(1342), (1423) となる. $n=5$ となれば前の交式の番号を一つずつ増して(2345), (2453), (2534) とし最初に1をおいて (12345), (12453), (12534) とし各種について交式を作れば 12 種で各5次行列式の斜乗が 10 だから合計 120 個の項を得る. こうして順次展開されるが各項の符号を定める問題がある. これを生尅(こく)というが斜乗した積の符号をそのままとるのを生, 反号するのを尅(こく)という. これは解伏題之法という写本に記すところであるが内容は消去法からでた行列式とその展開でこの書は天和3年(1683)重訂とあるから発見はそれ以前で Leibniz より十数年は早いと思われる. 後の時代にこの書の交式や生尅に誤りのある箇所が発見され, また小行列式による展開, Laplace の展開と一致するものなどが発見されたが形式数学でない和算では消去法の手段以外の発展はなかった.

次は方程式論であるが特徴のある病題の起因をしらべよう. 病題とは異常な問題の意で条件の過多, 不足, 答が二様以上出るもの, 答の得られないもの等で最後のものは実根のない方程式の出る場合である. その起因は前述の古今算法記(1670)で答の二つ出るものを飜狂と称し, その処理法として未知数に条件を付し, または題中の数値をかえて答が一つになるようにした. 孝和はこれを拡張し異常題を分類してこれらを正常化する方法を研究した. その結果をまとめたのが病題明致という著述である. 特に無商式(実根のない方程式)では導函数に相当する式を用いて実根条件を求めそれによって問題中の数値を変更して正根の出るようにした.

5. 最後に図形題についてのべよう.

遺著括要算法に記載する角術, 円周率, 弧矢弦, 玉積率等についてその起因をしらべてみよう. 角術は正三角形から正二十角形に至るまで一辺の長さを与えて, 内, 外接円の直径を求める方程式を作るのであるが三角函数を用いず幾何学的に出すのである. これは今村知商の竪亥録(じゅがいろく)(1639)に三角から十角まで論じてあったものを拡張したのであるが今村の後, 村松茂清がその著 '算俎' (1663)においてこれを整備し角法と名づけた. 孝和の角術はこの二著が基礎になっている. 円周等分方程式に関係する研究として孝和のたいせつな業績の一つである. 円周率は前記算俎で内接正多角形の辺数を倍加して $2^{15}=32768$ 辺形におよびその周を計算して小数第7位まで正確に求めた(実際は2位で止めた)ことに示唆を受けている. 孝和の方法は $2^{17}=131072$ 辺形の周まで達しているが, これは単に算俎をくわしくしたのではない. 正方形から始まる各周の数列の二隣項の差をとった第二数列の十分先の方がほぼ等比数列をなす(2^{17} まで求めた理由)ことを利用して円周の近似値を求める簡単な公式を作った. n を十分大きくとり, 第二数列の連続する三項を a_n, a_{n+1}, a_{n+2} とすれば, 次の近似等式が成り立つのである.

$$\text{円周の長さ}=a_{n+1}+\frac{(a_{n+1}-a_n)(a_{n+2}-a_{n+1})}{(a_{n+1}-a_n)-(a_{n+2}-a_{n+1})}.$$

これを増約術という. 増約とは無限 G.P. の和である. そして円周率の近似分数 355/113 を得た. 弧矢弦は前記今村の竪亥録(じゅがいろく)に記載する今村自身の研究である. これは弓形の弧長を弦と弓形の高さ(矢)とであらわす近似公式で, 孝和はそれを精密化し, 増約術を用いて Newton の補間公式と同形のものを得た. 玉積率は球の体積の計算で, 毛利重能以来球を多くの薄片に切り薄い円柱とみて計算する方法が行なわれ, 算俎ではほぼ正確になってきたが, 孝和は増約術により正しく $\pi/6\times(\text{直径})^3$ と算出した. $\pi/6$ が玉積率である.

まだのべることは多々あるが既に予定の枚数を越えているのでこの辺で止める.

要約するに孝和の数学は日本従来の算書とその遺題および中国算書の知識によって成立したものと思考されるのである.

関孝和の業績について

加藤平左エ門

関孝和の業績はすこぶる広汎にわたっており, しかもそれがどの分野においても同時代の諸算家のものとは比較にならぬ程すぐれたものばかりで, 彼によってわが国の数学の様相は全く一変し

たと言ってもあえて過言でない．後世の和算家は，彼を算聖または関夫子と尊称し，彼の著作を金科玉条として秘め伝えたものである．

徳川の初期に，中国の算書元の朱世傑の‘算学啓蒙’，明の程大位の‘算法統宗’等が朝鮮を通じてわが国に伝えられた．これらは主として日常の諸算を説いたものであるが，この‘算学啓蒙’の最後の章に天元術というものが書かれている．これは今日の代数学における数字方程式を取り扱ったものである．ところがそこには方程式の立て方や答は記してあるが，肝心な解き方が示されてないために，これを本当に理解するまでには和算家は随分苦労したものである．それでも孝和のころになると，ようやく理解されて天元術を説いた書物等も現れてきた．佐藤正興の算法根元記(1666)，沢口一之の古今算法記(1670)がそれである．しかしこれは1元方程式を立てこれを算木によって解く方法であったために，少し複雑な問題になると方程式を立てることが非常に困難になり行き詰りを生ずるのである．これにくふう改良を加えていわゆる点竄術を創案したのが関孝和である．天元術では算木で演算するのであるから，二つ以上の未知数を表示する手段がない．孝和はこれを改良して，今日の代数学のごとく文字をもって未知数を表わし，連立方程式の考え方で算木によらずに紙上で解くことを案出したのである．この方法は中国でもわが国でもかつて行なわれたことのないもので全く前人未発のものである．爾来この解法は関の演段(または傍書式演段)と呼ばれ，わが数学界を風靡したものである．このために和算は長足の進歩発展を遂げることができ，そして中国数学からは全く脱却してわが国独自の形態を備えるようになったのである．そして松永良弼(関流二伝)のころともなれば，点竄術は全く現今の代数学のように整備されてくるのである．

なお高次方程式を解く孝和の方法は中国の天元術をさらに改良くふうしたものである．この中国の天元術は大体において今日数字方程式解法に用いられている Horner の方法と類似しているが，孝和の方法に至ってはそれと全く同一と言ってよい．Horner はこの方法を 1819 年に発表しているが，孝和は既に 1680 年ごろの著書中にこれを盛んに用いているのである．さらにこの計算中に用いている近似計算法(窮商)は Newton の近似法と同一であることも注目すべきことである．

孝和は，点竄術を発見して高次方程式解法に一新紀元を画したに止どまらず，さらに高次連立方程式解法中の未知数消去の方法に工夫をこらして遂に行列式の概念にまで到達したのである．これを詳述したものが彼の著‘解伏題之法’で実に1683年以前のことである．そしてこれが世界で初めて発表された行列式に関する書物である．外国では行列式を初めて考えたのはドイツの Leibniz である．彼は 1693 年，友人 L'Hospital に送った書翰中に記された1次の連立方程式解法中の消去法にそれを用いているということであるが，これは 1850 年ころまでは全く知られておらず，西洋でこの研究の起こったのはようやく 1750 年以後である．しかるにわが国では Leibniz の書翰よりは少なくとも 10 年以前にやられており，また大阪においては 1690 年に井関知辰の行列式を取り扱った算法発揮という書物が刊行されているのである．行列式研究に先鞭をつけたのは正にわが国の和算家である．これは和算の大いに誇りとするところである．孝和は本書において交式と斜乗の二方法で行列式の展開を試みているのである．これは3次の行列式における Sarrus の展開を一般の場合に拡張したもので，4次以上の場合には交式によってさらにいくつかの行列式を作り，これらのすべてに3次の場合のように斜乗を行なって展開のすべての項を求めんとするのである．よく考えたものであるが，惜しいことに5次以上の場合には誤りが起こるのである．これは後の和算家によって訂正された．

次に孝和の業績中偉大なものの一つは円理の基礎を築いたことである．彼は当時最も困難とされた極限の考えを自由に駆使していろいろの困難な問題を巧みに処理している．

括要算法にみえる環矩術は π の値の算出法を説

いたものであるが，そこでは直径1尺の円に内接する $2^{15}, 2^{16}, 2^{17}$ 角形の周を求めこれを p_{15}, p_{16}, p_{17} とすると

$$p=p_{16}+\frac{(p_{16}-p_{15})(p_{17}-p_{16})}{(p_{16}-p_{15})-(p_{17}-p_{16})}=3.14159265359\text{弱}$$

をもって円周としているのである．これは p_k, $p_{k+1}, p_{k+2}, \cdots$ について，$p_{k+1}-p_k, p_{k+2}-p_{k+1}, \cdots$ を作ってみると，k が相当大きいときこれらはほとんど公比 1/4 の等比級数をなすことに着目し，無限等比級数の公式を利用して上の結果を得たものである．なお彼の弟子建部賢弘は上の方法を八回繰り返すことによって，2^{10} 角形までの周を使って π の値42位を正しく算出しているのである．

同じく括要算法に直径 d，矢 h である円弧の長さ s を求める公式として

$$a_8(d-h)^5s^2=a_1d^6h+a_3d^4h^3+a_5d^2h^5 -a_2d^5h^2-a_4d^3h^4-a_6dh^6-a_7h^7 \qquad (1)$$

を出している．これは径1尺，矢1寸の円弧を前のように算出してそれを s_1 とする．同様に矢2寸，3寸，4寸，4.5寸に対する円弧を算出して s_2, $s_3, s_4, s_{4.5}$ とすれば(1)は

$h=0, 1, 2, 3, 4, 4.5, 5$ のときに s がそれぞれ

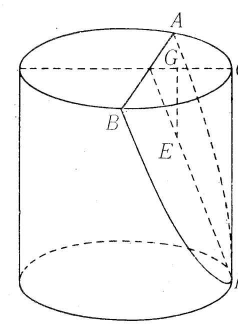
$$0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_{4.5}, \frac{\pi d}{2},$$

になるよう $a_1, a_2, a_3, \cdots$ が定めてあるのである．これによって h が任意に与えられたときそれに対する s の値を求めるのである．結局無限級数で表わさるべき s^2 の近似式を求め得たわけで Newton の補間法に匹敵するものである．

孝和はこの外，弧背を求めるいろいろの近似式を作ったことが建部の‘不休綴術’等に記されているが，これらをさらに前進せしめたものが関流の弧背術である．これは弧背を無限級数で表わすもので

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2=hd+\frac{h^2}{3}+\frac{8h^3}{45d}+\frac{4h^4}{35d^2}+\frac{128h^5}{1575d^3}+\cdots$$
$$=\text{元数}+\frac{2^2}{3\cdot4}(\text{元数})\frac{h}{d}+\frac{4^2}{5\cdot6}(\text{一差})\frac{h}{d}+\frac{6^2}{7\cdot8}(\text{二差})\frac{h}{d}+\cdots$$

としたものである．ここで元数，一差，二差，… はそれぞれ級数の第1項，第2項，…を意味する．この計算中には $x^2-dx+(1/4)hd=0$ を解くに数字係数の場合における Horner の方法と全く同様な方法が使われている．このような計算ができるようになったのは孝和が点竄術を発明した賜物と言わねばならぬのである．なお上の無限級数の表示法は，Newton が初めて分数指数を有する二項定理の無限級数展開に成功したときに使った表示法と全く同一であることも奇である．以上の事実は関流の秘書‘円理弧背術’および‘乾坤之巻’にみえるのであるが，なおこれと同一内容を有する書に蜂屋定章の‘円理発起’(1728)があり，また方法が極めて素朴的であるが上と同一の級数を得ているものに建部賢弘の‘不休綴術’(1722)がある．従って上の弧背術が孝和の手によってできたものか否かについて近ごろいろいろと議論がなされるがいずれも確証はつかめておらぬ．多くの和算家の言うように，孝和の遺法に弟子の手が加えられて得たものとみるのが至当ではなかろうか．



次に積分の考えを使って解かれたと思われるものに円柱および円錐の斜截積を求める問題がある．たとえば図のような斜截積 D–ABC を求めるには弧形 ABC の面積を S，ABC の重心 G に立てた垂線 GE の截面までの長さを p（これを中心高という）とすれば D–$ABC=p\cdot S$ とする．また錐の体積は，底がどんな形であっても 1/3×(底面積)×高さとする．

また‘毬闕変形草’には弧形の回転によって生ずる九種の立体の体積を求めているが，これらはいずれも弧形の面積とその重心の経路（これを中心周という）との積とする（Guldin または Pappus の定理）．これらの定理や公式をいかにして得たかその辺のことは何も記されておらぬが，恐らくまず積分の考えによって一応体積を求め，それと底面積や弧形の面積等との関係を考察して上のような一般法則を導き出したものと思われる．それは和算家の法則探求にはしばしばこの手法が用いられているからである．

この外，十字環積（円環体に円柱の十字に交わったものを組み合わせた立体），腕背（Archimedes の spiral），蔓巻線，円錐螺旋，楕円の面積および周

を求める問題等積分の考えを要すると思われる問題をたくさん取り扱っている．当時はやっと円や球の求積に極限の考えの萌芽が見えそめたばかりの時代であったことを思えば，これら孝和の業績は全く抜群といわねばならぬのである．なお円錐台の斜截積を求める解中に直円錐の截口には楕円以外の曲線が現れることおよび放物線で囲まれた図形の面積の求め方まで述べているがこれが後の和算家の眼にとまらなかったのは惜しいことであった．

次に導函数に該当するものが‘開方飜変’の中にみられることも見逃すことはできぬ．すなわち

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0 \qquad (2)$$

に $x=y+\alpha$ なる変換を行なって得る式を

$$f(y+\alpha)=b_0+b_1y+b_2y^2+\cdots+b_ny^n=0 \qquad (3)$$

とすると

$$b_0=f(\alpha),\ b_1=f'(\alpha),$$
$$b_2=\frac{f''(\alpha)}{2!},\ b_3=\frac{f'''(\alpha)}{3!},\ \cdots$$

となることが記されている．従って(3)を

$$f(y+\alpha)=f(\alpha)+f'(\alpha)y+\frac{f''(\alpha)}{2!}y^2+\cdots$$

と書けばこれは Taylor の展開にほかならぬ．孝和は $f'(\alpha)=0$ となるよう(2)の係数中の或るものを選ぶことを適尽方級法，$f''(\alpha)=0$ となるよう選ぶことを適尽上廉級法等といっている．従って適尽方級法では $f(x)=0$ と $f'(x)=0$ とから x を消去して $D=0$ を作る．そしてもし(2)に実根がないときは $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 中の或るものたとえば a_0 の値をかえて実根があるようにするのである．それには $D=0$ を a_0 の方程式として解き，その限界を定めるのである．そのために5次方程式までの D を求めて記しているが5次の場合は実に正項31，負項28ある8次の同次式となっているのである．なおここで注目すべきことはこれが和算の極大極小論の起源をなすということである．今

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=k$$

として

$$(-k+a_0)+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0 \qquad (4)$$

を考え，$-k+a_0$ をいかに選べば(4)が実根をもつようになるか，換言すれば k をいかに選べば(4)が実根をもつようになるか，その k の限界はどうか，またそのときの x の値は $f'(x)=0$ を解けばよいということから $f(x)$ の極値を求める方法がでてくるのである．かくして和算家は今日われわれが行なうのとほとんど同じ方法で極値問題を解決しているのである．

また「累積」においてはいろいろの級数の和を求めている．その中に $\sum n^r$ の場合 $r=11$ までの結果を示した後これらの結果からさらに一般の場合にまで及んでいるがそこにでてくる‘取数’は Bernoulli number と一致するものである．また角術では正三角形から正二十角形までの正多角形の辺を与えてそれらの内接円および外接円の半径を算出しており，その他翦管術（1次不定方程式解法）招差法（階差法）算脱験符（継子立，目付字）方陣円欑等実に彼の研究は極めて多岐にわたっている．そしてその手法は他の算家と異なり極めて理論的，方法論的で，どの方面においても画期的な結果を得ており，誠に算聖の名に背かない偉大な数学者といわねばならぬのである．

関孝和の経歴について

大矢真一

明治40年(1907年)，関孝和の200年祭が行なわれた時代には，その伝記は相当はっきりしているもののように考えられていた．しかし，それから50年，今日では関孝和の伝記はほとんど不明であるということが定説になっている．この間，従来行なわれている関孝和の履歴についての通説のうち，確かでないものを一つ一つ打破して，そこにほとんど信ずべきことがらのないことを明らかにしたのは科学史家三上義夫であった．

当時，関孝和の伝記として，どういうことが信じられていたか．それは，その年12月6日に行なわれた関先生贈位奉告祭に読まれた祭詞に，もっとも簡明に表わされている．

……アハレ大人(ウシ)ノ命(ミコト)ハ，去(イ)ニシ寛永十九年三月ト言フ