東京物理學校雜誌第六百九號

昭和十七年八月

決選投票の問題に就て**

伊　藤　　清*

m 人の選擧人 $A_1\ A_2\ A_3\cdots A_m$ が n 人の候補者 $B_1\ B_2\cdots\cdots B_n$ から豫選投票の結果高點順に k 人 $B_1\ B_2\cdots\cdots B_k$ を選出し更に此の k 人を候補者として決選投票を行つた場合決選に於ける得點數の順位が豫選に於ける得點數の順位と同じであれば問題はないが，往々にして順位が前と反對になる事が起る。此の場合通常は豫選の結果は全然默殺して單に決選の結果のみに依つて決する事が行はれるが，之は合理的ではない。最も合理的と考へられるのは，各候補者に對して n 人の選擧人が有する信頼度の期望値の總和を兩回の選擧の結果を參酌して計算し，その大小に依るといふ方法であらう。$k=2$ の場合には本誌第 595 號に東京帝大の掛谷宗一教授がその研究を發表せられて居るが，本稿はそれと全く同じ考へにより，k の一般の値の場合を求めたのである。結論を先にいふと次の如くである。

「k 人中の任意ノ二人例へば B_1, B_2 が豫選に於て得た點數を夫々 $S_1\ S_2$, 決選に於て得た點數を $S_1'\ S_2'$ とし $S_1>S_2$ で $S_1'<S_2'$ であつたとする。

$$S_1-S_2>k(S_2'-S_1')$$

の時には豫選の順位に従ひ

$$S_1-S_2<k(S_2'-S_1')$$

の時には決選の順位に從ふ。」

$k=2$ とすれば掛谷教授の場合が得られる。

偖て $A_1A_2\cdots A_m$ 中豫選に於て既に B_1 に投票した人は決選に於ても同一人に投票するに相違ない。その人數を S_1 とする。これは豫選に於ける B_1 の得點數である。同様に豫選に於ける $B_2B_3\cdots\cdots B_k$ の得點數を夫々 $S_2\,S_3\cdots\cdots S_k$ とする。次に $A_1A_2\cdots\cdots A_m$ の中豫選に於ては $B_{k+1}\,B_{k+2}$ 乃至 B_n に投票し，決選に於て B_1 に投票した人の數を t_1 とすると，決選に於ける B_1 の得點數は S_1+t_1 である。同様に決選に於ける $B_2\ B_3\ \cdots B_k$ の得點數を夫々 $S_2+t_2,\ S_3+t_3,\ \cdots\cdots\ S_k+t_k$ であるとする。

今選擧人 A_i が候補者 B_j に對して有する信頼度を x_{ij} $(i=1,2,\cdots\cdots m, j=1,2,\cdots\cdots n)$ にて表はすと，x_{ij} は 0 と 1 との間の値をとる確率變數と考へる事が出來,而も選擧の前に於ては，その確率分布は 0 と 1 との間の一様分布で，且つ此等 mn 個の確率變數は獨立と考へてよい。

A_1 を假に豫選に於て既に B_1 に投票した選擧人とすれば

$$x_{11}>\max(x_{12},\ x_{13},\ \cdots,\ x_{1n}) \tag{1}$$

又 A_2 を決選に於て始めて B_1 に投票した選擧人とすれば

$$\max(x_{2,k+1},\ x_{2,k+2}\ \cdots\ x_{2,n})>x_{21}>\max(x_{22}\,x_{23}\cdots\cdots x_{2k}) \tag{2}$$

從つて兩回の選擧の結果知り得た事柄は，(1) の如き形の不等式が $S_1+S_2+\cdots+S_k$ 個と (2) の如き形の不等式が $t_1+t_2+\cdots\cdots+t_k$ 個と合計 m 個の不等式で表はされる。玆に注意すべきは各の確率變數は唯一つの不等式にのみ現はれる事で，從つて，選擧前に於ては總ての變數が互に獨立なる事を思ひ起すならば，これ等 m 個の不等式の成否も亦選擧前に於ては互に獨立であると見做される。以後これ等 m 個の不等式の成立する條件の下に於て各の確率變數の從ふ（條件附）確率法則を求める事が問題となるが，上述せる所に依れば，例へば x_{11} 又は x_{12} の確率法則を求めるには，單に (1) の成立する條件の下に於て考へればよいし，

* 内閣統計局統計官

** 脚註　文部省科學研究費に依る東京帝國大學理學部第二號研究の一部

x_{21} 又は x_{22} の從ふ確率法則を求めるには單に (2) の成立する條件の下に於て考へれば十分である事が分る。

I. 豫選に於て B_1 に投票したる選擧人が B_1 に對して有する信頼度の確率法則を求めるには，(1) の成立する條件の下に於ける x_{11} の從ふ確率法則を求めればよい。簡單の爲共通の添記號 1 を省略すると，

$$x_1 > \max(x_2 x_3 \cdots\cdots x_n) \tag{3}$$

の條件の下に於て $\lambda < x_1 < \lambda + d\lambda$ なる（條件附）確率を求める事に歸着する。先づ選擧前に於ては

$$Pr\{\lambda < x_1 < \lambda + d\lambda_2,\ \lambda_2 < x_2 < \lambda_2 + d\lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \lambda_n < x_n < \lambda_n + d\lambda_n\} = d\lambda d\lambda_2 d\lambda_3 \cdots\cdots d\lambda_n \tag{4}$$

である。玆に Pr は確率（probability）を表はす記號である。

$$\begin{aligned} &Pr\{\lambda < x_1 < \lambda + d\lambda,\ \ x_1 > \max(x_2 \cdots\cdots x_n)\} \\ &\qquad = Pr\{\lambda < x_1 < \lambda + d\lambda,\ \ \lambda > \max(x_2 \cdots\cdots x_n)\} \\ &\qquad = d\lambda \int_0^\lambda \int_0^\lambda \cdots\cdots \int_0^\lambda d\lambda_2 d\lambda_3 \cdots\cdots d\lambda_n = \lambda^{n-1} d\lambda \end{aligned} \tag{5}$$

$$Pr\{x_1 > \max(x_2 \cdots\cdots x_n)\} = \int_0^1 \lambda^{n-1} d\lambda = \frac{1}{n} \tag{6}$$

故に求むる條件附確率は (5) と (6) と比

$$\frac{\lambda^{n-1} d\lambda}{\dfrac{1}{n}} = n\lambda^{n-1} d\lambda \tag{7}$$

であつて，問題の信頼度の期望値は

$$\int_0^1 \lambda n \lambda^{n-1} d\lambda = \int_0^1 n\lambda^n d\lambda = \frac{n}{n+1} \tag{8}$$

II. I の場合と同じ選擧人が B_2 に對して有する信頼度の從ふ確率法則を求めるには (3) の條件の下に於て $\lambda < x_2 < \lambda + d\lambda$ なる（條件附）確率を求めればよい．選擧前に於ては

$$\begin{aligned} &Pr\{\lambda_1 < x_1 < \lambda_1 + d\lambda_1,\ \lambda < x_2 < \lambda + d\lambda,\ \lambda_3 < x_3 < \lambda_3 + d\lambda_3,\ \cdots\cdots,\ \lambda_n < x_n < \lambda_n + d\lambda_n\} \\ &\qquad = d\lambda_1 d\lambda d\lambda_3 \cdots\cdots d\lambda_n \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &Pr\{\lambda < x_2 < \lambda + d\lambda,\ \ x_1 > \max(x_2 x_3 \cdots\cdots x_n)\} \\ &\qquad = Pr\{\lambda < x_2 < \lambda + d\lambda,\ \ x_1 > \lambda,\ \ x_1 > \max(x_3 \cdots\cdots x_n)\} \\ &\qquad = d\lambda \int_\lambda^1 d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda_1} \cdots\cdots \int_0^{\lambda_1} d\lambda_3 d\lambda_4 \cdots\cdots d\lambda_n \\ &\qquad = d\lambda \frac{1}{n-1}(1 - \lambda^{n-1}) \end{aligned} \tag{10}$$

$$Pr\{x_1 > \max(x_2 x_3 \cdots\cdots x_n)\} = \int_0^1 d\lambda \frac{1}{n-1}(1 - \lambda^{n-1}) = \frac{1}{n} \tag{11}$$

故に求むる條件附確率は (10) と (11) との比

$$\frac{n}{n-1}(1 - \lambda^{n-1}) d\lambda \tag{12}$$

であつて，問題の信頼度の期望値は

$$\int_0^1 \lambda \frac{n}{n-1}(1 - \lambda^{n-1}) d\lambda = \frac{n}{2(n+1)} \tag{13}$$

同様にして，豫選の際に既に $B_2 B_3 \cdots\cdots B_k$ の何れかに投票したる $(S_2 + S_3 + \cdots\cdots + S_k)$ 人の選擧人の各〻が B_1に對して有する信頼度の期望値も (13) 式にて得られる．

III. 決選に於て始めて B_1 に投票したる人が B_1 に對して有する信頼度に確率法則を求めるには I の場合と同様に考察して

$$\max(x_{k+1},\ x_{k+2},\ \cdots\cdots\ x_n) > x_1 > \max(x_2 x_3 \cdots\cdots x_k) \tag{14}$$

なる條件の下に於て $\lambda < x_1 < \lambda + d\lambda$ となる（條件附）確率を求めればよい事が分る。選擧前に於ては

$$\begin{aligned} &Pr\{\lambda < x_1 < \lambda + d\lambda,\ \ \max(x_{k+1} x_{k+2} \cdots\cdots x_n) > x_1 > \max(x_2 x_3 \cdots\cdots x_k)\} \\ &\qquad = Pr\{\lambda < x_1 < \lambda + d\lambda,\ \ \max(x_{k+1}\ x_{k+2} \cdots\cdots x_n) > \lambda > \max(x_2\ x_3 \cdots\ x_k)\} \end{aligned}$$

$$=d\lambda\underset{\lambda<\max(\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n)}{\iint\cdots\int} d\lambda_{k+1}\cdots d\lambda_n \underset{\lambda>\max(\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_k)}{\iint\cdots\int} d\lambda_2 d\lambda_3\cdots d\lambda_k$$

$$=d\lambda\Big(1-\underset{\lambda>\max(\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n)}{\iint\cdots\int} d\lambda_{k+1}\cdots d\lambda_n\Big)\Big(\underset{\lambda>\max(\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_k)}{\iint\cdots\int} d\lambda_2 d\lambda_3\cdots d\lambda_k\Big)$$

$$=d\lambda(1-\lambda^{n-k})\lambda^{k-1}$$

$$=d\lambda(\lambda^{k-1}-\lambda^{n-1}) \tag{15}$$

積分記號の下に書いた不等式は積分すべき範圍を示す。

$$P_r\{\max(x_{k+1}\cdots x_n)>x_1>\max(x_2 x_3\cdots x_k)\}=\int_0^1 d\lambda(\lambda^{k-1}-\lambda^{n-1})=\frac{n-k}{nk} \tag{16}$$

故に求むる條件附確率は (15) と (16) との比

$$\frac{nk}{n-k}(\lambda^{k-1}-\lambda^{n-1})d\lambda \tag{17}$$

であつて，問題の信頼度の期望値は

$$\int_0^1 \lambda\frac{nk}{n-k}(\lambda^{k-1}-\lambda^{n-1})d\lambda=\frac{kn}{(k+1)(n+1)} \tag{18}$$

IV. III の場合と同じ選擧人が B_2 に對して有する信頼度の從ふ確率法則を求むるには (14) の條件の下に於て $\lambda<x_2<\lambda+d\lambda$ となる (條件附)確率を計算すればよい。前と同樣に先づ

$$P_r\{\lambda<x_2<\lambda+d\lambda,\ \max(x_{k+1}\cdots x_n)>x_1>\max(x_2 x_3\cdots x_k)\}$$

$$=P_r\{\lambda<x_2<\lambda+d\lambda,\ x_1>\lambda,\ \max(x_{k+1}\cdots x_k)>x_1,\quad x_1>\max(x_3\cdots x_k)\}$$

$$=d\lambda\int_\lambda^1 d\lambda_1 \underset{\lambda_1<\max(\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n)}{\iint\cdots\int} d\lambda_{k+1}\cdots d\lambda_n \underset{\lambda_1>\max(\lambda_3\lambda_4\cdots\lambda_k)}{\iint\cdots\int} d\lambda_3 d\lambda_4\cdots d\lambda_k$$

$$=d\lambda\int_\lambda^1 d\lambda_1\Big(1-\underset{\lambda_1>\max(\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n)}{\int\cdots\int} d\lambda_{k+1}\cdots d\lambda_n\Big)\Big(\underset{\lambda_1>\max(\lambda_3\lambda_4\cdots\lambda_k)}{\int\cdots\int} d\lambda_3 d\lambda_4\cdots d\lambda_k\Big)$$

$$=d\lambda\int_\lambda^1 d\lambda_1(1-\lambda_1{}^{n-k})\lambda_1{}^{k-2}$$

$$=d\lambda\Big(\frac{1}{k-1}-\frac{\lambda^{k-1}}{k-1}-\frac{1}{n-1}+\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}\Big) \tag{19}$$

$$P_r\{\max(x_{k+1}\cdots x_n)>x_1>\max(x_2 x_3\cdots x_k)\}$$

$$=\int_0^1 d\lambda\Big(\frac{1}{k-1}-\frac{\lambda^{k-1}}{k-1}-\frac{1}{n-1}+\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}\Big)$$

$$=\frac{n-k}{kn} \tag{20}$$

故に求むる條件附確率は (19) と (20) との比

$$\frac{kn}{n-k}\Big\{\frac{1}{k-1}-\frac{\lambda^{k-1}}{k-1}-\frac{1}{n-1}+\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}\Big\}d\lambda \tag{21}$$

であつて，問題の信頼度の期望値は

$$\int_0^1 \lambda\frac{kn}{n-k}\Big\{\frac{1}{k-1}-\frac{\lambda^{k-1}}{k-1}-\frac{1}{n-1}+\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}\Big\}d\lambda=\frac{kn}{2(k+1)(n+1)} \tag{22}$$

同樣にして決選に於て始めて $B_2B_3\cdots B_k$ の何れかに投票したる $(t_2+t_3+\cdots+t_k)$ 人の選擧人の各〻が B_1 に對して有する信頼度の期望値も亦 (22) 式にて與へられる事が分る。

I, II, III, IV の結果を綜合して，B_1 に對して總ての選擧人の有する信頼度の總和は

$$E_1=S_1\frac{n}{n+1}+(S_2+S_3+\cdots+S_k)\frac{n}{2(n+1)}+t_1\frac{kn}{(k+1)(n+1)}+(t_2+\cdots+t_k)\frac{kn}{2(k+1)(n+1)} \tag{23}$$

であり，B_2 に對する信頼度の期望値の總和は上式に於て添記號 1, 2 を交換して

$$E_2=S_2\frac{n}{n+1}+(S_1+S_3+\cdots+S_k)\frac{n}{2(n+1)}+t_2\frac{kn}{(k+1)(n+1)}+(t_1+t_3+\cdots+t_k)\frac{kn}{2(k+1)(n+1)} \tag{24}$$

である。

$$E_1-E_2=S_1\frac{n}{2(n+1)}-S_2\frac{n}{2(n+1)}+t_1\frac{kn}{2(k+1)(n+1)}-t_2\frac{kn}{2(k+1)(n+1)}$$

$$=\frac{n}{2(n+1)(k+1)}\{(k+1)S_1-(k+1)S_2+t_1k-t_2k\}$$

$$=\frac{n}{2(n+1)(k+1)}\{S_1-S_2-k(\overline{S_2+t_2}-\overline{S_1+t_1})\}$$

最初に述べた結論の記號を用ひると

$$E_1-E_2=\frac{n}{2(n+1)(k+1)}\{S_1-S_2-k(S_2'-S_1')\}$$

今 $S_1>S_2$ で $S_1'<S_2'$ とすると $S_1-S_2\gtrless k(S_2'-S_1')$ に應じて $E_1\gtrless E_2$ である。之前述の結論を示すものである。

Riemann 空間及び共形接續空間に於ける圓に就いて

村 主 恒 郎*

緒言 二三年前より吾國に於ては佐々木重夫, 矢野健太郎, 武藤義夫等の諸氏に依つて Euclid 空間に於ける圓の擴張として, 共形接續の與へられた空間に於ける一般化された圓の研究がなされてゐる。詳しい文獻については終りにあげた論文を參照せられたい。Euclid 空間に於ける圓は勿論共形變換(例へば反轉等)に對しては不變であるから, これは勿論共形接續の與へられた空間に擴張され得るが, 然し一方 Riemann 空間は Euclid 空間の擴張であるから, この樣な見方に立脚すれば Riemann 空間に於ても亦圓が考へ得られる筈である。吾々は本論文に於て先づ Riemann 空間に於ける圓を定義してその微分方程式を求め, 然る後この圓と共形接續空間に於ける圓との關係について論じたいと思ふ。尙今後 Riemann 空間に於ける圓, 共形接續空間に於ける圓を簡單の爲に夫々 ***R*-圓**, ***C*-圓** と書くことにする。

吾々の取扱ふ問題は主として次の二つである:

(a) C-圓と R-圓とが一致する空間の決定

(b) C-圓が平面曲線である樣な空間の決定

1. n 次元 Riemann 空間を V_n にて表はし V_n に於ける一つの座標系を $x^i (i, j, k, h=1, 2, \cdots, n)$ としこの座標系に對する基本の計量 tensor を $g_{ij}(x)$ とする。而して今後は二次形式 $g_{ij}a^ia^j$ は正定値二次形式なりとする。今 V_n に於て $x^i=x^i(s)$ にて表はされた曲線を考へる。茲に s はこの曲線のある點から計つた弧の長さとする。然るときはよく知られた樣に Frenet-Seret の公式から

$$(1.1)\qquad \frac{dx^i}{ds}=\lambda^i,\quad \frac{\delta\lambda^i}{ds}=\frac{1}{\rho}\mu^i,\quad g_{ij}\lambda^i\lambda^j=1,\quad g_{ij}\mu^i\mu^j=1,\quad g_{ij}\lambda^i\mu^j=0$$

が得られる。茲に $\delta f/ds$ は函數 f の曲線に沿ふ共變微分係數を表はすものとし, 又 λ^i, μ^i, ρ は夫々考ふる曲線の單位切線 vector, 第一單位法線 vector, 第一曲率半徑である。

若し曲線が次の二つの條件

1° 第一曲率半徑 ρ=一定

2° $\delta\mu^i/ds$ が二つの vectors λ^i, μ^i に依つて線型的に表はされる

を滿足するとき吾々は曲線 $x^i=x^i(s)$ を R-圓であると定義する。

基本 tensor g_{ij} の共變微分係數 $\delta g_{ij}/ds$ はよく知られた如く 0 であるから吾々は $g_{ij}\mu^i\mu^j=1$ を曲線に沿つて共變的に微分して

$$(1.2)\qquad g_{ij}\mu^i\frac{\delta\mu^j}{ds}=0$$

を得。又同樣に $g_{ij}\lambda^i\mu^j=0$ を共變的に微分して

* 九州帝大理學部