Poisson point processes and their application to Markov processes (Lecture note of Mathematics Department, Kyoto Univercity, September 1969) の解説

1969 年は伊藤先生が京都大学を一時離れて海外で研究，教育に従事しておられた時期であるが，その夏季休暇に京都のご自宅にお戻りになり，日本の研究者や学生と接する貴重な時間を持たれた．そして京大と阪大でポアソン点過程の理論とそのマルコフ過程への応用について講義され，その記録がこの講義録である．1969 年の夏は第 1 回の日ソ確率論シンポジウムがハバロフスクで行われ，日本の研究者にとって忘れられない，稔り多く思い出深い夏休みであった．

講義の内容は，ポアソン点過程 (Poisson point process) の一般論とそのマルコフ過程への応用，特に再帰点の周りの周遊 (excursion) の全体を道 (path) の空間に値を取るポアソン点過程としてとらえ，マルコフ過程の見本関数の解析に応用したものである．ポアソン点過程の概念とその応用は，伊藤先生の確率論研究においてその初期の時代から重要な部分を占めてきた．それは先生の最初のお仕事であるレヴィ過程の見本関数の構造を完全に解明した「Lévy-伊藤の定理」に始まり，そこでポアソン点過程が重要な役割を果したことはよく知られている．さらに H. McKean との 1 次元拡散過程に関する共同研究において，Feller の境界条件を満す拡散過程の見本関数の記述に際し，その境界点から内部への飛躍の有様を与えるのに用いられた (有名な共著本の他，1963 年の Illinois Journal の共著論文，Brownian motions on a half line に詳しい)．そしてこの研究の一般のマルコフ過程への拡張として，その再帰点の周りの周遊の全体をポアソン点過程としてとらえる研究を第 6 回のバークレイシンポジウムで発表された (K. Itô: Poisson point processes attached to Markov processes, Proc. Sixth Berkeley Symp. III(1970))．本講義録はこの論文の更なる発展とより詳しい解説から成る．初めにポアソン点過程の一般論，特に独

立確率変数列からの構成法が詳細に説明され，初心者に益する所は大きい．そしてマルコフ過程のその再帰点の周りの周遊の全体が道の空間に値をとる点過程として与えられ，それがポアソン点過程になることが丁寧に示されている．そしてこの周遊点過程の一つの応用例として，J. Lamperti が先生に呈した疑問: 区間 $[0,\infty)$ 上の生成作用素 $x\frac{d^2}{dx^2}$ をもつ拡散過程の境界点 0 における可能な境界条件は何か，に対する解答が与えられている．この場合，境界点 0 は Feller の分類で流出 (exit) 境界であり，区間 $[0,\infty)$ の内部から有限時間で到達出来るが，連続的に再び内部に戻ることは出来ない．従って可能な行動は点 0 に吸収されてしまうか，あるいは飛躍によって内部に戻ることであるが，その有様を定めるレヴィ測度の条件が完全に求められている．尚，上の $[0,\infty)$ 上の拡散過程 (ただし境界 0 は吸収壁としたもの) は critical な Galton-Watson 分枝過程の極限として得られる一次元連続状態分枝過程の典型例で Feller の拡散過程として名高い.

この伊藤先生の周遊ポアソン点過程の理論は発表後, 直ちに多くの研究者の注目を集め, 関連する重要な研究が続出した．それは 1 次元のブラウン運動の場合に限っても, P. Lévy によるその見本関数の詳細な研究と，それをさらに整理し発展させた Itô-McKean の共同研究について，それのより容易でしかもより本質的な理解を可能し，その理論をさらに発展させるものであった．いうまでもなく，Lévy のこの研究は近代確率論における偉大な業績の一つであるが，その難解なことでも定評があった．それが伊藤の理論を通して考察することにより，より良い理解が進んだので，今日のブラウン運動の理論を含む確率解析に関する代表的教科書，例えば Ikeda-Watanabe, Revuz-Yor, Rogers-Williams 等による著書を見るとそのことが感得されるであろう．このような進歩をもたらした伊藤の理論の眞価は，従来考察されてきた見本関数の不連続点での飛躍の大きさの定義するポアソン点過程以外に，見本関数の周遊部分の軌道が定義するポアソン点過程を考察した事，すなわち前者が有限次元空間に値をとる点過程であるのに対し，後者は無限次元空間に値をとる点過程であるという事にある．この点について先生は KIYOSI ITÔ Selected Papers (Springer, 1987) の Forword において次のように回顧しておられる:

> After several years it became my habits to observe even finite dimensional facts from infinite dimensional view points. This habits led me to reduce the problem $\cdots$ to a Poisson point process with values in the space of excursions.

ポアソン点過程を含むより一般の点過程の理論が，半マルチンゲールという確率解析の中心をなす確率過程の枠組のもとで考察され，そこにおいてポアソン点過程の簡単な特性付けが与えられる．これらについては上述の確率解析の教科書に解説されているが，さらに J. Jacod と A. N. Shiryaev による教科書 (Limit Theorems for Stochastic processes, Springer (1987)) も追加しておこう．本講義録におけるポアソン点過程の strong renewal property 等も，こうした一般論を用いれば，より簡明な証明が得られる．

1 次元ブラウン運動の一点の周りの周遊ポアソン点過程の特性測度は Itô's Brownian excursion law と呼ばれ，D. Williams による優れた研究があるが，矢野孝次は 1 次元拡散過程で流出境界点を含む場合の周遊点過程においてその特性測度の構造について研究し優れた結果を得た．

渡辺 信三[*1]

[*1] 京都大学名誉教授