Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

SEMINAR ON PROBABILITY

vol. 4

丸山儀四郎， 十 時 東 生；

確率過程の収束に関する位相解析的方法

1 9 6 0

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

序　　言

N次元ユークリッド空間の値をとる確率変数列の法則収束というのは，すべての確率論の読者にとってよく知られた概念である。いまこの問題を形式的に拡張すれば，ある種の位相空間における確率測度の収束を研究するということになる。しかしこのように形式的に問題を立てても一般測度論以上に内容が豊かなものにはならない。

確率論では具体的な問題とむすびついて，必然的な要求となってこの種の研究が進められている。ここで取り扱うのは，そのうち特に重要と思われるマルコフ過程の法則収束の問題である。中でもSkorohod の仕事が重要と思われるので，これを中心として，できるだけ整理した形で紹介したいと思う。

1960年7月

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

§0. 緒　論

De Moivre, Laplace の研究にはじまる中心極限定理に関連して独立変数の和の極限分布の問題は古典的確率論の一つの中心課題であった。この問題の発展の途上で必然的に，確率過程の最も重要なクラスの一つである加法過程の一般論が確立され，これは一般マルコフ過程論のための重要な足がかりとなった。

独立変数の和の法則収束の問題は普通 R^N（N次元ユークリッド空間）値変数列 $\{X_n, 1 \leq n < \infty\}$ の法則収束という形で取り扱われるのである。しかし確率過程の視点に立てば，ある確率過程 $\mathscr{X}_n = \{X_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$ に対して $\mathscr{X}_n = X_n(1)$ と考えられる。この立場からすれば，無限次元ベクトル，あるいは確率過程の系列 X_n，更に言葉をかえていえば，$\mathscr{X}_n$ を支えている適当な位相空間Xにおける確率分布の法則収束の問題と考えるのが自然である。Kac, Erdös[6] 等は独立変数の和の色々な函数の極限法則を適当な確率過程（この場合は Wiener 過程）の汎函数の分布として求めた。この事は上記の考え方の重要性を裏書きするものである。更に Doob[2] もこの考え方にもとづいて Kolmogorov-Smirnov の分布を求める方法を与え，Donsker[1] はこれらの方法を適用するための根據となる一般論を研究した。

このような段階では Wiener 過程のみならず一般マルコフ過程論とのむすびつきが出てくるのは当然である。しかしこの点からみると実はそれ以前の文献 Khintchine [11] は重要な意味をもっている。ここで Khintchine はこの問題に対してマルコフ過程に対応する微分方程式を利用する方法を与えている。著者は [13] において，確率函数方程式を利用することによってこの問題を研究した。

Prohorov [14] は可分，完備な距離空間の確率測度の収束ということに足場をおいて，確率過程の法則収束の一般論を研究した。この場合，Xにどのような位相を導入するのが適当であるかということが重要な問題になる。Skorohod [15,16] は Prohorov の考

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

えを背景として，半群およびマルコフ過程の理論を援用してより一般で広い適用性をもつ理論を与えた。そこでは半群の生成作用素を有効に使うことになり，この意味ではKhintchineの考え方に密接に関連しているということができる。

才1章　才1種不連続函数の空間K_XとそのJ_1-位相

§1.1. 空間K_XとJ_1-位相の定義

(X, ρ)を可分な完備距離空間とする。区間$[0,1]$で定義され，Xの値を取る，才1種不連続な函数，即ち各点で左極限があり，右連続（$t=1$では左連続）な函数$x(t)$の全体をK_Xで表わす。K_Xに属する各函数$x(t)$は次の基本的な性質を持つ。

1°. 任意の$\varepsilon>0$に対し，$x(t)$のjumpがεを越えるような点tは有限個である。

2°. $x(t)$のjumpがεを越える点を$t_1, t_2, \cdots, t_k$とすると，$\delta>0$があって，t', t''が$|t'-t''|<\delta$であり，区間$(0, t), (t_1, t_2), \cdots, (t_k, 1)$の一つに属すれば，

$$\rho(x(t'), x(t'')) < \varepsilon .$$

3°. 任意の$\varepsilon>0$に対し，$c>0$があって，各点$t\in[0,1]$に対し，次の不等式のいずれかが成立つ。

$$\sup_{t<t_1<t+c} \rho(x(t), x(t_1)) < \varepsilon$$

$$\sup_{t-c<t_1<t} \rho(x(t_1), x(t)) < \varepsilon .$$

4°. $c\to 0$のとき

$$(1.1) \qquad \Delta_{J_1}(c, x(\cdot)) \equiv \sup_{t-c<t_1<t<t_2<t+c} \rho(x(t_1), x(t))$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\wedge\ \rho(x(t),\ x(t_2))^{1)} \longrightarrow 0$$

5°. 任意の函数 $x(t)$ に対し (1.1) が成り立てば, $\bar{x}(t)\in K_X$ があって, $x(t)$ の連続点において $x(t)=\bar{x}(t)$ である. 実際 $x(t)$ は各点で左右の極限値を持つ。もしそうでなければ, $\varepsilon>0$ と互にどれだけでも近い $t_1<t_2<t_3$ があって, $\rho(x(t_1),x(t_2))>\varepsilon$ かつ $\rho(x(t_2),\ x(t_3))>\varepsilon$ が成り立ち, (1.1) に矛盾する。$\bar{x}(t)\equiv\lim_{t'\downarrow t} x(t')$, $\bar{x}(1)\equiv\lim_{t\to 1} x(t)$ とおけば良い。

4°, 5°により, $\Delta_{J_1}(c,x(\cdot))\to 0$ $(c\to 0)$ によって $x(t)$ が才一種不連続な函数であることが特徴づけられることがわかる。次に集合 K_X に位相を入れる。これは連続函数の空間における一様位相の一般化である。

<u>定義 1.1</u>　$\lambda(t)$ が区間 $[0,1]$ を区間 $[0,1]$ に一対一にうつす連続函数であるとき, 空間 K_X に次の距离 $J_1(x(\cdot),\ y(\cdot))$ を導入する：

$$J_1(x(\cdot),\ y(\cdot))\equiv\inf\Big\{\varepsilon\,;\ {}^{\exists}\lambda(t),\ \sup_t|t-\lambda(t)|\le\varepsilon,$$

$$\sup_t\rho(x(t),\ y(\lambda(t)))\le\varepsilon\Big\}$$

<u>距离になることの証明。</u>　$J_1(x(\cdot),\ y(\cdot))=J_1(y(\cdot),\ x(\cdot))\ge 0$ は明らか。$J_1(x(\cdot),\ y(\cdot))=0$ であれば $x(t)=y(t)$ となること: もし $x(t_0)-y(t_0)=\varepsilon>0$ とすれば, $x(t)$, $y(t)$ が右連続だから $\delta>0$ があって, $t_0\le t<t_0+\delta$ に対し $\rho(x(t_0),\ x(t))<\frac{\varepsilon}{3}$, $\rho(y(t_0),\ y(t))<\frac{\varepsilon}{3}$. $\sup_t|\lambda(t)-t|<\frac{\varepsilon}{3}\wedge\delta$ であれば, $\sup_{t_0\le t<t_0+\delta}\rho(x(t),\ y(\lambda(t)))>\frac{\varepsilon}{3}$ となって矛盾である。三角不等式は次の不等式より出る。

$$\rho(x(t),\ z(\lambda_2(\lambda_1(t)))\le\rho(x(t),\ y(\lambda_1(t)))$$
$$+\ \rho(y(\lambda_1(t)),\ z(\lambda_2(\lambda_1(t)))),$$

---

1)　$a\wedge b\equiv\min(a,b)$,　$a\vee b\equiv\max(a,b)$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$|t-\lambda_2(\lambda_1(t))| \leq |t-\lambda_1(t)| + |\lambda_1(t)-\lambda_2(\lambda_1(t))| \qquad \text{q.e.d.}$$

次の事柄は容易にわかる。

6°. $J_1(x_n(\cdot), x(\cdot)) \to 0$ $(n\to\infty)$ であれば $x(t)$ の連続点 t_0 において $\rho(x_n(t_0), x(t_0)) \to 0$. 何故ならば $\rho(x_n(t_0), x(t_0)) \leq \rho(x_n(t_0), x(\lambda(t_0))) + \rho(x(\lambda(t_0)), x(t_0))$ だから. 更に6°により,

7°. t_1, t_2 を $x(t)$ の連続点とすれば,

$$\sup_{t_1\leq t\leq t_2} \rho(x_n(t), a) \to \sup_{t_1\leq t\leq t_2} \rho(x(t), a),$$

$$\inf_{t_1\leq t\leq t_2} \rho(x_n(t), a) \to \inf_{t_1\leq t\leq t_2} \rho(x(t), a)$$

定理 1.2　距離空間 K_X は可分であり, 完備ではない。

証明　(i) 可分性: 階段函数 $x^*(t; t_j, x_j) \equiv x^*(t; t_1, t_2, \cdots, t_n, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を次の様に定義する。但し $t_1=0<t_2<\cdots<t_n<1$, n は任意である。

$$x^*(t; t_j, x_j) \equiv \begin{cases} x_j & t_j \leq t < t_{j+1} \qquad j=0,1,\cdots,n-1 \\ x_n & t_n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

空間 X の到る所稠密な可附番集合を $\Gamma \equiv \{\gamma_i\}$ とし, 区間 $[0,1]$ に含まれる有理点を $\{s_i\}$ であらわす。可附番集合 $K_X^* \equiv \{x^*(t; t_j, \gamma_j); s_j$: 有理点, $\gamma_j \in \Gamma\}$ は明らかに K_X の到る所稠密な部分集合である。

(ii) 完備でないこと: 収束しない基本列の例として次の函数列をあげる。

$$x_n(t) \equiv \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ 0 & 1/2 - 1/n \leq t < 1/2 + 1/n \\ -1 & 1/2 + 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$n>m$ のとき, 点 $(0,0)$ $(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}, \frac{1}{2}-\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n})$, $(1,1)$ を結ぶ折れ線を $\lambda_{nm}(t)$ とすれば $\sup_t|\lambda_{nm}(t)-t| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$, $\sup_t \rho(x_m(t), x_n(\lambda_{mn}(t))) = 0$, 即ち $J_1(x_m(t), x_n$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$(t)) \leq \frac{1}{m}$ となって $\{x_n(t)\}$ は基本列である。他方

$$\Delta J_1(c,\ x_n(\cdot)) = \begin{cases} 1 & c > \frac{1}{n} \\ 0 & c \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

であって後述の定理 1.3 により $x_n(t)$ は収束しない。 q.e.d.

§1.2. J_1-位相での収束条件

<u>定理 1.3</u> $x_n(\cdot) \to x(\cdot)$ (J_1) であるための必要十分な条件は

1) 0, 1 を含む到る所稠密なもの集合において, $x_n(t) \to x(t)$.

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \ \Delta_{J_1}(c,\ x_n(\cdot)) = 0$$

<u>証明</u> 必要性: $a)$ は6°より明らかである。$b)$ を示す。仮定より $\lambda_n(t)$ があって,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t |\lambda_n(t) - t| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_t \rho(x_n(t), x(\lambda_n(t))) = 0$$

$t - c < t_1 < t < t_2 < t + c$ をとるとき,

$$\rho(x_n(t_1),\ x_n(t)) \leq \rho(x_n(t_1), x(\lambda_n(t))) + \rho(x(\lambda_n(t_1)), x(\lambda_n(t))) + \rho(x(\lambda_n(t)), x_n(t))$$

だから

$$\begin{aligned} &\rho(x_n(t_1),\ x_n(t)) \wedge \rho(x_n(t),\ x_n(t_2)) \\ &\leq 2 \sup_t \rho(x_n(t),\ x(\lambda_n(t))) \\ &\quad + \rho(x(\lambda_n(t_1)),\ x(\lambda_n(t))) \wedge \rho(x(\lambda_n(t)), x(\lambda_n(t_2))) \end{aligned}$$

$\lambda_n(t_1) < \lambda_n(t) < \lambda_n(t_2)$ であり, $n \to \infty$, $c \to 0$ のとき $\lambda_n(t_2) - \lambda_n(t_1) \to 0$ であるので $\Delta_{J_1}(c, x_n(t)) \to 0$ である。

十分性: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 次の様な $[0, 1]$ をそれ自身に一対一にうつす連続函数 $\lambda_n^{\varepsilon}(t)$ を構成すれば良い, 即ち $n > n_{\varepsilon}$ に対し

$$\sup_t \rho(x_n(t),\ x(\lambda_n^{\varepsilon}(t))) < \varepsilon$$
$$\sup_t |\lambda_n^{\varepsilon}(t) - t| < \varepsilon$$

$x(t)$ の *jump* が μ 以上の不連続点を $t_1, t_2, \cdots, t_k$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$c < 2\varepsilon$ を十分小さく取って, $n > N'$ に対し

(1.2) $\quad \Delta_{J_1}(c, x_n(\cdot)) < \mu$

とし, 更に区間 $(0, t_1)$, (t_1, t_2), …, $(t_k, 1)$ の長さは c より大きく, t', t'' がその一つに属し $|t'-t''| < c$ であれば,

(1.3) $\quad \rho(x(t'), x(t'')) < \mu$

とする。 $a)$ により, $n > N''$ のとき

(1.4) $\quad \rho(x_n(\tau_i^{(c)}), x(\tau_i^{(c)})) < \mu$

である様な $0 = \tau_0^{(c)} < \tau_1^{(c)} < \cdots < \tau_m^{(c)} = 1$, $\tau_i^{(c)} - \tau_{i-1}^{(c)} < \frac{c}{2} c\, i = 2$, …, m) が存在する。

点 $t_\ell \in (\tau_{i_\ell}^{(c)}, \tau_{i_{\ell+1}}^{(c)})$ における $x(t)$ の $jump$ が 8μ 以上であれば, (1.3) により

$$\rho(x(\tau_{i_\ell}^{(c)}, x(\tau_{i_{\ell+1}}^{(c)})) > 6\mu$$

従って (1.4) により, $n > N''$ のとき

(1.5) $\quad \rho(x_n(\tau_{i_\ell}^{(c)}), x_n(\tau_{i_{\ell+1}}^{(c)})) > 4\mu$

一方 $n > N'$, $t \in (\tau_{i_\ell}^{(c)}, \tau_{i_{\ell+1}}^{(c)})$ に対し (1.2) より

(1.6) $\quad \rho(x_n(\tau_{i_\ell}^{(c)}, x_n(t)) \wedge \rho(x_n(t), x_n(\tau_{i_{\ell+1}}^{(c)})) < \mu$

これと (1.2) (1.5) を考え合わせれば $n > N' \vee N''$ のとき, 次の様な点 $\bar{t}_\ell \in (\tau_{i_\ell}^{(c)}, \tau_{i_{\ell+1}}^{(c)})$ の存在がわかる。

(1.7) $\quad \begin{cases} t \in (\tau_{i_\ell}^{(c)}, \bar{t}_\ell) \text{ のとき } \rho(x_n(\tau_{i_\ell}^{(c)}), x_n(t)) < \mu \\ t \in (\bar{t}_\ell, \tau_{i_{\ell+1}}^{(c)}) \text{ のとき } \rho(x_n(t), x_n(\tau_{i_{\ell+1}}^{(c)})) < \mu \end{cases}$

点 $t_{k_1}, t_{k_2}, \cdots, t_{k_r}$ を $x(t)$ の $jump$ が 8μ 以上の不連続点とし, t_ℓ に対する $\bar{t}_\ell$ の様に t_{k_i} に対し $\bar{t}_{k_i}$ を定める。 区間 $(0, t_{k_1})$, (t_{k_1}, t_{k_2}), …, $(t_{k_r}, 1)$ の各々で一次式

$$\lambda_n^\varepsilon(t) = a_i t + b_i \qquad \lambda_n^\varepsilon(\bar{t}_{k_i}) = t_{k_i}$$

であらわされる単調連続函数 $\lambda_n^\varepsilon(t)$ が求めるものである。明らかに

$$|\lambda_n^\varepsilon(t) - t| < \frac{c}{2} < \varepsilon$$

$t \in (\tau_j^{(c)}, \tau_{j+1}^{(c)})$ に対し

$$\rho(x_n(t), x(\lambda_n^\varepsilon(t))) \le \rho(x_n(t), x_n(\tau_\nu^{(c)})) + \rho(x_n(\tau_\nu^{(c)}), x(\tau_\nu^{(c)})) + \rho(x(\tau_\nu^{(c)}), x(\lambda_n^\varepsilon(t))),$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(10)

$$|\lambda_n^\varepsilon(t)-\tau_\nu^{(c)}|<c,\qquad \nu=j,\ j+1$$

区間 $(\tau_j^{(c)},\ \tau_{j+1}^{(c)})$ に点 t_{k_i} が一つもなければ t_{k_i} の定義と(1.3)により

$$(1.8)\qquad \rho(x(\tau_\nu^{(c)}),\ x(\lambda_n^\varepsilon(t)))<10\mu$$

(1.4) (1.8) (1.6)により

$$\rho(x_n(t),\ x(\lambda_n^\varepsilon(t)))<\mu+10\mu$$
$$+\rho(x_n(t),\ x_n(\tau_j^{(c)}))\wedge\rho(x_n(t),\ x_n(\tau_{j+1}^{(c)}))$$
$$<12\mu$$

$t_{k_\ell},\ \bar t_{k_\ell}\in(\tau_j^{(c)},\ \tau_{j+1}^{(c)})$ のときは，$t\in(\tau_j^{(c)},\ \bar t_{k_\ell})$, $\lambda_n^\varepsilon(t)<t_{k_\ell}$ 又は $t\in(\bar t_{k_\ell},\ \tau_{j+1}^{(c)})$, $\lambda_n^\varepsilon(t)\ge t_{k_\ell}$ であって，(1.7) (1.3)により，

$$\rho(x_n(t),\ x_n(\tau_j^{(c)}))<\mu,\quad \rho(x(\lambda_n^\varepsilon(t)),\ x(\tau_j^{(c)}))<\mu$$

又は

$$\rho(x_n(t),\ x_n(\tau_{j+1}^{(c)}))<\mu,\quad \rho(x(\lambda_n^\varepsilon(t)),\ x(\tau_j^{(c)}))<\mu$$

となる。従ってこの場合は

$$\rho(x_n(t),\ x(\lambda_n^\varepsilon(t)))<3\mu$$

$\mu=\frac{\varepsilon}{12}$ とおいて証明終り。　q.e.d.

<u>補題 1.4</u>

$x_n(t)\in K_x$, $x(t)$ は任意の函数，N は点 0, 1 を含み [0, 1] 上到る所稠密な集合とする。

1) $t\in N$ に対し $x_n(t)\longrightarrow x(t)$

2) $$\lim_{c\to0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\Delta_{J_1}(c,x_n(\cdot))+\sup_{0<t<c}\rho(x_n(t),x_n(0))+\sup_{1-c<t<1}\rho(x_n(t),\ x_n(1))\right\}=0$$

であれば，$\bar x(t)\in K_x$ があって $J_1(x_n(t),\ \bar x(t))\to0$ である。

<u>証明</u>　$N\ni t_i$ とし，任意の t に対し

$$\lim_{t_i\downarrow t}x(t_i),\qquad \lim_{t_i\uparrow t}x(t_i)$$

の存在を示す。任意の $\varepsilon>0$ に対し，c を十分小さく取れば，任意

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

の $t_{i_1}-c<t_{i_2}<t_{i_1}<t_{i_3}<t_{i_1}+c$ に対し，

(1.9) $$\rho(x(t_{i_2}),x(t_{i_1}))\wedge\rho(x(t_{i_1}),x(t_{i_3}))$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\rho(x_n(t_{i_2}),x_n(t_{i_1}))\wedge\rho(x_n(t_{i_1}),x_n(t_{i_3}))\}$$
$$\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \Delta_{J_1}(c,x_n(\cdot))<\varepsilon$$

もし $\lim_{t_i\downarrow t}x(t_i)$ が存在しないと仮定すれば $\varepsilon_0>0$ があって，どれだけも小さい δ に対し $t<t_{i_2}<t_{i_1}<t_{i_3}<t+\delta$ があって，

$$\rho(x(t_{i_2}),x(t_{i_1}))>\varepsilon_0$$
$$\rho(x(t_{i_1}),x(t_{i_3}))>\varepsilon_0$$

これは (1.9) に矛盾する．左極限についても同様である．函数 $\bar{x}(t)$ を次の様に定義する。

$$\bar{x}(t)\equiv\lim_{N\ni t_i\downarrow t}x(t_i),\quad \bar{x}(1)\equiv\lim_{N\ni t_i\uparrow 1}$$

$\bar{x}(t)\in K_X$ であり，$\bar{x}(t)$ の連続点において $x_n(t)$ は $\bar{x}(t)$ に収束する。何故ならば，t を $\bar{x}(t)$ の連続点とし，任意の $\varepsilon>0$ に対し (1.9) を満す c をとれば，$t_1,t_2\in N$，$t-c<t_1<t<t_2<t+c$ があって，

$$\rho(x(t_i),\bar{x}(t_0))<\varepsilon,\quad i=1,2$$

n を十分大きくとれば

$$\rho(x_n(t_i),x(t_i))<\varepsilon\qquad i=1,2$$
$$\rho(x_n(t_0),\bar{x}(t_0))\leq\rho(x_n(t_0),x_n(t_i))$$
$$+\rho(x_n(t_i),x(t_i))+\rho(x(t_i),\bar{x}(t_0))$$
$$<\rho(x_n(t_0),x_n(t_i))+2\varepsilon\qquad i=1,2$$

(1.9) により

$$\rho(x_n(t_0),\bar{x}(t_0))<3\varepsilon$$

定理 1.3 により $J_1(x_n(\cdot),\bar{x}(\cdot))\to 0$ q.e.d.

<u>定理 1.5</u>　$K_X\supset K$ がコンパクトであるための必要十分条件は

1) 全ての $t\in[0,1]$ と全ての函数 $x(\cdot)\in K$ について，値 $x(t)$ の集合 A ($A\equiv\{x(t);\ t\in[0,1],\ x(\cdot)\in K\}$) が X でコンパクトで

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

ある。

2) $$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{x(t)\in K}}\left\{\Delta_{J_1}(c,x(\cdot))+\sup_{0<t<c}\rho(x(0),x(t))\right.$$

$$\left.+\sup_{1-c<t<1}\rho(x(t),x(0))\right\}=0$$

証明　必要性： 1) Aに属する任意の列$\{x_n(t_n)\}$を取れば，仮定により$J_1(x_{n'}(\cdot),x_\varepsilon(\cdot))\to 0$，$t_{n'}\to t_0$である称な部分列$n'$がある。即ち函数$\lambda_{n'}(t)$があって，$\sup_t\rho(x_{n'}(t),x_0(\lambda_{n'}(t)))\to 0$，$\sup_t|\lambda_{n'}(t)-t|\to 0$．$\lambda_{n'}(t_{n'})\to t_0$　だから更に部分列n''をとって，$\lambda_{n''}(t_{n''})\downarrow t_0$　（又は$\lambda_{n''}(t_{n''})\uparrow t_0$）とすることができる。

$$\rho(x_{n''}(t_{n''}),x_0(t_0))\le\rho(x_{n''}(t_{n''}),x_0(\lambda_{n''}(t_{n''})))$$
$$+\rho(x_0(\lambda_{n''}(t_{n''})),x_0(t_0))\longrightarrow 0$$

2) がもし成立しないとすれば，$K\supset\{x_n(t)\}$があって，補題1.4の 2) が成立しない。一方仮定により，収束部分列$\{x_{n'}(t)\}$があり，定理1.3により

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n'\to\infty}}\Delta_{J_1}(c,x_{n'}(\cdot))=0$$

6°により$x_{n'}(0)\to x_0(0)$　だから

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0<t<c}\rho(x_{n'}(t),x_{n'}(0))$$

$$\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{0<t<c}\rho(x_{n'}(t),x_0(\lambda_{n'}(t)))$$

$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{0<t<c}\rho(x_0(\lambda_{n'}(t)),x_0(0))$$

$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho(x_0(0),x_{n'}(0))$$

$$\longrightarrow 0\qquad(c\to 0)$$

同称に
$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{1-c<t<1}\rho(x_{n'}(t),x_{n'}(0))=0$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

これは矛盾である。

十分性：任意の列 $\{x_n(t)\}\subset K$ を考える。1) により [0,1] の有理点において収束する部分列 $\{x_{n'}(t)\}$ をとることができる。補題 1.4 によって，$x_{n'}(t)$ は収束する。 q.e.d.

§ 1.3. K_X の部分空間 C_X に関する注意

連続函数全体から成る K_X の部分空間 C_X においては，J_1-位相は次の一様収束の J_U-位相と同値である。

$$J_U(x(\cdot), y(\cdot)) \equiv \sup_t \rho(x(t), y(t)) \qquad x(\cdot), y(\cdot) \in C_X$$

距離 J_U によって C_X は完備な距離空間になる．又 $\Delta_{J_1}(c, x(\cdot))$ は C_X における連続度

$$\Delta_{J_U}(c, x(\cdot)) \equiv \sup_{|t_1-t_2|<c} \rho(x(t_1), x(t_2))$$

の拡張である。前節の事実は J_1 を J_U に書きかえて C_X で成り立つ。特に次の定理は Ascoli-Arzela の定理（同程度連続で一様有界な函数族は正規族である）の書きかえである。

<u>定理 1.6</u>　$C_X \supset D$ がコンパクトであるための必要十分條件は

1) $|x(0)| \leq M \qquad \forall x(\cdot) \in D$

2) $\lim\limits_{c\to 0} \overline{\lim\limits_{x(\cdot)\in D}} \Delta_{J_U}(c, x(\cdot)) = 0$

§ 1.4. 空間 K_X の可測集合について

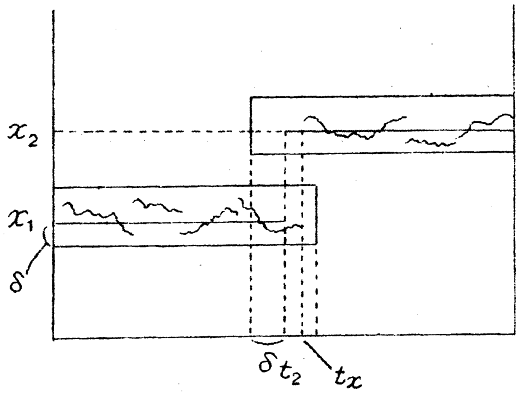
時間 $T=[0,1]$ に対し定義され，可分な完備距離空間 X の値を取る確率過程 $\xi(t)$ が我々の対象である。[0,1] から X への一意写像の全体 X^T と X^T のボレル筒集合から生成されるボレル集合体 $\mathbb{B}^T$ を基本にして，確率過程は通常 $(X^T, \mathbb{B}^T)$ の確率変数として取扱われる。$\xi(t)$ の *sample function* が才一種不連続な場合には，$\xi(t)$ は X^T の部分集合 K_X に属するが，この場合に $\xi(t)$ が我々の意味で空間 K_X の確率変数であるかという問題がある。即ち $\mathbb{B}$ を J_1-位相による K_X の開集合から生成されるボレル集合体とすると

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

き，確率過程 $\xi(t)$ は $\mathbb{B}$-可測であるか。換言すれば，$\mathbb{B}$に属する集合は $\mathbb{B}^T$-可測かという問題である。これに関し次の事を注意しておく。

定理 1.7　$\mathbb{B}^T = \mathbb{B}$

注意：　$x(\cdot) \in K_X$ の J_1-位相によるδ-開近傍を $V_\delta(x(\cdot))$, δ-閉近傍を $\overline{V_\delta(x(\cdot))}$ と書けば，$V_\delta(x^*(\cdot\,;\, t_1, t_2, x_1, x_2))$　（又は $\overline{V_\delta(x^*(\cdot\,;\, t_1, t_2, x_1, x_2))}$）$\ni x(\cdot)$ のための必要十分条件は，$\delta_x <$（又は $\leq$）δ, $t_x \in [t_2 - \delta_x, t_2 + \delta_x]$ があって $0 \leq t < t_x$ のとき $\rho(x(t), x_2) \leq \delta_x$ であることである。（右図参照）



証明　(1) $\mathbb{B}^T \subset \mathbb{B}$ であること：$G_\tau \equiv \{x(\cdot)\,;\, \rho(x(\tau), x_0) < a\} \in \mathbb{B}$ を示せば良い。τが有理数であれば

$$G_\tau = \widetilde{G}_\tau \equiv \bigcup \overline{V_{\delta_k}(x^*(\cdot\,;\, s_j, \gamma_j))}$$

こゝに $\bigcup$ は，$x^*(\cdot\,;\, s_j, \gamma_j)$ を定義する $\{s_j\}$ の中で $s_{j_0} \equiv \max\{s_j\,;\, s_j \leq t_0\}$ とするとき，$s_{j_0} + \delta_k \leq \tau$ かつ $s_{j_0+1} - \delta_k > \tau$ かつ $\rho(x_0, \gamma_{j_0}) < a - \delta_k$ である様なすべての $x^*(\cdot\,;\, s_j, \gamma_j) \in K_X^*$ と有理数 δ_k についての和である。$x(\cdot) \in G_\tau$ が $\rho(x(\tau - 0), x_0) < a$ のときには明らかに $x(\cdot) \in \widetilde{G}_\tau$. $\rho(x(\tau-0), x_0) \geq a$ のときには，$s_{j_0} + \delta_k = \tau$, $\rho(\gamma_{j_0-1}, x(\tau-0)) \leq \delta_k$ という附加的な制限をつけた$\bigcup$の部分和を$\bigcup'$と書けば，$\widetilde{G}_\tau \supset \bigcup' \overline{V_{\delta_k}(x^*(\cdot\,;\, s_j, \gamma_j))} \ni x(\cdot)$ である。逆に $x(\cdot) \in \widetilde{G}_\tau$ であれば，

$$\rho(x(\tau), x_0) \leq \rho(x(\tau), \gamma_{j_0}) + \rho(\gamma_{j_0}, x_0) < a$$

となって $x(\cdot) \in G_\tau$ である。次にτが無理数の場合には

$$\{x(\cdot)\,;\, \rho(x(\tau), x_0) < a\} = \bigcup_n \{x(\cdot)\,;\, \rho(x(\tau), x_0) < a - \tfrac{1}{n}\}$$

であり，有理数列 $\tau_m \downarrow \tau$ をとれば

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\{x(\cdot)\,;\ \rho(x(\tau),\,x_0)<a-\tfrac{1}{n}\}$$
$$\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m\ge k}\{x(\cdot)\,;\ \rho(x(\tau_m),\,x_0)<a-\tfrac{1}{n}\}\subset G_\tau$$

結局 $G_\tau=\bigcup_n \varliminf_m \{x(\cdot)\,;\ \rho(x(\tau_m),\,x_0)<a-\frac{1}{n}\}\in\mathbb{B}$ である.

(2) $\mathbb{B}<\mathbb{B}^\tau$ であること: $x^*(\cdot)\in K_x^*$ について $V_\delta(x^*(\cdot))\in\mathbb{B}^\tau$ を示せば良いが，特に $x^*(\cdot\,;\,t_1,t_2,x_1,x_2)$ についてのみ示せば他も本質的には大差ない。

$$V_\delta(x^*(\cdot\,;\,t_1,\,t_2,\,x_1,\,x_2))$$
$$=\{x(\cdot)\,;\ {}^\exists\delta_x<\delta,\ {}^\exists t_x\in[t_2-\delta_x,\ t_2+\delta_x],$$
$$\rho(x(t),x_1)\le\delta_x,\ 0\le t<t_x,\ \rho(x(t),x_2)\le\delta_x,\ t_x\le t\le 1\}$$
$$=\bigcup_m\bigcap_n\bigcup_{t_2-\delta+\frac{1}{m}\le r\le t_2+\delta-\frac{1}{m}}\{x(\cdot)\,;\ \rho(x(t),x_1)\le\delta-\tfrac{1}{m},$$
$$0\le t<r-1/n,\ \rho(x(t),x_2)\le\delta-\tfrac{1}{m},\ r+\tfrac{1}{n}\le t\le 1\}$$

こゝに r は有理数である。実際 $x(\cdot)\in$ 左辺のとき，r_n: $r_n-\frac{1}{n}\uparrow t_x$，$r_n+\frac{1}{n}\downarrow t_x$ を取れば，$\delta-\delta_x\ge\frac{1}{m}$ である様な m に対し，

$$(1.10)\quad\begin{array}{lll}\rho(x(t),\,x_1)\le\delta-\frac{1}{m} & 0\le t<r_n-\frac{1}{n} & \\ \rho(x(t),\,x_2)\le\delta-\frac{1}{m} & r_n+\frac{1}{n}\le t\le 1 & n=1,2,\cdots\end{array}$$

即ち $x(\cdot)\in$ 右辺。 逆に $x(\cdot)\in$ 右辺であれば或る m に対し，r_n があって (1.10) が成り立つ。r_n の集積点の一つを t_0($V_\delta(x_1)\cap V_\delta(x_2)$[1]$=\phi$ のときには $r_n-\frac{1}{n}\le t_0\le r_n+\frac{1}{n}$ となる) とすれば

$$\rho(x(t),\,x_1)\le\delta-\tfrac{1}{m}\qquad 0\le t<t_0$$
$$\rho(x(t),\,x_2)\le\delta-\tfrac{1}{m}\qquad t_0\le t\le 1$$

$t_2-\delta+\frac{1}{m}\le t_0\le t_2+\delta-\frac{1}{m}$ だから $x(\cdot)\in$ 左辺である。 q.e.d.

オ2章 距離空間における測度

§2.1. 測度の定義と測度の弱収束

$(\mathcal{R},\rho)$ を可分な完備距離空間とし次の記号を使う．部分集合 A

1) 空間 X における近傍も $V_\delta(x)$ と書く。K_X の場合と混同する心配はない。

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

の closure を $\bar{A}$ とし，$A^c \equiv \mathcal{R}-A$，$V_\delta(A) \equiv V(A,\delta) \equiv \{x;\ \inf_{x_0 \in A} \rho(x,x_0) < \delta\}$ とする。

定義 2.1　次の４つの條件を満す $\mathcal{R}$ における実集合函数 $\mu(A) \geqq 0$ を測度という。

(μ, 1) 定義域 $\mathfrak{M}_\mu$ は $\mathcal{R}$ の全ての開集合を含む σ-field

(μ, 2) 互に共通部分のない可附番個の集合 $A_n \in \mathfrak{M}_\mu$ に対し

$$\mu(\cup A_n) = \Sigma \mu(A_n)$$

(μ, 3) $\mu(A) = 0$，$B \subset A$ であれば $B \in \mathfrak{M}_\mu$

(μ, 4) 任意の集合 $A \in \mathfrak{M}_\mu$ の測度 $\mu(A)$ は，A を含む開集合 O の測度の下眼に等しい：

$$\mu(A) = \inf \mu(O)$$

$\mu(\mathcal{R}) = 1$ のとき確率分布又は単に分布という。以後 $\mu(\mathcal{R}) < \infty$ である称な測度のみを考える。測度に関して次の性質を注意しておく。

補題 2.2　μ が測度であれば，任意の $A \in \mathfrak{M}_\mu$ と $\varepsilon > 0$ に対し次の称なコンパクト集合 $K \subset A$ がある：

$$\mu(A-K) \leq \varepsilon$$

証明　(1) $A = \mathcal{R}$ の場合：$\{x_n\}$ を $\mathcal{R}$ で到る所稠密な可附番集合とし，$\{x_1, \cdots, x_n\}$ の $\frac{1}{k}$-附近傍を S_n^k とする。$\cup_n S_n^k = \mathcal{R}$ だから $\lim_n \mu(S_n^k) = \mu(\mathcal{R})$．$n_k$ を $\mu(S_{n_k}^k) \geq \mu(\mathcal{R}) - \varepsilon/2^k$ である称にとると，集合 $K_\varepsilon \equiv \cap_k S_{n_k}^k$ の測度は $\mu(K_\varepsilon) \geq \mu(\mathcal{R}) - \varepsilon$. 集合 K_ε は明らかに全有界であり，空間が完備だからコンパクトである。(2) 任意の $A \in \mathfrak{M}_\mu$ の場合：(μ, 4) により閉集合 $F \subset A$ を選んで $\mu(A) - \mu(F) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ とできる。$F \cap K_{\frac{\varepsilon}{2}}$ はコンパクトで $\mu(A) - \mu(F \cap K_{\frac{\varepsilon}{2}}) \leq \varepsilon$ である。　q.e.d.

空間 $\mathcal{R}$ より集合 $\mathcal{R}'$ への一意写像 f は，自然な方法で $\mathcal{R}'$ に完全加法的集合函数 μ^f を生成する。定義域を $\mathfrak{M}_{\mu^f} \equiv \{A';\ A' \subset \mathcal{R}',\ f^{-1}(A') \in \mathfrak{M}_\mu\}$ とし，$A' \in \mathfrak{M}_{\mu^f}$ の値を $\mu^f(A') \equiv \mu(f^{-1}(A'))$ と定義すれば良い。$\mathcal{R}'$ に位相が入っていれば，μ-可測写像即ち $\mathcal{R}'$ の全

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

ての開集合の逆像が $\mathfrak{M}_\mu$ に属する様な写像が関心を引く。[7] (p.19) によれば，$\mathcal{R}'$ も可分な完備距離空間のとき μ-可測写像 f によって生成される集合函数 μ^f は測度である。我々は特に次の場合のみを提示する。

<u>定理2.3</u>　空間$\mathcal{R}$より距離空間 $\mathcal{R}'$ へのμに関し殆んど到る所連続な写像fは，$\mathcal{R}'$ 上に測度 μ^f を生成する。

<u>証明</u>　fの連続点の集合をCとすれば，$\mu(C)=\mu(\mathcal{R})$。(μ,4) より $C=(\bigcup_m F_m)\cup C_1$。ここに F_m は閉集合，C_1 は $\mu(C_1)=0$。従って $\mathcal{R}=(\bigcup_m F_m)\cup C_2$，$\mu(C_2)=0$。$F'$ を $\mathcal{R}'$ の閉集合とすると $f^{-1}(F')=\bigcup_m (f^{-1}(F')\cap F_m)\cup(f^{-1}(F')\cap C_2)$。($\mu$,3)より $f^{-1}(F')\cap C^2\in\mathfrak{M}_\mu$，$f'(F')\cap F_m$ は閉集合だから $f^{-1}(F')\in\mathfrak{M}_\mu$ 即ちfは可測。(μ,1)〜(μ,3) は明らかに μ^f についても成り立つ。(μ,4) を示す。任意の $A'\in\mathfrak{M}_{\mu^f}$ に対し $\mu(f^{-1}(A')-K_\varepsilon)\le\varepsilon$ である様なコンパクト集合 $K_\varepsilon\subset C\cap f^{-1}(A')$ がある。$f(K_\varepsilon)\subset A'$ はコンパクトで，$\mu^f(A'-f(K_\varepsilon))=\mu(f^{-1}(A')-f^{-1}(f(K_\varepsilon)))\le\mu(f^{-1}(A')-K_\varepsilon)\le\varepsilon$。　q.e.d.

測度の収束の定義をし，それと同値な条件を若干あげる。$\mathcal{R}$上の有界連続函数の全体を $C(\mathcal{R})$ であらわす。

<u>定義2.4</u>　$\mathcal{R}$上の測度の列 μ_n が測度μ に収束する ($\mu_n\Rightarrow\mu$) というのは，

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)\,d\mu_n(x)\to\int_{\mathcal{R}} f(x)\,d\mu(x)\qquad \forall f\in C(\mathcal{R})$$

となることである。

<u>定理2.5</u>　次の (a) (b) は夫々 $\mu_n\Rightarrow\mu$ なるための必要十分条件である。

(a)　$\lim_n \mu_n(\mathcal{R})=\mu(\mathcal{R})$

$\varliminf_n \mu_n(o)\ge\mu(o)$　　o：開集合，任意

$\lim_n \mu_n(\mathcal{R})=\mu(\mathcal{R})$

$\varlimsup_n \mu_n(F)\le\mu(F)$　　F：閉集合，任意

証明　必要性：$f_m\uparrow\chi_0$ [1] である様な函数列 $f_m\in C(\mathcal{R})$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$\underline{\lim}\ \mu_n(O) \geq \int f_m(x)\,d\mu(x)$． $m \to \infty$ として $\underline{\lim}\ \mu_n(O) \geq \mu(O)$。第1の条件は明らか。十分性：$1 \geq f(x) \geq 0$ である様な $f \in C(\mathcal{R})$ について証明しておけば良い。任意の正整数mに対し函数

$$f_k(x) \equiv \begin{cases} 0 & f(x) < \frac{k-1}{m} \\ m f(x) - (k-1) & \frac{k-1}{m} \leq f(x) \leq \frac{k}{m} \\ 1 & \frac{k}{m} < f(x) \end{cases}$$

と開集合 $O_k \equiv \{x\,;\ f(x) > \frac{k}{m}\}$ とをとれば $f(x) = \frac{1}{m}\sum_1^m f_k(x)$, $\int f_k(x)\,d\mu(x) \geq \mu(O_k)$ だから, $\int f(x)\,d\mu_m(x) \geq \frac{1}{m}\sum_1^m \mu_m(O_k)$。従って

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int f(x)\,d\mu_n(x) \geq \frac{1}{m}\sum_1^m \mu(O_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k+1}{m}\,\mu(O_k - O_{k+1}) - \frac{1}{m}\,\mu(O_1)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{m-1} \int_{O_k - O_{k-1}} f(x)\,d\mu(x) - \frac{1}{m}\,\mu(O_1)$$

$$= \int_{O_1} f(x)\,d\mu(x) - \frac{1}{m}\,\mu(O_1)$$

$$\geq \int f(x)\,d\mu(x) - \frac{1}{m}\,\mu(O_0)$$

mは任意故 $\underline{\lim}_n \int f(x)\,d\mu_n(x) \geq \int f(x)\,d\mu(x)$。同様に $\underline{\lim}_n \int (1-f(x))\,d\mu_n(x) \geq \int (1-f(x))\,d\mu(x)$, $\lim_n \mu_n(\mathcal{R}) = \mu(\mathcal{R})$ を使って上のことより $\lim_n \int f(x)\,d\mu_n(x) = \int f(x)\,d\mu(x)$。$(b) \rightleftarrows (a)$ は明らか。

q.e.d.

<u>定義 2.6</u>　$\mu(\partial A) = 0$ のとき A をμ-連続集合という[2]。以後連続ボレル集合のみを考える。

<u>補題 2.7</u>　測度μの連続集合全体 γ_μ は $field$ をなす。

---

1) $\chi_A(x)$ は集合Aの定義函数

2) ∂A は集合Aの境界

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

証明　$\partial A = \partial A^c$ だから，$A \in \gamma_\mu$ であれば $A^c \in \gamma_\mu$．$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ だから，$A, B \in \gamma_\mu$ であれば $A \cup B \in \gamma_\mu$．　q.e.d.

定理 2.8　$\mu_n \Rightarrow \mu$

$\rightleftarrows \mu_n(A) \to \mu(A)$　　A：μ-連続，任意

証明　$\mu_n \Rightarrow \mu$ を仮定：$\underline{\lim}\ \mu_n(A) \geq \underline{\lim}\ \mu_n(A - \partial A) \geq \mu(A - \partial A) = \mu(\bar{A}) \geq \overline{\lim}\ \mu_n(\bar{A}) \geq \overline{\lim}\ \mu_n(A)$。　逆に：任意の閉集合 F の δ-開近傍 $V(F, \delta)$ の中で μ-連続集合でないのは高々可附番個である。従って $(\mu, 4)$ により任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\mu(F) + \varepsilon \geq \mu(V(F, \delta))$ である様な μ-連続集合がある。$\overline{\lim}\ \mu_n(F) \leq \lim\ \mu_n(V(F, \delta)) = \mu(V(F, \delta)) \leq \mu(F) + \varepsilon$．　ε は任意 $\overline{\lim}\ \mu_n(F) \leq \mu(F)$。　q.e.d.

定理 2.9　任意の μ-殆んど到る所連続な実函数 f に対し $\mu_n^f \Rightarrow \mu^f$ であることは $\mu_n \Rightarrow \mu$ であるために必要且つ十分である。

注意　十分性の部分は $f \in C(\mathcal{R})$ のみで良い。必要性の方は f が R^N 値でも良い。

証明　十分性：$f \in C(\mathcal{R})$，$\sup_x |f(x)| \leq K$ に対し R^1 上の函数 g を次の様に定義する。

$$g(y) = \begin{cases} K & y > K \\ y & |y| \leq K \\ -K & y < -K \end{cases}$$

$\mathcal{R}$ 上の任意の測度 μ に対し，$\int_{\mathcal{R}} f(x)\, d\mu(x) = \int_{|y| \leq K} y\, d\mu^f(y) = \int_{R^1} g(y)\, d\mu^f(y)$ が成り立つので $\mu_n^f \Rightarrow \mu$ より $\mu_n \Rightarrow \mu$ が出る。

必要性：$E_a \equiv \{x;\ f(x) < a\}$，$f(x)$ の連続点の集合を C とおけば，$\partial E_a \subset \{x;\ f(x) = a\} \cup (\mathcal{R} - C)$ だから $\mu(\partial E_a) \leq \mu\{x;\ f(x) = a\}$。右辺の量は高々可附番個の a に対してだけ 0 とならないので，それ以外の殆んど全ての a について $\mu(\partial E_a) = 0$．その様な a に対し分布函数 $F_n(a) \equiv \mu_n^f\{y;\ y < a\} = \mu_n(E_a)$ は $F(a) = \mu(E_a)$ に収束する。$F_n(\infty) = \mu_n(\mathcal{R}) \to F(\infty) = \mu(\mathcal{R})$ だから $\mu_n^f \Rightarrow \mu^f$。　q.e.d.

$\mathcal{R}$ の部分集合の或る system γ に対して

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(2.1) $\mu_n(A) \to \mu(A) \qquad A \in \gamma$

が比較的容易に示されることがある。γ が次の様な性質を持てば，それから $\mu_n \Rightarrow \mu$ が出る。

<u>定理 2.10</u>　system γ が次の条件を満せば，収束 (2.1) から $\mu_n \Rightarrow \mu$ が出る。

1) $\mathcal{R} \in \gamma$

2) すべての開集合が γ の可附番個の集合の和で表わされる。

3) $A \in \gamma$, $B \in \gamma$ ならば $A \cap B \in \gamma$

<u>証明</u>　$A_i \in \gamma$ $1 \leq i \leq p$ に対し

$$\mu_n\left(\bigcup^p A_i\right) = \sum_i \mu_n(A_i) - \sum_{i,j} \mu_n(A_i \cap A_j) + \cdots$$

によって，$\mu_n(\overset{p}{\cup} A_i) \to \mu(\overset{p}{\cup} A_i)$。開集合 $O = \cup A_i$, $A_i \in \gamma$. 各 p に対し

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \mu_n(O) \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu_n\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right)$$

$p \to \infty$ として $\underline{\lim}\, \mu_n(O) \geq \mu(O)$　q.e.d.

<u>定理 2.11</u>　空間 $\mathcal{R}$ より距離空間 $(\mathcal{R}', \rho')$ への連続写像列 $f_n(x)$ が，各コンパクト集合上で $f(x)$ に一様収束し，$\mu_n \Rightarrow \mu_0$ であれば $\mu_n^{f_n} \Rightarrow \mu_0^f$ である。

<u>補題 2.12</u>　$\mu_n \Rightarrow \mu_0$ であれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対しコンパクト集合 K_ε があって，すべての n に対し $\mu_n(\mathcal{R} - K_\varepsilon) < \varepsilon$ である。

<u>証明</u>　補題 2.2 により $\mu_0(\mathcal{R} - K') \leq \frac{\varepsilon}{2}$ である様なコンパクト集合 K' がある。任意の $\delta > 0$ に対し，μ-連続集合となる $V(K', \delta_0)$ $(\delta_0 < \frac{\delta}{2})$ がある。$\mu_n \Rightarrow \mu$ より $n \geq n_0(\varepsilon, \delta)$ に対し

$$\mu_n(V(K', \delta_0)) \geq \mu_0(V(K', \delta_0)) - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\geq \mu_0(\mathcal{R}) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \geq \mu_n(\mathcal{R}) - \varepsilon$$

K' に或る $\frac{\delta}{2}$ - net[3] z を取れば $V(K', \delta_0) \subset V(z, \delta)$ であって $n \geq n_0(\varepsilon, \delta)$ に対し $\mu_n(V(z, \delta)) \geq \mu_n(\mathcal{R}) - \varepsilon$。最初の有限

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

個については補題2.2から同じことが云える。結局任意の $\varepsilon>0$, $\delta>0$ に対して，有限集合 $Z_{\varepsilon,\delta}$ があって，

$$\mu_n(\mathcal{R})-V(Z_{\varepsilon,\delta},\delta))<\varepsilon \qquad n: \text{任意}$$

$\varepsilon_k=\varepsilon\cdot 2^{-k}$, $\delta_k=k^{-1}$ として

$$K_\varepsilon \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V(X_{\varepsilon_k,\delta_k},\delta_k)}$$

とおけば，K_ε はコンパクトであってすべての n に対し $\mu_n(\mathcal{R}-K_\varepsilon)<\varepsilon$ となる。 q.e.d.

定理2.11の証明　$\varepsilon>0$, $g(y)\in C(\mathcal{R}')$ を任意にとり，$M\equiv\sup_{y\in\mathcal{R}'}|g(y)|$ とおく。補題2.12によりコンパクト集合 $K\subset\mathcal{R}$ があって

$$\mu_n(\mathcal{R}-K)<\varepsilon \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$f(K)=K'$ はコンパクトだから，$\rho'(y,y')<\delta$, $y\in K'$ であれば $|g(y')-g(y)|<\varepsilon$。仮定より

$$\sup_{x\in K}\rho'(f_n(x),f(x))<\delta$$

$$\left|\int_{\mathcal{R}} g(f(x))\,d\mu_n(x)-\int_{\mathcal{R}} g(f(x))\,d\mu(x)\right|<\varepsilon \qquad \forall n\geq n_0$$

従って $n\geq n_0$ のとき

$$\left|\int_{\mathcal{R}'} g(y)\,d\mu_n^{f_n}(y)-\int_{\mathcal{R}'} g(y)\,d\mu^f(y)\right|$$

$$\leq\left|\int_{\mathcal{R}} g(f_n(x))\,d\mu_n(x)-\int_{\mathcal{R}} g(f(x))\,d\mu_n(x)\right|$$

$$+\left|\int_{\mathcal{R}} g(f(x))\,d\mu_n(x)-\int_{\mathcal{R}} g(f(x))\,d\mu(x)\right|$$

$$\leq 2M\varepsilon+\int_K\left|g(f_n(x))-g(f(x))\right|d\mu_n(x)+\varepsilon$$

$$\leq 2M\varepsilon+\mu_n(\mathcal{R})\varepsilon+\varepsilon$$

---

3) コンパクト（又は全有界）集合 K の δ-net z というのは，$K\subset\bigcup_{i=1}^{m}V(x_i,\varepsilon)$ ならしめる様な有限集合 $z=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ のことである。

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$\mu_n(\mathcal{R}) \to \mu(\mathcal{R})$ だから $\mu_n^{f_n} \Rightarrow \mu^f$. q.e.d.

§2.2. 測度の空間 $\mathcal{D}(\mathcal{R})$

R^1 上の分布函数に対する Lévy の距離を一般化して，$\mathcal{R}$上の測度 μ_1, μ_2 の間の距離を次の様に定義する．

定義 2.13　測度間の距離 $L(\mu_1, \mu_2)$

$\varepsilon_{1,2}$ $(\varepsilon_{2,1}) \equiv \inf\{\varepsilon;$ すべて閉集合Fに対し $\mu_2(F) < \mu_1(V(F,\varepsilon)) + \varepsilon$ $(\mu_1(F) < \mu_2(V(F,\varepsilon)) + \varepsilon)\}$

$$L(\mu_1, \mu_2) \equiv \max(\varepsilon_{1,2}, \varepsilon_{2,1})$$

明らかに $L(\mu_1, \mu_2) \geq 0$, $L(\mu, \mu) = 0$, $L(\mu_1, \mu_2) = L(\mu_2, \mu_1)$。三角不等式は $V(\overline{V(F, \varepsilon_1)}, \varepsilon_2) \subset V(F, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ より出る。$L(\mu_1, \mu_2) = 0$ であれば $\mu_2(F) \leq \mu_1(F)$ かつ $\mu_1(F) \leq \mu_2(F)$, 従って $(\mu, 4)$ により $\mu_1 \equiv \mu_2$。

$\mathcal{R}$上の測度の全体の作る距離 $L(\mu_1, \mu_2)$ の距離空間を $\mathcal{D}(\mathcal{R})$と書く。この空間は可分かつ完備であることがわかるが，そのことを示す前に条件$(\mathcal{K})$を定義する。この条件はあとで示す様に測度の集合が全有界であるための条件である。

定義 2.14　$\mathcal{R}$上の測度の集合$\mathfrak{M}$が条件$(\mathcal{K})$を満すというのは

$(\mathcal{K}.1)$　$\mu(\mathcal{R})$, $\mu \in \mathfrak{M}$ が有界

$(\mathcal{K}.2)$　任意の $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ に対し有限集合 $Z_{\varepsilon,\delta}$ があって，すべての $\mu \in \mathfrak{M}$ に対し

$$\mu(\mathcal{R} - V(Z_{\varepsilon,\delta}, \delta)) < \varepsilon。$$

注意　補題2.12の証明で示した様に $(\mathcal{K}, 2)$ から次の $(\mathcal{K}, 2')$ が出る。

$(\mathcal{K}, 2')$　任意の $\varepsilon > 0$ に対しコンパクト集合 K_ε があって，すべての $\mu \in \mathfrak{M}$に対し

$$\mu(\mathcal{R} - K_\varepsilon) < \varepsilon$$

逆に K_ε の或る δ-net を $Z_{\varepsilon,\delta}$ とすれば $(\mathcal{K}, 2')$ から $(\mathcal{K}, 2)$ がが出る．即ち $(\mathcal{K}, 2)$ と $(\mathcal{K}, 2')$ とは同値である。

補題 2.15　fが$\mathcal{R}$から$\mathcal{R}$への一価可測な写像であり，$H \equiv \{x;$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$\rho(f(x), x) < \delta\}$, $\mu(\mathcal{R}-H) < \varepsilon$ であれば, $L(\mu^f, \mu) \leq \max(\varepsilon, \delta)$.

<u>証明</u>　$F \cap H \subset f^{-1}(V(F, \delta))$, $f^{-1}(F) \cap H \subset V(F, \delta)$ だから

$$\mu(F) < \mu(F \cap H) + \varepsilon \leq \mu(f^{-1}(V(F, \delta))) + \varepsilon$$
$$= \mu^f(V(F, \delta)) + \varepsilon$$
$$\mu^f(F) < \mu(f^{-1}(F) \cap H) + \varepsilon \leq \mu(V(F, \delta)) + \varepsilon \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>系 2.16</u>　$\mathcal{R} \ni x_0, x_1, \cdots, x_N$ をとり $z_j \equiv \{x_1, \cdots, x_j\}$ とおき写像 $\psi(x) = \psi(x, x_0, z_N, \delta)$ を次の様に定義する。

$$\psi(x) = \begin{cases} x_0 & x \in T_0 \equiv \mathcal{R} - V(z_N, \delta) \\ x_j & x \in T_j \equiv V(z_j, \delta) - V(z_{j-1}, \delta) \end{cases}$$

$\mu(\mathcal{R} - V(z_N, \delta)) < \varepsilon$ であれば $L(\mu^\psi, \mu) \leq \max(\varepsilon, \delta)$ である。

<u>定理 2.17</u>　L-収束と測度の弱収束とは同値である。

<u>証明</u>　$L(\mu_n, \mu_0) \to 0$ を仮定する。任意の閉集合 F と $\varepsilon > 0$ に対し, $\overline{\lim}\ \mu_n(F) \leq \mu_0(V(F, \varepsilon)) + \varepsilon$。$\varepsilon \to 0$ として $\overline{\lim}\ \mu_n(F) \leq \mu_0(F)$。$\mu_n(\mathcal{R}) \to \mu_0(\mathcal{R})$ は明らか。定理 2.5 により $\mu_n \Rightarrow \mu_0$　逆に $\mu_n \Rightarrow \mu_0$ を仮定する。補題 2.12 により $z \equiv \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ があって全ての $n \geq 0$ に対し $(\delta < \varepsilon)$

$$\mu_n(\mathcal{R} - V(z, \delta)) < \varepsilon$$

すべての球 $V(x_j, \delta)$ $1 \leq j \leq N$ は μ_0-連続集合であるとして良い。z に $x_0 \in \mathcal{R}$ を補って系 2.16 の写像 ψ を作れば,

$$L(\mu_n^\psi, \mu_n) \leq \varepsilon \qquad n \geq 0$$

ψ に関係する集合 T_j はすべて μ_0-連続集合であるので,

$$|\mu_n(T_j) - \mu_0(T_j)| < \varepsilon/N+1 \qquad n \geq n_0,\ 0 \leq j \leq N$$

$$L(\mu_n^\psi, \mu_0^\psi) \leq \sum_{j=0}^{N} |\mu_n^\psi(x_j) - \mu_0^\psi(x_j)|$$

$$= \sum_{j=0}^{N} |\mu_n(T_j) - \mu_0(T_j)| < \varepsilon$$

$$L(\mu_n, \mu_0) \leq L(\mu_n, \mu_n^\psi) + L(\mu_n^\psi, \mu_0^\psi) + L(\mu_0^\psi, \mu_0) < 3\varepsilon \qquad \text{q.e.d.}$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

<u>定理2.18</u>　距離空間 $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ は可分且つ完備である。

<u>証明</u>　(1) 可分性：$\mathcal{R}$ の到る所稠密な可附番集合を Λ とし，任意の $\Lambda \ni x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(s)}$ に対し正の有理数 $r_{(1)}, r_{(2)}, \cdots, r_{(s)}$ を対応させる。$\mu'(A) \equiv \sum_{x(j) \in A} r(j)$ で測度を定義すれば，この様な測度 μ' の全体 $\mathcal{D}'\Lambda$ は $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ の到る所稠密な可附番集合である。実際，任意の $\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$, $\varepsilon > 0$ に対し，$\Lambda \ni x_1, \cdots, x_N$ があって

$$\sum_{j=1}^{N} \mu(V(x_j, \varepsilon)) \geq \mu(X) - \varepsilon .$$

$\{x_0, x_1, \cdots, x_N\}$ $(x_0 \in \Lambda)$ に対し系 2.16 の写像 ψ を作れば，$L(\mu, \mu^{\psi}) \leq \varepsilon$。$\mu^{\psi}$ は Λ の有限個の点に mass が集中した測度であるが，同じ点に mass が集中し $L(\mu^{\psi}, \mu') \leq \varepsilon$ である様な $\mu' \in \mathcal{D}'_{\Lambda}$ がある。故に $L(\mu, \mu') \leq \varepsilon$。

(2) 完備性：補題を二つ準備する。

<u>補題2.19</u>　L-基本列 $\{\mu_n\}$ は条件 $(\mathcal{K})$ を満す。

<u>証明</u>　$(\mathcal{K}, 1)$　数列 $\mu_n(\mathcal{R})$ は基本列を作るので有界である。
$(\mathcal{K}, 2)$　任意の $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ に対し $\lambda \equiv \min(\varepsilon/3, \delta/2)$ とおく。仮定より

$$(2.2) \qquad \sup_{p>0} L(\mu_{n_0}, \mu_{n_0+p}) < \lambda$$

一方補題2.2より有限集合 z があって

$$(2.3) \qquad \mu_{n_0}(X - V(z, \delta/2)) < \varepsilon/3$$

(2.2)，(2.3) より

$$\begin{aligned}\mu_{n_0+p}(\mathcal{R}) < \mu_{n_0}(\mathcal{R}) + \lambda &< \mu_{n_0}(\overline{V(z, \delta/2)}) + \frac{\varepsilon}{3} + \lambda \\ &\leq \mu_{n_0+p}(V(V(z, \delta/2), \lambda)) + \lambda + \frac{\varepsilon}{3} + \lambda \\ &\leq \mu_{n_0+p}(V(z, \delta)) + \varepsilon \end{aligned}$$

q.e.d.

<u>補題2.20</u>　$\{\mu_n\}$ を L-基本列，$f \in C(\mathcal{R})$ とすれば，R^1上の測度列 $\{\mu_n^f\}$ は Lévy の距離で基本列をなす。

証明　任意の $\varepsilon > 0$ に対し，上の補題によりコンパクト集合 K_ε があって，

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\mu_n(\mathcal{R}-K_\varepsilon) < \varepsilon \qquad\qquad n：任意$$

$x \in K_\varepsilon$, $\rho(x, x') < \delta$ であれば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ である。一方

$$L(\mu_{n_1}, \mu_{n_2}) < \lambda = \delta \wedge \varepsilon \qquad \forall n_1, n_2 \geq n_0$$

従って実数 α に対し $G_\alpha \equiv \{x;\ f(x) < \alpha\}$ とおけば

$$\begin{aligned}\mu_{n_1}(\bar{G}_\alpha) &\leq \mu_{n_1}(\bar{G}_\alpha \wedge K_\varepsilon) + \varepsilon \\ &\leq \mu_{n_2}(V(\bar{G}_\alpha \cap K_\varepsilon, \lambda)) + \lambda + \varepsilon \\ &\leq \mu_{n_2}(G_{\alpha+2\varepsilon}) + 2\varepsilon\end{aligned}$$

故に n_1, $n_2 \geq n_0$ に対し測度 $\mu_{n_1}^f$ と $\mu_{n_2}^f$ との間のLévyの距離は 2ε 以下である。 q.e.d.

<u>定理の証明の続き</u>　Lévyの距離で R^1 上の有界測度の空間は完備だから，$\mu_n^f \Rightarrow \mu^{(f)}$ である様な測度 $\mu^{(f)}$ が各連続函数 f に対応して定まる。従って定理2.9の証明と同様にして各 $f \in C(\mathcal{R})$ に対し

$$\ell(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{R}} f(x)\, d\mu_n(x)$$

が定まる。汎函数 $\ell(f)$ は (i) $f \geq 0$ ならば $\ell(f) \geq 0$ (ii) $\ell(f+g) = \ell(f) + \ell(g)$ (iii) $|\ell(f)| \leq M \sup_{x\in\mathcal{R}} |f(x)|$ の三性質を持つので [10] $p.377$ 定理1により，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{R}} f(x)\, d\mu_n(x) = \int_{\mathcal{R}} f(x)\, d\mu(x)$$

を満す測度 μ が存在する。定理2.17により $L(\mu_n, \mu) \to 0$ である。

§2.3. 測度の集合が全有界であるための条件

<u>定理2.21</u>　$\mathcal{D}(\mathcal{R})$ の部分集合 $\mathfrak{N}$ が全有界であるためには，条件 $(\mathcal{K})$ が必要かつ十分である。

証明　必要性：任意の $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ に対し $\lambda = \delta \wedge \varepsilon$ とし，$\mathfrak{N}'$ を $\mathfrak{N}$ の λ-net とすればすべての $\mu' \in \mathfrak{N}'$ に対し

$$\mu'(V(z, \delta)) \geq \mu'(\mathcal{R}) - \lambda$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

となる様な有限集合 z が存在する．一方任意の $\mu\in\mathfrak{N}$ に対し $L(\mu,\mu')\leq\lambda$ なる $\mu'\in\mathfrak{N}$ があるので

$$\mu(\mathcal{R})-2\lambda<\mu'(\mathcal{R})-\lambda\leq\mu'(V(z,\delta))$$
$$<\mu(V(z,\delta+2\lambda))+2\lambda$$

即ちすべての $\mu\in\mathfrak{N}$ に対し

$$\mu(V(z,3\delta))>\mu(\mathcal{R})-4\varepsilon$$

十分性：集合 $Z_{\varepsilon,\varepsilon}$ に $x_0\in\mathcal{R}$ を補って系2.16 の写像 $\psi(x)=\psi(x,x_0,Z_{\varepsilon,\varepsilon},\varepsilon)$ を作れば，すべての $\mu\in\mathfrak{N}$ に対し $L(\mu,\mu^{\psi})<\varepsilon$ である。

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{N}}\mu^{\psi}(\mathcal{R})=\sup_{\mu\in\mathfrak{N}}\mu(\mathcal{R})<\infty$$

であって，すべての測度 μ^{ψ} の *mass* が同じ有限個の点に集中しているので，$\mathfrak{N}^{\psi}\equiv\{\mu^{\psi};\ \mu\in\mathfrak{N}\}$ は全有界である。$\mathfrak{N}^{\psi}$ の中に ε-*net* をとれば，それは $\mathfrak{N}$ の中の 2ε-*net* になっている。 q.e.d.

空間 C_X 上の分布の族に上の定理を適用すれば，定理1.6 により，

<u>定理 2.22</u>　C_X 上の分布族 $\mathfrak{N}$ がコンパクトであるためには，次の二条件が必要かつ十分である。任意の ε に対し

1) $P\{x(\cdot);\ |x(0)|<M_{\varepsilon}\}>1-\varepsilon$ $\qquad \forall P\in\mathfrak{N}$

2) $P\{x(\cdot);\ \Delta_{J_U}(c,x(\cdot))\leq\Delta(c,\varepsilon),\ \forall c\}>1-\varepsilon$ $\qquad \forall P\in\mathfrak{N}$

ここに ε を定めたとき $\Delta(c,\varepsilon)\downarrow 0$ $\quad(c\downarrow 0)$ である．

才3章 K_X 値確率変数の法則収束

§3.1 法則収束に関する準備

Xは完備で可分な距離空間とする。この章では X-値確率変数 ξ，確率過程 $\{\xi_n(t),\ 0\leq t\leq 1\}$ を扱う。ξ_n が ξ_0 に確率収束，即ち $\delta>0$ に対して $P(J_1(\xi_n,\xi_0)>\delta)\to 0$ ならば ξ_n の分布は ξ_0 の分布に収束するが，或る意味でその逆が成り立つ。以下特にルベーグ測度 P_0 を確率測度とする確率空間 $[0,1]$ の点を ω で表わす。

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

<u>定理 3.1</u>　ξ_n の分布が ξ_0 の分布に収束すれば，$x_n(\omega)$ が存在して

$$P(\xi_n \in A) = P_0(x_n(\omega) \in A), \quad n = 0, 1, \cdots$$

$$P_0(x_n(\omega) \to x_0(\omega),\ n \to \infty) = 1, \quad A \text{ は } X \text{ のボレル集合.}$$

<u>証明</u>　$V_\varepsilon(x_0) = \{x\,;\ \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ とおく。

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_{(\frac{1}{2})^{k+1}}(x_j^{(k)})$$

となるような $x_j^{(k)} \in X$ をえらび

$$P(\xi_n \in \partial V_{r_k}(x_i^{(k)})) = 0, \ \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < r_k < \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$n = 0, 1, \cdots, \quad i = 1, 2, \cdots$$

をみたす r_k をとり

$$D_i^k = V_{r_k}(x_i^{(k)}) - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_{r_k}(x_j^{(k)})$$

$$S_{i_1, i_2 \cdots i_k} = D_{i_1}^1 D_{i_2}^2 \cdots D_{i_k}^k$$

とおく。[0,1] 上に区間 $\Delta_{i_1 \cdots i_k}^{(n)}$ をつぎのようにとる。$i_j = i_j'$，$1 \leq j \leq r-1$，$i_k < i_k'$ ならば，$\Delta_{i_1 \cdots i_k}^{(n)}$ は $\Delta_{i_1' \cdots i_k'}^{(n)}$ の左に位置するようにし，$\Delta_{i_1 \cdots i_k}^{(n)}$ の長さを $P(\xi_n \in S_{i_1 \cdots i_k})$ に等しくする。$S_{i_1 \cdots i_k}$ から一点 $\bar{x}_{i_1 \cdots i_k}$ をえらび，

$$x_n^m(\omega) = \bar{x}_{i_1 \cdots i_m}, \quad \omega \in \Delta_{i_1 \cdots i_m}^{(n)}$$

とおけば　$\rho(x_n^m, x_n^{m+p}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m$ だから殆んどすべての $\omega \in$ [0,1] に対して

$$x_n(\omega) = \lim_{m \to \infty} x_n^m(\omega)$$

が定まる。$\Delta_{i_1 \cdots i_m}^{(n)}$ の長さは $\Delta_{i_1, \cdots, i_m}^{(0)}$ の長さに近づくから $\Delta_{i_1 \cdots i_m}^{(0)}$ の内点 ω に対し

$$\varlimsup_{n \to \infty} \rho(x_0(\omega), x_n(\omega)) \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

故に

$$P_0(x_n(\omega) \to x_0(\omega),\ n \to \infty) = 1.$$

$x_n(\omega)$ の分布と ξ_n の分布が一致することは §2.2 の補題により容易に分る。 q.e.d.

補題 3.2　確率過程 $\{\xi_n(t),\ 0 \le t \le 1\} \in K_X$, $n = 0, 1, \cdots$ において, N を $[0,1]$ で dense な集合とするとき $\{\xi_n(t), t \in N\}$, $n = 1, 2, \cdots$, の有限次元分布が $\{\xi_0(t), t \in N\}$ の有限次元分布に収束する。

然るときは $\{x_n(t,\omega),\ 0 \le t \le 1\} \in K_X$, $n = 0, 1, \cdots$ が存在して, $\{x_n(t,\omega),\ 0 \le t \le 1\}$, $n = 0, 1, \cdots$, の有限次元分布は $\{\xi_n(t),\ 0 \le t \le 1\}$ のそれと一致し

$$(3.1) \qquad P_0(x_n(t,\omega) \to x_0(t,\omega),\ t \in N) = 1$$

証明　可附番積空間 $X^{(\infty)} = X \times X \times \cdots$ は

$$\rho^{(\infty)}(x, y) = \sum_1^\infty (1 - e^{-\rho(x_k, y_k)}) \frac{1}{k!}$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots) \in X^{(\infty)}$$

とおき可分, 完備な距離空間になる。

$$\xi_n = (\xi_n(t_1), \xi_n(t_2), \cdots),\quad N = (t_1, t_2, \cdots)$$

に前記定理を適用すれば ξ_n, $n = 0, 1, \cdots$, と同じ分布をもつ $x_n(\omega) = \{x_n(t_1,\omega), x_n(t_2,\omega), \cdots\}$ が存在して (3.1) が成り立つ。

固定した n に対して

$$P_0(\Delta_{J_1}(c, x_n(t)) > \delta,\ t \in N)$$

$$= P(\Delta_{J_1}(c, \xi_n(t)) > \delta,\ t \in N) \to 0 \quad (c \downarrow 0)$$

より

$$P_0(\Delta_j(c, x_n(t)) \to 0,\ t \in N) = 1$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

故に§1.1における K_X の函数の性質により

$$x_n(t,\omega)=\lim_{t_j\downarrow t} x_n(t,\omega), \quad t_j\in N$$

とおけば $x_n\in K_X$ となり x_n と ξ_n の $[0,1]$ における有限次元分布は一致する。 q.e.d.

§3.2 確率過程の法則収束に関する基礎定理

<u>定理3.3</u> f を J_1-連続な汎函数とする。N $(0,1\in N)$ を $[0,1]$ における dense な集合とし，確率過程 $\{\xi_n(t),\ 0\leq t\leq 1\}\in K_X$, $n=0,1,\cdots$ がつぎの条件をみたすとする。

(1) $\{\xi_n(t),\ t\in N\}$ の有限次元分布が $\{\xi_0(t),\ t\in N\}$ の有限次元分布に収束する。

(2) $\lim\limits_{c\to 0}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ P(\Delta_{J_1}(c,\xi_n(t))>\delta)=0$
$\delta>0$ 任意.

このとき $f(\xi_n(t))$ の分布は $f(\xi_0(t))$ の分布に収束する。

<u>証明</u> 前補題における $x_n(t,\omega)$, $n=0,1,\cdots$ を考えると $f(x_n(t))$ の分布は $f(\xi_n(t))$ の分布に等しい。よって x_n を K_X 値確率変数とみたとき確率収束の関係

$$\lim_{n\to\infty} P(J_1(X_n,X_0)>\delta)=0$$

$J_1(\cdot,\cdot)$ は K_X の距離函数，

を示せばよい（§1.4参照）

$x_0(t,\omega)\in K_X$ に対して

$$S(t_0)=\rho(x_0(t_0+0),x_0(t_0-0)) \quad (0<t_0<1)$$

とおく。$T_\mu=\{t;\ S(t)\geq\mu\}$ は有限集合である。$T_\mu=0$ のとき $N_\mu(\omega)=0$, $T_\mu\neq 0$ のとき, $T_\mu=\{u_j(\mu,\omega),\ 1\leq j\leq N_\mu(\omega)\}$ とかく。

$d_\mu(\omega)=1,\ 0\leq N_\mu\leq 1$; $d_\mu(\omega)=$
$$=\min_{2\leq j\leq N_\mu}(u_j(\mu)-u_{j-1}(\mu))$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

とおく。

$\mu>0$, $\varepsilon=\frac{1}{10}\mu$ ととり，充分小さい $\varepsilon_1>0$ に対して

$$A=\{\varepsilon_1<d_\varepsilon(\omega)\leq 1\} \text{ とおけば } P(A)>1-\eta .$$

$\varepsilon_2>0$ を充分小さくとれば，n_0 が存在して

$$C=\{\Delta_{J_1}(\varepsilon_2, x_n(t,\omega))<\varepsilon\} \text{ に対して } P(C)>1-\eta, n\geq n_0$$

$\varepsilon_3>0$ を小さくとれば

$$\Delta(\alpha)=\sup_{\substack{0\leq|s-t|\leq\alpha \\ (s,t)\not\ni u_j(\varepsilon)}} \rho(x_0(s), x_0(t))$$

とおくとき

$$B=(\Delta(\alpha)\leq\varepsilon),\ \alpha\leq\varepsilon_3, \text{ に対して } P(B)>1-\eta$$

有限集合 $\{v_j\}\subset N$ を $\max(v_j-v_{j-1})\leq\frac{1}{2}\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ となるようにとると，区間 $(v_{j-1}, v_j]$ が或る $u_j(\varepsilon)$ を含めば $(v_j, v_{j+1}]$ はいかなる $u_{j'}(\varepsilon)$ も含まない。故に互に重ならない $I'_j=[v_{j-1}, v_{j+1}]$ が存在して，すべての $u_j(\varepsilon)$ は $\cup I'_j$ の内部に含まれる。残りの区間 $[v_{j-1}, v_j]$ 全体を $\{I''_j\}$ とかき $\{I'_j\}\cup\{I''_j\}=\{I_j\}$ とおく。

$$D=\{\max_j \rho(x_n(v_j), x_0(v_j))<\varepsilon\}$$

に対して $n\geq 0$ ならば $P(D)>1-\eta$.

よって $ABCD$ の上ではつぎのことが成り立つ。

i) $u_j(\mu)\in I'_j$ ならば，t_0 が存在して

$$\rho(x_n(t), x_n(v_{j-1}))<\varepsilon,\ v_{j-1}\leq t<t_0$$

$$\rho(x_n(t), x_n(v_{j+1}))<\varepsilon,\ t_0\leq t\leq v_{j+1}$$

故に I'_j を I'_j 全体に一対一に移す，折れ線グラフの連続函数で，$\lambda(v_j(\mu))=t_0$ をみたす $\lambda(t)$ が存在する。従って

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\sup_{t\in I_j'} |\lambda(t)-t| \leq \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_2$$

$$\sup_{t\in I_j'} \rho(x_n(\lambda(t)),\ x_0(t)) \leq 3\varepsilon$$

ii) $u_j(\mu)\notin I_j=(v',v'')$ なるときは，$^\forall t\in I_j$ に対して，v を v',v'' の何れかにえらべば

$$\rho(x_n(t),\ x_0(t)) \leq \rho(x_n(t),\ x_n(v))$$

$$+\rho(x_n(v),\ x_0(v))+\rho(x_0(v),\ x_0(t))$$

$$\leq 2\varepsilon+2\varepsilon+\mu=\mu+4\varepsilon$$

I_j 上で $\lambda(t)=t$ とおけば

$$\sup_{t\in I_j} \rho(x_n(\lambda(t)),\ x_0(t)) \leq \mu+4\varepsilon .$$

故に $n\geq n_0$ に対して

$$P(J_1(x_n,x_0)\leq \mu+4\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_2) \geq 1-4\eta$$

即ち

$$p.\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 . \qquad \text{q.e.d.}$$

$\xi_n(t)$ の sample function が確率１で連続な場合には，この定理は次の様になる。

<u>定理 3.3′</u>

(1) [0,1] 上到る所稠密で，点 0,1 を含む t の集合に対し，$\xi_n(t)$ の有限次元分布が $\xi_0(t)$ のそれに収束する，

(2)
$$\lim_{c\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ P\{\Delta_{J_U}(c,\ \xi_n(\cdot))>\varepsilon\}=0 \qquad {}^\forall\varepsilon>0$$

であれば，$F(\xi_n)$ の分布は $F(\xi_0)$ の分布に収束する。

上の定理は定理 2.22 からも出る。(2) より任意の $\varepsilon>0$ に対し，すべての n について

$$P\{\Delta_{J_U}(c,\xi_n)>\varepsilon\}\leq \tilde{\Delta}(c,\varepsilon)$$

である様な $\tilde{\Delta}(c,\varepsilon)\downarrow 0\ (c\downarrow 0)$ の存在がわかる。数列 $c_j\downarrow 0$, ε_j

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$\downarrow 0$ を $\Sigma_j \tilde{\Delta}(c_j, \varepsilon_j) < \eta$ である様にとれば，すべての n に対し

$$P\{\Delta_{J_U}(c_j, \xi_n) > \varepsilon_j, \text{或る } j\} \leq \Sigma_j \tilde{\Delta}(c_j, \varepsilon_j) < \eta$$

$$P\{\Delta_{J_U}(c_j, \xi_n) \leq \varepsilon_j, \ \forall j\} \geq 1 - \eta$$

函数 $\Delta(c, \varepsilon)$ は次の二条件をみたす凸函数

i) ε を定めて $\Delta(c, \varepsilon) \downarrow 0 \quad (c \downarrow 0)$

ii) $\Delta(c_{j+1}, \varepsilon) \geq \varepsilon_j$

とすれば，任意の c に対し $c_{k+1} < c \leq c_k$ をとるとき

$$\Delta_{J_U}(c, \xi_n) \leq \Delta_{J_U}(c_k, \xi_n) \leq \varepsilon_k \leq \Delta(c_{k+1}, \varepsilon) \leq \Delta(c, \varepsilon)$$

だから

$$P\{\Delta_{J_U}(c, \xi_n) \leq \Delta(c, \varepsilon) \quad \forall c\} \geq 1 - \varepsilon$$

となって定理2.22 によって $\xi_n(t)$ の分布の集合はコンパクトである。従って (1) により C_X 上の分布として $\xi_n(t)$ の分布は $\xi_0(t)$ の分布に収束する．従って更に，任意の連続汎函数 F に対し $F(\xi_n)$ は $F(\xi_0)$ に法則収束する。

才4章　K_X値マルコフ過程とその法則収束

§4.1. 定義と記号

前と同様 X は可分な完備距離空間，$\mathcal{B}$ はそのボレル集合から成る σ-field，$T = [0,1]$ とする。せん移確率函数 $P(t, x, \tau, A)$，$x \in X$，$t < \tau$，$t, \tau \in T$，$A \in \mathcal{B}$ というのは (1) t, x, τ を定めたとき A の確率測度 (2) t, τ, A を定めたとき x に関し $\mathcal{B}$-可測 (3) $t_1 < t_2 < t_3$，$t_1, t_2, t_3 \in T$ に対し

$$P(t_1, x, t_3, A) = \int P(t_1, x, t_2\, dy)\, P(t_2, y, t_3, A)$$

$t \in [0,1]$ に対し定義され，X の値を取る確率過程 $\xi \equiv \{\xi(t), 0 \leq t \leq 1\}$ がマルコフ過程というのは，任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots <$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$t_k \leq 1$ に対し

$$
(4.1)\quad \begin{aligned} &P\{\xi(t_1)\in A_1,\cdots,\ \xi(t_k)\in A_k\} \\ &=\int_{x_1\in A_1}\cdots\int_{x_{k-1}\in A_{k-1}} P\{\xi(t_1)\in dx_1\}\,P(t_1,x_1,t_2,dx_2)\times \\ &\qquad\times\cdots\times P(t_{k-1},\ x_{k-1},\ t_k,\ A_k) \end{aligned}
$$

である様なせん移確率函数 $P(t,x,\tau,A)$ が存在するときにいう。

(4.1) により過程 ξ に対し確率1で次のことが成り立つ：$0\leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k \leq 1$ に対し

$$
\begin{aligned} &P\{\xi(t_1)\in A_1,\cdots,\xi(t_k)\in A_k \mid \xi(t),\ t\leq t_0\} \\ &=P\{\xi(t_1)\in A_1,\cdots,\xi(t_k)\in A_k \mid \xi(t_0)\} \end{aligned}
$$

条件付き確率とせん移確率函数とは

$$
P\{\xi(t_1)\in A_1 \mid \xi(t_0)\} = P(t_0,\xi(t_0),t_1,A_1)
$$

なる関係を持つ。

§4.2 才1種不連続性をもつ非斉次マルコフ過程

マルコフ過程の *sample function* が才一種不連続函数であるための条件は，Dynkin [4] と Kinney [12] によって与えられた(条件 UC)が，Skorohod はこの条件を一般化した。条件 UR は Skorohodによって与えられた十分条件である。$V^{\varepsilon}(x)\equiv\{y;\ P(x,y)\geq\varepsilon\}$ とおく。

条件 UC 一様確率連続の条件

任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$
\lim_{\tau-t\downarrow 0}\ \sup_{x\in X}\ P(t,x,\tau,V^{\varepsilon}(x))=0
$$

条件 UR 一様確率正則性の条件

任意の $\varepsilon>0$ と任意の $t\in[0,1]$ に対し

$$
\lim_{h\to 0}\ \sup_{x\in X,\,t\leq t_1<t_2\leq t+h} P(t_1,x,t_2,V^{\varepsilon}(x))=0
$$

$$
\lim_{h\to 0}\ \sup_{x\in X,\,t-h\leq t_1<t_2<t} P(t_1,x,t_2,V^{\varepsilon}(x))=0
$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\lim_{h\to 0}\ \sup_{x\in X,\, 1-h\le t_1<t_2\le 1} P(t_1, x, t_2, V^{\varepsilon}(x)) = 0$$

条件URのもとに，*sample function* が確率1で空間 K_X に属することを示すために，いくつかの補題を準備する．

補題 4.1

$$\Delta^{P}_{J_1}(c, \xi(\cdot), \varepsilon) \equiv \sup_{t_1<t_2\le t_3<t_4\le t_1+c} \Big\{ \sup_{x\in X} P(t_1, x, t_2, V^{\varepsilon}(x))$$

$$\wedge \sup_{x\in X} P(t_3, x, t_4, V^{\varepsilon}(x)) \Big\}$$

とおけば，$\xi(t)$ が条件URを満せば，任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta^{P}_{J_1}(c, \xi(\cdot), \varepsilon) = 0$$

証明　もし結論が成り立たないとすると，夫々 t_0 に収束する点列 $t_n^{(1)} < t_n^{(2)} \le t_n^{(3)} < t_n^{(4)}$ があって

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{x\in X} P(t_n^{(1)}, x, t_n^{(2)}, V^{\varepsilon}(x)) > 0$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{x\in X} P(t_n^{(3)}, x, t_n^{(4)}, V^{\varepsilon}(x)) > 0$$

これは条件URに矛盾する。　q.e.d.

補題 4.2　$\xi_1, \cdots, \xi_n$ をマルコフ連鎖とし，その遷移確率を $P(i, x, j, A) \equiv P(\xi_j \in A \mid \xi_i = x)$ とする。α, β を次の様に定義するとき，

$$\alpha \equiv \sup_{x\in X,\, 1\le k\le m-1} P(k, x, k+1, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x))$$

$$\beta \equiv \sup_{1\le i<j<k\le m} \Big(\sup_{x\in X} P(i, x, j, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x))$$

$$\wedge \sup_{x\in X} P(j, x, k, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x)) \Big)$$

$\beta < \frac{1}{4}$ であれば

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$P\{\sup_{1\leq i<j<k\leq m} \rho(\xi_i,\xi_j)\wedge\rho(\xi_j,\xi_k)>\varepsilon\}$$

$$\leq\begin{cases}48\beta & \alpha:\text{任意}\\ 16(\alpha+2\beta)P\{\rho(\xi_1,\xi_m)>\frac{\varepsilon}{4}\}, & \alpha\leq\frac{1}{4}\end{cases}$$

証明　事象 $\mathfrak{A}\equiv\{\sup_{1\leq i<j<k\leq m}\rho(\xi_i,\xi_j)\wedge\rho(\xi_j,\xi_k)>\varepsilon\}$, $\mathfrak{B}_k\equiv\{\rho(\xi_1,\xi_i)\leq\frac{\varepsilon}{2}\ \ 1\leq i<k,\ \rho(\xi_1,\xi_k)>\frac{\varepsilon}{2},\ \sup_{k<l}\rho(\xi_k,\xi_l)>\frac{\varepsilon}{2}\}$ を考える。$\mathfrak{A}\subset\cup\mathfrak{B}_k$。

$$P(\mathfrak{B}_k)=E\{P(\mathfrak{B}_k\mid\xi_k)\}$$

$$=\int_X P(\sup_{1\leq i<k}\rho(\xi_1,\xi_i)\leq\frac{\varepsilon}{2},\ \rho(\xi_1,\xi_k)>\frac{\varepsilon}{2}\mid\xi_k=x)P(\sup_{k<l}\rho(\xi_k,\xi_l)>\frac{\varepsilon}{2}\mid\xi_k=x)P\{\xi_k\in dx\}$$

$$\leq\sup_{x\in X}P(\sup_{k<l}\rho(\xi_k,\xi_l)>\frac{\varepsilon}{2}\mid\xi_k=x)\times P\{\sup_{1\leq i<k}\rho(\xi_1,\xi_i)\leq\frac{\varepsilon}{2},\ \rho(\xi_1,\xi_k)>\frac{\varepsilon}{2}\}$$

補題 4.3

$$\sup_{x\in X}P(j,x,m,V^{\eta}(x))\leq\alpha<1\qquad(j<m)$$

であれば

$$P\{\sup_{1\leq k\leq m}\rho(\xi_k,x)>2\eta\}\leq\frac{P\{\rho(\xi_m,x)>\eta\}}{1-\alpha}$$

証明

$$P\{\sup_{1\leq k\leq m}\rho(\xi_k,x)>2\eta\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}P\{\sup_{1\leq i<k}\rho(\xi_i,x)\leq 2\eta,\ \rho(\xi_k,x)>2\eta\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\int_{\rho(x_1,x)\leq 2\eta}\cdots\int_{\rho(x_{k-1},x)\leq 2\eta}\int_{\rho(x_k,x)>2\eta}P\{\xi_1\in dx_1\}P(1,x_1,2,dx_2)\times\cdots\times P(k-1,x_{k-1},k,dx_k)$$

$$\leq\frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{m}\int_{''}\cdots\int_{''}\int_{''}P\{\xi_1\in dx_1\}P(1,x_1,2,dx_2)\times\cdots\times$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\times P(k-1, x_{k-1}, k, dx_k) P(k, x_k, m, V^{\eta}(x))$$

$$(\because \ 1-\alpha \leqq P(k, x, m, V^{\eta}(x)))$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} P\{\rho(\xi_m, x) > \eta\} \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>補題4.2の証明の続き</u>　任意の k, ℓ に対し $j(k<j<\ell)$ を $\sup_x P(k, x, j, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x)) > \beta$ である様な最小数とすれば，β の定義により $\sup_x P(k, x, j-1, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x)) \leqq \beta$，$\sup_x P(j, x, \ell, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x)) \leqq \beta$ であり，更に $\sup_x P(j-1, x, j, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x)) \leqq \alpha$ だから $\sup_x P(k, x, \ell, V^{\frac{\varepsilon}{4}}(x)) \leqq \alpha + 2\beta$。補題4.3によって

$$\sup_{x \in X} P\{\sup_{k<\ell} \rho(\xi_k, \xi_\ell) > \frac{\varepsilon}{2} \mid \xi_k = x\}$$

$$\leqq \frac{\alpha+2\beta}{1-\alpha-2\beta}$$

$$P\{\mathfrak{A}\} \leqq \sum P\{\mathfrak{B}_k\}$$

$$\leqq \frac{\alpha+2\beta}{1-\alpha-2\beta} \sum P\{\sup_{1\leqq i<k} \rho(\xi_1, \xi_i) \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \rho(\xi_1, \xi_k) > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$= \frac{\alpha+2\beta}{1-\alpha-2\beta} P\{\sup_{2\leqq k\leqq m} \rho(\xi_1, \xi_k) > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$\leqq \frac{\alpha+2\beta}{(1-\alpha-2\beta)^2} P\{\rho(\xi_1, \xi_m) > \frac{\varepsilon}{4}\}$$

$\alpha \leqq \frac{1}{4}$ のときは $P\{\mathfrak{A}\} \leqq 16(\alpha+2\beta) P\{\rho(\xi_1, \xi_m) > \frac{\varepsilon}{4}\}$。$\alpha > \beta$ のときは，$\mathfrak{A}_1 \equiv \{\sup_{1\leqq j\leqq p} \rho(\xi_1, \xi_j) > \frac{\varepsilon}{2}\}$，$\mathfrak{A}_2 \equiv \{\sup_{p<j\leqq m} \rho(\xi_{p+1}, \xi_j) > \frac{\varepsilon}{2}\}$ とおけば $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ である。p として，$\sup_x P(p, x, p+1, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x)) = \alpha$ である様な p をとれば，$j<p$ に対し $\sup_x P(j, x, p, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x)) \leqq \beta$，$j \geqq p+1$ に対し $\sup_x P(j, x, m, V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x)) \leqq \beta$ となり，補題4.3によって，$P\{\mathfrak{A}_1\} \leqq \beta/1-\beta \leqq \frac{4}{3}\beta$，$P\{\mathfrak{A}_2\} \leqq \frac{4}{3}\beta$，故に $P\{\mathfrak{A}\} \leqq \frac{8}{3}\beta$。$\alpha < \beta$ のときは前の評価により，$P\{\mathfrak{A}\} \leqq 48\beta$。

q.e.d.

マルコフ過程 $\xi(t)$ が条件 UR を満すとき，任意の $0 \leqq t_1 < t_2 <$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$\cdots < t_n \leqq 1$ に対し確率

$$P\left\{\sup_{t_{i_1}-\frac{1}{\ell}<t_{i_2}<t_{i_1}<t_{i_3}<t_{i_1}+\frac{1}{\ell}} \rho(\xi(t_{i_2}),\xi(t_{i_1}))\wedge\rho(\xi(t_{i_1}),\xi(t_{i_3}))>\varepsilon\right\}$$

を評価しよう．その確率を評価する事象を $\mathfrak{A}$ とし，$\mathfrak{A}_k=\{\frac{k}{\ell}\leqq t_{i_2} < t_{i_1} < t_{i_3} < \frac{k+3}{\ell},\ \rho(\xi(t_{i_2}),\ \xi(t_{i_1}))>\varepsilon,\ \rho(\xi(t_{i_1}),\ \xi(t_{i_3}))>\varepsilon\}$，$\mathfrak{A}\subset\bigcup\mathfrak{A}_k$ とする。

$$\alpha_k \equiv \sup_{x\in X,\ \frac{k}{\ell}<t_i<t_j<\frac{k+3}{\ell}} P(t_i,x,t_j,V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x))$$

$t_j \geqq \frac{k}{\ell}$ である様な最小の j を r_k，$t_j<\frac{k+3}{\ell}$ である様な最大の j を r'_k とすれば，補題 4.2 により，十分大きな整数 ℓ に対し，

$$P\{\mathfrak{A}_k\}=\begin{cases}48\,\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{\ell},\ \xi(\cdot),\ \frac{\varepsilon}{12}\right) & \\ 16[2\Delta^P_{J_1}(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12})+\alpha_k]P\{\rho(\xi(t_{r_k}),\xi(t_{r'_k})) > \frac{\varepsilon}{4}\} & \alpha_k \leqq \frac{1}{4}\end{cases}$$

$\delta\leqq\frac{1}{4}$ を任意にとって，$c(\delta)$ を $\Delta^P_{J_1}(\frac{c(\delta)}{2},\ \xi(\cdot),\ \frac{\varepsilon}{12})\leqq\delta$ とすれば，$\sup_x P(\bar{t}_i,x,\bar{t}_{i+1},V^{\frac{\varepsilon}{12}}(x))>\delta$ となる様な点 $\bar{t}_i$ は，長さ $c(\delta)$ の区間には高々２個入るだけである。従って $\alpha_k>\delta$ である様な区間 $(\frac{k}{\ell},\frac{k+3}{\ell})$ の数は高々 $3(\frac{1}{c(\delta)}+1)$。故に $P\{\mathfrak{A}\}\leqq\Sigma P\{\mathfrak{A}_k\}\leqq 144\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)\Delta^P_{J_1}(\frac{3}{\ell},\ \xi(\cdot),\ \frac{\varepsilon}{12})+16[2\Delta^P_{J_1}(3/\ell,\ \xi(\cdot),\varepsilon/12)+\delta]\,\Sigma_k P\{\rho(\xi(t_{r_k}),\ \xi(t_{r'_k}))>\frac{\varepsilon}{4}\}$。$\Sigma_k P\{\rho(\xi(t_{r_k}),\xi(t_{r'_k}))>\frac{\varepsilon}{4}\}=\Sigma^2_{j=0}\Sigma_{k=3g+j}P(\rho(\xi(t_{r_k}),\ \xi(t_{r'_k}))>\frac{\varepsilon}{4}\}$ を評価する。

補題 4.4　$\xi(t)$ が条件 UR を満し，$\Delta^P_{J_1}(\bar{c},\ \xi(\cdot),\ \frac{\varepsilon}{5})<\frac{1}{3}$ であれば任意の $t_0<t_1<\cdots<t_N$ に対し

$$\sum_{j=1}^{N} P\{\rho(\xi(t_{j-1}),\ \xi(t_j))>\varepsilon\}\leqq 5+\frac{2}{\bar{c}}$$

証明　$0=\bar{t}_0<\bar{t}_1<\cdots<\bar{t}_k<1$ を次の様に選ぶ

$$\sup_{x\in X} P(t_j,\ x,\ \bar{t}_{i+1},\ V^{\frac{\varepsilon}{4}}(x))<\frac{1}{3}\qquad \bar{t}_i<t_j\leqq\bar{t}_{i+1}$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\sup_{x\in X} P(\bar{t}_i, x, \bar{t}_{i+1}, V^{\frac{\varepsilon}{5}}(x)) \geq \frac{1}{3}$$

$$\sup_{x\in X} P(t, x, 1, V^{\frac{\varepsilon}{4}}(x)) < \frac{1}{3} \qquad \bar{t}_k < t_j \leq 1$$

この定義によって長さ 2τ の区间には点 $\bar{t}_i$ は高々2個入るだけである。従って $k \leq 2(1+\frac{1}{2\tau})$

$$\sum_{j=1}^{N} P\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\} \leq k + \sum_{t_j\leq \bar{t}_1} P\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\}$$

$$+ \sum_{\bar{t}_1 < t_{j-1} < t_j \leq \bar{t}_2} P\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\} + \cdots + \sum_{\bar{t}_k < t_{j-1} < t_j \leq 1} P\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\}$$

右辺の各項は次の補題により1を越えないので，$\sum P\{\rho(\xi(t_{j-1}), \xi(t_j)) > \varepsilon\} \leq 2k+1 \leq 5 + \frac{2}{\tau}$ q.e.d.

<u>補題 4.5</u>　補題 4.3 で $\alpha < \frac{1}{2}$ であれば，

$$\sum_{k=2}^{m} P\{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) > 4\eta\} \leq \frac{1}{1-2\alpha} P\{\rho(\xi_1, \xi_m) > \eta\}$$

<u>証明</u>　補題 4.3 より

$$\frac{1}{1-\alpha} P\{\rho(\xi_1, \xi_m) > \eta\}$$

$$\geq P\{\sup_{2\leq j\leq m} \rho(\xi_1, \xi_j) > 2\eta\}$$

$$\geq P\{\sup_{2\leq j\leq m} \rho(\xi_{j-1}, \xi_j) > 4\eta\}$$

$$= \sum_{k=2}^{m} P\{\rho(\xi_j, \xi_{j+1}) \leq 4\eta,\ k\leq j<m,\ \rho(\xi_{k-1}, \xi_k) > 4\eta\}$$

$$= \sum_{k=2}^{m} \int_X P\{\rho(\xi_j, \xi_{j+1}) \leq 4\eta,\ k \leq j < m \mid \xi_k = x\}$$

$$\times P\{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) > 4\eta \mid \xi_k = x\} P\{\xi_k \in dx\}$$

$$\geq \sum_{k=2}^{m} \int_X P\{\rho(x, \xi_{j+1}) \leq 2\eta,\ k \leq j < m \mid \xi_k = x\}$$

$$\times P\{\rho(\xi_{k-1}, \xi_k) > 4\eta \mid \xi_k = x\} P\{\xi_k \in dx\}$$

補題 4.3 より

$$P\{\rho(x, \xi_{j+1}) \leq 2\eta,\ k \leq j < m \mid \xi_k = x\}$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\geq 1-\frac{P\{\rho(x,\xi_m)>\eta\,|\,\xi_k=x\}}{1-\alpha}\geq\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}$$

だから

$$P\{\rho(\xi_1,\xi_m)>\eta\}\geq(1-2\alpha)\sum_2^m P\{\rho(\xi_{k-1},\xi_k)>4\eta\}\quad \text{q.e.d.}$$

上の二つの補題により，$\bar{c}$ が $\Delta^P_{J_1}(\bar{c},\xi(t),\frac{\varepsilon}{20})\leq\frac{1}{3}$ であれば $\sum P\{\rho(\xi(t_{r_k}),\xi(t_{r'_k}))>\frac{\varepsilon}{4}\}\leq 3(5+2/\bar{c})$。以上をまとめて，

補題 4.6　$\xi(t)$ が条件 UR を満すとき，$\bar{c}$：

$\Delta^P_{J_1}(\bar{c},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{2c})\leq\frac{1}{3}$，$c(\delta)$：$\Delta^P_{J_1}(c(\delta)/2,\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12}\}\leq\delta\leq\frac{1}{4}$，

整数 ℓ：$\Delta^P_{J_1}(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12})\leq\frac{1}{4}$ を選べば任意の $t_1<t_2<\cdots<t_n$ に対し

$$P\{\sup_{t_{i_1}-\frac{1}{\ell}<t_{i_2}<t_{i_1}<t_{i_3}<t_{i_1}+\frac{1}{\ell}}\rho(\xi(t_{i_2}),\xi(t_{i_1}))\wedge\rho(\xi(t_{i_1}),\xi(t_{i_3}))>\varepsilon\}$$
$$\leq 144\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12}\right)$$
$$+48\left(5+\frac{2}{\bar{c}}\right)\left[2\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12}\right)+\delta\right]$$

定理 4.7

マルコフ過程 $\xi(t)$ に対し条件 UR が成り立てば，$\xi(t)$ と *stochastic equivalent* な過程 $\xi'(t)$ があって，$\xi'(t)$ の *sample function* は確率１で K_X に属する。

証明

(4.2)　$\xi_n(t)\equiv\xi(\frac{[nt]}{n})$　$t<1$；$\xi_n(1)\equiv\xi(\frac{n-1}{n})$

とおけば明らかに $P\{\xi_n(t)\in K_X\}=1$。補題4.6より $n\geq\ell$ に対し

(4.3)　$$P\{\Delta_{J_1}(\frac{1}{2\ell},\xi_n(\cdot))>\varepsilon\}$$
$$\leq 144\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12}\right)$$
$$+48\left(5+\frac{2}{\bar{c}}\right)\left[2\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12}\right)+\delta\right]$$

$n_k\equiv 2^k$ とおけば確率変数列 $\Delta_{J_1}(\frac{1}{2\ell},\xi_{n_k}(\cdot))$ は単調増大でその極限は確率１で存在して確率変数 $\Delta(\frac{1}{2\ell})\equiv\lim_{k\to\infty}\Delta_{J_1}(\frac{1}{2\ell},\xi_{n_k}(\cdot))$ を定義する。(4.3) より

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(4.4) $$P\{\Delta(\tfrac{1}{2\ell})>\varepsilon\}\leq 144\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)\Delta^{P}_{J_1}\left(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12}\right)$$

$$+48\left(5+\frac{2}{c}\right)\left[2\Delta^{P}_{J_1}\left(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12}\right)+\delta\right]$$

一方 $\Delta_{J_1}(\frac{1}{2\ell},\xi_n(\cdot))$ は $\ell\to\infty$ のとき単調減少だから $\Delta(\frac{1}{2\ell})$ も単調減少で，極限が存在し確率変数 $\Delta\equiv\lim_{\ell\to\infty}\Delta(\frac{1}{2\ell})$ を定める．$\Delta\leq\Delta(\frac{1}{2\ell})$ だから (4.4) で $\Delta(\frac{1}{2\ell})$ を Δ でおきかえることが出来る。そうしておいて $\ell\to\infty$ とすれば補題 4.1 によって，

$$P\{\Delta>\varepsilon\}\leq 48\left(5+\frac{2}{c}\right)\delta$$

$\delta\to 0$ として，全ての $\varepsilon>0$ に対し $P\{\Delta>\varepsilon\}=0$，即ち $P\{\Delta=0\}=1$。次に $P\{\sup_{0\leq t\leq h}\rho(\xi_{n_k}(0),\xi_{n_k}(t))>\varepsilon\}$ を評価する。h が十分小さくて

$$\sup_{x\in X,\,0\leq t_1<t_2\leq h}P(t_1,x,t_2\,V^{\frac{\varepsilon}{2}}(x))<\frac{1}{2}$$

であれば，補題 4.3 により

$$P\{\sup_{0\leq t\leq h}\rho(\xi_{n_k}(0),\xi_{n_k}(t))>\varepsilon\}$$

$$\leq 2\sup_{x\in X,\,0\leq t_1<t_2\leq h}P(t,x,t_2,V^{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$$

$\sup_{0\leq t\leq h}\rho(\xi_{n_k}(0),\xi_{n_k}(t))$ は $k\to\infty$ のとき単調増大，$h\to 0$ のとき単調減少だから，確率 1 で極限 $\chi(h)\equiv\lim_{k\to\infty}\sup_{0\leq t\leq h}\rho(\xi_{n_k}(0),\xi_{n_k}(t))$，$\chi\equiv\lim_{h\to 0}\chi(h)$ が存在する。

$$P\{\chi>\varepsilon\}\leq 2\lim_{h\to 0}\sup_{x\in X,\,0\leq t_1<t_2\leq h}P(t_1,x,t_2,V^{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$$

$$P\{\chi=0\}=1 \quad \text{即ち}$$

(4.5) $$P\{\lim_{h\to 0}\lim_{k\to\infty}\sup_{0\leq t\leq h}\rho(\xi_{n_k}(t),\xi_{n_k}(0))=0\}=1$$

同様にして

$$P\{\lim_{h\to 0}\lim_{k\to\infty}\sup_{1-h\leq t\leq 1}\rho(\xi_{n_k}(1),\xi_{n_k}(t))=0\}=1$$

結局

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(4.6) $$P\{\lim_{h\to 0}\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ [\Delta_{J_1}(h,\xi_{n_k}(\cdot))+\sup_{0\le t\le h}\rho(\xi_{n_k}(t),\xi_{n_k}(0))$$

$$+\sup_{1-h\le t\le 1}\rho(\xi_{n_k}(1),\xi_{n_k}(t))]=0\}=1$$

$[0.1]\supset N\equiv\{k/2^n;\ 0\le k\le 2^n,\ n=0,1,\cdots\}$ とおけば，$\xi_n(t)$ の定義から $N\in t$ に対し $\xi_{n_k}(t)\to\xi(t)$ である。故に補題 1.4 により，$P\{\xi'(t)\in K_X\}=1$，$P\{J_1(\xi_{n_k}(t),\xi'(t))\to 0\}=1$ である様な $\xi'(t)$ が存在する。$\xi'(t)$ が $\xi(t)$ と *stochastic equivalent* であることを示す。両方ともに確率右連続，$t=1$ で確率連続であるので，t の到る所稠密な集合に対し $P\{\xi(t)=\xi'(t)\}=1$ を云えば十分である。$J_1(\xi_{n_k}(t),\xi'(t))\to 0$ から $\xi'(t)$ の全ての確率連続点（可附番個を除いて $[0,1]$ の点全て）において，$P\{\xi_{n_k}(t)\to\xi'(t)\}=1$。他方 $\xi(t)$ の確率連続点において，(4.5) と全く同様にして

$$P\{\lim_{h\to 0}\ \lim_{k\to\infty}\ \sup_{t-h<t_1<t+h}\rho(\xi_{n_k}(t_1),\xi(t))=0\}=1$$

が成立つことが示せる。 q.e.d.

注意　もし $\xi(t)$ の *sample function* が K_X に属することが最初から仮定されていれば，$\Delta_{J_1}(c,\xi(\cdot))$ は意味を持ち容易に $\Delta_{J_1}(\frac{c}{2},\xi(\cdot))\le\lim_{k\to\infty}\Delta_{J_1}(c,\xi_{n_k}(\cdot))$ である。従って (4.4) により

(4.7) $$P\{\Delta_{J_1}(\frac{1}{4\ell},\xi(\cdot))>\varepsilon\}$$

$$\le 144\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)\Delta_{J_1}^{P}\left(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12}\right)$$

$$+48\left(5+\frac{2}{c}\right)\left[2\Delta_{J_1}^{P}\left(\frac{3}{\ell},\xi(\cdot),\frac{\varepsilon}{12}\right)+\delta\right]$$

補題 4.7　*sample function* が確率 1 で K_X に属する様なマルコフ過程のせん移確率が

$$P(t,x,b,V^{\frac{\varepsilon}{2}}(x))\le\alpha<1 \qquad a\le{}^{\forall}t<b$$

を満せば

$$P\{\sup_{a\le t\le b}\rho(\xi(t),\xi(a))>\varepsilon\}\le\frac{1}{1-\alpha}P\{\rho(\xi(b),\xi(a))>\frac{\varepsilon}{2}\}$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

証明　$\{t_n\}$ が $[0,1]$ で到る所稠密であれば，$x(t)\in K_X$ に対し

$$\sup_{0\le t\le 1}\rho(x(t), x_0) = \sup_{0<t_n<1}\rho(x(t_n), x_0)$$

であることと，補題4.3より出る。　q.e.d.

§4.3　マルコフ過程の一般極限定理

3章でのべられた一般定理をマルコフ過程の場合にせん移確率に関する条件でのべかえる。この章では過程 $\xi(t)$ の有限次元分布の収束は仮定される。有限次元分布の収束に関しては次の章以下で取扱う。

定理4.8

1)　マルコフ過程 $\xi_n(t)$, $n=0,1,2,\cdots$ は条件 UR を満す。

2)　$[0,1]$ 上到る所稠密で点0,1を含む t の集合に対し，$\xi_n(t)$ の有限次元分布は $\xi_0(t)$ の対応する有限次元分布に収束する。

3)　任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$(4.8)\qquad \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \Delta^P_{J_1}(c, \xi_n(\cdot), \xi) = 0$$

であれば，全ての J_1-連続な汎函数 f に対し，$f(\xi_n(t))$ の分布は $f(\xi_0(t))$ の分布に収束する。

証明　3) により，全ての n に対し

$$\Delta^P_{J_1}\left(\bar{c}, \xi_n(\cdot), \frac{\varepsilon}{20}\right) < \frac{1}{4}$$

である様な $\bar{c}$ がある。従って $c(\delta)$ を全ての n に対し $\Delta^P_{J_1}\left(\frac{c(\delta)}{2}, \xi_n(\cdot), \frac{\varepsilon}{12}\right) \le \delta$ である様にとれば，(4.7) によって

$$P\left\{\Delta_{J_1}\left(\frac{1}{4\ell}, \varepsilon_n(\cdot)\right) > \varepsilon\right\}$$

$$\le 144\left(\frac{1}{c(\delta)}+1\right)\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{\ell}, \varepsilon_n(\cdot), \frac{\varepsilon}{12}\right)$$

$$+\ 48\left(5+\frac{2}{\bar{c}}\right)\left[2\Delta^P_{J_1}\left(\frac{3}{\ell}, \xi_n(\cdot), \frac{\varepsilon}{12}\right)+\delta\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

故に 3) により

$$\varliminf_{l\to\infty}\ \varlimsup_{n\to\infty}\ P\{\Delta_{J_1}(\frac{1}{4l},\ \xi_n(\cdot))>\varepsilon\}\leqq 48(5+\frac{2}{c})\delta$$

δ は任意だから，

$$\varliminf_{l\to\infty}\ \varlimsup_{n\to\infty}\ P\{\Delta_{J_1}(\frac{1}{4l},\ \xi_n(\cdot))>\varepsilon\}=0$$

定理 3.3 によって $f(\xi_n(t))$ の分布は $f(\xi_0(t))$ の分布に収束する。

定理 4.9

1) $\xi_n(t)$, $n=1,2,\cdots$ は条件 UR を満し，$\xi_0(t)$ は条件 UC を満す。

2) $[0,1]$ 上到る所稠密で点 0,1 を含む t の集合に対し，$\xi_n(t)$ の有限次元分布は $\xi_0(t)$ の対応する有限次元分布に収束する。

3) $\xi_n(t)$ のせん移確率函数を $P_n(s,x,t,A)$ とするとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$\varliminf_{c\to 0}\ \varlimsup_{n\to\infty}\ \sup_{t-s\leqq c}\ \sup_{x\in X}\ P_n(s,x,t,V^{\varepsilon}(x))=0 \tag{4.9}$$

であれば，全ての J_1-連続な汎函数 f に対し，$f(\xi_n(t))$ の分布は $f(\xi_0(t))$ の分布に収束する。

証明

$$\sup_{t-s\leqq c}\ \sup_{x}\ P_n(s,x,t,V^{\varepsilon}(x))\geqq\Delta^{P}_{J_1}(c,\xi_n(\cdot),\varepsilon)$$

q.e.d.

§ 4.4 C_X 値マルコフ過程

Dynkin [4] はマルコフ過程の *sample function* が確率 1 で連続であるための次の条件を与えた。

$$\sup_{x\in X|t_1-t_2|\leqq c}\ P(t_1,x,t_2,V^{\varepsilon}(x))\leqq c\,\psi_{\varepsilon}(c) \tag{4.10}$$

ここに各固定した $\varepsilon>0$ に対し $\psi_{\varepsilon}(c)\downarrow 0\ (c\downarrow 0)$。

定理 4.10 マルコフ過程 $\xi(t)$ が条件 (4.10) を満せばその *sample function* が確率 1 で連続である様な *version* が存在する。

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

補題 4.11　任意の $t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leqq t_0 + c$ に対し

$$P\{\sup_{i,j} \rho(\xi(t_i), \xi(t_j)) > 4\varepsilon\} \leqq 2c\psi_\varepsilon(c)$$

証明　補題 4.3により

$$P\{\sup_{i,j} \rho(\xi(t_i), \xi(t_j)) > 4\varepsilon\}$$

$$\leqq \int_X P\{\max_j \rho(\xi(t_j), x) > 2\varepsilon \mid \xi(t_0) = x\} P\{\xi(t_0) \in dx\}$$

$$\leqq 2c\psi_\varepsilon(c)$$ q.e.d.

任意の集合 $A \subset [0.1]$ に対し次の様におく。

(4.11)　$$\Delta_{J_U}(x(\cdot), A) \equiv \sup_{t_1, t_2 \in A} \rho(x(t_1), x(t_2))$$

$$|A| \equiv \sup\{t\,;\, t \in A\} - \inf\{t\,;\, t \in A\}$$

補題 4.12　任意可附番集合 $\Lambda : |\Lambda| \leqq c$ に対して

$$P\{\Delta_{J_U}(\xi(\cdot), \Lambda) > 4\varepsilon\} \leqq 2c\psi_\varepsilon(c)$$

証明　有限集合の列 $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots$, $\bigcup_1^\infty \Gamma_n = \Lambda$ をとれば $\Delta_{J_U}(x(\cdot), \Lambda) = \lim_n \Delta_{J_U}(x(\cdot), \Gamma_n)$. 事象 $\{\Delta_{J_U}(\xi(\cdot), \Gamma_n) > 4\varepsilon\}$ は単調増大で $\{\Delta_{J_U}(\xi(\cdot), \Lambda) > 4\varepsilon\} = \bigcup_1^\infty \{\Delta_{J_U}(\xi(\cdot), \Gamma_n) > 4\varepsilon\}$ だから

$$P\{\Delta_{J_U}(\xi(\cdot), \Lambda) > 4\varepsilon\}$$

$$= \lim_n P\{\Delta_{J_U}(\xi(\cdot), \Gamma_n) > 4\varepsilon\} \leqq 2c\psi_\varepsilon(c)$$ q.e.d.

$\xi(t)$ の *separable version* をとれば

補題 4.13　任意の区間 $I : |I| \leqq c$ に対し

$$P\{\Delta_{J_U}(\xi(\cdot), I) > 4\varepsilon\} \leqq 2c\psi_\varepsilon(c)$$

定理の証明　任意の c に対し $t_1 = c = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdots t_n - t_{n-1}$, $0 < 1 - t_n \leqq c$ をとれば, $|I| \leqq c$ である様な区間 I は区間 $I_0 \equiv [0, t_2]$, $I_1 \equiv [t_1, t_3]$, $I_2 \equiv [t_2, t_4]$, $\cdots$, $I_{n-1} \equiv [t_{n-1}, 1]$ の一つに含まれるので,

$$P\{\Delta_{J_U}(c, \xi(\cdot)) > 4\varepsilon\} \leqq P\{\max_k \Delta_{J_U}(\xi(\cdot), I_k) > 4\varepsilon\}$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} P\{\Delta_{J_U}(\xi(\cdot), I_k) > 4\varepsilon\} \leqq 2nc\psi_\varepsilon(c)$$

$nc<1$ だから

$$(4.12) \qquad P\{\Delta_{J_U}(c, \xi(\cdot)) > 4\varepsilon\} \leqq 2\psi_\varepsilon(c)$$

$\Delta_{J_U}(c,\xi(\cdot))$ は $c\to 0$ のとき単調減少だから極限が存在して，

$$P\{\lim_{c\to 0} \Delta_{J_U}(c, \xi(\cdot)) > 4\varepsilon\} = 0$$

q.e.d.

定理 4.14　C_X における極限定理

マルコフ過程の列 $\xi_n(t)$ が同一の $\psi_\varepsilon(c)$ に対して (4.10) をみたし，任意の有限次元分布が，(4.10)をみたすマルコフ過程 $\xi(t)$ の有限次元分布に収束すれば（0,1を含む稠密なtの集合に対してだけ仮定されゝば十分），$\xi_n(t)$ は C_X において $\xi(t)$ に法則収束する。従って又，任意の連続汎函数 F に対し，$F(\xi_n(\cdot))$ の分布は $F(\xi(\cdot))$ の分布に収束する。

証明　(4.12)により

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\Delta_{J_U}(c, \xi_n(\cdot)) > 4\varepsilon\} = 0$$

定理3. により証明終り。　q.e.d.

才5章　半群による方法

斉次マルコフ過程には一つの半群が対応し，マルコフ過程の研究に半群の方法が有効に用いられることが知られている。以下のマルコフ過程の収束の問題においても半群を利用する。

§5.1　強弱生成作用素

B を Banach 空間とする。各 $t>0$ に対して線型作用素 U_t が

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

BをB自身に写像し，任意の$t,\tau>0$に対して

$$U_{t+\tau} = U_t U_\tau$$

をみたすとき$\{U_t, 0<t<\infty\}$を半群，Bをその定義域とよぶ。

R^mをm次元ユークリット空間，$\mathcal{B}$をそのボレル集合族とする。以下においてBはR^mで定義された有界可測($\mathcal{B}$)函数の或るクラスで$\|f\| = \sup_x |f(x)|$ $(f\in B)$をノルムとしてBanach空間になっているものとする。強収束，弱収束を通常のように定義する:

$$f_n \longrightarrow f\ (強) \iff \|f_n - f\| \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

$$f_n \longrightarrow f\ (弱) \iff f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad {}^\forall x\in R^m$$
$$|f_n(x)| \leq C \ (C は n, x に無関係)$$

任意の$f\in B$，$t\downarrow 0$に対して$U_t f \longrightarrow f$(強)(弱)のときU_tはそれぞれ強連続，弱連続な半群とよばれる。一般に

$$B_0 \equiv \{f:\ U_t f \longrightarrow f\ (強),\ t\to 0,\ f\in B\}$$

$$\widetilde{B}_0 \equiv \{f:\ U_t f \longrightarrow f\ (弱),\ t\to 0,\ f\in B\}$$

と定義すれば，B_0，$\widetilde{B}_0$はBanach空間。$B_0\subset\widetilde{B}_0\subset B$であって，$U_t$は$B_0$，$\widetilde{B}_0$を定義域どしそれぞれ強，弱連続な半群になる

$$\frac{U_t f - f}{t} \longrightarrow g\ (強),\quad f\downarrow 0$$

が成り立つとき$g = If$とおいて線型作用素Iが定まる。このようなfの全体を$\mathcal{D}(I)$ (Iの定義域)で表わす。IをU_tの強生成作用素とよぶ。

$$\frac{U_t f - f}{t} \longrightarrow g\ (弱),\quad t\downarrow 0,\quad g\in\widetilde{B}_0$$

が成り立つとき$g = \widetilde{I}f$とおいて線型作用素$\widetilde{I}$が定まる。このようなfの全体と$\mathcal{D}(\widetilde{I})$ ($\widetilde{I}$の定義域)で表わす。$\widetilde{I}$をU_tの弱生成作用素とよぶ。このとき

$$(5.0) \qquad \mathcal{D}(I) \subset \mathcal{D}(\widetilde{I}) \subset B_0 \subset \widetilde{B}_0$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

§5.2 resolvent と反転公式

以下 U_t は B_0 において考える。U_t の resolvent は

$$R(\lambda, I)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t f \, dt \qquad (\mathcal{R}(\lambda) > 0) \tag{5.1}$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_0^t U_\tau f \, d\tau$$

従って複素形反転公式により

$$\int_0^t U_\tau f \, d\tau = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{\lambda t} R(\lambda, I) f \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{5.2}$$

$$(\gamma > 0)$$

$f \in \mathcal{D}(I)$ のときは $R(\lambda, I)(\lambda - I)f = f$ より

$$\int_0^t U_\tau f \, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} [f + R(\lambda, I) I f] \frac{d\lambda}{\lambda^2} \tag{5.3}$$

となり，右辺の積分は絶対収束である。

以上の関係式は $f \in \widetilde{B}_0$ に対しても成り立つ。

U_1 を B をそれ自身に写像する有界線型作用素，$\|U_1\| \leq 1$, $U_k = U_1^k$ とおけば $\{U_k, 1 \leq k < \infty\}$ は離散半群である。このとき

$$I_n \equiv n(U_1 - E), \qquad E = \text{恒等作用素}$$

$$(5.4) \qquad R_n(\lambda, I_n) \equiv \frac{1}{n} \sum_0^\infty e^{-\frac{k\lambda}{n}} U_1^k = e^{\frac{\lambda}{n}} [n(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1) - I_n]^{-1}$$

$$U_1^0 \equiv E$$

とおけば (5,2)(5.3) に対応して

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^k U_j f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\pi n}^{\gamma + i\pi n} R_n(\lambda, I_n) f \, \frac{e^{\frac{\lambda(k+1)}{n}} - 1}{n(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1)} \, d\lambda \tag{5.5}$$

これに $R_n I_n + e^{\frac{\lambda}{n}} = R_n n(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1)$ を代入して

$$(5.6) \qquad \frac{1}{n} \sum_{j=0}^k U_j f$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\pi n}^{\gamma + i\pi n} \frac{e^{\frac{\lambda(k-1)}{n}}-1}{n^2(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)^2}\left[e^{\frac{\lambda}{n}}f + R_n(\lambda, I_n)I_n f\right]d\lambda$$

が成り立つ.

つぎのものはよく知られた半群の具体列である。

$\xi(t)$ を R^m 値で，下記の性質（PB）をもつせん移確率函数系 $P(t, x, A)$ に対応する斉次マルコフ過程とする。又以後 C を有界連続函数のなす Banach 空間とする。條件ＰＢ：

1） $P(t, x, A)$, $A \in \mathcal{B}$, は固定された t, A に対して，x につき可測（$\mathcal{B}$）。

2） $P(t, x, A)$ は任意の $t>0$ に対して，x につき弱連続な確率測度

3） $\lim\limits_{t\downarrow 0} P(t, x, V^{\varepsilon}(x)) = 0$; $x, \varepsilon > 0$ は任意。このとき $P(t, x, A)$ は A を固定すると（t, x）につきボレル可測になり，

$$U_t f(x) = \int f(y) P(t, x, dy), \qquad f \in C$$

は C における弱連続な半群になる。

$P(x, A)$（$x \in R^m$, $A \in \mathcal{B}$）を斉次マルコフ系列 $\{\xi_k, 1 \leq k < \infty\}$ に対応する *one step* のせん移確率函数で，任意の $f \in C$ に対して

$$\int P(x, dy)\, f(y) \in C$$

ならばこの左辺の積分を $U_1 f(x)$ とおいて離散の場合になる。

マルコフ過程の有限次元の分布の収束は半群の収束と密接な関係がある。つぎの定理は強連続半群の収束に関するものである。

§5.3 半群の収束定理

<u>定理 5.1</u> $U_t^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ を B において強連続な半群の列，$\|U_t^{(n)}\| \leq 1$, $I^{(n)}$ をその強生成作用素とする。もしも

$$I^{(n)}\varphi \longrightarrow I^{(0)}\varphi\,(強), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I^{(0)})$$

ならば

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$U_t^{(n)} f \longrightarrow U_t^{(0)} f \text{(強)}, \qquad \forall f \in B.$$

定理 5.2　$U_k^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$ をBで定義された离散半群の系列で, $\| U_k^{(n)} \| \leq 1$; $U_t^{(0)}$ をBにおける強連続な半群で $\| U_t^{(0)} \| \leq 1$ とする。$I_n^{(n)} = n(U_1^{(n)} - E)$ とおく。もしも $I_n^{(n)} \varphi \to I^{(0)} \varphi$ (強), $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I^{(0)})$ ならば, $\frac{k}{n} \to t$, $n \to \infty$ に対して $U_k^{(n)} f \to U_t^{(0)} f$ (強), $\forall f \in B$.

定理 5.2 の証明　(5.6) において $\varphi \in \mathcal{D}(I^2)$, $I = I^{(0)}$, $f = I\varphi$ とおけば $I_n^{(n)} \varphi \to f = I\varphi$ (強) であるから, $f = (f - I_n^{(n)} \varphi) + I_n^{(n)} \varphi$ とかいて

$$\frac{1}{n} \sum_0^k U_j f = \frac{1}{n} \sum_0^k U_j (f - I_n^{(n)}) + U_{k+1} \varphi - \varphi$$

かつ

$$\| \text{右辺の第一項} \| \leq \| f - I_n \varphi \| \to 0$$

(5.6) の右辺において

$$\| R_n \| \leq \frac{1}{|n(e^{-\frac{\gamma}{n}} - 1)|} \sim \frac{1}{\gamma}, \qquad \lambda = \gamma + i v$$

$$\frac{1}{|n(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1)|} = \frac{1}{|n(e^{\frac{\gamma}{n}} e^{\frac{iv}{n}} - 1)|} \leq \text{const} \frac{1}{n}, \quad \delta n \leq |v| \leq \pi n$$

$$\leq \text{const} \frac{1}{|\lambda|}, \quad |v| \leq \delta n$$

他方 $g \in \mathcal{D}(I^{(0)})$ に対して

$$\| R_n g - R g \| = \| R_n R (e^{\frac{\lambda}{n}} n (e^{\frac{\lambda}{n}} - 1) - \lambda + I - I_n) g \|$$
$$\leq \text{const}\, \gamma^{-2} \left(\| I f - I_n f \| + \frac{\|g\|}{n} \right) \to 0$$

従って一般に $R_n g \to R g$ (強), $\forall g \in B$.

又前記の f に対して $I_n^{(n)} f \longrightarrow I^2 \varphi$ (強)。以上に (5.6) を用いて

$$U_{k+1} \varphi - \varphi \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda^2} [I\varphi + R(\lambda, I) I^2 \varphi] \, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} [I\varphi + R(\lambda, I) I^2 \varphi] \, d\lambda = \int_0^t U_\tau I \varphi \, d\tau$$

$$= U_t \varphi - \varphi \quad \text{(強)}$$

q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

定理5.1の証明

$$U_t^{(n)}\varphi - U_t^{(0)}\varphi = \int_0^t U_{t-s}^{(n)} U^{(0)} (I^{(0)} - I^{(n)})\varphi\, ds$$

$$\longrightarrow 0 \ (\text{強}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I^{(0)})$$

および $\overline{\mathcal{D}(I^{(0)})} = B$ に注目すれば一般に

$$U_t^{(n)} f \longrightarrow U_t^{(0)} f \ (\text{強}), \quad \forall f \in B \qquad \text{q.e.d.}$$

弱連続半群についても上の定理に対応してつぎの定理が得られる。

定理5.3　$U_t^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ はBにおける弱連続な半群で $\| U_t^{(n)} \| \leq 1$, その弱生成作用素を $\tilde{I}^{(n)}$ とする。もしも $\mathcal{D}(\tilde{I}^{(n)}) \subset \mathcal{D}(\tilde{I}^{(0)})$, $\tilde{I}^{(n)}\varphi \to \tilde{I}^{(0)}\varphi$ (強), $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I^{(0)})$ ならば, $U_t^{(n)} f \longrightarrow U_t f$ (強), $\forall f \in B_0$ 。

定理5.4　$U_k^{(n)}$, $n = 1, 2, \cdots$ はBで定義された弱連続な離散半群の列で $\| U_k^{(n)} \| \leq 1$ をみたし; $U_t^{(0)}$ はBにおける弱連続な半群で $\| U_t^{(0)} \| \leq 1$ をみたす。$\tilde{I}^{(0)}$ を$U_t^{(0)}$の弱生成作用素とし

$$I_n^{(n)} = n\,(U_1^{(n)} - E)$$

とおく。

もしも $I_n^{(n)}\varphi \to \tilde{I}^{(0)}\varphi$ (強), $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{I}^{(0)})$ ならば

$$U_k^{(n)}\varphi \longrightarrow U_t^{(0)}\varphi \ (\text{強}), \quad \frac{k}{n} \to t, \ n \to \infty, \quad \forall \varphi \in B_0$$

証明　定理(5.3)は定理(5.1)と全く同様に証明される。§5.1において $\tilde{B}_0 = B$ と考える。(5.0)により $I_n^{(n)}\varphi \to I^{(0)}\varphi$ (強), $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I^{(0)})$ 故に定理(5.2)より定理の結論が出る。

才6章　マルコフ過程の有限次元確率法則の収束定理

§6.1　条件(D)

以下の章において斉次マルコフ過程 $\xi(t)$ は全て前章の条件PBをみたすものとする。これらのマルコフ過程に対して基本的につぎの条件DI, DIIを考える。DI, DIIを併せた条件をDとよぶ。

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

（DI）　弱生成作用素の定義域 $D(\tilde{I})$ は，二回連続微分可能，かつ才二次までの導函数が有界なすべての函数 φ を含み，

$$
\tilde{I}\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum b_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^i\partial x^j}+\sum a_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}
$$

(6.1)

$$
+\int\left[\varphi(y)-\varphi(x)-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{y^i-x^i}{1+\|y-x\|^2}\right]\Pi(x,dy)
$$

$$
x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)\in R^m
$$

$\|b_{ij}(x)\|$ は対称で，この二次形式は負でない。$\Pi(x,A)\geq 0$（$x\in R^m$, A：ボレル集合）はつぎの性質をみたす測度：

(6.2)　$$\sup_x\int_{|y-x|}|x-y|^2\,\Pi(x,dy)<\infty$$

(6.3)　$$\sup_x\Pi(x,V^r(x))<\infty,\qquad\forall r>0$$

$$\lim_{r\to\infty}\sup_x\Pi(x,V^r(x))=0$$

$$V_r(x)=\{y:|y-x|<r\},\quad V^r(x)=R^m-V_r(x)$$

$\varphi(x)$ を連続有界，$\varphi\geq 0$，x の或る近傍で $\varphi=0$ とすれば

(6.4)　$$\int\varphi(y)\Pi(x_n,dy)\to\int\varphi(y)\Pi(x,dy)$$

$$(x\to n)$$

（DII）　$D^{(2)}$ を二回連続微分可能，才二次導函数は一様連続，才二次までの導函数が有界な函数のクラスとする．このとき

$$D^{(2)}\subset\mathcal{D}(\tilde{I}),\qquad R(\lambda,\tilde{I})D^{(2)}\subset D^{(2)}$$

(6.1) の形の生成作用素をもつマルコフ過程の存在を確率論的に構成的に示したのは [Ito [9] である。

§6.2　収束条件

前節の条件をみたす生成作用素の列 $\tilde{I}^{(n)}$ に対する収束条件を考える。

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\alpha(x) \in D^{(2)},\ 0 \leqq \alpha_\varepsilon \leqq 1,\ \alpha_\varepsilon(x) = 1 \quad (|x| \leqq \varepsilon)$$

$$\alpha_\varepsilon(x) = 0\ (|x| \geqq 2\varepsilon),\ \beta_\varepsilon(x) = 1 - \alpha_\varepsilon(x)$$

とおく。又 $\psi(x)$ を原点の近傍で恒等的に 0 になる有界連続函数とする。

収束条件 CI

(1) x につき一様に

$$\lim_{n\to\infty} \int \psi(y-x)\,\Pi^{(n)}(x, dy) = \int \psi(y-x)\,\Pi^{(0)}(x, dy)$$

(2) $\varphi \in D^{(2)}$ に対して，x につき一様に

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum b_{ij}^{(n)}(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \int \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} (y^i - x^i)(y^j - x^j) \times \alpha_\varepsilon(y-x)\,\Pi^{(n)}(x, dy)\Big)$$

$$= \sum b_{ij}^{(0)}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \int \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} (y^i - x^i)(y^j - x^j) \times \alpha_\varepsilon(y-x)\,\Pi^{(0)}(x, dy)$$

(3) $\varphi \in D^{(2)}$ に対して，x につき一様に

$$\lim_{n\to\infty} \sum a_i^{(n)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \sum a_i^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

補題 6.1　収束条件 CI がみたされれば，$\varphi \in D^{(2)}$ に対して x につき一様に $\tilde{I}^{(n)}\varphi(x) \to \tilde{I}^{(0)}\varphi(x)$

証明　(1) より

$$(6.4)\qquad \lim_{r\to\infty} \sup_n \sup_x \Pi^{(n)}(x, V^r(x)) = 0$$

つぎに F を原点の ε 近傍で恒等的に 0，R^m で一様有界，同程度連続な函数のクラスとする。このとき

$$(6.5)\qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{\varphi \in F} \sup_x \Big| \int_{R^m} \varphi(y-x)\big(\Pi^{(n)}(x, dy) - \Pi^{(0)}(x, dy)\big)\Big| = 0$$

何故ならば (6.4) により，(6.5) において R^m の代りに $V_r(x)$ と

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

した関係式を証明すればよい。コンパクトな集合の上で考えた場合, Fは全有界であるから, $\varepsilon>0$ に対して $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N \in F$ が存在,

$$\min_{1\leq j\leq N} \sup_{|x|\leq r} |\varphi_j(x)-\varphi(x)| < \varepsilon, \qquad {}^\forall\varphi\in F$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{\varphi, x} \Big| \int_{V_n(x)} \Pi^{(n)}(x,dy)\,\varphi(y-x)$$

$$-\int_{V_n(x)} \Pi^{(0)}(x,dy)\,\varphi(y-x) \Big|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x} \sum_{j=1}^{N} \Big| \int \Pi^{(n)}(x,dy)\varphi_j(y-x) - \int \Pi^{(0)}(x,dy)\varphi_j(y-x) \Big|$$

$$+ \min_{1\leq j\leq N} \sup_{|x|\leq r} |\varphi_j(x)-\varphi(x)| \leq \varepsilon$$

$$\tilde{I}^{(n)}\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum b_{ij}^{(n)}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j} + \sum a_i^{(n)}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$

$$+\int\Big(\varphi(y)-\varphi(x)-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{y^i-x^i}{1+|y-x|^2}\Big)\big(\alpha_\varepsilon(y-x)+\beta_\varepsilon(y-x)\big)\,\Pi^{(n)}(x,dy)$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\int\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}(y^i-x^i)(y^j-x^j)\,\alpha_\varepsilon(y-x)\,\Pi^{(n)}(x,dy)$$

$$+\sum b_{ij}^{(n)}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\Big) + \sum a_i^{(n)}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$

$$+\int\Big(\varphi(y)-\varphi(x)-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{y^i-x^i}{1+|y-x|^2}\Big)\beta_\varepsilon(y-x)\,\Pi^{(n)}(x,dy)$$

$$+\int\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(y^i-x^i)\frac{|y-x|^2}{1+|y-x|^2}\,\alpha_\varepsilon(y-x)\,\Pi^{(n)}(x,dy)$$

$$+\frac{1}{2}\int\sum\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\big(\varphi(x+\theta(y-x))-\varphi(x)\big)(y^i-x^i)(y^j-x^j)$$

$$\times\,\alpha_\varepsilon(y-x)\,\Pi^{(n)}(x,dy)$$

オ3項には(6.5)が適用できることが容易にわかる。

$$|\text{オ}4,\ \text{オ}5\text{項}| \leq \text{const.}\ \delta\int_{|y-x|\leq 1}|y-x|^2\,\Pi^{(n)}(x,dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\leqq \text{const.}\ \delta,$$

δ は ε と共に小さい。以上から

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x |\tilde{I}^{(n)}\varphi(x) - \tilde{I}^{(0)}\varphi(x)| = 0, \quad \varphi \in D^{(2)}$$

q.e.d.

離散半群に対応して $I^{(n)}\varphi(x) = n\int P_n(x, dy)(\varphi(y) - \varphi(x))$ に対する収束条件として

収束条件 $C\,\mathrm{II}$

(1) $C\,I$ における ψ に対して，x につき一様に

$$\lim_{n\to\infty} n\int P_n(x, dy)\psi(y-x) = \int \Pi^{(0)}(x, dy)\psi(y-x)$$

(2) x につき一様に

$$\lim_{n\to\infty} \int \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}(y^i - x^i)(y^j - x^j)\alpha_\varepsilon(y-x)P_n(x, dy)$$

$$= \sum b_{ij}(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \int \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}(y^i - x^i)(y^j - x^j)$$

$$\times \alpha_\varepsilon(y-x)\Pi^{(0)}(x, dy), \quad \varphi \in D^{(2)}$$

(3) x につき一様に

$$\lim_{n\to\infty} n\int \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{y^i - x^i}{1+|y-x|^2} P_n(x, dy) = \sum a_i^{(0)}(r)\frac{\partial \varphi}{\partial x^i},$$

$$\varphi \in D^{(2)}$$

前補題と全く同様につぎの補題が証明される。

補題 6.2　収束条件 II がみたされれば，x につき一様に

$$I^{(n)}\varphi(x) \longrightarrow \tilde{I}^{(0)}\varphi(x), \quad \varphi \in D^{(2)}$$

§6.3　収束条件 $C\,I$，$C\,\mathrm{II}$ に対する有限次元分布の収束定理

確率変数 ξ_n の法則が ξ_0 の法則に収束するとき $P_{\xi_n} \to P_{\xi_0}$ とかく。確率過程の列 $\{\xi_n(t),\ a \leqq t \leqq b\}$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ において，$T = (t_j,\ 1 \leqq j \leqq N)$，$t_j \in [a, b]$ に対して，$\{\xi_n(t_1), \cdots, \xi_n(t_N)\}$ の法則が $\{\xi_0(t_1), \cdots, \xi_0(t_N)\}$ の法則に収束するとき $P^T_{\xi_n}$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$\Rightarrow P^{T}_{\xi_0}$ とかく。又このことが任意の t_i, N について成立するとき単に $P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi_0}$ とかくことにする。

定理 6.3　斉次マルコフ過程 $\xi_n(t)$, $n=1,2,\cdots$ は DI をみたし $\xi_0(t)$ は DI, DII をみたす。$\xi_n(t)$, $n=0,1,\cdots$ の弱生成作用素に対して CI が成り立ち，$P_{\xi_n(0)} \Rightarrow P_{\xi_0(0)}$

そうすれば

$$P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi_0}$$

定理 6.4　$\xi_{n,0}$, $\xi_{n,1}$, $\cdots$, $\xi_{n,n}$, $n=1,2,\cdots$ は斉次マルコフ連鎖の列であって，その *one-step* のせんい確率 $P_n(x,A)$ に対して，

(F) $\varphi \in C$ ならば $\int P_n(x,dy)\varphi(y) \in C$

C：有界連続函数のクラス

が成り立つ。マルコフ過程 $\xi_n(t)$ を

$$\xi_n(t) = \xi_{n,k}, \quad \frac{k}{n+1} \leqq t < \frac{k+1}{n+1}, \quad \xi_n(1) = \xi_{n,n}$$

と定義する。もしも $\xi_0(t)$ が D をみたし，$P_n(x,A)$ と $\tilde{T}^{(0)}$ に対し CII が成り立つならば

$$P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi_0}$$

証明　定理 6.3の証明は次の通り。$\varphi \in D^{(2)}$ に対して定理5.3により $U_t^{(n)}\varphi$ (強)。即ち x につき一様に

$$\int P_n(t,x,dy)\varphi(y) \longrightarrow \int P_0(t,x,dy)\varphi(y)$$

従って $\xi_n(0)$, $\xi_0(0)$ の分布函数を μ_n, μ_0 とすれば

$$\int \mu_n(dx_0)\varphi_0(x_0)\int P_n(t_1,x_0,dx_1)\varphi_1(x_1) \quad (\varphi_0, \varphi_1 \in D^{(2)})$$

$$\longrightarrow \int \mu_0(dx_0)\varphi_0(x_0)\int P_0(t_1,x_0,dx_1)\varphi_1(x_1)$$

故に $P^{0,t_1}_{\xi_n} \Rightarrow P^{0,t_1}_{\xi_0}$　$\psi_1^{(n)}(x_1) = \int P_n(t_2-t_1,x_1,dx_2)\varphi_2(x_2) \longrightarrow \psi_1^{(0)}(x_1)$ $(\varphi_2 \in D^{(2)})$, x_1 につき一様であるから

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\lim_{n\to\infty}\int\mu_n(dx_0)\varphi_0(x_0)\int P_n(t_1,x_0,dx_1)\varphi_1(x_1)\int P_n(t_2-t_1,x_1,x_2)\varphi_2(x_2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\mu_n(dx_0)\varphi_0(x_0)\int P_n(t_1,x_0,dx_1)\varphi_1(x_1)\psi_1^{(0)}(x_1)$$

$$=\int\mu_0(dx_0)\varphi_0(x_0)\int P(t_1,x_0,dx_1)\varphi_1(x_1)\int P_0(t_2-t_1,x_1,x_2)\varphi_2(x_2)$$

故に $P^{0,t_1,t_2}_{\xi_n} \Rightarrow P^{0,t_1,t_2}_{\xi_0}$, 以下同様

定理 6.4 も全く同様である。つぎの点を注意すればよい。DII により，$\varphi\in D^{(2)}$ に対して，$\psi_\lambda=R(\lambda,\tilde{I}^{(0)})\varphi$ とおけば $U_k^{(n)}\psi_\lambda \longrightarrow U_t^{(0)}\psi_\lambda$（強，$n\to\infty$，$\frac{k}{n}\to t$），$\lambda\psi_\lambda\longrightarrow\varphi$（強，$\lambda\to\infty$）であるから，$U_k^{(n)}\varphi\to U_t^{(0)}\varphi$ (強) q.e.d.

生成作用素の収束条件を若干一般にしたものとして

__定理 6.5__ $\xi_n(t)$, $n=0,1,\cdots$ は PB をみたし，$U_t^{(0)}\varphi(x)\to\varphi(x)$ $(t\downarrow 0)$ が任意のコンパクトな集合に対して一様（広義一様），$\forall\varphi\in C$: $D(I^{(0)})\subset\mathcal{D}(I^{(n)})$, かつ $\sup_{x,x}|I^{(n)}\varphi(x)|<\infty$, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(I^{(0)})$ とする。このとき，もしも

(1) $I^{(n)}\varphi\to I^{(0)}\varphi$ （広義，一様）

(2) 任意の $\varepsilon>0$, コンパクトな K, $T>0$ に対して r が存在して

$$\sup_{n,t\le T,x\in K} P^{(n)}(t,x,V^r(0))<\varepsilon$$

(3) $P_{\xi_n(0)} \Rightarrow P_{\xi_0(0)}$

ならば

$$P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi_0}$$

__証明__ $\varphi\in\mathcal{D}(I^{(0)})$ に対して

$$(6.6)\quad U_t^{(n)}\varphi(x)-U_t^{(0)}\varphi(x)=\int_0^t U_{t-s}^{(0)}U_s^{(n)}(I^{(n)}\varphi(x)-I^{(0)}\varphi(x))\,ds$$

仮定により

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(6.7) $U_t^{(n)}\varphi(x) \to U_t^{(0)}\varphi(x)$ (広義一様)

$\varphi \in C$ に対して $\psi_\lambda = R(\lambda, I^{(0)})\varphi$ とおけば $\psi_\lambda \in \overline{\mathcal{D}(I^{(0)})}$ であるから(6.7)は $\varphi = \psi_\lambda$ に対して成り立つ。$\lambda\psi_\lambda \to \varphi$ (広義一様)であるから(6.7)は一般に $\varphi \in C$ に対して成り立つ。$\varphi_0, \varphi_1 \in C$ に対して

$$\psi_1^{(n)}(x_1) = \int P^{(n)}(t_1, x_0, dx_1)\varphi_1(x_1), \qquad n = 0, 1, \cdots,$$ に対して

$$\int \mu_n(dx_0)\varphi_0(x_0)(\psi_1^{(n)}(x_1) - \psi_1^{(0)}(x_1))$$

$$= \left[\int_{|x_0| \le r} + \int_{|x_0| > r}\right] \mu_n(dx_0)\varphi_0(x_0)(\psi_1^{(n)}(x_1) - \psi_1^{(0)}(x_1))$$

|第1項| $\le \mu_n(V^r(0)) \to 0$ ($r \to \infty$, n につき一様) 又 $\psi_1^{(n)}(x) - \psi_1^{(0)}(x) \to 0$ (広義一様) なる故

|第1項| $\to 0$ ($n \to \infty$)

故に $E(\varphi_0(\xi_n(0))\varphi_1(\xi_n(t_1))) \to E(\varphi_0(\xi_0(0)\varphi_1(\xi_0(t_1)))$

$$P_{\xi_n}^{0,t_1} \Rightarrow P_{\xi_0}^{0,t_1}$$

定理 6.3 の証明と同様にして

$$P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi_0}$$

この定理と全く同様にしてつぎの定理が証明される。

<u>定理 6.6</u> $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \cdots$ を斉次マルコフ連鎖の列, その one-step せんい確率を $P_n(x, A)$, $\xi_0(t)$ を前定理と同じ条件をみたす斉次マルコフ過程とする。$P_n(x, A)$ は (F) をみたし

$$\sup_{n,x} |I^{(n)}\varphi(x)| < \infty, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I^{(0)})$$

$$I^{(n)}\varphi = n\int P(x, dy)(\varphi(y) - \varphi(x))$$

もしも

(1) $I^{(n)}\varphi \to I^{(0)}\varphi$ (広義一様), $\qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(I^{(0)})$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(2) 任意の $\varepsilon>0$，コンパクトな K, $T>0$ に対して r が存在して

$$\sup_{n, \frac{k}{n} \leq T, x \in K} P_n^k(x, V^r(0)) < \varepsilon$$

(3) $\xi_n(t) = \xi_k^{(n)}$, $\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}$

に対して

$$P_{\xi_0}^{(n)} \Rightarrow P_{\xi_0(0)}$$

ならば

$$P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi_0}$$

つぎの定理は *one-step* のせん移確率のよい具体的な性質から，定理 6.4 の条件 (2) および (4.9) を導くもので，次章の諸定理と重要な関連をもつ。

<u>定理 6.7</u>　$\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \cdots, \xi_n^{(n)}$ は斉次マルコフ連鎖で，その *one-step* せん移確率はつぎの条件をみたす。

(1) x に無関係な C および $\varepsilon>0$ が存在して

$$n\left|\int_{|y-x|\leq\varepsilon}(y-x)\,P_n(x, dy)\right| \leq C$$

$$n\left|\int_{|y-x|\leq\varepsilon}|y-x|^2\,P_n(x, dy)\right| \leq C$$

$$\sup_x n P_n(x, V^{\frac{\varepsilon}{2}}(x)) \leq C$$

（$(y-x)$ はベクトル，$|y-x|$ はその長さ）

(2) $\lim_{r\to\infty} \sup_n n P_n(x, V^r(x)) = 0$　（広義一様）

しかるときは任意の $T>0$ に対して

(3) $\lim_{r\to\infty} \sup_n \sup_{0\leq l\leq nT} P_n^l(x, V^r(x)) = 0$　（広義一様）

(4) $\xi_n(t)$ を

$$\xi_n(t) = \xi_k^{(n)},\ \frac{k}{n+1} \leq t \leq \frac{k+1}{n+1},\ \xi_n(1) = \xi_n^{(n)}$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

と定めれば，そのせん移確率は

$$\lim_{d\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{\tau-t\leq d}\ \sup_{x} P_n(t,x,\tau,V^{\varepsilon}(r))=0$$

をみたす。

<u>証明</u>

$$P_x(|\xi_\ell^{(n)}-\xi_0^{(n)}|>2r)\quad (P_x(\cdot)=P(\cdot\,|\,\xi_0^{(n)}=x))$$

を評価するため

$$\eta_{n,k}^{[\varepsilon]}=\begin{cases}\xi_k^{(n)}-\xi_{k-1}^{(n)}, & |\xi_k^{(n)}-\xi_{k-1}^{(n)}|\leq\varepsilon\\ 0, & |\xi_k^{(n)}-\xi_{k-1}^{(n)}|>\varepsilon\end{cases}$$

$$\bar{\eta}_{n,k}^{[\varepsilon]}=\begin{cases}\xi_k^{(n)}-\xi_{k-1}^{(n)}, & |\xi_k^{(n)}-\xi_{k-1}^{(n)}|>\varepsilon\\ 0, & |\xi_k^{(n)}-\xi_{k-1}^{(n)}|\leq\varepsilon\end{cases}$$

とかけば

$$\xi_\ell^{(n)}-\xi_0^{(n)}=\sum_1^\ell \eta_{n,k}^{[\varepsilon]}+\sum_1^\ell \bar{\eta}_{n,k}^{[\varepsilon]}$$

はじめに $P_x\{|\sum_1^\ell \eta_{n,k}^{[\varepsilon]}|>\varepsilon\}$, $P_x\{|\sum_1^\ell \bar{\eta}_{n,k}^{[\varepsilon]}|>r\}$ を評価する.

$$a_k=\sup_x E_x(\sum_1^k \eta_{n,k}^{[\varepsilon]})^2$$

とおく。

$$E_x|\sum_{j=1}^k \eta_{n,j}^{[\varepsilon]}|^2=E_x|\sum_{j=1}^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}|^2$$

$$+2E_x\{\eta_{n,k}^{[\varepsilon]}\cdot\sum_1^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\}+E_x|\eta_{n,k}^{[\varepsilon]}|^2$$

$$|\text{第 2 項}|\leq 2E_x|\{\sum_1^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\cdot E(\eta_{n,k}^{[\varepsilon]}\,|\,\xi_k^{(n)})|$$

$$\leq\frac{2C}{n}E_x|\sum_1^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}|\leq\frac{C}{n}[1+E_x|\sum^{k-1}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}|^2]$$

$$|\text{第 3 項}|\leq\iint_{|x_k-x_{k-1}|\leq\varepsilon}(x_k-x_{k-1})^2P_n(x_{k-1},dx_k)P_n^{k-1}(x_0,dx_{k-1})$$

$$\leq\frac{C}{n}$$

故に $a_k\leq\frac{2C}{n}+(1+\frac{C}{n})a_{k-1}$, 一般に $(a_{k+1})\leq(1+\frac{2C}{n})(a_{k-1}$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

1)($a_0=0$)が成り立つ。従って

$$(a_{k+1}+1)\leqq\left(1+\frac{2C}{n}\right)^{k+1}$$

$$E_x\left|\sum_{j=1}^{\ell}\eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\right|^2\leqq a_\ell\leqq\left(1+\frac{2C}{n}\right)^{\ell}-1\leqq e^{\frac{2C\ell}{n}}-1$$

Tchebychev の不等式により

$$\sup_x P_x\left\{\left|\sum_{i=1}^{\ell}\eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right|>r\right\}\leqq\frac{e^{\frac{2C\ell}{n}}-1}{r^2}$$

更に $P\{\sup_{1\leqq s\leqq\ell}\left|\sum_{i=1}^{s}\eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right|>r\}$ を評価する。そのため

$$\zeta_n^{(i)}=(\eta_{n,i}^{[\varepsilon]},\ Z)+\frac{C}{n},\quad |Z|=1$$

とおけば

$$E\{\zeta_n^{(i)}\,|\,\xi_0^{(n)},\cdots,\ \zeta_{i-1}^{(n)}\}=\frac{C}{n}+\left(z,\int_{|y-x|<\varepsilon}(y-x)P_n(x,dy)\right)$$

$$\geqq 0$$

故に $\chi_n^{(i)}=\sum_{i=1}^{i}\zeta_n^{(i)}$ は *semi-martingale* になる。従って [3]

$$P_x\{\sup_{1\leqq i\leqq\ell}|\chi_n^{(i)}|>r\}\leqq\frac{2E_{x_0}(|\chi_n^{(\ell)}|)-E_{x_0}(\zeta_n^{(1)})}{r}$$

$$\leqq\frac{2E_{x_0}(|\chi_n^{(\ell)}|)}{r}\leqq 2\,\frac{\frac{\ell C}{n}+E_{x_0}(|\sum_1^{\ell}\eta_{ni}^{[\varepsilon]}|)}{r}$$

$$\leqq\frac{2\ell C}{nr}+\frac{1}{r}\left(E_x\left|\sum_{i=1}^{\ell}\eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right|^2+1\right)$$

$$\leqq\frac{2\ell C}{nr}+\frac{1}{r}+\frac{e^{\frac{2C\ell}{n}}-1}{r}\leqq\frac{e^{2CT}+2CT}{r}$$

ベクトル Z の k 成分を $Z(k)$ とかけば

$$\chi_n^{(j)}(k)=\left(\sum_{i=1}^{j}\eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right)(k)+\frac{jC}{n},\quad 1\leqq k\leqq m$$

$$\left|\sum_{i=1}^{j}\eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right|\leqq\sum_{k=1}^{m}|\chi_n^{(j)}(k)|+\frac{jCm}{n}$$

故に

$$P_x\left\{\sup_{1\leqq j\leqq\ell}\left|\sum_{i=1}^{j}\eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right|>r\right\}=P_x\left\{\sup_{1\leqq j\leqq\ell}\sum_{k=1}^{m}|\chi_n^{(j)}(k)|\geqq r-TCm\right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\leq \sum_{k=1}^{m} P_x\left\{ \sup_{1\leq j\leq \ell} |\chi_n^{(j)}(k)| \geq \frac{r-TCm}{m} \right\} \leq \frac{e^{2CT}+2CT}{r-TCm} m^2 = \eta_1(r)$$

N: $\bar{\eta}_{n,k}^{[\varepsilon]} \neq 0$, $1\leq k\leq \ell$ をみたす番号 k の個数 $(\ell \leq nT)$ とおけば (1) より

$$P_x(N=m) = \sum_{1\leq i_1 < i_2 \cdots < i_n \leq \ell} \int \cdots \int_D P_n(x_0, dx_1) \cdots P_n(x_{\ell-1}, dx_\ell)$$

$$D = \{ |x_{i_1} - x_{i_1-1}| > \varepsilon, \cdots, |x_{i_m} - x_{i_m} - 1| > \varepsilon \}$$

$$\leq \frac{\ell!}{m!(\ell-m)!} \left(\frac{C}{n}\right)^m \leq \frac{(CT)^m}{m!}$$

$$P_x(N \geq m+1) \leq \sum_{m+1}^{\infty} \frac{(CT)^k}{k!} = \eta_2(m)$$

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{n, x\in K} n P_n(x, V^r(x)) = 0 \quad \text{(広義一様)}$$

であるから，ψ_j を $\bar{\eta}_{n,k}^{[\varepsilon]} \neq 0$ となる第 j 番目の値とし，$C_r = \{\sup_{1\leq s\leq \ell} |\sum_{i=1}^{s} \eta_{n,i}^{[\varepsilon]}| \leq r\}$ とおけば，任意のコンパクトな K に対して

$$\lim_{N_1\to\infty} \sup_{x\in K} P_x\{ |\psi_1| > N_1, C_r \} = 0$$

および一般に任意の $N_1, \cdots, N_{j-1}$ に対して

$$\lim_{N_j\to\infty} \sup_{x\in K} P_x\{ |\psi_j| > N_j, |\psi_1| \leq N_1, \cdots, |\psi_{j-1}| \leq N_{j-1}, C_r, N \geq j \} = 0$$

$$P_x\{ \sup_{1\leq s\leq \ell} |\sum_{j=1}^{s} \bar{\eta}_{n,j}^{[\varepsilon]}| > L \} \leq \sum_{k=1}^{m} P_x\{ \sup_{1\leq s\leq \ell} |\sum_{1}^{s} \bar{\eta}_{n,j}^{[\varepsilon]}| > L, C_r, N=k \} + \eta_1(r) + \eta_2(m)$$

一方 $N_1 + \cdots + N_k \leq L$ なる任意の $N_1, \cdots, N_k$ に対して

$$P_x\{ \sup_{1\leq s\leq \ell} |\sum_{j=1}^{s} \bar{\eta}_{n,j}^{[\varepsilon]}| > L, C_r, N=k \}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} P_x\{ |\psi_j| > N_j, |\psi_1| \leq N_1, \cdots, |\psi_{j-1}| \leq N_{j-1}, N \geq j \}$$

右辺は $N_1, \cdots, N_k$ を逐次適当に大きくえらび，$x\in K$ につき一様

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(62)

に小さくすることができる。故に

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{n} \sup_{x\in K} P_x\left(\sup_{1\leq \ell\leq nT} |\xi_\ell^{(n)}| > 2r \right)$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \sup_{n} \sup_{x\in K} \left\{ P_x\left(\sup_{1\leq \ell\leq nT} \left|\sum_{1}^{\ell} \eta_{n,i}^{[\varepsilon]}\right| > r \right) + P_x\left(\sup_{1\leq \ell\leq nT} \left|\sum_{i=1}^{\ell} \bar{\eta}_{n,i}^{[\varepsilon]}\right| > r \right)\right\} = 0$$

即ち (3) がより稠密な形で証明された。

(4) の証明

$1 \leq k \leq nd$ とし，d を小さくとる。

$$P_x\left(\max_{1\leq k\leq nd} |\xi_k^{(n)} - \xi_0^{(n)}| > \varepsilon \right) \leq \sum_{k=1}^{[nd]} \frac{C}{n} \leq 2Cd \qquad (n\to\infty)$$

故に

$$P_x(|\xi_k^{(n)} - \xi_0^{(n)}| \geq \eta)$$

$$\leq P_x\left(\left|\sum_{j=1}^{k} \eta_{n,j}^{[\varepsilon]}\right| \geq \eta,\ \max_{1\leq k\leq nd} |\bar{\eta}_{n,k}^{[\varepsilon]}| \neq 0 \right) + 2Cd$$

$$\leq \frac{e^{2Cd}-1}{\eta} + dC \longrightarrow 0 \qquad (d\to 0)$$

即ち

$$\lim_{d\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\tau - t\leq d} \sup_{x} P_n(t, x, \tau, V^{\eta}(x)) = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

第７章　J_1-連続な汎函数についての法則収束

この章で前章までの結果にもとづいて，マルコフ過程の法則収束に対する一般的な定理を証明する．以下 F は J_1- 連続な汎函数とする。

__定理 7.1.__　斉次マルコフ過程 $\xi_n(t)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ は DI

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

をみたし，$\xi_0(t)$ は更にＤⅡをみたす。$\xi_n(t)$ の弱生成作用素はＣⅠをみたし，$P_{\xi_n(0)} \Rightarrow P_{\xi_0(0)}$

しかるときは $F(\xi_n(t))$ の法則は $F(\xi_0(t))$ の法則に収束する。

<u>定理 7.2</u>　$\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \cdots, \xi_n^{(n)}$，$n = 1, 2, \cdots$ は斉次マルコフ連鎖の列で，その one-step せん移確率 $P_n(x, A)$ に対して (F) がみたされるものとする。

$$(7.1)\qquad \xi_n(t) = \xi_k^{(n)},\quad \frac{k}{n+1} \leqq t < \frac{k+1}{n+1},\quad \xi_n(1) = \xi_n^{(n)}$$

とおく。

もしもＤⅠ，ＤⅡをみたすマルコフ過程 $\xi_0(t)$ につき，$P_n(x, A)$ がＣⅡをみたし，$P_{\xi_n(0)} \Rightarrow P_{\xi_0(0)}$ ならば $F(\xi_n(t))$ の法則は $F(\xi_0(t))$ の法則に収束する。

<u>定理 7.3</u>　斉次マルコフ過程 $\xi_n(t)$，$n = 0, 1, \cdots$ はＤⅠをみたし，更に $\xi_0(t)$ はＤⅡをみたす。もしも $\mathcal{D}(\tilde{I}^{(0)}) \subset \mathcal{D}(\tilde{I}^{(n)})$, $\sup_{n,x} |\tilde{I}^{(n)}\varphi(x)| < \infty$，$\forall \varphi \in D^{(2)}$，$\tilde{I}^{(n)}\varphi(x) \to \tilde{I}^{(0)}\varphi(r)$（広義一様），$P_{\xi_n(0)} \Rightarrow P_{\xi_0(0)}$ ならば，$F(\xi_n(t))$ の法則は $F(\xi_0(t))$ の法則に収束する。

<u>定理 7.4</u>　$\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \cdots, \xi_n^{(n)}$，$n = 1, 2, \cdots$ を斉次マルコフ連鎖，$P_n(x, A)$ をその one-step せん移確率とする。もしもＤⅠ，ＤⅡをみたす斉次マルコフ過程 $\xi_0(t)$ に対して (7.1) の $\xi_n(t)$ が次の条件

(1). $P_n(x, A)$ は (F) をみたす

(2) $\sup_{n,x} n\left|\int P_n(x, dy)\,(f(y) - f(x)\right| < \infty$

$$n \int P_n(x, dy)\,(f(y) - f(x)) \to \tilde{I}^{(0)} f(x)$$

（広義一様），$\forall f \in D^{(2)}$

(3) $P_{\xi_n(0)} \Longrightarrow P_{\xi_0(0)}$

をみたすならば $F(\xi_n(t))$ の法則は $F(\xi_0(t))$ の法則に収束する。

定理 7.1，7.2 は定理 7.3，7.4 と補題 6.1，6.2 より出る。定理 7.3（定理 7.4）の証明において $P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\xi_0}$ を始めに示さねばな

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

らない。そのために $U_t^{(n)}f(x) \to U_t^{(0)}f(x)$ ($U_k^{(n)}f(x) \to U_t^{(0)}f(x)$) が広義一様，$\forall f \in C$，であることを示さねばならないが，これは定理6.5（定理6.6）におけると同様である。$U_t^{(n)}\varphi(x) \to U_t^{(0)}\varphi(x)$（広義一様）$\varphi \in D^{(2)}$ であるが，$f \in C$ に対して，$\varphi_n \in D^{(2)}$, $\|\varphi_n\| < C$, $\varphi_n \to \varphi$（広義一様）となる φ_n がえらべるからであり，定理7.4においては $R_\lambda D^{(2)} \subset D^{(2)} \subset \mathfrak{D}(\tilde{I}^{(0)})$ より $\lambda R_\lambda \varphi \to \varphi$（強），$\varphi \in D^{(2)}$ より，$U_k^{(n)}f(x) \to U_t^{(n)}f(x)$, $n \to \infty$, $\frac{k}{n} \to t$, 広義一様，が成立するからである。

以上の注意から

<u>定理7.3の証明</u>　　$f \in \mathfrak{D}(\tilde{I}^{(0)})$ に対して

$$(7.2) \qquad \int_0^t U_0^{(n)} \tilde{I}^{(n)} f(x)\, ds = U_t^{(n)} f(x) - f(x)$$

$$\|f\| = \sup_x \left(|f(x)| + \sum_{ij} \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \right| + \sum \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \right| \right)$$

をノルムとしてBanach空間 $D^{(2)}$ を考える。$D^{(2)}$ の有界線型汎函数 $L_{t,x}^{(n)}$ ($0 < t < \infty$, $x \in R^n$, $1 \leq n < \infty$) を

$$L_{t,x}^{(n)} f = t^{-1} \int P^{(n)}(t, x, dy)(f(y) - f(x))$$

$$= t^{-1} \int_0^t U_s^{(0)} \tilde{I}^{(n)} f(x)\, ds$$

で定義する。仮定により $\sup_{n,y} |I^{(n)} f(y)| < \infty$ であるから，任意の $f \in D^{(2)}$ に対して

$$\sup_{n,t,x} |L_{t,x}^{(n)} f| \leq \sup_{n,t,x} t^{-1} \int_0^t \|U_s^{(n)}\| \, \|I^{(n)} f\|\, ds < \infty$$

故に共鳴定理によって，n, t, x に無関係な C_0 につき

$$\|L_{t,x}^{(n)}\| \leq C_0 < \infty$$

$\varphi \in D^{(2)}$, $\varphi(x) = 0$ ($|x| < \varepsilon$), $= 1$ ($|x| \geq 2\varepsilon$),

$0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi_x(y) = \varphi(y - x)$

に対して，n, t, x に無関係な C につき

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$t^{-1}P^{(n)}(t,x,V^{2\varepsilon}(x)) \leq t^{-1}\int P^{(n)}(t,x,dy)\varphi(y-x)$$

$$= L^{(n)}_{t,x}\varphi_x \leq C_0\|\varphi_x\| = C_0\|\varphi\| = C$$

$$P^{(n)}(t,x,V^{2\varepsilon}(x)) \leq Ct$$

即ち(4.9)が成立する。

$$K_0 = V_{a_0}(0),\ K_1 = \{x : d(x,K) \leq 1\},\ K_j = \{x; d(x,K_0) \leq jd\}$$

$(2 \leq j \leq 3,\ \delta > 1)$, $d(\cdot,\cdot)$ = ユークリッド距離とする。$\psi \in D^{(2)}$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x) = 1$ $(x \notin K_3)$, $= 0$ $(x \in K_2)$ をとれば

$$(7.3)\quad \int P^{(n)}(s,x,dy)\,\tilde{I}^{(n)}\varphi(y)$$

$$= \left[\int_{K_1} + \int_{K_1^c}\right] P^{(n)}(s,x,dy)\,\tilde{I}^{(n)}\varphi(y)$$

$$\leq Cs + \int_{K_1} P^{(n)}(s,x,dy)\,\tilde{I}\varphi(y)$$

$\tilde{I}^{(0)}$ の性質と定理の条件から

$$(7.4)\quad \sup_{x\in K_1}|\tilde{I}^{(n)}\psi(x)| \leq \sup_{n,x\in K_1}\Pi^{(n)}(x,V^{\delta}(x)) = \eta(a_0,\delta)$$

$$\eta(a_0,\delta) \to 0 \qquad (\delta \to \infty)$$

(7.3)(7.4)を(7.2)に代入すれば $|x| \leq as$ に対して

$$P^{(n)}(t,x,V^{a_1}(0)) \leq \int P^{(n)}(t,x,dy)\psi(y)$$

$$= \int_0^t ds\int P^{(n)}(s,x,dy)\,\tilde{I}^{(n)}\psi(y) \leq \frac{Ct^2}{2} + \varepsilon(a_0,a_1)$$

$$\varepsilon(a_0,a_1) \to 0 \quad (a_1 \to \infty),\quad a_1 = a_0 + 2\delta + 1$$

N を $\frac{C}{2N} \leq \varepsilon$ なるようにえらび, $t_j = \frac{jt}{N}$ $(0 < t \leq 1)$ a_j を逐次大にとり, $\max_{1\leq j\leq N}\varepsilon(a_{j-1},a_j) \leq \varepsilon$ ならしめれば(a_j は a_0 に依存する)

$$\sup_{|x|\leq a_0} P^{(n)}(t,x,V^{a_N}(0)) \leq \sup_{|x|\leq a_0} P_x\Big(\bigcup_{1\leq j\leq N}[\xi_n(t_j) \in V^{a_j}(0)]\Big)$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \sup_{|x|\leq a_{j-1}} P^{(n)}(t_j - t_{j-1},\ x,\ V^{a_j}(0))$$

$$\leq \frac{C}{2N} + \max_{1\leq j\leq N} \varepsilon(a_{j-1}, a_j) \leq 2\varepsilon$$

定理 6.5, (2) が示された。 q.e.d.

<u>定理 7.4 の証明</u>　定理 6.7 の (1), (2) が成り立つことを示せばよい。Banach 空间 $D^{(2)}$ において有界線型汎函数 $L_{n,x}f$, ($x\in R^m$, $1\leq n<\infty$, $f\in D^{(2)}$) を

$$L_{n,x} f = n\int P_n(x, dy)\ (f(y)-f(x))$$

によって定義する。定理の条件 (2) により,

$$\sup_{n,x} \| L_{n,x} f \| < \infty,\ \text{従って}\ \|L_{n,x}\| \leq C_0 < \infty$$

$$f(x) = \frac{|x|^2}{1+|x|^2},\quad f_x(y) = f(y-x)$$

とおき, n, x に無関係な C につき

$$|L_{n,x} f_x| \leq C_0 \|f_x\| = C_0\|f\| = C$$

故に

$$(7.6)\qquad \frac{a}{1+a}\, n\int_{|y-x|\geq a} P_n(x, dy) \leq C$$

$$(7.7)\qquad \frac{1}{1+a}\, n\int_{|y-x|\leq a} |y-x|^2\, P_n(x, dy) \leq C$$

$\varphi\in D^{(2)}$, $\varphi = 1\ (|x|\leq a)$, $=0\ (|x|\geq b)$, $f(x) = x^i\varphi(x)$, $f_x(y) = f(y-x)$ に対して同様な考えを適用すれば

$$C \geq n\left|\int P_n(x, dy)\ (y^i - x^i)\,\varphi(y-x)\right|$$

$$\geq n\left|\int_{|y-x|\leq a} P_n(x, dy)(y^i - x^i)\right| - nb\int_{|y-x|\geq a} P_n(x, dy)$$

これと (7.6) を組み合わせる x, n に無関係な C' につき

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(7.8) $$n\left|\int_{|y-x|\leq\varepsilon}(y-x)P_n(x,dy)\right|\leq C'$$

コンパクトな集合Kに対して $r_1<r_2$ を充分大きくとり，$K\subset V_{r_1}(0)$，$\varphi\in D^{(2)}$，$0\leq\varphi\leq 1$，$\varphi=0$ $(x\in V_r(0))$，$\varphi=1$ $(x\in V^{r_2}(0))$ならしめる。$I^{(n)}\varphi\to\tilde{I}^{(0)}\varphi$（$K$上で一様）だから，$\varepsilon$に対し$n$を大きくとれば

(7.9) $$\sup_{x\in K}\left|n\int P_n(x,dy)(\varphi(y)-\varphi(x))\right|$$

$$\leq\sup_{x\in K}\left|\tilde{I}^{(0)}\varphi(x)\right|+\varepsilon$$

r_2 を大きくとれば

$$\sup_{x\in K}\left|\tilde{I}^{(0)}\varphi(x)\right|=\sup_{x\in K}\left|\int\varphi(y)\Pi(x,dy)\right|\to 0\quad(r_1\to\infty)$$

(7.9) において $\varphi(x)=0$

$$\sup_{r_2\to\infty}\ \sup_{n,x\in K}\ nP_n(x,V^{r_2}(0))=0$$ q.e.d.

才8章　非斉次拡散過程の場合

マルコフ過程 $\xi(t)$ が非斉次の場合にも，半群の理論は適用できる。この場合には $\xi(t)$ を時間tと対にして，斉次マルコフ過程 $(t,\xi(t))$ が得られ，これに対しては前の章の理論が使える。ここでは比較的扱いやすい拡散型の非斉次マルコフ過程を対象とする。

§8.1. 非斉次拡散過程とその斉次化

以下において R^m の値を取るマルコフ過程 $\xi(t)$ のせん移確率函数 $P(t,x,s,A)$ が次の性質を持つものとする。

条件 PB^*:

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

1) $P(t,x,s,A)$はAを固定するとき変数 $x\in R^m$, $0\leq t<s\leq 1$ の結合に関して可測

2) すべての $\varepsilon>0$ に対し

$$\lim_{s-t\downarrow 0}\sup_{x} P(t,x,s,V^{\varepsilon}(x))=0$$

3) すべての $f\in C([0,1]\times R^m)$ に対し, $\tau>0$ を固定するとき

$$\int P(t,x,t+\tau,dy)f(t+\tau,y)\in C([0,1]\times R^m)$$

ここに $C([0,1]\times R^m)$は$[0,1]\times R^m$ 上の有界連続函数の全体

半群 U_τ は $f\in C([0,1]\times R^m)$に対し

$$(8.1)\qquad U_\tau f(t,x)\equiv\int f(t+\tau,y)P(t,x,t+\tau,dy)$$

によって定義され, 2)により強連続になる。この半群は$[0,1]\times R^m$における次の様な斉次マルコフ過程に対応する半群とも考えられる。

斉次マルコフ過程のせん移確率函数は

$$P^*(s,(t,x),(t+s,A))\equiv P(t,x,t+s,A)$$

もっと一般に $A^*\subset[0,1]\times R^m$ に対し

$$P^*(s,(t,x),A^*)\equiv P(t,x,t+s,p_{t+s}A^*)$$

ここに $p_tA^*\equiv\{x;(t,x)\in A^*\}$。

上の様にして, 各非斉次過程について一次元高い空間での斉次過程がある。汎函数 $f(x(\cdot))$ は $(t,x(t))$ に対する汎函数 $F(t,x(t))\equiv f(x(\cdot))$ として扱うことができる。この場合に連続性(J_1-連続やJ_U-連続等)は保存される。従って前章までに得られた結果を適用することができる。

極限過程に次の条件をつける。

<u>定義 8.1</u>　半群(8.1)の弱生成作用素 I^* が条件 D^* をみたす

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

というのは :

1) xに関し二回微分可能，tに関し微分可能で，更に函数自身と上述のすべての導函数が一様連続な函数$\varphi(t,x)$の全体を$D^{(2)*}$とするとき，$D^{(2)*}\subset \mathcal{D}(I^*)$

2) $\varphi\in D^{(2)*}$ に対し

(8.2)
$$I^*\varphi(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)+\sum\frac{1}{2}b_{ij}(t,x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}+\sum a_i(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$

3) $R(\lambda,I^*)D^{(2)*}\subset D^{(2)*}$

§8.2 収束定理に関する注意

せん移確率函数 $P^{(n)}(t,x,s,A)$ のマルコフ過程 $\xi_n(t)$ に対しマルコフ連鎖 $\eta^*_{n,k}$ を次の様に定義する。適当に $\Delta_n\to 0$ $(n\to\infty)$をとり

$$\eta_{n,k}\equiv\xi_n(k\Delta_n),\quad \eta^*_{n,k}\equiv(k\Delta_n,\eta_{n,k})$$

とおく。one-step のせん移確率は

$$P^*_n((t,x),A^*)=P^{(n)}(t,x,t+\Delta_n,P_{t+\Delta_n}A^*)$$

となる。

(8.3)
$$I^{(n)*}\varphi(t,x)\equiv\frac{1}{\Delta_n}\left\{\int\varphi(t+\Delta_n,y)P^{(n)}(t,x,t+\Delta_n,dy)-\varphi(t,x)\right\}$$

とおき，定理7.4をこの場合に書けば，

<u>注意8.2</u>　マルコフ過程 $\xi_0(t)$ の生成作用素 I^* が条件 D^* をみたし

$$\eta_n(t)\equiv\eta_{n,k}\qquad k\Delta_n\leq t<(k+1)\Delta_n$$

とおくとき，(1) $\sup_n\|I^{(n)*}\varphi(t,x)\|<\infty$，$I^{(n)*}\varphi(t,x)\to I^*\varphi(t,x)$（広義一様），$\forall\varphi\in D^{(2)*}$ (2) $P_{\xi_n(0)}\Rightarrow P_{\xi_0(0)}$ であれば，$F(\eta_n(t))$の分布は $F(\xi_0(t))$ の分布に収束する。特に $P_{\eta_n}\Rightarrow P_{\xi_0}$ である。更に (3) せん移確率 $P^{(n)}(t,x,s,V^\varepsilon(x))$が (4.9) をみた

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

せば $P\{|\xi_n(t)-\eta_n(t)|>\varepsilon\}\to 0$ だから $P_{\xi_n}\Rightarrow P_{\xi_0}$. 従って又定理 4.9 により $F(\xi_n(t))$ の分布は $F(\xi_0(t))$ の分布に収束する。

次の定理は非斉次マルコフ連鎖の *one-step* せん移確率の言葉で条件を書いたもので，定理 6.7 に対応する。

<u>定理 8.3</u>　$\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \cdots, \xi_{k_n}^{(n)}$ をマルコフ連鎖の列，そのせん移確率を $P^{(n)}(i, x, j, A)=P\{\xi_j^{(n)}\in A\mid \xi_i^{(n)}=x\}$, *one-step* のせん移確率を $P_k^{(n)}(x, A)=P^{(n)}(k-1, x, k, A)$ とし，マルコフ過程 $\xi(t)$ は条件 D^* をみたすとする。

$$b_{n,k}^{i,j}(x,\varepsilon)\equiv\int_{|x-y|\le\varepsilon}(x^i-y^i)(x^j-y^j)\,P_k^{(n)}(x,dy)$$

$$a_{n,k}^{i}(x,\varepsilon)\equiv\int_{|x-y|\le\varepsilon}(y^i-x^i)\,P_k^{(n)}(x,dy)$$

$$\lambda_{n,k}(x,\varepsilon)\equiv P_k^{(n)}(x, V^{\varepsilon}(x))$$

とおくとき，次の条件をみたす点 $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{k_n}^{(n)}<1$ と $\Delta_n\to 0$ が存在することを仮定する：

(1) 各 $\varepsilon>0$ に対し，t に関し一様に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\le t_k^{(n)}\le t+\Delta_n}\sup_{x\in R^{(m)}}\lambda_{n,k}(x\cdot\varepsilon)=0$$

(2) 各 $\varepsilon>0$ に対し，t, x に関して一様に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\le t_k^{(n)}\le t+\Delta_n}a_{n,k}^{i}(x,\varepsilon)=a_i(t,x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\le t_k^{(n)}\le t+\Delta_n}b_{n,k}^{i,j}(x,\varepsilon)=b_{ij}(t,x)$$

(3) 定数 K があって

$$\frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\le t_k^{(n)}\le t+\Delta_n}\sup_{|x'-x''|<h}\{|b_{n,k}^{i,j}(x',\varepsilon)-b_{n,k}^{ij}(x'',\varepsilon)|$$
$$+|a_{n,k}^{i}(x'-\varepsilon)-a_{n,k}^{i}(x'',\varepsilon)|\}\le Kh$$

(4) 定数 C があって

$$\sum_{t\le t_k^{(n)}\le t+\tau}\sup_{x\in R^m}(|b_{n,k}^{i,j}(x,\varepsilon)|+|a_{n,k}^{i}(x,\varepsilon)|)\le C\tau$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(5) $P_{\xi_0}(n) \Rightarrow P_{\xi(0)}$

このとき

$$\xi_n(t) \equiv \xi_k^{(n)} \qquad t_k^{(n)} \leq t < t_{k+1}^{(n)}$$

とおけば，$F(\xi_n(t))$ の分布は $F(\xi(t))$の分布に収束する。

<u>証明</u>　函数 $\varphi_\varepsilon(x,y)$ は各xに対しyについて $D^{(2)}$ に入り，$\varphi_\varepsilon(x,x) \geq \varphi_\varepsilon(x,y)$, $\varphi_\varepsilon(x,x) - \varphi_\varepsilon(x,y) \geq 1$ $(|x-y| \geq \varepsilon)$ とする。

$$P^{(n)}(i,x,j,V^\varepsilon(x)) \leq \int P^{(n)}(i,x,j,dy)(\varphi_\varepsilon(x,x)-\varphi_\varepsilon(x,y))$$

$$\leq \sum_{r=i}^{j-1} \int P^{(n)}(i,x,r,dz)\left|\int P_{r+1}^{(n)}(z,dy)(\varphi_\varepsilon(x,z)-\varphi_\varepsilon(x,y))\right|$$

$$\left|\int P_r^{(n)}(z,dy)(\varphi_\varepsilon(x,z)-\varphi_\varepsilon(x,y)\right|$$

$$\leq \left|\int_{|z-y|\geq\delta} P_r^{(n)}(z,dy)(\varphi_\varepsilon(x,z)-\varphi_\varepsilon(x,y))\right|$$

$$+\left|\int_{|z-y|<\delta} P_r^{(n)}(z,dy)\sum \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial z^i}(z^i-y^i)\right|$$

$$+\frac{1}{2}\left|\int_{|z-y|<\delta} P_r^{(n)}(z,dy)\sum \frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z^i\partial z^j}(z^i-y^i)(z^j-y^j)\right|$$

$$+\int_{|z-y|<\delta} P_r^{(n)}(z,dy)\Big|\varphi_\varepsilon(x,z)-\varphi_\varepsilon(x,y)+\sum \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial z^i}(y^i-z^i)$$

$$+\frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z^i\partial z^j}(y^i-z^i)(y^j-z^j)\Big|$$

$$\leq \|\varphi_\varepsilon\|\Big\{\lambda_{n,r}(z,\delta)+\sum_k \left|a_{n,r}^k(z,\delta)\right|+\frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{n,r}^{i,j}(z,\delta)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_k b_{n,r}^{k,k}(z,\delta)\Big\}$$

$\|\varphi_\varepsilon\|$ は７章で定義された $D^{(2)}$ のノルム。

従って各 $\varepsilon>0$ に対し N_ε があって

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(8.4) $$\sup_{|t_i^{(n)}-t_j^{(n)}|\leq h}\ \sup_{x\in R^m} P(i,x,j,V^{\varepsilon}(x)) = N_{\varepsilon}\, h$$

$\xi_n(t)$ のせん移確率函数を $\widetilde{P}^{(n)}(s,x,t,A)$ とすれば

$$\lim_{h\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{t-s\leq c}\ \sup_{x\in R^m} \widetilde{P}^{(m)}(s,x,t,V^{\varepsilon}(x)) = 0$$

即ち(4.9)をみたす。定理4.9により有限次元分布の収束を云えばよい。

$$\widetilde{\xi}_n(t) = \xi_n(k\Delta_n) \qquad k\Delta_n \leq t < (k+1)\Delta_n$$

とおけば(8.4)により

$$P\{|\widetilde{\xi}_n(t) - \xi_n(t)| > \varepsilon\} \leq N_{\varepsilon}\Delta_n$$

だから $\widetilde{\xi}_n(t)$ の有限次元分布が $\xi(t)$ のそれに収束することを示せばよい。そのために注意8.2を使う。$\varphi \in D^{(2)*}$ に対し

$$I^{(n)*}\varphi(t,x) = \frac{1}{\Delta_n}\int[\varphi(t+\Delta_n,y)-\varphi(t,y)]\,\widetilde{P}^{(n)}(t,x,t+\Delta_n,dy)$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\int[\varphi(t,y)-\varphi(t,x)]\,\widetilde{P}^{(n)}(t,x,t+\Delta_n,dy)$$

オ1項は $\partial\varphi/\partial t$ に広義一様収束する。

$$\text{オ2項} = \frac{1}{\Delta_n}\sum_{t\leq t_r^{(n)}\leq t+\Delta_n}\int \widetilde{P}^{(n)}(t,x,t_r^{(n)},dz)\int P_{r+1}^{(n)}(z,dy)(\varphi(t,y) - \varphi(t,z))$$

$$= \frac{1}{\Delta_n}\sum_{\prime\prime}\int \widetilde{P}^{(n)}(t,x,t_r^{(n)},dz)\left(\int_{|y-z|\leq\delta} + \int_{|y-z|>\delta}\right)$$

$$\times P_{r+1}^{(n)}(z,dy)(\varphi(t,y)-\varphi(t,z))$$

$$= I_1 + I_2$$

(I)より t, x に関し一様に $I_2 \to 0$.

$$I_1 = \frac{1}{\Delta_n}\sum\int \widetilde{P}^{(n)}(t,x,t_r^{(n)},dz)\int_{|y-z|\leq\delta} P_{r+1}^{(n)}(z,dy)$$

$$\times[\varphi(t,y)-\varphi(t,z)-\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z^i}(y^i-z^i)$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$-\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial z^j}(y^i-z^i)(y^j-z^j)]$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\sum\int\tilde{P}^{(n)}(t,x,t_r^{(n)},dz)\Big(\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z}a^i_{n,r+1}(z,\delta)$$

$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial z^j}b^{i,j}_{n,r+1}(z,\delta)\Big)$$

$$=\frac{1}{\Delta_n}\sum\int\tilde{P}^{(n)}(t,x,t_r^{(n)},dz)\int_{|y-z|\le\delta}\alpha_n(z,y,\delta)(y-z)^2$$

$$\times P^{(n)}_{r+1}(z,dy)$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\sum\int\tilde{P}^{(n)}(t,x,t_r^{(n)},dz)\Big(\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z^i}a^i_{n,r+1}(x,\delta)$$

$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial z^j}b^{i,j}_{n,r+1}(x,\delta)\Big)$$

$$+\frac{1}{\Delta_n}\sum\int\tilde{P}^{(n)}(t,x,t_r^{(n)},dz)\Big(\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z^i}\big(a^i_{n,r+1}(z,\delta)$$

$$-a^i_{n,r+1}(x,\delta)\big)$$

$$+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial z^j}\big(b^{i,j}_{n,r+1}(z,\delta)-b^{i,j}_{n,r+1}(x,\delta)\big)\Big)$$

$\alpha_n(z,y,\delta)$は広義一様に $\lim_{\delta\to 0}\alpha_n(z,y,\delta)=0$，従って最後の式のオ1項は条件 (2) により十分小。同様に（8.4）と条件 (3) によりオ3項も小さい。条件 (2) により任意のδに対し広義一様にオ2項 $\longrightarrow I^*\varphi(t,x)-\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)$。 q.e.d.

オ9章　応　用　例

§9.1　Wiener過程への収束

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$\eta_1, \eta_2, \cdots$ は独立確率変数列で同一分布 $\Phi(dx)$ を持ち $E(\eta_k) = 0$, $E(\eta_k^2)=1$ とする。斉次マルコフ連鎖 $\xi_{n,k} \equiv n^{-\frac{1}{2}}\sum_1^k \eta_j$ は我々の意味で Wiener 過程へ収束する。$\xi_{n,k}$ の one-step のせん移確率は

(9.1) $\quad P^{(n)}(x, A) = \Phi(\sqrt{n}(A \ominus x))$

こゝに $\sqrt{n}(A \ominus x) \equiv \{\sqrt{n}(y-x);\ y \in A\}$。

(9.2) $\quad \xi_n(t) \equiv \begin{cases} \xi_{n,k} & \frac{k}{n+1} \leq t < \frac{k+1}{n+1} \\ \xi_{n,n} & t = 1 \end{cases}$

とおく。$\xi_n(t)$ に定理 7.4 を適用する。

$$\int P^{(n)}(k-1, x, k, dy)\, f(y) = \int f(x+y)\, \Phi(\sqrt{n}\, dy)$$

だから (F) をみたす。$f \in D^{(2)}$ に対し

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(x) &= n \int P^{(n)}(x, dy)\,(f(y) - f(x)) \\ &= n \int (f(x+y) - f(x))\, \Phi(\sqrt{n}\, dy) \\ &= \int \left(f'(x)\sqrt{n}\, y + \frac{f''(x)}{2} y^2 + \frac{f''(x+\theta y) - f''(x)}{2}\, y^2 \right) \Phi(dy) \\ &\qquad\qquad \left(|\theta| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right. \\ &= \frac{f''(x}{2} + \int_{|y| \leq \varepsilon\sqrt{n}} + \int_{|y| > \varepsilon\sqrt{n}} \left(\frac{f''(x+\theta y) - f''(x)}{2}\, y^2 \right) \Phi(dy) \end{aligned}$$

$\sup_{|y| \leq \varepsilon} |f''(x+y) - f''(x)| \equiv C_\varepsilon(f) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

$\sup_x |f''(x)| \equiv K_f < \infty$ だから

$$\begin{aligned} \varlimsup_{n\to\infty} \left| I^{(n)} f(x) - \frac{f''(x)}{2} \right| &\leq \frac{1}{2} C_\varepsilon(f) + K_f \varlimsup_{n\to\infty} \int_{|y| > \varepsilon\sqrt{n}} y^2\, \Phi(dy) \\ &= \frac{1}{2} C_\varepsilon(f) \end{aligned}$$

従って Wiener 過程が条件 D をみたすことは明らかだから定理 7.4 により任意の J_1-連続汎函数 F に対して $F(\xi_n)$ の分布は $F(W)$ ($W(t)$は Wiener 過程) の分布に収束する。F として例えば,

$$F(x(\cdot)) \equiv \sup_{0 \leq t \leq 1} x(t)$$

ととれば良く知られている様に

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$P\{F(W) < x\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \qquad (x \geq 0)$$

だから[6]にある結果

$$P\left\{\max_{1\leq k\leq n} \sum_1^k \xi_{n,j} < x\sqrt{n}\right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

が出る。Fを色々特殊な形にとれば，Wiener 過程の汎函数の分布の計算によって，色々な極限定理が得られる。

この場合には空間 C_X の確率変数としても考えることが出来る。$\xi_n(t)$ のせん移確率函数を $\widetilde{P}^{(n)}(s,x,t,A)$ とすれば Chebychev の不等式により

$$P^{(n)}(s,x,t,V^{\varepsilon}(x)) = P\left\{\left|\sum_{k=1}^{[(n+1)(t-s)]} \frac{\eta_k}{\sqrt{n}}\right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$\leq \varepsilon^2\left(1+\frac{1}{n}\right)(t-s)$$

従って(4.9)をみたす。一方点$(0,0)$，$\left(\frac{1}{n+1}, \xi_{n,1}\right)$，$\cdots\left(\frac{n}{n+1}, \xi_{n,n}\right)$，$(1, \xi_{n,n})$ を結んだ折れ線を $\hat{\xi}_n(t) \in C_X$ とすれば，上のことより

$$P\{|\xi_n(t) - \hat{\xi}_n(t)| > \varepsilon\} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となり，更に Kolmogorov の不等式により

$$P\{\Delta_{J_U}(c, \xi_n(\cdot)) > \varepsilon\} = P\left\{\sup_{0<t<c}\left|\sum_{k=1}^{[(n+1)t]} \frac{\eta_k}{\sqrt{n}}\right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)c$$

となり，定理3.3′の注意により $\xi_n(\cdot)$ の C_X における分布族はコンパクトになる。前のことより $P_{\xi_n} \Rightarrow P_W$ 従って又 $P_{\hat{\xi}_n} \Rightarrow P_W$，或いは直接古典的な中心極限定理によって $P_{\hat{\xi}_n} \Rightarrow P_W$。以上のことより結局，$C_X$ 上の測度の意味で $\hat{\xi}_n$ はWに法則収束する。

§9.2 加法過程への収束

次の条件を満す確率変数列 $\eta_{n,1}, \cdots, \eta_{n,k_n}$ を考える。(1) 各行で独立で同一分布 $\Phi_n(dx)$ を持つ，(2) 極限的に無視可能，即ち

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le k_n} P\{|\eta_{n,k}| > \varepsilon\} = 0$$

斉次マルコフ連鎖 $\xi_{n,k} \equiv \sum_1^k \eta_{n,j}$, $\xi_{n,0} \equiv 0$ に対し

$$\xi_n(t) \equiv \begin{cases} \xi_{n,k} & k-1/k_n \le t < k/k_n \quad 1\le k\le k_n \\ \xi_{n,k_n} & t = 1 \end{cases}$$

とおく。$\xi(t)$ を $\xi(0)\equiv 0$ である様な斉次加法過程とし，$\xi(t)$ の分布を $G_t(dx)$ とする。このとき，任意の J_1-連続な汎函数に対し，$F(\xi_n)$ の分布が $F(\xi)$ の分布に収束するための必要十分條件は，ξ_{n,k_n} の分布が $G_1(dx)$ に収束することである。写像 $x(1)$: $K_{R^1} \to R^1$ は J_1-連続だから必要性は明らか。十分性を示す。[7] p.124 定理4によれば ξ_{n,k_n} の分布が $G_1(dx)$ に収束するための必要十分条件は，$n\to\infty$ のとき，

$$(9.3)\quad \begin{cases} k_n P\{\xi_{n,k} < x\} \Rightarrow n((-\infty, x)) & (x<0) \\ k_n P\{\xi_{n,k} > x\} \Rightarrow n((x, \infty)) & (x>0) \end{cases}$$

$$(9.4)\quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{n\to\infty} k_n \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, \Phi_n(dx)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} k_n \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, \Phi_n(dx) = \sigma^2$$

$$(9.5)\quad k_n \int_{|x|\le\tau} x\, \Phi_n(dx) \longrightarrow \gamma(\tau)$$

分布 $G_1(dx)$ は定数 σ^2, 函数 $\gamma(\tau)$, 測度 $n(dx)$ によって定義される無限分解可能な分布である。

一方斉次加法過程 $\xi(t)$ の生成作用素 I は $f\in D^{(2)}$ に対し ([10])

$$If(x) = \gamma f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \int \left(f(x+u) - f(x) - \frac{u}{1+u^2} f'(x)\right) n(du)$$

更に $R_\lambda(E) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} G_t(E)\, dt$ とおけば I の resolvent は

$$R(\lambda, I) f(x) = \int f(x+y)\, R_\lambda(dy)$$

だから $f\in D^{(2)}$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

$$\frac{d^2}{dx^2} R(\lambda, I) f(x) = \int \frac{d^2}{dx^2} f(x+y) R_\lambda(dy)$$

即ち $R(\lambda, I) D^{(2)} \subset D^{(2)}$ となって条件 (D) がみたされる。$I^{(n)} f(x) = k_n \int P_n(x, dy)(f(y) - f(x)) = k_n \int \Phi_n(dy)(f(x+y) - f(x))$ と I に対し収束条件 CII がみたされる。実際 (9.3) により

$$k_n \int P_n(x, dy) \psi(y-x) = k_n \int \Phi_n(dy) \psi(y)$$

$$\longrightarrow \int \psi(y) \, n(dy)$$

$$k_n \varphi''(x) \int (y-x)^2 \alpha_\varepsilon(y-x) P_n(x, dy)$$

$$= k_n \varphi''(x) \int y^2 \alpha_\varepsilon(y) \Phi_n(dy)$$

$$= k_n \varphi''(x) \left[\int y^2 \alpha_\varepsilon(y) \alpha_\delta(y) \Phi_n(dy) + \int y^2 \alpha_\varepsilon(y) \beta_\delta(y) \Phi_n(dy) \right]$$

(9.4) によりオ一項は δ を十分小さくとっておくと，$n \to \infty$ のときどれだけでも $\sigma^2 \varphi''(x)$ に近くなる（x には無関係）。オ二項の極限は，(9.3) によりどれだけでも $\varphi''(x) \int y^2 \alpha_\varepsilon(y) n(dy)$ に近い。

$$(9.6) \quad k_n \varphi'(x) \int \frac{y-x}{1+(y-x)^2} P_n(x, dy)$$

$$= k_n \varphi'(x) \int \frac{y}{1+y^2} \Phi_n(dy)$$

$$= k_n \varphi'(x) \int \frac{y}{1+y^2} \beta_\tau(y) \Phi_n(dy)$$

$$+ k_n \varphi'(x) \int y \, \alpha_\tau(y) \Phi_n(dy)$$

$$- k_n \varphi'(x) \int \frac{y^3}{1+y^2} \alpha_\tau(y) \Phi_n(dy)$$

一方 γ と $\gamma(\tau)$ の間には次の関係がある。

$$(9.7) \quad \gamma = \gamma(\tau) + \int_{|u| \geq \tau} \frac{u}{1+u^2} n(du) - \int_{|u| < \tau} \frac{u^3}{1+u^2} n(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

(9.3)により(9.6)の才一項は(9.7)の才二項に収束し，(9.5)により(9.6)の才二項は(9.7)の才一項に収束する。(9.6)(9.7)の才三項は共に小さいことが補題6.1の証明の中でと同様に示せる。結局収束条件CⅡが成り立つことがわかったので，補題6.2によりxにつき一様に $I^{(n)}\varphi(x)\to I\varphi(x)$, $\varphi\in D^{(2)}$。従って定理7.4により $F(\xi_n(t))$ の分布は $F(\xi(t))$ の分布に収束する。

§9.3 非斉次の場合

Maruyama [13] は Kolmogorov-Smirnov の定理を次の一般的な定理の応用例として示した。

マルコフ過程 $\xi_n(t)$ のせん移確率函数 $P^{(n)}(s,x,t,A)$が次の条件をみたす：

(1) $P^{(n)}(s,x,s+\Delta s, V^{\delta}(x)) = \eta(\Delta s, n, x)\Delta s$

(2) $\int_{|y-x|\le\delta}(y-x)P^{(n)}(s,x,s+\Delta s,dy) = a(s,x)\Delta s+\varepsilon(\Delta s,n,x)$
Δs

(3) $\int_{|y-x|\le\delta}(y-x)^2P^{(n)}(s,x,s+\Delta s,dy)=b^2(s,x)\Delta s+\varepsilon(\Delta s,n,x)\Delta s$

こゝに(A) $a(s,x)$, $b(s,x)$ は一様有界，(s,x)について連続，xについて二階微分可能で $|a_{xx}|+|b_{xx}|=0(|x|^k)$(或る$k>0$, $|x|\to\infty$)。(B)任意の$\delta>0$を定めたとき，$\varepsilon(\Delta s,n,x)$, $\eta(\Delta s,n,x)$は一様有界で

$$(9.8)\quad \begin{aligned} &|\eta(\Delta s,n,x)|\le\eta(\Delta s,n),\ \lim_{\Delta s\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \eta(\Delta s,n)=0 \\ &|\varepsilon(\Delta s,n,x)|\le\varepsilon(\Delta s,n)c(x),\ \lim_{\Delta s\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \varepsilon(\Delta s,n)=0 \end{aligned}$$

であれば $P_{\xi_n}\Rightarrow P_{\xi}$. マルコフ過程$\xi(t)$の生成作用素は，$\varphi\in D^{(2)*}$ に対し

$$I^*\varphi(t,x)=\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}+a(t,x)\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}+\frac{b^2(t,x)}{2}\cdot\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}$$

である。(A)の代りに $R(\lambda,I)D^{(2)*}\subset D^{(2)*}$ があり，(9.8)で $\Delta s\to 0$

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

の極限が s に関し一様であれば，本書の理論で取り扱える。$\Delta_n \to 0$ を $\eta(\Delta_n, n) \to 0$, $\varepsilon(\Delta_n, n) \to 0$ である様にとれば，$\tilde{\xi}^{(n)}(t) \equiv \xi^{(n)}(k\Delta_n)$ $(k\Delta_n \leqq t < (k+1)\Delta_n)$ に対し注意 8.2 を使って，$P_{\tilde{\xi}_n} \Rightarrow P_\xi$ が容易に示される。一方 (1) より (4.9) が示せる。それを使えば $P\{|\xi^{(n)}(t) - \tilde{\xi}^{(n)}(t)| > \varepsilon\} \to 0$ が云えて，$P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$。これと (4.9) により結局 $F(\xi_n)$ の分布が $F(\xi)$ の分布に収束する。

文　献　表

[1] M. D. Donsker : An invariance principle for certain probability limit theorems. Mem. Amer. Math. Soc. 6 (1951)

[2] J. L. Doob : Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems. Ann. Math. Stat. 20 (1949).

[3] J. L. Doob : Stochastic processes. (1953)

[4] E. B. Dynkin : Criteria for continuity and absence of second kind discontinuity of trajectories of Markov processes. Izv. A. N. SSSR. ser. math. 16 (1952) (in Russian)

[5] E. B. Dynkin : Infinitesimal operators of Markov processes. Theory of prob. and its application, I.1. (1956) (in Russian)

[6] P. Erdös and M. Kac : On certain limit theorems of the theory of probability. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946)

[7] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov : Limit distribution for sums of independent random variable. (English translation by K. L. Chung) (1954)

[8] E. Hille : Functional analysis and semi-groups. (1948)

[9] K. Ito : On stochastic differential equations. Mem. Amer.

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

Math. Soc. 4 (1951)

[10] 伊藤清 : 確率論 岩波現代数学 14 (1953)

[11] A. Ya. Khintchine : Asymptotishe Gesetze der Wahrsheinlichkeitsrechnung. (1933)

[12] J. R. Kinney : Continuity properties of sample functions of Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953)

[13] G. Maruyama : Continuous Markov processes and stochastic equations. Rend. Circolo Mat. Palermo, 4 (1955)

[14] Yu. V. Prohorov : Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. Theory of prob. and its appli. I, 2 (1956) (in Russian)

[15] A. V. Skorohod : Limit theorems for stochastic processes. Theory of prob. and its appli. I, 3 (1956) (in Russian)

[16] A. V. Skorohod : Limit theorems for Markov processes. Theory of prob. and its appli. III. 3. (1958) (in Russian).

印刷・市瀬梅寿・福岡市東箱崎原田2-12bb

Sem. on Probab.
Vol.4 1960年
P1-80

Seminar on Probability について

昨年10月確率論セミナーによって，“Seminar on Probability” vol. 1 が発行されましたが，その後もシリーズとして刊行を続け本書はその vol. 4 に当ります。

この度，矢野恒太氏記念会より，当確率論セミナーに対し，これら印刷物刊行等のために経費の補助金を頂きました。こゝにその御厚情に対し厚く御礼申上げます。早速本書の刊行費用の一部として使用致しました。

尚本シリーズの既刊及び近刊予定のものは下記の通りであります。

vol. 1	渡辺　毅著	可附番空間上のMarkov過程から導かれるMartin境界とその応用（既刊）
vol. 2	白尾恒吉著	確率論における強法則の精密化の一般論（既刊）
vol. 3	伊藤　清 渡辺信三 福島正俊 著	拡散過程（既刊）
vol. 4		本書
vol. 5	池田信行 上野　正 佐藤健一 田中　洋 著	多次元拡散過程の境界問題（近刊）
vol. 6	飛田武幸著	Gaussian processの表現とその応用

（vol. 1 は残部僅少のため新入会員以外にはおわけ致し兼ねます）

昭和35年7月

確率論セミナー事務局