{n+1})}.$$

これを増約術という. 増約とは無限 G.P. の和である. そして円周率の近似分数 355/113 を得た. 弧矢弦は前記今村の竪亥録に記載する今村自身の研究である. これは弓形の弧長を弦と弓形の高さ(矢)とであらわす近似公式で, 孝和はそれを精密化し, 増約術を用いて Newton の補間公式と同形のものを得た. 玉積率は球の体積の計算で, 毛利重能以来球を多くの薄片に切り薄い円柱とみて計算する方法が行なわれ, 算俎ではほぼ正確になってきたが, 孝和は増約術により正しく $\pi/6\times(\text{直径})^3$ と算出した. $\pi/6$ が玉積率である.

まだのべることは多々あるが既に予定の枚数を越えているのでこの辺で止める.

要約するに孝和の数学は日本従来の算書とその遺題および中国算書の知識によって成立したものと思考されるのである.

関孝和の業績について

加藤 平左エ門

関孝和の業績はすこぶる広汎にわたっており, しかもそれがどの分野においても同時代の諸算家のものとは比較にならぬ程すぐれたものばかりで, 彼によってわが国の数学の様相は全く一変し