Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 5

池田信行、上野 正、田中 洋、佐藤健一

多次元拡散過程の境界問題（上）

1960

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

目　次

下巻目次

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

まえがき

1次元のdiffusionは最近にいたって1次元のstate space上の連続なpathをもつMarkov過程として定義でき，これを決定するgeneratorも解析的に特徴づけられ，pathの行動との関係も明らかにされた．一般のMarkov過程，とくに多次元のdiffusionについて，このような，ある意味で最終的な解決を得ることは差当り問題にならない．

然しながら，以上によって明らかにされた事情，Countable statesのMarkov過程の研究，多次元Brown運動とPotentialとの関係が詳しく知られるようになったことから，研究上の問題点と指針とが以前にくらべてはるかにはっきりして来た．その結果この方向に沿っての研究が活発になって来たが，ここで報告するのもそうした試みのひとつである．

DをN次元空間のdomainとし，parabolic equation

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - A(t,x) \qquad x \in D$$

(1)
$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}(x)$$

$$+ c(x)\, u(x), \qquad c \le 0$$

があたえられたとする．このAとDとに対する適当な条件の下で，古典的な境界条件

$$\gamma(x)\, u(x) + \mu(x) \frac{\partial}{\partial n} u(x) = 0$$

$\gamma(x) \le 0$, $\mu(x) \ge 0$ （$\frac{\partial}{\partial n}$は内向き）
$x \in \partial D$

に対する（あるいは境界条件なしの）基本解 $p(t, x, y)$ で，

$$P(t, x, E) = \int_E p(t, x, y)\, dy$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

が$\bar{D}$上の遷移確率をあたえるものについて，その存在，一意性などが研究されて来た．所で同じ方程式（1）からこうして得られる遷移確率系に対応する markov 過程は，異った境界条件に対しても∂Dにつくまでの path の行動が一致していると考えられる．特に上の境界条件に対応するものと限らず，∂Dにつくまでの行動がこれらと一致する markov 過程を，"方程式(1)によって定まる diffusion" という．このような diffusion をすべて求めることと，その path の行動をしらべることとを目標において考えてみよう．

Feller [5] は一次元のばあい，上の問題の内，diffusion をすべて求める問題を次のような方針で解いた．すなわちこのような diffusion は$\bar{D}$上の連続函数の空間$C(\bar{D})$の subspace の上に Hille — 吉田の定理の条件をみたす半群を

$$T_t u(x) = \int_{\bar{D}} P(t, x, dy)\, u(y)$$

によって定める．generatar を$\mathfrak{G}$とすれば　$\mathfrak{G} u = \bar{A} u$，$u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$であろう。[1] 従って問題をとくには，このような半群をすべて求めればよい．$\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$がきまればよいから，問題は$\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$を特徴づけることに帰着する．この解決は，境界附近の A の行動によって境界点を 4 種類に分類し，両端の境界点の各組合せに対して$\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$を特徴づける条件，すなわち境界条件の候補をすべてもとめ，これに対して解を構成することによって行なわれた。[2] 多次元の diffusion でも原理的には同様で，そのばあい，完全な解決は，方程式（1）からきまる

1)，$\bar{A}$は A の closure．実は一次元ならば単に A でよい．

2)，これでこの方程式の境界における singularity が完全に処理された．とくに，従来は与えられた境界条件に対して解を構成して来たのに対し，"可能な境界条件" がすべて求められたという点は画期的な意義をもつと思われる．

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

diffusion を研究するのに最も適当な境界（これは与えられたAとDからきまる）を構成し，その境界点の性質をしらべ，構成された境界に対して可能な境界条件を確定することによって行われよう．こゝで云う境界の構成，および境界点の性質の研究とは，解析的には，*operator* A の *singularity*，あるいは∂Dの点の *singularity* の処理に関係したものであって，*Feller* の研究〔6.，7〕があり，また，*Martin* 境界〔22，36〕の構成は重要な *model* である．*Singularity* の処理という方向からの *approach* として *Hasminsky*〔9〕が発表されている．これと反対に境界と *operator* に *regularity* を仮定して事情をしらべる方向が考えられる．*Wentzell*〔37〕がその例であって，このプリントで扱っているのもこの範囲に属する．今少し具体的にのべよう．

Wentzell が扱った場合はA，∂Dが十分なめらかでAは∂Dの点でも *degenerate* しない．{T_t} が C($\bar{D}$) の上で強連続な *semigroup* となることを仮定すれば，境界条件の候補として次のものが得られる．（各項の性質は才1章§5参照）

$$Lu(x) = \sum_{ij=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial\xi^i\partial\xi^j} + \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial\xi^i}(x) + \gamma(x)u(x)$$

$$+\delta(x)Au(x) + \int_{\bar{D}}\left\{u(y) - u(x) - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial\xi^i}(x)\,\xi^i_x(y)\right\}$$

$$\nu_x(dy) = 0$$

しかも，とくにDが閉円板又は閉球であって，*diffusion* が *rotation* で不変ならば，（2）はこれを特徴づける条件になっていることが判る．我々が第3章で扱うのは，（2）の型の条件が与えられた時，これによってきまる *diffusion* を構成する方法である．問題を次の型の境界値問題に帰着させる[3)]

3)．こうした考え方は，微分方程式の方でも *Višik*〔35〕によって試みられていることを知った．

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(\alpha - A)u = 0$$
$$Lu = f \qquad f \text{ on } \partial D$$

のであるが，これは∂D上で与えられた integro-differential equation を解く問題におきかえられる．一次元の場合の Feller の解の構成法の延長であるが，この integro-differntial equation が解けるかどうかは，今の所個々の問題によっている．

一次元の diffusion は generator を定める scale と measure および境界条件とできまる．Ito-Mckean〔16〕は local time を用いて state spece の scale の変換と local な speed の変換とを一次元 Brown 運動の path にほどこすことによって，diffusion の path を構成した．[4] この変換は，generator を定めている上記の量から直観的にも明瞭な方法であたえられるから，Brown 運動の path の行動を既知とすれば，一次元 diffusion の path の行動が説明されたことになる．一般の場合にも，当面の可能性は別として，結論は同様と考えられ，位相的に不変な generator の表現や，上記のように scale の変換と speed の変換によって不変な process の class を確定すること[5]が問題になる．然しながら，一次元の場合と異って，基準となる process は Brown 運動だけではないし，境界の構造ははるかに複雑だからこれ以外の class の path の行動，また，Brown 運動も含めて境界附近での path の行動が詳しく判ることが同時に必要であって，現在いろいろな角度からの approach が行なわれている．

---

4)．このばあい境界からの jump のある case は除いて考えている．
5)．ここまで論ずれば最初の方程式(1)の解をそのまゝ論ずるという範囲は当然越えることになる．

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

i). Ito-Mckean [16] の一部と Mckean-Tanaka [24] の Brownian hitting measure をもつ diffusion の研究.

ii). 本尾 [25, 26] の2次元 diffusion の path の構成.

iii). Ito-Mckean [16] における境界点の singularity の確率論的翻訳と Hasminsky [9]

は、それぞれこれらに対応する例である. このプリントの4章と5章では境界附近での path の行動をしらべることを目標にしたが概略は次のとおりである.

3章で与えられた境界条件に対して解をもとめる際に現れる integro-differential operator は、よく知られた一次元加法過程の generator の形と酷似しており、実際これを含む方程式がとけると境界上に特殊な markov 過程の class が存在することが判る. その内特別なものを選んでみると、これが与えられた境界条件をみたす $\bar{D}$ 上の diffusion 粒子の境界上の軌跡であろうと予想される. このことは一般には証明できていないが方程式 (1) の A が $C(x) \equiv 0$ であって、境界条件が $\frac{\partial}{\partial n} u(x) = 0$ のばあいには、次の意味で完全に証明される. すなわち、一次元 diffusion のばあいと並行に"境界上の local time" なるものが定義され、その time scale で境界上の diffusion を記述したものが上記の"境界上の markov 過程"である.[6)] この事実の証明が4章の内容である. 現在の所、これは境界上の行動の記述であって境界の近傍での行動を明かにしたことにはなっていない. 簡単な境界条件に対応する境界上の local time を利用して複雑な境界条件に対応する path を確率論的に構成することなどに役立つことが予想される.

3章での解の構成法は解析的であって、そのまゝでは path の行動が境界条件にどのように対応するかは全く判らない.

---

6). Ueno [33, 34] Sato [30], Sato-Ueno [31] 参照

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

5章では場合を2次元とし，一般の領域を円板に帰着させ，確率論的なpathの構成を行ってこの事情をしらべる．方法はあらかじめ境界条件に対応する境界上のprocessを構成しておく点で原理的には3章と同じだが，これと反射壁のprocessとを組合せてpathをつくる．これによって境界附近のpathの行動をあるていど具体的にしることができる．[7)]

1章と2章は準備の章である．才一章はmarkov過程と半群の一般論からの準備に解の構成問題の解析的定式化をつけ加えた．第2章は古典的な境界条件に対応するdiffusionに関する事項をまとめた．これらの内容は本来の意味での"必要な"ことがらのほかに，常識と思われるような内容や，蛇足と感じられるかもしれない説明をつけ加えた．その点はこの前書きも同じことであるが，これははじめに述べたとおり，この分野が，最近になって新らしい見通しがひらけて来た分野であって，問題点と思われることを特に強調することや，基礎的なことがらをまとめておくことが，役に立つと考えたからである．[8)]（著者）

7). Ikeda [12]

8). シンポジウムアブストラクト[42]参照．

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

第1章　　第1章 Markov過程と楕円型 operator

§1 Markov過程の定義と遷移確率系

Sを局所compactで第二可算公理をみたすHausdorff空間とし、これに点∞を孤立点としてつけ加えたものをS^*とする。慣用の定義によればS^*の上で値をとるmarkov過程は、与えられた確率空間(Ω、B、P)の上で定義されたS^*—値確率変数$\{x(t), 0\leq t<\infty\}$の系であって特に条件つき確率について所謂markov性の条件が満足されているものをさす。[1)] このとき、$\{x(t)\}$に対してS^*上の確率測度の系$\{P(t, x, dy)\}$が存在してChapman—Kolmogorovの方程式を充たし、初期分布$\mu(\cdot)=P(x(0)\in\cdot)$と合わせて、$\{x(t)\}$の結合分布を表現することができる。

また、逆に、S^*上の確率分布$\mu(\cdot)$と、Chapman—Kolmogorovの方程式をみたし、可測性についての附帯条件をみたすS^*上の確率測度の系$\{P(t, x, dy)\}$があるとき、これと前述の対応関係にあるMarkov過程の存在することが、(すなわち、(Ω,B,P)、$\{x(t), 0\leq t<\infty\}$が存在することが)、Kolmogorovの拡張定理を用いて証明される。

この§では、このような定義と異なり、Ωをprocessのpathの空間でしかもいくつかの附帯的な性質をもつものにとり、Pの代わりに、xから出発したという条件の下での条件つき確率測度に相当する測度の系$\{P_x(\cdot)\}$を用いてMarkov過程を定義する。pathの連続性や、強Markov性などpathの行動について立入った議論をするためである。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

この場合、遷移確率系とMarov 過程との対応も同じではなく、このようなpathの空間に定義できるための条件が遷移確率系に対して要求されることになる。以下では準備として、Markov過程の定義およびMarkov過程と遷移確率系との対応について必要なことを証明なしにのべる。[2]

$\mathbb{B}(S)$および $\mathbb{B}(S^*)$をそれぞれ SおよびS^*の開集合全体を含む最小のBorel field とする。$T=[0\quad\infty]$をtime parameterの空間とし、TからS^*への可測なmappingをw、そのtにおける値を$w(t)$又は$X_t(w)$とかく。各wに対して$\sigma_\infty(w)$をつぎのように定義する。

$\sigma_\infty(w)=\quad\{t\geq 0 ; w(t)=\infty\}$、このような$t\in T$のあるとき

$\quad =+\infty \qquad\qquad$ 〃 のないとき

$\widetilde{W}$は次の条件をみたすwの全体とする。

$W(t)=\infty \qquad for\ t\geq\sigma_\infty(w)$

$W(t)$は各$t\in[0.\ \sigma_\infty(w))$において右連続かつ第一種不連続 $w\in\widetilde{W}$と、$t\in[0,+\infty]$とに対して stopped path w_t^- (時刻tの位置でstopさせたpath) および shifted path w_t^+ (時間tだけshift させたpoth) をつぎのように定義する。[3]

$$w_t^- \ : \quad w_t^-(s)=w\ (t\wedge s) \qquad 0\leq s<+\infty$$

$$\qquad\qquad =\infty \qquad\qquad s=+\infty$$

$$w_t^+ \ : \quad w_t^+(s)=w(t+s) \qquad 0\leq s\leq+\infty$$

$w\in\widetilde{W}$ならば w_t^-、$w_t^-\in W$なことは容易にわかる。Wを$\widetilde{W}$の部分集合，で

$w_t W$ならば$w_t^-, w_t^+ t W$, ${}^\forall t\in T$

1) 伊藤〔13〕p.303、J.L. Doob 〔1〕PP.80-81 参照。

2) 伊藤、渡辺、福島〔15〕を参照。

3) $t\wedge s = min(t, s)$、以下この記号は断りなしに用いる。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

となるものとする。[4)] $\mathbb{B}(W)$を$\{w \in W; w(t) \in A\}$, $t \in T$, $A \in \mathbb{B}(S)$全体を含む最小のBorel fieldとする。$w \to w_t^-$, $w \to w_t^+$は共にWからWへのmappingとして$\mathbb{B}(W)$可測である。従って$\{w \in W; w_t^- \in B\}$, $B \in \mathbb{B}(W)$全体は$\mathbb{B}$のBorel subfieldをなすからこれを$\mathbb{B}_t(W)$、または略に$\mathbb{B}_t$とかく。

$\{P_x(\cdot), x \in S^*\}$は$(W, \mathbb{B}(W))$上の確率測度の系でつぎの性質をみたすものとする。

(P.1) $P_x(B)$, $B \in \mathbb{B}(W)$, はxの函数として$\mathbb{B}(S^*)$可測

(P.2) $P_x(x_0(w) = x) = 1$ [5)]

(P.3) (Markov性) $B_1 \in \mathbb{B}_t$, $B_2 \in \mathbb{B}(W)$に対して

$$P_x(w \in B_1, w_t^+ \in B_2) = E_x(P_{x_t(w)}(B_2); B_1)$$

(こゝに $E_x(f(w); B) = \int_B f(w) P_x(dw)$とする)

定義 1.1 上のような S^*, W, $\mathbb{B}(W)$とその上の(P.1)―(P.3)をみたす確率測度の系$\{P_x, x \in S^*\}$があたえられたとき、Sの上にMarkov過程が与えられたと云い、これを $M = (W, \mathbb{B}(W), P_x; x \in S \cup \{\infty\})$とあらわす。

定義 1.2 Sの上のMarkov過程Mが与えられたときに

$$P(t, x, A) = P_x(x_t(w) \in A)$$

$t \in T$, $x \in S$, $A \in \mathbb{B}(S)$ とおき

$\{P(t, x, \cdot), t \in T, x \in S\}$をMの遷移確率系と呼ぶ。

Proposition 1.1.[6)] Markov過程Mの遷移確率度

---

4) 例えばWとして$\sigma_\infty(w)$以前では連続なpathの全体とえらぶ場合もある。

5) 正確には$P_x(\{w; x_0(w) = x\}) = 1$, 以下$M = \{w$: 条件$\nu$をみたす$\}$に対して$P_x(M)$の代りに$P_x(\nu)$とかくことがある。

6) 証明は伊藤, 渡辺, 福島〔15〕P.P.4－5をみよ。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

はつぎの性質をもつ

(1.1) $P(t, x, A)$ は A について $(S, \mathbb{B}(S))$ 上の測度であって $0 \leq P(t, x, S) \leq 1$

(1.2) $P(t, x, A)$ は x の函数として $\mathbb{B}(S)$ 可測

(1.3) (Chapman－Kolmogorov の方程式)
$P(t+s, x, A) = \int_S P(t, x, dy) P(s, y, A)$

(1.4) x を含む任意の開集合 $U(x)$ に対して
$\lim P(t, x, U(x)) = 1$

(1.5) A^n を S の n 重直積空間の可測集合とすれば $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し
$P_x((x_{t_1}(w), x_{t_2}(w), \cdots, x_{t_n}(w)) \in A^n)$
$= \int_{A^n} \cdots \int P(t_1, x, dx_1) P(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \cdots \cdots P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n)$

逆に $\{P(t, x, \cdot)\}$ があるとき対応する Markov 過程の存在を示す問題については、いくつかの十分条件が研究されているが，つぎにそのひとつをあげる。

定理 1.1. 「S を Compact な距離空間とする。S の上に条件 (1.1)──(1.3) のほか、任意の $\varepsilon > 0$ に対し

(1.6) $\limsup_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} (1 - P(t, x, U_\varepsilon(x))) = 0$[7)]

が成り立つような測度の系 $\{P(t, x, \cdot);\ t \in T,\ x \in S\}$ が与えられる[8)]と、これを遷移確率にもつような S の上の Markov 過程 M が存在する。W は $\widetilde{W}$ に等しくとればよい。」

(S* は完備距離空間と考えられるから、
$P(t, x, \{\infty\}) = 1 - P(t, x, S)$ とおいて
$P(t, x, \cdot)$ を S^* の上の確率測度の系と考え、丸山、十時

7) $U_\varepsilon(x)$ は x の ε 近傍。

8) $P(t, x, \cdot)$ がこの定理の条件をみたすためには、(1.1)－(1.4) と (2.2) をみたせば十分である。(Th. 2.1 参照)

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

〔23〕pp. 33－41の結果を用いればよい。∞を*trap*にとってよいことは Markov 性と path の右連続性から分る。)

$P(t, x, A)$ が条件(1.1)よりも強く

(1.7) Aに関し $(S, \mathbb{B}(S))$ の上の確率測度
即ち $P(t, x, S) = 1$

なる条件をみたす時, 連続な *path* の Markov過程を与える十分条件として次の定理をあげる。

W_c を W の部分集合で, 次のような条件をみたす w の全体とする。すなわち, $w(\circ) \in S$ ならば $\sigma_\infty(w) = \infty$ で, $w(t)$ は $t \in [0, +\infty]$ に関し連続。

定理 1.2 [9] S を Compact な距離空間とする。S の上に条件(1.7), (1.2), (1.3)のほか

(1.8) $\displaystyle \lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} \frac{1}{t}(1 - P(t, x, U_\varepsilon(x))) = 0$

を満たすような測度の系 $\{P(t, x, \cdot);\ t \in T,\ x \in S\}$ が与えられると, S の上の Markov 過程 $\mathbb{M} = (W_c, \mathbb{B}(W_c), P_x: x \in S \cup \{\infty\})$ でこれを遷移確率にもつようなものが存在する。⊥

注意 1°. 同一の遷移確率系をもつ Markov 過程は一意的かどうかが問題になる。もし二つの Markov 過程 $\{W_i, \mathbb{B}(W_i), P_x^i: x \in S \cup \{\infty\}\}$ $i = 1, 2$ が対応していたとすると, これらは共に $P(t, x, A)$ と(1.5)の関係にあるから, 結合分布を問題にする限りでは同じものと見なしてよいが, W のとり方は一意的でないから一意性は証明できない。特に $W_1 = W_2$ であれば一意性が証明できる。[10]

2°. 定理 1.2 では(1.7), (1.2), (1.3) (1.8)を仮定したが, 実は(1.1), (1.2), (1.3), (1.8)から

---

9) 証明は E. Nelson 〔27〕にある。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

(1.7)が云える。それをいうには、$P(t_0, x_0, X) = 1-h$, $h>0$ なるt_0, x_0が存在したとして矛盾を出す。

(1.8)により、$\eta = \frac{h}{4t_0}$ に対し $0 < {}^{\exists}\delta \leq t_0$ があって

$1-P(s, y, S) \leq \eta s$, $s<\delta$, $y \in S$ である。

任意のtに対し(1.3)により

$$0 \leq P(t, x_0, S) - P(t+s, x_0, S)$$
$$= \int_S (1-P(s, y, S))P(t, x_0, dy)$$
$$\leq \eta s \leq \eta\delta, \quad 0 \leq s < \delta,$$

従って $0 < {}^{\forall}t < t_0$ に対し

$$P(t, x_0, X) - P(t_0, x_0, X) \leq \eta\delta\left(\frac{t_0-t}{\delta}+1\right)$$
$$\leq 2\eta t_0 \leq \frac{h}{2}$$

故に$P(t, x_0, X) \leq 1-\frac{h}{2}$であるが、これは(1.8)と矛盾する。[11]

10)伊藤，渡辺，福島，〔15〕P.6

11)この証明は観見茂氏による。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

§2 Markov 過程と半群の理論

B（S）をS上の有界可測函数の全体、C（S）をS上の有界連続函数の全体とする。これらは共にノルム $\|f\| = \sup_{x\in S}|f(x)|$ によってBanach 空間を作る。

$\{P(t, x, A)\}$ をSの上のMarkov 過程の遷移確率系とするとき、

(2.1) $\quad T_t f(x) = \int_S P(t, x, dy) f(y)$

とおくと、T_t は B（S）上の非負（$f \geq 0$ ならば $T_t f \geq 0$）、加法的でノルム $\|T_t\| = \|T_t 1\|$ が ≤ 1 なるoperator であって、$\{T_t\}$ はtをパラメーターとして半群をつくることが判る。即ち、$T_t T_s = T_{t+s}$, $t, s \geq 0$ が成り立つ。

もしも $P(t, x, dy)$ が

任意の $f \in C(S)$ と $t \in T$ に対して

(2.2) $$\lim_{y\to x}\int_S P(t, y, dz) f(z) = \int_S P(t, x, dz) f(z)$$

をみたすならば、$\{T_t\}$ はC（S）上の半群と考えることが出来る。この§では、逆に、C（S）上の半群に対してMarkov 過程が対応するための条件をあげ、半群に関するHille－吉田の定理をのべる。

<u>Lemma 2.1.</u> Sをcompactとする。TがC（S）上の非負、加法的汎函数であれば、S上に有界測度P（・）が存在して ⑦ $Tf = \int_S P(dx) f(x)$, $f \in C(S)$ と表される。このようなP（・）は唯一つに限る。

（存在は、伊藤〔13〕P.384 参照、SがCompact のときの一意性は容易にわかる）

このことから次の結果が得られる。

<u>定理2.1</u> Sをcompactとする。$\{T_t, t \geq 0\}$ がC（S）上の非負、加法的、ノルムが ≤ 1 のoperatorの半群であって、$t = 0$ で強連続ならば、すなわち、条件

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

(2.3) $T_t : C(S) \longrightarrow C(S),\quad t \ge 0.$

(2.4) $T_t(af+bg) = aT_tf + bT_tg$

(2.5) $f \ge 0$ ならば $T_tf \ge 0$

(2.6) $T_t 1 \le 1$

(2.7) $T_{t+s} = T_t T_s$, T_0 = *identity operator*

(2.8) $T_tf \longrightarrow f \quad (t \quad 0)$[1]

をみたすならば、S上に条件(1.1)，(1.2)，(1.3)(1.6)および(2.2)をみたす$\{P(t,x,dy)\}$が唯ひとつ存在して$T_t f$は(2.1)で表される。

逆にS上に(1.1)　(1.4)および(2.2)をみたす$\{P(t,x,dy)\}$があれば、T_tfを(2.1)によって定義するとき$\{T_t\}$は条件(2.3)—(2.8)をみたす。」

（T_tと$P(t,x,\cdot)$との1対1対応は*Lemma* 2.1に基く。問題になる性質は、定理の前半で$P(t,x,dy)$が(1.6)をみたすことと、後半でT_tが(2.8)をみたすことであるが、前者は、$f\in C(S)$をx_0の近傍Uで1、$U_{\epsilon/2}(x_0)$の外で0、全体で$0\le f\le 1$にとると $f(y)\le \chi_{U_\epsilon(x)}(y)$, $x\in U$になることに注意し、fに(2.8)を適用すると
$\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in U}(1-P(t,x,U_\epsilon(x)))=0$ が分る。あとはSの*compact*性を使えばよい。後者は(1.4)から性質

(2.9) $\int_S P(t,x,dy)f(y) \to f(x)\ (t\downarrow 0),\ f\in C(S), x\in S$

を導く。これは$T_t \to I$(弱)を意味する。ところがこれと他の性質(2.5)—(2.7)を合せると*Dunford*の定理によって$T_t \to I$(強)すなわち(2.8)が出来る。伊藤[14] pp.99—103，吉田[39] p.262を参照。）

---

1) $C(S)$のノルムでの収束の意味。すなわち$\|T_tf-f\|\to 0$
(2.10)，(2.21)等も同様。

2) $\chi_E(y)$ は集合Eの *indicator function* を表す。以下この記号は断りなしに用いる。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

Corollary Sがcompactとする。$C(S)$上に(2.3)—(2.8)をみたす$\{T_t, t \geq 0\}$があればS上のMarkov過程Mが存在して$T_t f$はその遷移確率によって(2.1)式で表される。」

次にBanach空間上の半群に関するHille—吉田の定理を応用し易い形で述べる。[3)]

定理 2.2 $\{T_t, t \geq 0\}$を(2.3)—(2.8)をみたす$C(S)$上の半群とする。

$$(2.10) \quad \lim_{t \to 0} \frac{T_t f - f}{t} = \mathfrak{G} f$$

の左辺が収束するようなfに対し、この極限を$\mathfrak{G} f$と定義するとき、$\mathfrak{G}$のdomainを$\mathcal{D}(\mathfrak{G})$とかくと

(2.11) $\mathcal{D}(\mathfrak{G})$は$C(S)$内でdenseな部分空間であって$\mathfrak{G}$は明らかに、加法的であり、

(2.12) $(\alpha - \mathfrak{G}) : f \in \mathcal{D}(\mathfrak{G}) \to (\alpha - \mathfrak{G}) f \in C(S)$

は各$\alpha > 0$に対して1対1かつontoなmappingである。

従って$(\alpha - \mathfrak{G})^{-1}$が$C(S)$で定義できるが、これに対して

(2.13) $f \geq 0$ならば$(\alpha - \mathfrak{G})^{-1} f \geq 0$, $f \in C(S)$

(2.14) $(\alpha - \mathfrak{G})^{-1} 1 \leq \frac{1}{\alpha}$

$\mathfrak{G}$を$\{T_t\}$のgeneratorとよぶ。

逆に$C(S)$において条件(2.11)—(2.14)をみたす加法的なoperator $\mathfrak{G}$が存在するならば、$C(S)$上に(2.3)—(2.8)をみたす半群$\{T_t\}$が唯ひとつ存在して$\mathfrak{G}$はそのgeneratorである。[4)]」

この定理で得られたoperator $(\alpha - \mathfrak{G})^{-1}$はsemigroupのresolvent G_αである。すなわち、次のものと一致する。

$$(2.15) \quad G_\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f(x) dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_S P(t, x, dy) f(y).$$

上の定理を$\{G_\alpha\}$のことばでのべておく。

注(3) 4)は次頁参照。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

<u>*Corollary*</u>. $C(S)$に対し次の条件をみたす$\{G_\alpha, \alpha>0\}$のの系が存在したとする。

(2.16) G_α : $C(S) \to C(S)$

(2.17) $G_\alpha(af+bg) = aG_\alpha f + bG_\alpha g$

(2.18) $f \geqq 0$ならば $G_\alpha f \geqq 0$

(2.19) $G_\alpha 1 \leqq \frac{1}{\alpha}$

(2.20) $G_\alpha - G_\beta + (\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta = 0$

(2.21) $\alpha G_\alpha f \to f \quad (\alpha \to \infty)$

このとき、$C(S)$上に(2、3)−(2、8)をみたす半群が存在し G_α はこれと(2、15)の関係にある。このような半群は唯一つに限る。

逆に$C(S)$上に(2、3)−(2、8)をみたす半群があれば、(2、15)によってG_αを定義すると、G_αは(2.16)−(2.21)をみたす。」

<u>注意</u> (2、20)からG_αの*range*はαに関係しない。これを$\mathcal{R}$とかくことにすると

(2.21)は、$\mathcal{R}$が$C(S)$内で*dense*という条件でおきかえてよい。

<u>定義 2.1</u> S上の*Markov*過程$\mathbf{M}$があって、その遷移確率系から定まるT_tが$C(S)$上の半群として(2.3)−(2.8)をみたすとき$\{T_t\}$の*generator*を$\mathbf{M}$の*generator*と呼ぶ。」

<u>注意</u> 1° $\{T_t\}$、$\{G_\alpha\}$をもっぱら$P(t, x, dy)$によって定義したが、$f \in B(S)$をS^*上定義され、点∞では0をとるS^*上の函数と同一視することにすれば

$$T_t f(x) = E_x(f(x_t)),$$

$$G_\alpha f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right)$$

であることは、*Fubini*の定理からすぐに判る。

2° こゝであつかった半群の$t=0$における強連続性は強い制約であることを注意しておく。例えば吸収壁をもつ

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

Brown 運動はこの性質をみたさない。

3° T_t が必ずしも(2.3), (2.8)をみたさない時には generator の定義にはいくつかのやり方がある。
例えば次のようにする。
(2.15) によって定義した G_α はいつも(2.17)—(2.20)をみたすが、更に(2.16)をもみたす場合には G_α は C(S)の上の operator として1対1である。
これは (2.9) が成り立つことから分る。従って $\alpha - G_\alpha^{-1}$ が定義され、α によらない。これをMの generator とする。
この定義は、定義2.1の拡張になっている。

---

3) もとの定理は一般の Banach 空間に対して定式化してある。Hill〔10〕, YoSida〔38〕参照。伊藤〔14〕, 吉田〔39〕〔40〕にも証明がのっている。

4) (2.12)—(2.14)は十分大きな任意の α に対して成り立てば十分である。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

§3 強Markov性とDynkinの公式[1]

Markov過程$\mathbb{M}$が与えられたとし、$\sigma(w)$はWに定義され$T=[0,+\infty]$で値をとる$\mathbb{B}$可測函数とする。σが次の條件をみたす時 Markov time という。

$$\{ w ; \sigma(w) < t \} \in \mathbb{B}_t \quad \text{for} \quad t \geq 0$$

このとき、stopped path w_σ^-, shifted path w_σ^+ を§1と並行に

$$w_\sigma^-(t) = w(t \wedge \sigma(w)) \qquad 0 \leq t < +\infty$$
$$= +\infty \qquad t = +\infty$$
$$w_\sigma^+(t) = w(t + \sigma(w)) \qquad 0 \leq t \leq +\infty$$

と定義すると $w \to w_\sigma^-$ 及び $w \to w_\sigma^+$ はWからWへのmappingとして$(\mathbb{B}, \mathbb{B})$可測なことが証明できる。従って、特に$\{ w ; w_\sigma^- \in B \}$, $B \in \mathbb{B}$ の全体は$\mathbb{B}$のBorel subfieldをなすからこれを$\mathbb{B}_\sigma$とおく。また$\mathbb{B}_{\sigma+} = \bigcap_n \mathbb{B}_{\sigma+\frac{1}{n}}$と記す。これに対して$\sigma(w)$および$x_{\sigma(w)}(w)$は$\mathbb{B}_{\sigma+}$可測なことが証明できる。

以上を準備として§1,(P.3)で各時間tに対して要求したMarkov性を、randomな時間であるMarkov timeに対しても問題にする。

定義3.1. Markov過程$\mathbb{M}$が次の性質をもつとき、強Markov性をもつという。任意のMarkov time σと、$B_1 \in \mathbb{B}_{\sigma+}$, $B_2 \in \mathbb{B}(W)$とに対して

$$P_x(w \in B_1,\ w_\sigma^+ \in B_2) = E_x(P_{x_{\sigma(w)}}(B_2) ; B_1) 」$$

---

1) この§に述べることの証明は伊藤・渡辺・福島〔 〕PP.18−26を参照、

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

Markov 過程が強 Markov 性をもつための十分條件のひとつとして

定理3.1 Markov 過程 $\mathbb{M}$ の遷移確率系が（2.2）をみたすならば $\mathbb{M}$ は強 Markov 性をもつ。」

$\mathfrak{G}$ を定義.2.1、で定義した $\mathbb{M}$ の generator とすると、

定理3.2 （Dynkin） $\mathbb{M}$ が強 Markov 性をもち，σ が Markov time である時

$$(3.1)\quad E_x(e^{-\alpha\sigma}f(x_\sigma)) - f(x) = -E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t}(\alpha - \mathfrak{G})f(x_t)\,dt\right),$$

$f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$，$\alpha > 0$，但し f は ∞ で 0 となる S^* 上の函数と考える。

$E_x(\sigma) < +\infty$ であれば

$$(3.2)\quad E_x(f(x_\sigma)) - f(x) = E_x\left(\int_0^\sigma \mathfrak{G}f(x_t)\,dt\right),\ f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})」$$

S の閉部分集合 U に対し、

$\tau_U(w) = \inf\{t \geq 0;\ x_t(w) \notin U\}$ は Markov time であり，上の定理を応用して次の定理を得る。

定理3.3 （Dynkin） $\mathbb{M}$ は強 Markov 性をもつとする。U を x の閉近傍とする時

$$(3.3)\quad \mathfrak{G}f(x) = \lim_{U\downarrow\{x\}} \frac{E_x(f(x_{\tau_U})) - f(x)}{E_x(\tau_U)},\ f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}),$$

たゞし f は前定理同様 S^* に拡張定義されたと考える。また，$E_x(\tau_U) = \infty$ のときは $\dfrac{1}{E_x(\tau_U)} = 0$ と規約しておく。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

特にSが compact のばあいは，(3.3)の右辺がすべてのxに対して存在してxの連続函数になるような$f \in C(S)$の全体は$\mathcal{D}(\mathfrak{G})$と一致する。従ってこのばあいには(3.3)によって generator が完全に特徴づけられる。⊥

注意　§2 注意 3° で述べたように generator を定義した場合にも，定理 3.1 および 3.2 は成り立つ。

§4. 拡散方程式に対する解（问題の定式化）

"与えられた拡散方程式できまる Markov 過程"をすべて求めることは，今の所極めて困難である。そこで場合を限定しさしあたって解を得やすい形に定式化して研究が行われている。こゝでは §2 でのべた半群の理論を基礎に定式化しよう。

R^N を N次元 Euclid 空间とし，点xの座標を$(x^1, \cdots, x^N)$と表す。[1] DはR^Nの有界領域でDの境界∂Dは有限個の連結成分から成りその各々は N-1次元のC^3級超曲面とする。[2] すなわち，∂D上の任意の点x_0に対しある近傍$U(x_0)$にC^3級局所座標[3] $(\tilde{x}^i)$が存在して次の条件をみたすとする。

(4.1)　$\partial D \cap U(x_0)$は$\tilde{x}^N = 0$で表され，$D \cap U(x_0)$は$\tilde{x}^N > 0$で表される。

$\bar{D}$上の函数uの境界点$x_0 \in \partial D$における偏微分の意味は次のように定める。すなわち，

---

1) 以下，第4章までの議論はR^Nの代りに N次元C^∞級微分多様体をとってもすべて成立する。

2) この章の結果を得るためには，C^2級で十分である。

3) Euclid 空间の座標(x^i)から$(\tilde{x}^i)$への変換を表す函数およびその逆がC^3級であるような局所座標。

$\frac{\partial u}{\partial x^i}(x_0) = \alpha_i$, $i = 1, \cdots\cdots, N$ とは

$$u(x) = u(x_0) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (x^i - x_0^i) + o\left(\sum_{i=1}^{N} |x^i - x_0^i|\right)$$

が $x \in U(x_0) \cap \bar{D}$ に対して成り立つこととする。ここに $U(x_0)$ は x_0 のある近傍，$\bar{D}$ は D の closure である。$\frac{\partial u}{\partial x^i}(x_0)$ は一意的である。これで $\bar{D}$ の各点で偏微分の意味が定まるから，$C^n(\bar{D})$，$C^n(\partial D)$ をそれぞれ $\bar{D}$ ∂D で定義され n 階偏導函数がすべて存在して連続であるような函数[4] の全体とする。$C(\bar{D})$，$C(\partial D)$ はそれぞれ $\bar{D}$，∂D 上の連続函数の全体とする。

$\bar{D}$ 上に拡散方程式

$$(4.2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = A u(t, x)$$

$$(4.3) \qquad A u(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) + c(x) u(x)$$

が与えられたとする。こゝに $a^{ij}(x)$，$b^i(x)$，$c(x)$ は $\bar{D}$ 上の連続函数であって $\{a^{ij}(x)\}$ は各点 $x \in \bar{D}$ において対称かつ positive definite であり，$c(x) \leq 0$ とする。

Proposition 4.1 u を D で C^2 級とする。点 $x_0 \in D$ で u が極大値をとれば

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \leq 0 \quad \text{である。}$$

証明 任意の vector $X = (X^1, \cdots\cdots, X^N)$ に対し正数 θ を十分小さくとり $x = x_0 + \theta X = (x_0^1 + \theta X^1, \cdots\cdots, x_0^N + \theta X^N)$

4) これを，$\bar{D}$（または ∂D）で C^n 級の函数という。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

とする。$\frac{\partial u}{\partial x^i}(x_0)=0$ であるから

$$0 \geq u(x)-u(x_0)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \leq 0$$

である。

証明 任意の vector $X=(X^1,\cdots\cdots,X^N)$ に対し正数 θ を十分小さくとり

$$x = x_0 + \theta X = (x_0^1+\theta X^1,\cdots\cdots, x_0^N+\theta X^N)$$

とする。$\frac{\partial u}{\partial x^i}(x_0)=0$ であるから

$$0 \geq u(x)-u(x_0)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\theta^2 X^i X^j \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x_0+\theta' X),$$

$0<{}^{\exists}\theta'<\theta$. 両辺を θ^2 で割ってから $\theta\downarrow 0$ とすると $\sum_{i,j=1}^{N} X^i X^j \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \leq 0$ を得る。即ち $\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\right\}$ は non-positive definite である。$\{a^{ij}(x_0)\}$ は positive definite であるから

$a^{ij}(x_0)=\sum_{k=1}^{N}\alpha^{ik}\alpha^{jk}$ と表され

$$\sum_{i,j} a^{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_k\left(\sum_{i,j}\alpha^{ik}\alpha^{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\right)\leq 0$$

である。⊥

Proposition 4.2 A を $C(\bar{D})$ の部分空間 $C^2(\bar{D})$ で定義され $C(\bar{D})$ 上で値をとる operator と見なす時，A の closure

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$\bar{A}$が存在する。[5)」

証明 (Wentzell [37]) $u_n \in \mathcal{D}(A) = C^2(\bar{D})$, $u_n \to 0$ かつ $Au_n \to v \in C(\bar{D})$ のとき $v = 0$ を示せばよい[6)]。

$$A^0 = \sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{とおけば}$$

$A^0 u_n \to v$ である。ある点 $x_0 \in D$ で $v(x_0) > 0$ とする。この時 $\varepsilon > 0$, $r > 0$, n_0 を, $A^0 u_n(x) > \varepsilon$ ($x \in U_r(x_0)$, $n > n_0$) にとれる。$\varphi(x) = (x - x_0)^2$, $\alpha = \sup_{x \in U_r(x_0)} |A^0 \varphi(x)| > 0$ とおき $u'_n = u_n(x) - \frac{\varepsilon}{\alpha}\varphi(x)$ とおくと

$$A^0 u'_n(x) = A^0 u_n(x) - \frac{\varepsilon}{\alpha} A^0 \varphi(x)$$

$$\geqq A^0 u_n(x) - \varepsilon > 0, \quad x \in U_r(x_0), \ n > n_0$$

である。従って Proposition 4.1 により u_n は $U_r(x_0)$ で極大値をとらない。故に

$$u_n(x_0) = u'_n(x_0) < \max_{x \notin U_\varepsilon(x_0)} u'_n(x)$$

$$\leqq \|u_n\| - \frac{\varepsilon r^2}{\alpha}$$

であり、これは $\|u_n\| \to 0$ に矛盾する。従って $v \leqq 0$

---

5) operator T が closed であるとは, $u_n \in \mathcal{D}(T)$ ($n = 1, 2, \cdots$), $u_n \to u$, $Tu_n \to v$ ならば必ず $u \in \mathcal{D}(T)$, $Tu = v$ となることである。operator T が operator S の closure であるとは, ① T は closed, ② $T \supset S$ (即ち, $\mathcal{D}(T) \supset \mathcal{D}(S)$ で, $\mathcal{D}(S)$ 上で S, T は同じ値をとる) ③ $U \supset S$ で U が closed ならば $U \supset T$, の3条件が満されることである. S が closed extension をもてば必ず closure をもつ。

6) $\exists u_n \in \mathcal{D}(A)$, $u_n \to u$ かつ $Au_n \to v$ なる時, $u \in \mathcal{D}(\bar{A})$, $\bar{A}u = v$ と定義すれば $\bar{A}$ が well-defined で A の closure になる。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

である。v の代りに $-v$ をとれば $v \geqq 0$ がいえるから，$v=0$.」

この $\bar{A}$ を用いて，方程式（4.2）の解を求める問題を次のように定式化する。定理2.1の条件をみたす $C(\bar{D})$ 上の半群であって，その generator $\mathfrak{G}$ の domain に属する函数 u に対しては $\mathfrak{G}u = \bar{A}u$ となっているものをすべてもとめること。ていねいにくり返せば

<u>問　題</u>　$C(\bar{D})$ 上の半群 $\{T_t\,;\ t \geqq 0\}$ で次の条件をみたすものをすべて求めること：

$u \geqq 0$ ならば $T_t u \geqq 0$,

$T_t 1 \leqq 1$,

$T_t u \to u \quad (t \downarrow 0)$,

$\{T_t\}$ の generator を $\mathfrak{G}$ とするとき

$u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ に対し $\mathfrak{G}u = \bar{A}u$ この定式化は次のような意味で，最初に与えた方式（4.2）の初期値問題の解を求めることになっている。すなわち，上のような $\{T_t\}$ が求まれば，$f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ に対し

$$\frac{1}{h}(T_{t+h}f - T_t f) - T_t \mathfrak{G} f$$
$$= T_t\left(\frac{T_h f - f}{h} - \mathfrak{G} f\right) \to 0, \quad h \downarrow 0$$

従って $T_t f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ かつ

$$\mathfrak{G} T_t f = T_t \mathfrak{G} f \tag{4.4}$$

である。故に $u(t, x) = T_t f(x)$ とおけば

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(4.5)\quad \lim_{h\downarrow 0}\frac{u(t+h,x)-u(t,x)}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left(T_{t+h}f(x)-T_t f(x)\right)$$

$$=\mathfrak{G}T_t f(x)=\bar{A}u(t,x)$$

であり（4.4）により $\bar{A}u(t,x)$ は t に関し連続であるから

$$(4.6)\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\bar{A}u(t,x)$$

である。しかも初期条件　$u(0,x)=f(x)$　をみたす。もし

$$(4.7)\quad \forall f\in C(\bar{D})\ \text{と}\ \forall t>0\ \text{に対し}\ T_t f\in\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$$

が成り立つならば，（4.5）はすべての f に対していえる。また $\mathfrak{G}T_t f=T_{\frac{t}{2}}\mathfrak{G}T_{\frac{t}{2}}f$ だから（4.6）もすべての f に対していえる。（4.7）が成り立つための条件については吉田〔4.1〕を参照。

注意　1°　この§で定式化した問題が完全にとけたとしてもこの§の最初でのべた方程式（4.2）で決まる Markov 過程のすべてを求める問題が解けたことにはならない。半群の $t=0$ での強連続性がとくに制約になっており，例えば次章で述べる吸収壁をもつ diffusion はこの条件をみたさない。

2°　A を直接用いず $\bar{A}$ をとったのは A が closed operator とはいえず，上のようにすっきりした形に定式化できないからである。一次元の場合には，微分 operator は closed になるから事情が簡単になる，なお，強連続な半群の generator は必ず closed operator であることを注意しておく。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

§5. Wentzell の境界条件

前節で定式化した問題では，半群の generator が，その domain に属する函数に対して何を対応させるかはすでに指定されているのだから，問題は，generator の domain をすべて特徴づけることに帰着する．実際にとくためには，domain を特徴づける条件として，まずどのような候補があり得るかを調べること，次にこの各候補のうち，実際に解が対応するものはどれだけかを確定するという手順が考えられる．一次元の場合，Feller は，このような方針で完全な結果を得た．A. D. Wentzell は〔37〕で多次元のばあいに条件の候補を求めて，以下に紹介するような結果を得た．

境界上の点 x_0 に対して，次のような函数 $\xi^i_{x_0}(x)$，$i=1, \cdots\cdots, N$ を定めておく．

(5.1) $\xi^i_{x_0}(x)$ は $\bar{D}$ 上の連続函数

(5.2) $(\xi^i_{x_0})$ は x_0 のある近傍 $U(x_0)$ で (4.1) をみたす C^3 級局所座標をなす．

(5.3) $\xi^i_{x_0}(x_0)=0, \quad i=1, \cdots\cdots, N.$

(5.4) $\xi^N_{x_0}(x) \geq 0, \quad x \in \bar{D}.$

(5.5) $\xi^N_{x_0}(x)+\sum_{i=1}^{N-1}(\xi^i_{x_0}(x))^2>0, \quad x \in \bar{D}-\{x_0\}$

の5つが条件である．特に

(5.6) $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0)=\dfrac{\partial u}{\partial \xi^N_{x_0}}(x_0)$

と記すことにする．これは普通の意味の法線微分とは必ずしも一致しないし，また，$\xi^N_{x_0}$ の定め方によっても異って来る．1)

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

なお、$\xi^i_{x_0}$ と記すべき所を、誤解の生じないばあい x_0 を省く。

定理5.1 §2の問題でのべた条件をみたす半群があるとし、そのgenerator を $\mathcal{G}$ とすれば、∂D 上の任意の点 x_0 と、$\bar{D}$ における x_0 のある近傍で C^2 級の $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$ に対して次の式が成立つ。

$$(5.7) \qquad Lu(x_0) = 0$$

たゞし、

$$(5.8) \qquad Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}(x_0)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x_0) \frac{\partial u}{\partial \xi^i}(x_0) + \gamma(x_0) u(x_0)$$

$$+ \delta(x_0) Au(x_0) + \mu(x_0) \frac{\partial u}{\partial n}(x_0)$$

$$+ \int_{\bar{D}} \left[u(y) - u(x_0) - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial u}{\partial \xi^i}(x_0) \xi^i(y) \right] \nu_{x_0}(dy)$$

$\{\alpha^{ij}(x_0)\}$ は対称な non-negative definite matrix.

$\beta^i(x_0)$, $\gamma(x_0)$, $\delta(x_0)$, $\mu(x_0)$ は実数で $\gamma(x_0)$, $\delta(x_0) \leq 0$.

$\mu(x_0) \geq 0$, $\nu_{x_0}(dy)$ は $\bar{D}$ 上の σ-finite な測度（もちろん non-negative）で U を x_0 の任意の近傍とすると

1) 後に才2章§1 Proposition 1.1 で述べるように局所座標をとりそれを用いて $\xi^i_{x_0}$ を定めておけば、$\frac{\partial}{\partial n}$ はある intrinsic な意味をもつ。それは"a^{ij} からきまる内向き法線微分"というべきものである。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

き、

$$(5.9)\quad \nu_{x_0}(\bar{D}-U) < \infty$$

$$(5.10)\quad \int_U \left[\xi^N(y)+\sum_{i=1}^{N-1}(\xi^i(y))^2\right]\nu_{x_0}(dy) < \infty$$

かつ $\nu_{x_0}(\{x_0\})=0$ である.

$\alpha^{ij}(x_0)=\beta^i(x_0)=\gamma(x_0)=\delta(x_0)=\mu(x_0)=0$ ならば,

$\nu_{x_0}(\bar{D}-\{x_0\})>0$.

この型の条件を Wentzell の境界条件とよぶ.

証　明　$u\in\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ かつ $\bar{D}$ における x_0 の近傍 $U_\varepsilon(x_0)\cap\bar{D}$ で C^2 級とする. $C(U_\varepsilon(x_0)\cap\bar{D})$ を考えると容易に分るように. $\bar{A}u(x_0)=Au(x_0)$ である.

$$Au(x_0)=\bar{A}u(x_0)=\mathcal{G}u(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T_t u(x_0))$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T_t u(x_0)-u(x_0))$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_{\bar{D}}u(x)\,P(t,x_0,dx)-u(x_0)\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\gamma(t)\,u(x_0)+\sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(t)\frac{\partial u}{\partial\xi^i}(x_0)\right.$$

$$\left.+\int_{\bar{D}}\frac{u(x)-u(x_0)-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial\xi^i}(x_0)\,\xi^i(x)}{\xi^N(x)+\sum_{i=1}^{N-1}(\xi^i(x))^2}\,l(t)\,\nu(t,dx)\right\}$$

こゝに $\gamma(t)=\frac{1}{t}(P(t,x_0,\bar{D})-1)$

$$\beta^i(t)=\int_{\bar{D}}\xi^i(x)\,P(t,x_0,dx)$$

$$l(t)=\frac{1}{t}\int_{\bar{D}}\left\{\xi^N(x)+\sum_{i=1}^{N-1}(\xi^i(x))^2\right\}P(t,x_0,dx)$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$\nu(t,E) = \frac{1}{t\cdot \ell(t)} \int \left\{ \xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1} (\xi^i(x))^2 \right\} P(t,x,dx)$$

とおいた，$\ell(t)=0$ の時は $\nu(t,\cdot)$ はどうとっておいてもよい。つぎに，

$$v(x) = \frac{u(x) - u(x_0) - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial u}{\partial \xi^i}(x_0)\,\xi^i(x)}{\xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1} (\xi^i(x))^2}$$

$$w(x) = \frac{\xi^N(x)}{\xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1} (\xi^i(x))^2}$$

$$z^{ij}(x) = \frac{\xi^i(x)\cdot\xi^j(x)}{\xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1} (\xi^i(x))^2} \qquad 1 \leq i,j \leq N-1,$$

とおき，$v(x)$ の分子の u を x_0 のまわりで展開すると，

$$v(x) = \frac{\xi^N(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}(x_0)\,\xi^i(x)\,\xi^j(x) + R(u,x)}{\xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1} (\xi^i(x))^2}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial n}(x_0)\,w(x) + \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}(x_0)\,z^{ij}(x) + \frac{R(u,x)}{\xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1}(\xi^i(x))^2}$$

こゝに $R(u,x)$ は $\bar{D}-\{x_0\}$ で連続であって x_0 の附近では $o\left(\xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1}(\xi^i(x))^2\right)$

従って $v(x)$ の最終項は $\bar{D}$ 上の連続函数に一意的に拡張できる。

$x \in \bar{D}-\{x_0\}$ に対して $\bar{D}-\{x_0\}$ から $\bar{D}\times R^{(N-1)^2+1}$ への

mapping

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$\varphi : x \to \varphi(x) = (x, w(x), z^{ij}(x)) \in \bar{D} \times R^{(N-1)^2+1}$$

を考え，$\bar{D}-\{x_0\}$ の像の $\bar{D} \times R^{(N-1)^2+1}$ での closure を K とする．あきらかに，$0 \leq w(x) \leq 1$，$|z^{ij}(x)| \leq 1$ が各 $x \in \bar{D}-\{x_0\}$ に対して成立つから K は compact である．

$$V(x, w, z^{ij}) = w\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{N-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}(x_0) z^{ij}$$

$$+ \frac{R(u, x)}{\xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1}(\xi_i(x))^2}$$

を，φ の $\bar{D}-\{x_0\}$ の image に入る $\zeta = (x, w, z^{ij})$ に対して定義する．この函数は，第1，2項が w，z^{ij} の1次結合であることと最終項が $\bar{D}$ 上の連続函数に一意的に拡張できることから，K上の連続函数に一意的に拡張できるから，これを改めて $V(\zeta)$，$\zeta \in K$ と定義する。定義から明らかに $v(x) = V(\varphi(x))$ である．K上に測度 $N(t, \cdot)$ を

$$N(t, E) = \nu(t, \varphi^{-1}(E)), \quad E \subset K$$

によって定義する。$N(t, \cdot)$ の全測度は $\nu(t, \cdot)$ のそれと同じく 1 である。これらによって $Au(x_0)$ を表せば，

$$Au(x_0) = \lim_{t\to 0}\left\{\gamma(t)u(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(t)\frac{\partial u}{\partial \xi^i}(x_0) + \int_K V(\zeta)\,l(t)N(t, d\zeta)\right\}$$

所で 0 に収束する t の減少列 $\{t_n\}$ を適当にえらんで，$N(t_n, d\zeta)$ の weak star limit[2)] として K 上の全測度 1 の測度 $N(d\zeta)$，$\pm\infty$ もゆるして，$\lim_{n\to\infty}\gamma(t_n)$，$\lim_{n\to\infty}\beta^i(t_n)$

2)．汎弱収束ともいう。今の場合，分布の収束と同じ．

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$\lim_{n\to\infty} l(t_n)$ が同時に存在するようにすることが出来る。もしこれらがすべて有限ならば、これらを $\gamma(x_0)$, $\beta^i(x_0)$ $l(x_0)$ とおけば、

$$Au(x_0) = \gamma(x_0)u(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x_0)\frac{\partial u}{\partial \xi^i}(x_0) + \int_K V(\xi)l(x_0)N(d\xi)$$

もしも $+\infty$ 又は $-\infty$ となるものがあるばあいは、$\{t_n\}$の部分列 $\{t_{n'}\}$ を適当にえらび $\{\gamma(t_{n'})\}$, $\{\beta^i(t_{n'})\}$, $\{l(t_{n'})\}$ の内のどれかひとつ適当なものを $\{\varepsilon_n\}$ とすると、 $\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma(t_{n'})}{|\varepsilon_n|}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^i(t_{n'})}{|\varepsilon_n|}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{l(t_{n'})}{|\varepsilon_n|}$ が有限に確定することが判る。これらを $\gamma(x_0)$, $\beta^i(x_0)$, $l(x_0)$ とおけば、

$$0 = \gamma(x_0)u(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x_0)\frac{\partial u}{\partial \xi^i}(x_0) + l(x_0)\int_K V(\xi)N(d\xi)$$

以上ふたつの Case をまとめて

$$0 = \gamma(x_0)u(x_0) + \delta(x_0)Au(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x_0)\frac{\partial u}{\partial \xi^i}(x_0) + l(x_0)\int_K V(\xi)N(d\xi).$$

最後の項をかきかえるために、

$$\int_K V(\xi)N(d\xi) = \int_{K\cap(x=x_0)} V(\xi)N(d\xi) + \int_{K\cap(x\neq x_0)} V(\xi)N(d\xi)$$

$$= \int_{K\cap(x=x_0)}\left(\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)\cdot w + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N-1}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}(x_0)Z^{ij}\right)N(d\xi) + \int_{K\cap(x\neq x_0)} V(\xi)N(d\xi)$$

$$= \left(\int_{K\cap(x=x_0)} w\,N(d\xi)\right)\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) + \sum_{i,j=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\int_{K\cap(x=x_0)} Z^{ij}N(d\xi)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}(x_0)$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$+ \int_{\bar{D}-\{x_0\}} v(x)\, \gamma'(dx)$$

こゝに $\gamma'(E) = N(\varphi(E))$と定義する。従って

$$l(x_0)\int_{K\cap(x=x_0)} w N(d\xi) = \mu(x_0), \quad l(x_0)\frac{1}{2}\int_{K\cap(x=x_0)} Z^{ij} N(d\xi) = \alpha^{ij}(x_0)$$

とおくことにすれば

$$0 = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i \partial\xi^j}(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x_0) \frac{\partial u}{\partial\xi^i}(x_0) + \gamma(x_0)\, u(x_0)$$

$$+ \delta(x_0) A u(x_0) + \mu(x_0) \frac{\partial u}{\partial n}(x_0)$$

$$+ \int_{\bar{D}-\{x_0\}} \frac{u(x) - u(x_0) - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial u}{\partial\xi^i}(x_0)\, \xi^i(x)}{\xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1} (\xi^i(x))^2}\, l(x_0) \cdot \gamma'(dx)$$

従って 測度 $\nu_{x_0}(\cdot)$ を $\nu_{x_0}(E) = \int_{E-\{x_0\}} \frac{l(x_0)}{\xi^N(x) + \sum_{i=1}^{N-1} (\xi^i(x))^2} \gamma'(dx)$

$E \subset \bar{D}$ によって定義するなら、この式は(5.7)になっている。

最後に $\alpha^{ij}(x_0)$, $\beta^i(x_0)$, $\gamma(x_0)$; $\delta(x_0)$, $\mu(x_0)$, $\nu_{x_0}(\cdot)$ についての附帯的な性質は上でのべた構成法から明らかである。

Wentzell は以上の結果を得た後、$\bar{D}$が2次元の閉円板、又は3次元の閉球で *process* が回転について不変という附帯条件の下では、§4で定式化した問題はこの結果を基礎にして完全にとかれることを示した。

然しながら、得られた条件は、各点毎の条件であって、例えば条件中の各項が x_0 を動かした時にどうなるか等は全く

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

不明であるから、一般には、これらに適当な附帯条件をつけて解の存在を問題にすることになる。また $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$ が、x_0 の($\bar{D}$ における)近傍で C^2 級の場合には条件は意味をもつが、このような u が十分多く存在するかどうか一般には不明であるから、もしもそのような u がないならば条件は trivial になる。このようないくつかの難点にもかゝわらず、この形で一応の解決が得られていることは重要である。3章ではこの型の境界条件に対する解の解析的な構成法をあつかう。

またこの条件は process の粒子の境界附近での行動を示唆している。最初の2項は境界にそってのズレ、第3項は境界での吸収、第4項は境界における滞留、次の反射、最終項は境界からの jump を表していると考えられる。このような意味づけは第5章の例で具体的に path を構成することによって2次元のばあいに示す。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

第2章 古典的境界条件の Process

境界条件が $\alpha u+\mu\frac{\partial u}{\partial n}=0$ の場合は微分方程式論で昔から研究されているので、これを古典的境界条件ということにする。これに対しては、Dressel〔2〕と伊藤清三〔17〕—〔20〕によって基本解が構成され、その詳しい性質が調べられている。その構成法は、Levi の idea に基ずいて Feller〔4〕が1次元の場合したように、まず parametrix（基本解に近いもの）を Laplacian の場合即ち Gauss 分布の kernel をまねて構成し、次に parametrix と基本解との差をある積分方程式の解として逐次近似で求めるのである。

本章では、§1—3で、後章で使う準備として基本解の諸性質を述べる。そのうち §2 では、放物型方程式の基本解を t について積分すると同じ境界条件に対する楕円型方程式の Green 函数が得られるという結果を述べる。いずれも、伊藤清三〔17〕—〔20〕に見られるか、又は、その構成法から証明される結果である。

基本解は、確率論の概念でいえば、対応する Markov 過程の遷移確率の密度である。§4 では、実際に境界条件 $u=0$, $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ に対する process を構成する。これはそれぞれ、吸収壁、反射壁の境界条件と呼ぶべきものである。Dirichlet 問題の解を §2 で境界における積分で表したものは、境界への hitting measure による積分にほかならないことが分る。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

§1 古典的境界条件に対する放物型方程式の基本解

領域Dは才1章で与えたものとする。楕円型微分 operator Aは次の形に書いておく。

$$
\begin{aligned}
Au(x) &= \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\sqrt{a(x)}\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}\right) \\
&\quad + b^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i} + c(x)u(x). \qquad {}^{1)}
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

$b^i(x)$ は才1章(4.3)の形に書いた時の $b^i(x)$ と同じものではない。本章からはずっと係数のなめらかさに対する仮定を才1章より強め $a^{ij}(x)$; $b^i(x)$, $c(x)$ は $\bar{D}$ で C^3 級とする。[2)]

$a^{ij}(x)$ は positive definite, $a(x) = \det(a^{ij}(x))^{-1}$, $c(x) \le 0$ とする。点 x の近傍に別の局所座標を入れる時 $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ は反変テンソルとしての変換を受けるとする。即ち、局所座標の変換 $(x^1, ---, x^N) \to (\bar{x}^1, \cdots\cdots, \bar{x}^N)$ によって $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ は次のように変換を受けるとする;

$$
\bar{a}^{ij}(x) = a^{kl}(x)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}
$$

$$
\bar{b}^i(x) = b^k(x)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}
$$

これにより(1.1)の右辺の各項は局所座標のとり方によらないことが確かめられる。[3)] 実際われわれは Euclid 空間の本来の座標以外に、しばしば、都合のよい局所座標を選んで使う。

---

1) 微分幾何における慣用にならい、同じ index が上と下にある時はそれについて sum するという記号をしばしば省略する。

2) この仮定はもう少し弱められる。 伊藤清三〔19〕参照。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

境界における法線微分 $\frac{\partial}{\partial n}$ は 境界における接平面に垂直な方向での微分という普通の意味ではなく、

$$(1.2) \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \frac{a^{ij}(x)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x^i}\dfrac{\partial \beta(x)}{\partial x^j}}{\left(a^{ij}(x)\dfrac{\partial \beta(x)}{\partial x^i}\dfrac{\partial \beta(x)}{\partial x^j}\right)^{1/2}}$$

と定義する。ただし x の近傍で ∂D が $\beta(x^1,\cdots,x^N)=0$, D が $\beta(x^1,\cdots,x^N)>0$ と表されるとする。(1.2) の右辺の値は局所座標および $\beta(x^1,\cdots,x^N)$ のとり方によらない[4]。特に才1章(4.1)の条件をみたす局所座標 $(\bar{x}^i)$ を使えば、

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{\bar{a}^{NN}(x)}}\,\bar{a}^{Ni}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{x}^i}$$

である。この $\frac{\partial}{\partial n}$ は "a^{ij} からきまる内向き法線微分" で、本章からはずっとこの意味で用いる。局所座標を適当にとれば、才1章 §4, §5 で用いた $\frac{\partial}{\partial n}$ もこれと一致する。(Proposition 1.1)。 a^{ij} からきまる体積要素 $m(dx)$ 表面積要素 $\tilde{m}(dx)$ を次のように定義する;

$$(1.3) \qquad m(E) = \int_E \sqrt{a(x)}\, dx^1\cdots dx^N, \quad E\subset \bar{D}$$

$$(1.4) \qquad \tilde{m}(E) = \int_E \sqrt{\bar{a}(x)}\sqrt{\bar{a}^{NN}(x)}\, d\bar{x}^1\cdots d\bar{x}^{N-1}, \quad E\subset \partial D$$

ただし、$(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^N)$ は才1章(4.1)の条件を満す局所座標、$\bar{a}^{ij}$ $\bar{a}$ はそれで表した a^{ij}, a の値である。m, $\tilde{m}$ も局所座標のとり方によらず、また、これを使うと Gauss-

---

3) 4) Duff [3] P. 74 − 80

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

Green の公式が自然に拡張される。[5] 明らかに、m, $\tilde{m}$ は、それぞれ、Euclid 空間の普通の体積、表面積と互に絶対連続である。

境界条件を表す operator L は

(1.5) $$Lu(x) = \gamma(x)u(x) + \mu(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}$$

とし、$\gamma(x)$, $\mu(x)$ は ∂D で C^3 級[6], $\gamma(x) \leq 0$, $\mu(x) \geq 0$, $-\gamma(x)+\mu(x) > 0$ とする。

<u>定義 1.1</u> $t>0$, $x, y \in \overline{D}$ の函数 $p(t,x,y)$ が次の条件をみたす時、(A, L) に対する<u>基本解</u>という。任意の $f \in C(\overline{D})$ に対し

(1.6) $$u(t,x) = \int_D p(t,x,y) f(y)\, m(dy)$$

が存在し、$u(t,x)$ は $t>0$ に関し C^1 級, $x \in \overline{D}$ に関し C^2 級で、方程式

(1.7) $$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Au(t,x), \qquad t>0,\ x \in \overline{D}.$$

境界条件

(1.8) $$Lu(t,x) = 0 \qquad t>0,\ x \in \partial D,$$

初期条件

(1.9) $$\lim_{t \downarrow 0} u(t,x) = f(x), \qquad x \in D$$

を満たす。」

次の定理は最も基本的である。

<u>定理 1.1</u> D, A, L に対する以上の仮定の下に (A, L) に対する基本解が存在する。$p(t,x,y)$, $p'(t,x,y)$ を共

---

5) Duff [3] p. 74−84. 本書では Gauss−Green の公式を直接使うことはない。

6) この仮定はもう少し弱められる。伊藤清三 [19] 参照。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

に基本解とすると，t, x を固定した時，測度 0 の y を除いて，

$$p(t, x, y) = p'(t, x, y)$$

である。基本解 $p(t, x, y)$ を，$y \in \bar{D}$ の函数として連続（実は C^2 級になる）にとれる。」

今後、(A, L) の基本解という時は、この $y \in \bar{D}$ に関して連続なるものとする。明かに、このような基本解は唯一である。

以下、基本解の性質を述べる。そのために，(A, L) の形式的な adjoint (A^*, L^*) を次のように定義する。

$$(1.10) \qquad A^* u(x) = \frac{1}{\sqrt{a(x)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{ij}(x) \sqrt{a(x)} \frac{\partial u(x)}{\partial x^j} \right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{a(x)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(b^i(x) \sqrt{a(x)}\, u(x) \right) + c(x) u(x)$$

$$(1.11) \qquad L^* u(x) = \gamma(x) u(x) + \mu(x) \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} - \psi(x) u(x) \right)$$

ここで $\psi(x)$ と書いたのは、∂D 上の点 x の近傍で ∂D が $\beta(x^1, \cdots\cdots, x^N) = 0$，$D$ が $\beta(x^1, \cdots\cdots x^N) > 0$ で表される時，次のような函数である，その意味は，ベクトル $b^i(x)$ の法線成分である。

$$(1.12) \qquad \psi(x) = \frac{b^i(x) \dfrac{\partial \beta(x)}{\partial x^i}}{\left(a^{ij}(x) \dfrac{\partial \beta(x)}{\partial x^i} \dfrac{\partial \beta(x)}{\partial x^j} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

特に，$(\bar{x}^1, \cdots\cdots, \bar{x}^N)$ を才1章 (4.1) の条件を満す局所座標とすると，

$$(1.13) \qquad \psi(x) = \frac{\bar{b}^N(x)}{\sqrt{\bar{a}^{NN}(x)}}$$

になる，$\psi(x)$ も局所座標および $\beta(x^1 \cdots\cdots x^N)$ のとり方に

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

よらない。

<u>定理 1.2</u>　(A. L) の基本解 $p(t,x,y)$ は次の性質をもつ。

(I)　$p(t,x,y) \geq 0$

(II)　$\int_D p(t,x,y)\, p(s,y,z)\, m(dy) = p(t+s,x,z)$

(III)　$\int_D p(t,x,y)\, m(dy) \leq e^{-Ct}$,　ただし

$$-C = \max_{x \in \bar{D}} c(x) \tag{1.14}$$

(IV)　$c(x) \equiv 0$, $\gamma(x) \equiv 0$ ならば、

$$\int_D p(t,x,y)\, m(dy) \equiv 1$$

(V)　$t > 0$ に関し C^1 級，$x \in \bar{D}$ に関し C^2 級で

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A_x p, \qquad x \in \bar{D} \tag{1.15}$$

$$L_x p = 0, \qquad x \in \partial D \tag{1.16}$$ [7]

(VI)　$y \in \bar{D}$ に関し C^2 級で

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A^*_y p, \qquad y \in \bar{D} \tag{1.17}$$

$$L^*_y p = 0, \qquad y \in \partial D \tag{1.18}$$ 」

定義 1.2　$t > 0$, $x \in \bar{D}$, $y \in \partial D$ の函数

---

7) $A_x p$ は t, y を固定し x の函数と見て p に A を Operate することを表す．L_x, A_y, L_y も同様，

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$\tilde{p}(t, x, y)$ を次のように定義する[8]:

$$(1.19)\qquad \tilde{p}(t, x, y) = \frac{1}{-\delta(y)+\mu(y)}\left(p(t, x, y)(1-\psi(y)) + \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial n_y}\right)$$

われわれは 一様 Hölder 連続, 広義一様 Hölder連続という言葉を次のような意味で使う。例えば, $h(t, x)$ が $[t_1, t_2] \times \bar{D}$ で一様 Hölder 連続とは 常数 K, δ ($K>0$, $1 \geq \delta > 0$) が存在して、任意の t, $t' \in [t_1, t_2]$, x $x' \in \bar{D}$ に対し

$$(1.20)\qquad |h(t, x) - h(t', x')| \leq K\left(|t-t'|^{\delta} + \sum_{i=1}^{N}|x^i - x'^i|^{\delta}\right)$$

が成立つこととする。$h(t, x)$ が $(0, +\infty) \times \bar{D}$ で広義一様 Hölder 連続とは, 任意の $0 < t_1 < t_2 < +\infty$ に対し $[t_1, t_2] \times \bar{D}$ で 一様 Hölder 連続であることとする。$(0, +\infty) \times \bar{D}$ で C' 級の函数はそこで広義一様 Hölder 連続である。

$$(1.21)\qquad (\partial D)_{\mu} = \{x \in \partial D ; \mu(x) \neq 0\}$$ とおく。

<u>定理 1.3</u> $f(x)$を$\bar{D}$で連続, $h(t, x)$ を $(0, +\infty) \times \bar{D}$ で広義一様 Hölder 連続かつ有界, $\varphi(t, x)$ を $(0, +\infty) \times \partial D$ で連続, 有界, かつ $(0, +\infty) \times (\partial D)_{\mu}$ では広義一様 Hölder 連続とする。この時

(I)

$$u(t, x) = \int_D p(t, x, y) f(y) m(dy) + \int_0^t ds \int_D p(t-s, x, y) h(s, y)$$

(1.22)

$$m(dy) + \int_0^t ds \int_{\partial D} \tilde{p}(t-s, x, y) \varphi(s, y) \tilde{m}(dy)$$

---

8) $\frac{\partial p}{\partial n_y}$ は t, x を固定し yの函数と見てpの$\frac{\partial}{\partial n}$をとることを表す。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

が存在して[9]

(1.23) $(0,+\infty)\times\bar{D}$ で連続，$t>0$ に関し C' 級，x に関し D で C^2 級，$D\cup(\partial D)_u$ で C' 級

であって、方程式

(1.24) $$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) + h(t,x) \qquad t>0,\ x\in D,$$

境界条件

(1.25) $$-Lu(t,x) = \varphi(t,x), \qquad t>0,\ x\in\partial D,$$

初期条件

(1.26) $$\lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = f(x) \qquad x\in D,\ \text{有界収束}^{10)}$$

を満たす。特に f が境界条件 $Lf=0$ を満たすならば，(1.26) は $x\in\bar{D}$ で成り立ち、x に関し一様収束である。

(II) (1.23)，(1.24)，(1.25) を満たす函数は (1.22) に限る。」

$p(t,x,y)$ は更に、次のような極めて重要な性質を持つ。即ち $p^*(t,x,y) = p(t,y,x)$ とおくと，$p^*(t,x,y)$ は (A^*,L^*) に対する基本解である。但し，定義 1.1 で A を A^* に、L を L^* にかえたものを (A^*,L^*) に対する基本解の定義とする。従って，定理 1.3 に類似の定理が $p^*(t,x,y)$ に対しても成り立つ。本書ではこれらの結果を使わないので、定理として述べなかった。これらの事実に関連した adjoint process の研究は、今後に残された問題である。

以上の諸結果は伊藤清三〔17〕—〔20〕によって証明さ

---

9) 積分はいずれも Lebesgue の意味。

10) 各点収束でかつ $\exists t_0>0$，$\displaystyle\sup_{t\in(0,t_0),\,x\in\bar{D}} |u(t,x)| < +\infty$ なること。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

れた。時間的一様性のない場合、即ち、a^{ij}、b^{i}、c、及 μ が t の函数である場合にも、同様の定理が成り立つ。その時は、Aは後向き拡散方程式に現れ A^{*}は前向き拡散方程式に現れて、tが過去に向いている時と未来に向いている時とが区別されるので、直観的にはかえって分りやすくなる。なお、定理 1.1，1.3の一意性の部分を除けば、$\bar{D}$が compact でない場合もほぼ同様の定理が成り立つ。また、$c(x)\leq 0$ という仮定はこの§の定理には全然使わない。

ここでは $p(t,x,y)$ の構成法だけを述べ、こうして構成した $p(t,x,y)$が基本解であること、定理 1.2，1.3の諸性質をみたすことの証明は原論文〔17〕―〔20〕または〔21〕にゆずる。[11)]

基本解の構成法の荒筋　以下の (a)，(b)，(c) を主な性質とするある函数 $q(t,x,y)$ をまず構成し、parametrix と称する。[12)]

(a) $(s_0,+\infty)\times\bar{D}$で連続な函数 $h(s,y)$ に対し

$$(1.27)\qquad u(s,x,t)=\int_D q(t-s,x,y)\,h(s,y)\,m(dy)$$

$$(t>s\geq s_0,\quad x\in\bar{D})$$

しおくと、

---

11) 特に〔19〕Theorem 1 および 3を参照。
ここで〔19〕との記号の違いの主なものをあげておく。まずAとA^{*}とが逆になっている。境界条件の書き方は符号が逆である上に、われわれは $-\gamma+\mu=1$を仮定しない。法線微分をわれわれは内向きにとる。
$\varphi(x)$ の符号も逆である。

12) この際ある仮定 (1.51) をつけなければならない。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

(1.28) $$\lim_{\substack{t>s\geq s_0 \\ t\to s_0}} u(s,x,t) = h(s_0,x), \quad x \in D$$

が成り立つ。

(b) 境界条件

(1.29) $$L_x q(t,x,y) = 0. \quad t>0,\ x\in\partial D,\ y\in\bar{D}$$

を満たす。

(c) $h(s,y)$ を $(0,+\infty)\times\bar{D}$ で広義一様 Hölder 連続でかつ、

(1.30) $$\int_0^t ds\int_D |h(s,y)|\,m(dy) < +\infty, \quad t>0$$

とし、$u(s,x,t)$ を (1.27) で定義すると

(1.31) $$v(t,x) = \int_0^t u(s,x,t)\,ds$$

が存在して

(1.32) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right) v(t,x) = f(t,x) + \int_0^t ds\int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} - A_x\right) q(t-s, x,y)\, h(s,y)\, m(dy)$$ が成立する。これは $\left(\frac{\partial}{\partial t} - A_x\right) q(t,x,y)$ の $t=0$ における singularity があまり大きくないことを示すものである。

次に、基本解 $p(t,x,y)$ とこの $q(t,x,y)$ との差を構成するのであるが、それは

(1.33) $$p(t,x,y) = q(t,x,y) + \int_0^t ds\int_D q(t-s,x,z)\,f(s,z,y)\,m(dz)$$

とおいて、$p(t,x,y)$ が (1.15) をみたすように $f(s,z,y)$ を求めるのである。それには (c) により、積分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A_x\right) q(t,x,y)\, f(t,x,y)$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(1.34) \qquad +\int_0^t ds\int_D \left(\frac{\partial}{\partial t}-A_x\right) g(t-s, x, z) f(s, z, y)\, m(dz)=0$$

を解き、その解 $f(s, z, y)$ が y を固定した時
(s, z) の函数として $(0, +\infty)\times\bar{D}$ で広義一様 Hölder 連続でかつ (1.30) を満たすことを証明すればよい。(1.34)の解は次のような逐次近似で求められる。まず、

$$(1.35) \qquad e_0(t, x, y) = \left(A_x-\frac{\partial}{\partial t}\right) g(t, x, y)$$

とおき (1.34) を

$$(1.36) \qquad f(t, x, y) = e_0(t, x, y)\int_0^t ds\int_D e_0(t-s, x, z) f(s, z, y)\, m(dz)$$

の形にかく。解の才0近似は $e_0(t, x, y)$ 才1近似は

$$f_1(t, x, y) = e_0(t, x, y) \int_0^t ds\int_D e_0(t-s, x, z) e_0(s, z, y)\, m(dz).$$

右辺の才2項を $e_1(t, x, y)$ とかく。
才2近似は

$$\begin{aligned} f_2(t, x, y) &= e_0(t, x, y)+\int_0^t ds\int_D e_0(t-s, x, z) f_1(s, z, y)\, m(dz) \\ &= e_0(t, x, y) + e_1(t, x, y) + \int_0^t ds\int_D e_0(t-s, x, z)\, e_1(s, z, y)\, m(dz). \end{aligned}$$

と順次に進む。即ち

$$(1.37) \qquad e_\nu(t, x, y) = \int_0^t ds\int_D e_0(t-s, x, z)\, e_{\nu-1}(s, z, y)\, m(dz), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$(1.38) \qquad f_n(t, x, y) = \sum_{\nu=0}^{n} e_\nu(t, x, y)$$

である。$\lim_{n\to\infty} f_n(t, x, y)$ が存在し求めるものであることが証明される。これが構成法の荒筋である。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

Parametrix を構成するために、まず $a^{ij}(x)$ の逆行列を、$a_{ij}(x)$ とかく。これは、局所座標の変換に対し、2階共変テンソルとしての変換をうける。即ち、変換 $(x^1,\cdots,x^N) \to (\bar{x}^1,\cdots\bar{x}^N)$ に際し、

$$\bar{a}_{ij}(x) = a_{kl}(x)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\ \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}$$

となる。

Proposition 1.1 任意の $x_0 \in \partial D$ に対し x_0 の $\bar{D}$ における ある近傍 $U(x_0)$ で次のような C^3 級局所座標 $(\bar{x}_i)$ が存在する。

(I) 才1章(4.1)をみたす。

(II) $(\bar{x}_i)$ で表した a^{ij} を $\bar{a}^{ij}$ とすると $\forall x \in \partial D \cap U(x_0)$ で

$$\bar{a}^{Ni}(x) = \bar{a}^{iN}(x) = \begin{cases} 0 & i=1,\cdots N-1 \\ 1 & i = N. \end{cases} \tag{1.39}$$

(III) $\forall x \in \partial D \cap U(x_0)$, $\forall y \in D \cap U(x_0)$ に対し

$$\bar{a}_{Ni}(y)(\bar{y}^i - \bar{x}^i) > 0 \tag{1.40}$$ 」

<u>証　明</u>　才1章(4.1)を満たす局所座標 $(\bar{\bar{x}}^i)$ を $U(x_0)$ でとり、それで表したのを $\bar{\bar{a}}^{ij}$, $\bar{\bar{a}}_{ij}$ とする。$\xi^1,\cdots\cdots \xi^{N-1}$ を、$(\bar{\bar{x}}^i)$ 座標が $(\xi^1\cdots\cdots,\xi^{N-1},0)$ なる点が $\partial D \cap U'(x_0)$ に属するような数とする。

微分方程式の system

$$\frac{dy^i}{d\lambda} = \frac{\bar{\bar{a}}^{iN}(y^1,\cdots y^N)}{\sqrt{\bar{\bar{a}}^{NN}(y^1,\cdots,y^N)}}, \quad i=1,\cdots\cdots N \tag{1.41}$$

を $\lambda=0$ における初期条件

$$\begin{cases} y^i = \xi^i & i=1\cdots\cdots N-1 \\ y^N = 0 \end{cases} \tag{1.42}$$

で解き、その解を、$y^i = \varphi^i(\lambda, \xi^1, \cdots, \xi^{N-1})$ とおく。
これを用いて

$$(1.43) \qquad \bar{\bar{x}}^i = \varphi^i(\bar{x}^N, \bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^{N-1}) \qquad i = 1, \cdots, N$$

によって $\bar{\bar{x}}^1, \cdots, \bar{\bar{x}}^N$ を定義する。(1.43) によって x_0 のある近傍 $U(x_0)$ で $(\bar{\bar{x}}^i)$ が定義可能で $(\bar{x}^i)$ と1対1に対応していることは、$x \in \partial D$ で

$$(1.44) \qquad \frac{\partial(\bar{\bar{x}}^i)}{\partial(\bar{x}^j)} = \begin{vmatrix} 1 & & 0 & \bar{\bar{a}}^{1N}(x)/\sqrt{\bar{\bar{a}}^{NN}(x)} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \bar{\bar{a}}^{N-1,N}(x)/\sqrt{\bar{\bar{a}}^{NN}(x)} \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\bar{\bar{a}}^{NN}(x)} \end{vmatrix}$$

$$\det \frac{\partial(\bar{\bar{x}}^i)}{\partial(\bar{x}^j)} = \sqrt{\bar{\bar{a}}^{NN}(x)} > 0$$

なることから明かである。(I) は (1.42) と $x \in \partial D$ で

$$\frac{\partial \bar{\bar{x}}^N}{\partial \bar{x}^N} = \sqrt{\bar{\bar{a}}^{NN}(x)} > 0$$

なることから明か。(II) は

$$\bar{a}_{Ni} = \bar{\bar{a}}_{jk} \frac{\partial \bar{\bar{x}}^j}{\partial \bar{x}^N} \frac{\partial \bar{\bar{x}}^k}{\partial \bar{x}^i}$$

から (1.44) により

$$\bar{a}_{Ni} = \bar{\bar{a}}_{ji} \frac{\bar{\bar{a}}^{jN}}{\sqrt{\bar{\bar{a}}^{NN}}} = 0. \qquad i = 1 \cdots N-1$$

$$\bar{a}_{NN} = \bar{\bar{a}}_{jk} \frac{\bar{\bar{a}}^{jN}\bar{\bar{a}}^{kN}}{\bar{\bar{a}}^{NN}} = 1.$$

従って $\bar{a}_{ij}$ の逆行列 $\bar{a}^{ij}$ も境界で (1.39) を満たす。
(III) は

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$\bar{a}_{Ni}(y)(\bar{y}^i-\bar{x}^i)=\left(\delta_{Ni}+\bar{y}^N\frac{\partial\bar{a}_{Ni}}{\partial\bar{y}^N}(p(y))+o(\bar{y}^N)\right)(\bar{y}^i-\bar{x}^i)$$

$$=\bar{y}^N\left(1+\bar{y}^{-N}\frac{\partial\bar{a}_{NN}}{\partial\bar{y}^N}(p(y))+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial\bar{a}_{Ni}}{\partial\bar{y}^N}(p(y))(\bar{y}^i-\bar{x}^i)+o(1)\right)$$

$$>0$$

ただし、δ_{Ni} は Kronecker のデルタ，$P(y)$ は点 $y=(\bar{y}^1,\cdots\cdots\bar{y}^N)$ に対し $P(y)=(\bar{y}^1,\cdots\cdots\bar{y}^{N-1},0)$ によって定めた境界上の点である，$(\bar{x}^i)$ が C^3 級になることの証明は省略する。」

(1.45) (II)によって、$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial\bar{x}^N}$ となることを注意しておく。

$x_0\in\partial D$ に対し、上の Proposition の $V(x_0)$，$(\bar{x}^i)$ を一つ固定し、$(\bar{x}^i)$ を $V(x_0)$ における canonical な局所座標と呼ぶ。D 内の x_0 に対しては、x_0 を内部に含み closure が D に含まれるような球を一つ固定して $V(x_0)$ とし、$V(x_0)$ における canonical な局所座標とはユークリッド空間の座標を指すものとする，これをやはり $(\bar{x}^i)$ と書く。

$\bar{D}$ の compact 性によって、正整数 M が存在して

(1.46) $\quad \bar{D}=\bigcup_{i=1}^{M}V(x_i)$

となる。

Proposition 1.2 次のような有限個の函数

$\lambda_j(x)$, $j=1\cdots\cdots L$ が存在する，

(I) λ_j は $\bar{D}$ で C^3 級

(II) $0\leq\lambda_j(x)\leq 1$

(III) $\sum_{j=1}^{L}\lambda_j(x)^2=1$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

(IV) $\dfrac{\partial \lambda_j}{\partial n}(x)=0 \qquad x\in\partial D$

(V) 任意のjに対しあるiが存在して

$Car(\lambda_j)\subset U(x_i)$ 13)

証明 $x\in\partial D$に対し xを含む$U(x_i)$を一つとり、$U(x_i)$におけるcanonicalな局所座標$(\bar{y}^i)$によって、$\bar{D}$における円筒形近傍$V_1(x)$, $V_2(x)$を次のように、closureまでこめて$U(x_i)$内にとる。

(1.47) $$V_k(x)=\{y;\ \sum_{i=1}^{N-1}(\bar{y}^i-\bar{x}^i)^2<r_k^2 \text{ かつ } 0\leq\bar{y}^N\leq h_k\}$$

$$k=1,2$$

$$0<r_1<r_2 \qquad 0<h_1<h_2$$

ただし$(\bar{x}^i)$はxの座標である。$x\in D$に対しても、xを含む$U(x_i)$を一つとり、$U(x_i)$におけるcanonicalな局所座標$(\bar{y}^i)$によって球形近傍$V_1(x)$ $V_2(x)$を次のように closureまでこめて $U(x_i)\cap D$内にとる。

(1.48) $$V_k(x)=\{y;\ \sum_{i=1}^{N}(\bar{y}^i-\bar{x}^i)^2<r_k^2\}$$

$$0<r_1<r_2$$

$\bar{D}$のcompact性から有限のLによって

(1.49) $$\bar{D}=\bigcup_{j=1}^{L}V_1(x_j)$$

である。ただし

(1.50) $$x_j\in\partial D \qquad j=1,\cdots L'$$
$$x_j\in D \qquad j=L'+1,\cdots\cdots,L$$

とする。

13) 函数fに対し集合$\{x;f(x)\neq 0\}$のclosureをfのcarrierといい、$Car(f)$と書く。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$0 < a < b$ に対し $z \in [0, +\infty)$ の函数 $\mu(z) = \mu(z; a, b)$ を

$$0 \leq \mu(z) \leq 1$$

$$\mu(z) = 1 \qquad 0 \leq z \leq a$$

$$\mu(z) = 0, \qquad b \leq z$$

かつ C^3 級にとる。

$1 \leq j \leq L'$ に対しては $V_1(x_j)$ $V_2(x_j)$ が (1.47) で x を x_j にかえたもので表されたとする時

$$\lambda_j^0(y) = \mu\left(\sum_{i=1}^{N-1}(\bar{y}^i - \bar{x}_j^i)^2 ; r_1^2, r_2^2\right)\mu(\bar{y}^N ; h_1, h_2)$$

とおく。$L'+1 \leq j \leq L$ に対しては $V_1(x_j)$ $V_2(x_j)$ が (1.48) で x を x_j にかえたもので表されたとする時

$$\lambda_j^0(y) = \mu\left(\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}^i - \bar{x}_j^i)^2 ; r_1^2, r_2^2\right)$$

とおく。$\sum_{j=1}^{L} \lambda_j^0(y)^2$ は $\bar{D}$ で >0、かつ C^3 級である。

$$\lambda_j(y) = \frac{\lambda_j^0(y)}{\left(\sum_{j=1}^{L} \lambda_j^0(y)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

とおくと求めるものである。」

本節の以下の議論では

(1.51) $\quad \max_{x \in \partial D} \gamma(x) < 0 \quad$ 又は $\quad \gamma(x) \equiv 0$

を仮定する。[14)]

Paranetrix $q(t, x, y)$ の構成 $\quad x, y \in V_2(x_j)$ とし、$V_2(x_j)$ は $\bar{D}(x_i)$ における canonical な局所近傍 $(\bar{x}^i)$ から作ったとする。$(\bar{x}^i)$ で表した a^{ij}, a を $\bar{a}^{ij}$ $\bar{a}$ と書く。まず、

14) この仮定は $d_j(t, x, y)$ を定義するためにするものである。この仮定を除いた一般の場合は〔20〕〔21〕を参照

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(1.52)\qquad r_j(t.x.y) = \left(\frac{\bar{a}(y)}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}} \exp \frac{-\bar{a}_{ik}(y)(x^i - y^i)(x^k - y^k)}{4t}$$

とおく。

$L'+1 \leq j \leq L$ の時は

$$(1.53)\qquad s_j(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{\bar{a}(y)}}\, r_j(t.x.y)$$

とおく。

$1 \leq j \leq L'$ の時は、

$$(1.54)\qquad d_j(t.x.y) \begin{cases} = \dfrac{\bar{a}_{Ni}(y)(y^i - \overline{p(y)}^i)\mu(P(x)) + 2t\gamma(P(x))}{\bar{a}_{Ni}(y)(y^i - \overline{p(x)}^i)\mu(P(x)) - 2t\gamma(P(x))} \\ \qquad\qquad\qquad (\max\gamma(x) < 0 \text{ の時}) \\ = 1 \qquad\qquad\quad (\gamma(x) \equiv 0 \text{ の時}) \end{cases}$$

$$(1.55)\qquad s_j(t.x.y) = \frac{1}{\sqrt{a(y)}}\left(r_j(t.x.y) + d_j(t.x.y)\, r_j(t.Q(x).y)\right)$$

とおく。ただし点 $x = (x^1 \cdots\cdots x^N)$ に対し点 $P(x)$, $Q(x)$ を

$$(1.56)\qquad P(x) = (\overline{P(x)}^1, \cdots, \overline{P(x)}^N) = (x^1, \cdots x^{N-1}, 0)$$

$$(1.57)\qquad Q(x) = (\overline{Q(x)}^1, \cdots, \overline{Q(x)}^N) = (x^1 \cdots x^{N-1}, -x^N)$$

と定義する。

こう定義した $s_j(t.x.y)$ をつなぎ合せて

$$(1.58)\qquad q(t.x.y) = \sum_{j=1}^{L} \lambda_j(x)\, s_j(t.x.y)\lambda_j(y)$$

と定義する。

---

(4) この仮定は $d_j(t.x.y.)$ を定義するためにするものである。この仮定を除いた一般の場合は〔20〕〔21〕を参照。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$q(t,x,y)$ に対し性質 (a), (b) は割合簡単に証明出来る。(b) をいう際には (1.45) と Proposition 1.2 (IV) に注意せよ。(c) をいうには実際に $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$ 等を計算し、その $t=0$ における singularity を評価しなければならないので、相当面倒である。いずれも本書では省く。

<u>$e_\nu(t,x,y)$ の評価</u>　parametrix の構成法から計算して行くと (1.35) で定義した $e_0(t,x,y)$ に対し次の評価が出来る。

$$(1.59)\quad |e_0(t,x,y)| \le K_1 t^{\frac{-N-1}{2}} \sum_{j=1}^{L} \exp \frac{-K_2 \sum_{i=1}^{N} |x^i_{(j)} - y^i_{(j)}|^2}{4t} \cdot \chi_{V_2(x_j)}(x)\chi_{V_2(x_j)}(y)$$

ただし $V_2(x_j)$ は $V(x_i)$ ($\supset V_2(x_j)$) における canonical な局所座標から作ったとし、その局所座標による x, y の座標を $(x^i_{(j)})$, $(y^i_{(j)})$ で表す。K_1 K_2 は t; x, y, j によらない正の常数である。K_1, K_2 を適当にかえてとれば (1.59) は次のように書ける。

$$(1.60)\quad |e_0(t,x,y)| \le K_1 t^{\frac{-N-1}{2}} \exp \frac{-K_2 \sum_{i=1}^{N} |x^i - y^i|^2}{4t}$$

ただし (x^i), (y^i) は x, y の Euclid 空間の座標である。(1.60) から、(1.37) の右辺が存在して

$$(1.61)\quad \begin{aligned} |e_n(t,x,y)| \le\ & K_1^{n+1}\left(\frac{4\pi}{K_2}\right)^{\frac{nN}{2}} K_3^{n} \prod_{\nu=1}^{n} B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right) t^{\frac{n-N-1}{2}} \\ & \cdot \exp \frac{-K_2 \sum_{i=1}^{N} |x^i - y^i|^2}{4t}, \quad n = 0, 1, \cdots \end{aligned}$$

となることを証明する。$B(\cdot,\cdot)$ はベータ函数，K_3は $\sqrt{a(z)}$ をおさえる const. である。証明は帰納法による。一般に、

$$(1.62)\quad g(\nu,x,y) = (2\pi\nu)^{-\frac{N}{2}} \exp \frac{-\sum_{i=1}^{N} |x^i - y^i|^2}{2\nu}$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

とおくと.

(1.63) $$g(v_1+v_2, x, y)=\int_{R^N} g(v_1, x, z)\, g(v_2, z, y)\, dz$$

となることをまず注意しておく。 $n=0$ の場合, (1.61) は (1.60) にほかならない。 (1.61) が n に対して成り立つとして $n+1$ に対して成り立つことをいう。

$$\left|e_0(t-s, x, z)\, e_n(s, z, y)\right| \leq k_1^{n+2}\left(\frac{4\pi}{k_2}\right)^{\frac{nN}{2}} k_3^{\,n} \prod_{\nu=1}^{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$$
$$\cdot (t-s)^{\frac{-N-1}{2}}\, s^{\frac{n-N-1}{2}} \exp\frac{-k_2\sum_{i=1}^{N}|x^i-z^i|^2}{4(t-s)} \exp\frac{-k_2\sum_{i=1}^{N}|z^i-y^i|^2}{4s}$$

の両辺を z で積分 (1.63) を使うと,

$$\int_D \left(e_0(t-s, x, z)\, e_n(s, z, y)\right) m(dz) \leq k_1^{n+2}\left(\frac{4\pi}{k_2}\right)^{\frac{(n+1)N}{2}} k_3^{\,n+1}$$
$$\cdot \prod_{\nu=1}^{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)\cdot (t-s)^{\frac{-1}{2}}\, s^{\frac{n-1}{2}}\, t^{\frac{-N}{2}} \exp\frac{-k_2\sum_{i=1}^{N}(x^i-y^i)^2}{4t}$$

を得る。これを s で積分すると, $e_{n+1}(t, x, y)$ が存在して $n+1$ に対して (1.61) が成り立つことが分る, なぜなら

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\, s^{\frac{n-1}{2}}\, ds = t^{\frac{n}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

だからである.

公式

(1.64) $$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

から,

(1.65) $$\prod_{\nu=1}^{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

を得るから, 常数 K を適当にとれば, (1.61) から

(1.66) $$\left|e_n(t, x, y)\right| \leqq K^n\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1} t^{\frac{n-N-1}{2}}$$

となり, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} e_n(t, x, y)$ は有限な範囲の t に関し一様

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

に絶対収束する。極限函数

$f(t.x.y)$ に対し

(1.67) $$\int_0^T dt \int_D |f(t.x.y)| m(dx) < +\infty$$

がいえる。それは やはり(1.61)から K を適当にとれば、

(1.68) $$\int_D |e_n(t.x.y)| m(dx) \leq K^{n+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1} t^{\frac{n-1}{2}}$$

(1.69) $$\int_0^T dt \int_D |e_n(t.x.y)| m(dx) \leq \frac{2}{n+1} K^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1} T^{\frac{n+1}{2}}$$

で(1.69)の右辺の n についての和が有限であることから明かである。$f(t.x.y)$ が (t,x) の函数として $(0,+\infty) \times \bar{D}$ で広義一様 Hölder 連続になることの証明は省略する[16)]

本節の最後に、次のことを注意しておく。

Proposition 13。α を正の常数とする。$p(t.x.y)$ を (A, L) に対する基本解とすると $e^{-\alpha t} p(t.x.y)$ は $(A-\alpha, L)$ に対する基本解である。

<u>証 明</u> $f \in C(\bar{D})$ に対し

$$u(t,x) = \int_D e^{-\alpha t} p(t,x,y) f(y) m(dy)$$

が存在して 方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = (A-\alpha) u$ と境界条件(1.8)初期条件(1.9)をみたすことは明か。しかも $e^{-\alpha t} p(t,x,y)$ は $y \in \bar{D}$ の函数として連続な version である。」

---

15) 〔32〕 p 290
16) 〔17. I〕を参照。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

§2 古典的境界条件に対する楕円型方程式の Green 函数

A，L に対する仮定は §1 の通りとする。従って、$c \leq 0$，$\gamma \leq 0$ である。

定義 2.1　$x, y \in \overline{D}$，$x \neq y$ の函数 $g(x, y)$ が次の条件を満たす時，(A，L) に対する Green 函数という。$\overline{D}$ で十分なめらかな函数 f に対し

$$(2.1) \qquad u(x) = \int_D g(x, y) f(y) m(dy)$$

が存在し、$x \in \overline{D}$ に関し C^2 級で，方程式

$$(2.2) \qquad -Au(x) = f(x) \qquad x \in \overline{D}$$

と境界条件

$$(2.3) \qquad Lu(x) = 0, \qquad x \in \partial D$$

を満たす。」

定理 2.1

$$(2.4) \qquad \min_{x \in \overline{D}} c(x) + \min_{x \in \partial D} \gamma(x) < 0$$

と仮定する。$p(t, x, y)$ を (A, L) に対する基本解とすると $x, y \in \overline{D}$，$x \neq y$ に対し

$$(2.5) \qquad g(x, y) = \int_0^\infty p(t, x, y)\, dt$$ が存在して、(A, L)

に対する Green 函数になる。$g(x, y)$，$g'(x, y)$ が共に (A, L) に対する Green 函数ならば，x を固定した時，測度 0 の y を除いて

$$g(x, y) = g'(x, y)$$

である。」

前半の証明は〔19〕にある，後半の uniqueness の証明は後に与える。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

(2.5)の $g(x,y)$ が Green 函数になりそうなことは次のようにして想像がつく。(2.1) で $u(x)$ を定義し形式的に積分順序を交換すると、

$$u(x) = \int_0^\infty dt \int_D p(t,x,y) f(y) m(dy) = \int_0^\infty u(t,x)\, dt$$

となる。$u(t,x)$ は (1.6)で定義する。これに形式的に $-A$ を operate し、微分と積分の順序を交換すると (1.7) により

$$-Au(x) = -\int_0^\infty Au(t,x)\, dt = -\int_0^\infty \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\, dt$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} u(t,x) - \lim_{t \uparrow \infty} u(t,x)$$

才1項は (1.9) により $f(x)$、才2項は条件 (2.4)から 0 になるであろうから (2.2) が出る。また (1.8)からやはり形式的に

$$Lu(x) = \int_0^\infty Lu(t,x)\, dt = 0$$

すなわち (2.3) が出る。

今後 (A, L)に対する Green 函数という時は (2.5) によって (A, L)に対する基本解から得たものとする。これが y に関しなめらかな version であることは次に述べる。

<u>定理 2.2</u>　(2.4) を仮定する。(A, L)に対する Green 函数 $g(x,y)$ は次の性質を持つ。

(I) $g(x,y) \geq 0$

(II) $\max_{x \in \bar{D}} c(x) = -C < 0$ ならば

(2.6) $\int_D g(x,y)\, m(dy) \leq \frac{1}{C}$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

(III) $x\in\bar{D}-\{y\}$ に関し C^2 級で

(2.7) $\quad A_x g = 0 \qquad x\in\bar{D},\ x\neq y,$

(2.8) $\quad L_x g = 0 \qquad x\in\partial D\quad x\neq y$

(IV) $y\in\bar{D}-\{x\}$ に関し C^2 級で

(2.9) $\quad A^*_y g = 0. \qquad y\in\bar{D},\ y\neq x,$

(2.10) $\quad L^*_y g = 0. \qquad y\in\partial D,\ y\neq x.$ 」

(I), (II) は定理 2.2 (I), (III) からすぐ分る。
(III), (IV) の証明は [19] にゆずる。

定義 2.2 $\quad x\in\bar{D},\ y\in\partial D,\ x\neq y$ の函数 $\tilde{g}(x,y)$ を次のように定義する。

(2.11) $$\tilde{g}(x,y) = \frac{1}{-\delta(y)+\mu(y)}\left(g(x,y)(1-\psi(y))+\frac{\partial g(x,y)}{\partial n_y}\right)$$

$\psi(x)$ は (1.12) で定義したもの。」

定理 2.3 $\quad$ (2.4) を仮定する。$f(x)$ が $\bar{D}$ で一様 Hölder 連続 $\varphi(x)$ が ∂D で一様 Hölder 連続ならば、

(I)

(2.12) $$u(x)=\int_D g(x,y)f(y)\,m(dy)+\int_{\partial D}\tilde{g}(x,y)\varphi(y)\,\tilde{m}(dy)$$

が存在して

(2.13) $\quad \bar{D}$ で連続、$D\cup(\partial D)_\mu$ で C' 級、D で C^2 級で、方程式

(2.14) $\quad -Au(x) = f(x) \qquad x\in D.$

境界条件

(2.15) $\quad -Lu(x) = \varphi(x) \qquad x\in\partial D$

を満たす。特に $\varphi(x)\equiv 0$ ならば、u は $\bar{D}$ で C^2 級である。

(II) (2.13) (2.14) (2.15) を満たす函数は (2.12) に限る。」

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

この定理の証明も(I)は〔19〕にゆずる。

(II) は後に定理2.10を使って証明する。

方程式の微分しない項の係数を変える時 Green 函数相互の間には次のような関係がある。

定理2.4　(A−α, L)に対する Green 函数を $g_\alpha(x, y)$ とする。

(I)

(2.16)　$g_\alpha(x,y) - g_\beta(x,y) + (\alpha-\beta)\int_D g_\alpha(x,z)\, g_\beta(z,y)\, m(dz) = 0$

但し α, β は const で、Aが(2.4)を満たす時は $\alpha, \beta \geq 0$ とし、(2.4)を満たさない時は $\alpha, \beta > 0$ とする。

(II) $f \in C(\bar{D})$ に対し

(2.17)　$\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha\int_D g_\alpha(x,y) f(y)\, m(dy) = f(x) \quad , x\in D$

特に f が境界条件 $Lf = 0$ を満たすならば、(2.17)の収束は $x\in \bar{D}$ でいえ、しかも x に関し一様収束である。」

証明　(A, L)に対する基本解を $p(t, x, y)$ とすると定理2.4により

(2.18)　$g_\alpha(x,y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t,x,y)\, dt$

である。従って定理1.2(II)を用いて

$$\int_D g_\alpha(x,z)\, g_\beta(z,y)\, m(dz) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\int_0^\infty e^{-\beta s}ds\int_D p(t,x,z)\, p(s,z,y)\, m(dz) = \int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-\alpha t-\beta s} p(t+s,x,y)\, ds =$$

$$\int_0^\infty e^{(\beta-\alpha)t}\, dt\int_t^\infty e^{-\beta s} p(s,x,y)\, ds = \int_0^\infty e^{-\beta s} p(s,x,y)\, ds \int_0^s e^{(\beta-\alpha)t}\, dt = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(g_\beta(x,y) - g_\alpha(x,y)\right)$$

故に(I)がいえた。(1.9)により、$\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

が存在して

$$\left|\int_D p(t,x,y)f(y)m(dy)-f(x)\right|<\varepsilon, \quad 0<t<\delta,$$

従って

$$\left|\alpha\int_0^\delta e^{-\alpha t}dt\int_D p(t,x,y)f(y)m(dy)-f(x)\right|$$

$$\leq\left|\alpha\int_0^\delta e^{-\alpha t}\left(\int_D p(t,x,y)f(y)m(dy)-f(x)\right)dt\right|+\left|\alpha\int_\delta^\infty e^{-\alpha t}f(x)dt\right|$$

$$\leq\varepsilon+\|f\|\ e^{-\alpha\delta}$$

一方

$$\left|\alpha\int_\delta^\infty e^{-\alpha t}dt\int_D p(t,x,y)f(y)m(dy)\right|\leq\|f\|e^{-\alpha\delta}$$

故に

$$\alpha\int_D g_\alpha(x,y)f(y)m(dy)=\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\int_D^\delta p(t,x,y)f(y)m(dy)$$

$$\to f(x), \quad \alpha\to+\infty$$

定理 1.3 により $Lf=0$ ならばこの収束が $x\in\partial D$でもいえしかも $\overline{D}$で一様である。」

$Lu=-u$ 即ち $\gamma\equiv-1$, $\mu\equiv 0$ なる時、$(A-\alpha, L)$ に対する Green 函数 $g_\alpha(x,y)$ から定義 2.2によって得た $\tilde{g}_\alpha(x,y)$ を $h_\alpha(x,y)$ とかく。αは const. ≥ 0 とする。(2.10) によって (2.19) であるから

$$(2.20)\quad h_\alpha(x,y)=\frac{\partial g_\alpha(x,y)}{\partial n_y}$$

である。$h_\alpha(x,y)$に対して

定理2.5

(I) $\quad h_\alpha(x,y)\geq 0$

$\qquad g_\alpha(x,y)=0. \qquad y\in\partial D$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

(II) $\int_{\partial D} h_\alpha(x,y)\,\widetilde{m}(dy) \leq 1$

(III) $\varphi \in C(\partial D)$ ならば、

(2.21) $u(x) = \int_{\partial D} h_\alpha(x,y)\varphi(y)\,\widetilde{m}(dy)$

(2.22) $\overline{D}$で連続，DでC^2級

(2.23) $(\alpha - A)\,u(x) = 0 \qquad x \in D$

(2.24) $u(x) = \varphi(x) \qquad x \in \partial D$

である。

(IV) $\varphi \in C(\partial D)$に対し(2.22)．(2.23)(2.24)を満たす函数は(2.21)に限る。」

これを証明する前に、楕円型方程式の解の行動について調べておく。

Proposition 2.1 [2] uを$\overline{D}$で連続，DでC^2級で，しかもConstでない函数とし、

(2.25) $Au(x) \leq 0 \qquad x \in D$

とする。今 $x_0 \in \partial D$ で

(2.26) $u(x_0) = \max_{x \in \overline{D}} u(x) \geq 0$

で、かつ、$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)$ が存在すれば

(2.27) $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) < 0$

である。」

証 明　2段に分けて証明する。

---

1) (I)(II) はもっと一般の$\widetilde{g}(x,y)$に対しても成り立つ。
才3章参照。

2) Oleinik [28] による。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

才1段

(2.28) $\qquad u(x) < u(x_0) \qquad x \in D$

を仮定して証明する。 $U(x_0)$ における canonical な局所座標を (ξ^i) とする。

$$v(x) = \alpha \sum_{i=1}^{N-1} (\xi^i - \xi_0^i)^2 - \beta \xi^N - (\xi^N)^2$$

とおく。

$$\bar{b}^i + \frac{1}{\sqrt{\bar{a}}} \frac{\partial (\bar{a}^{ij} \sqrt{\bar{a}})}{\partial \xi^j} = \bar{d}^i$$

とおくと、

$$A v(x) = \bar{a}^{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \bar{d}^i \frac{\partial v}{\partial \xi^i} + c v$$

$$= 2\alpha \sum_{i=1}^{N-1} \bar{a}^{ii} - 2\bar{a}^{NN} + 2\alpha \sum_{i=1}^{N-1} \bar{d}^i (\xi^i - \xi_0^i)$$

$$- \bar{d}^N (\beta + 2\xi^N)$$

従って α, β, δ を十分小さい const にとると x_0 の δ 近傍 $V_\delta(x_0)$ で $Av < 0$ である。E を超曲面 $v = 0$ と $\xi^N = \eta$ で囲まれた領域とし、$\eta > 0$ を十分小にとって $E \subset V_\delta(x_0)$ とする。ε を正の const とし、

$$w(x) = \varepsilon v(x) - u(x) + u(x_0)$$

とおく。

(2.25) (2.26) により

$$A w(x) = \varepsilon A v(x) - A u(x) + C(x) u(x_0) < 0$$

である。

$\partial E \cap \{\xi^N = \eta\}$ は D の内部にあるから、仮定 (2.28) により ε を十分小さくとると ∂E で $w \geq 0$ である。従って E で $w \geq 0$ 何となれば、才1章 Proposition 4.1 によって、負の最小値をとる内点では $Aw \geq 0$ となるはずだからである。E で

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$\varepsilon v(x) \geq u(x) - u(x_0)$$

がいえたことから.

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x^N}(x_0) \geq \frac{\partial u}{\partial x^N}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial n}(x_0)$$

であり.

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0) = -\beta < 0$$

であるから.（2.27）がいえた.

才2段　（2.28）が成り立つことの証明。

$E = \{x \in D;\ u(x) = u(x_0)\} \neq \phi$ として矛盾を出す。

$x_1 \in D - E$ を. E と x_1 との距離 r の方が ∂D と x_1 との距離より近いようにとれる。x_1 を中心，r を半径とする球 D' の境界上に E に属する点 x_2 がある。x_2 では

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}(x_2) = 0, \qquad i = 1 \cdots N$$

であるが、一方 D' に対して才1段の結果を適用すると、これと矛盾する結果が出る。」

<u>定理2.6</u>　u を $\overline{D}$ で連続，D で C^2 級で $Au = 0$ とする。

$\max\limits_{x \in \overline{D}} u(x)$ が ≥ 0 ならば u はその値を境界上でとる。

$\min\limits_{x \in \overline{D}} u(x)$ が ≤ 0 ならば u はその値を境界上でとる.」

<u>証明</u>.　proposition 2.19 証明の才2段と同じ論法でやればよい.

<u>定理2.5の証明</u>　(I) は（2.19），(2.20) と定理2.2 (I) から明かである.

$$u(x) = \int_{\partial D} k_\alpha(x, y)\, \tilde{m}(dy)$$

とおくと定理2.3 (I) により D で $(A - \alpha)u = 0$　∂D で

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$u=1$ であるから、定理2.6により $\overline{D}$ で $u \leq 1$。これは(II)にほかならない。

(III)の証明。

φ に一様収束する一様Hölder連続な函数の列 φ_n をとり、

$$u_n(x) = \int_{\partial D} k_\alpha(x,y)\varphi_n(y)\tilde{m}(dy)$$

とおく。定理2.3により u_n は $\overline{D}$ で連続，D で C^2 級で，

$$(\alpha - A)u_n(x) = 0 \qquad x \in D$$

$$u_n(x) = \varphi_n(x) \qquad x \in \partial D$$

である。しかも(I)，(II)により u_n は u に $\overline{D}$ で一様に収束する。従って u は $\overline{D}$ で連続で(2.24)を満たす。D 内に carrier を持つ任意の C^2 級函数 v に対し

$$\int_D u_n(x)(A^* - \alpha)v(x)m(dx)$$

$$= \int_D (A-\alpha)u_n(x)v(x)m(dx)$$

であるから、極限に行って、

$$\int_D u(x)(A^* - \alpha)v(x)m(dx) = 0$$

である。即ち、u は方程式(2.23)の弱解である。楕円型方程式では弱解が真の解になる[3]から、u は D で C^2 級で真に(2.23)を満たす。

(IV)は，u が(2.22)を満たし、境界で0で、D で方程式 $(\alpha - A)u = 0$，を満たすならば $u \equiv 0$ なることをいえばよい。これは定理2.6から明かである。

---

3) [19] p 79 (Theorem 5)．同種の定理は種々の文献に見られる。例えば [40] p 50

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

定理2.3 (II) の証明　u が (2.13) を満たし、方程式 $Au=0$、境界条件 $Lu=0$ を満たすならば、$u\equiv 0$ であることをいえばよい。

$\max_{x\in\bar{D}} u(x)$ が正とすると定理2.6により u はその値を境界上のある点 x_0 でとる。$u(x_0)=0$ ならば $Lu(x_0)=\delta(x_0)u(x_0)<0$ で　$Lu=0$ に反する；仮定 (2.4) から $u\neq$ const >0 に注意すると $u(x_0)>0$ ならば proposition 2.1 によって $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)<0$ であるから、やはり $Lu(x_0)<0$ で $Lu=0$ に反し、いずれにせよ不合理である。従って $\max_{x\in\bar{D}} u(x)\leq 0$、同様にして $\min_{x\in\bar{D}} u(x)\geq 0$ が分る。

定理2.1の uniqueness は　上で見たように、境界条件 (2.3) を満たす方程式 (2.2) の解が unique であることから、明かである。」

最後に、次のことを証明しておく。

Proposition 2.2　φ が ∂D で C^3 級ならば　$u(x)=u(x)$
$=\int_{\partial D} k_\alpha(x,y)\varphi(y)\mathfrak{m}(dy)$ は $\bar{D}$ で C^2 級である。α $=$ const ≥ 0」

証　明　$\bar{D}$ で C^3 級の函数 f を境界では φ と一致するようにとる。このような f を得るには次のようにすればよい。

$$f_j(y)=\varphi(P(y))\qquad y\in V_2(x_j)$$

$$f(y)=\sum_{j=1}^{L'} f_j(y)\lambda_j(y)^2,\qquad y\in\bar{D}$$

ここで $V_2(x_j)$、λ_j は Prop. 1.2 に現れたもの、$P(y)$ は (1.56) である。　$u=v+f$　とおくと v は

$$(\alpha-A)v(x)=-(\alpha-A)f(x)\qquad x\in D$$

$$v(x)=0,\qquad x\in\partial D$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

をみたすから、$A-\alpha$ と境界条件 $u=0$ に対する Green 函数 $g(x,y)$ によって

$$(2.29) \qquad v(x) = \int_D g(x,y)\,(A-\alpha)f(y)\,v_0(dy)$$

と表される（定理2.3）。こゝで f が C^3 級であるために $(A-\alpha)f$ が C^1 級従って一様 Hölder 連続なることを用いた。定理2.3で注意したように（2.29）から v は $\bar{D}$ で C^2 級になる。故に u も $\bar{D}$ で C^2 級。」

§3 基本解と Green 函数のいくつかの性質

§1と2で述べた基本解，Green 函数の構成法から導かれるいくつの性質を述べる。この節の結果の大部分は才4章にしか用いない。A,L に対する仮定は §1 の通りであるが，更に（1.51）をこの節ではずっと仮定しておく。$p(t,x,y)$ は (A,L) に対する基本解，$g(x,y)$ は (A,L) に対する Green 函数である。

parametrix $g(t,x,y)$ に対して t,x,y によらない const K_1，K_2 が存在して

$$(3.1) \qquad |g(t,x,y)| \leq K t^{-\frac{N}{2}} \exp \frac{-K_2 \sum_{i=1}^{N} |x^i-y^i|^2}{4t}$$

$$(3.2) \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x^j}(t,x,y)\right| \leq K_1 t^{\frac{-N-1}{2}} \exp \frac{-K_2 \sum_{i=1}^{N} |x^i-y^i|^2}{4t},$$

$$j=1 \cdots N$$

という評価が成り立つことをまず注意しておく。(x^i) は Euclid 空間の座標である。

（3.1）は，$g(t,x,y)$ の構成法（§1）からすぐ分る。

（3.2）は，$\frac{\partial g}{\partial x^j}(t,x,y)$ を実際に求めてから，

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$\frac{\partial x_{i(\alpha)}}{\partial x_j}$ が有界なこと（$(x_{i(\alpha)})$ は canonical な局所座標）と、指数函数の次の性質を使えばよい。

(3.3) 任意の n, $C'>0$ に対し C_1 C_2 が存在して

$$z^n \exp(-C'z^2) \leq C_1 \exp(-C_2 z^2) \quad z \geq 0$$

Proposition 3.1　$p(t, x, y)$ は $(0, +\infty) \times \bar{D} \times \bar{D}$ で3変数の函数として連続である。」

証　明　$q(t, x, y)$ が $(0, +\infty) \times \bar{D} \times \bar{D}$ で連続なことは作り方からすぐ分る。従って (1.33) により

(3.4) $$u(t, x, y) = \int_0^t ds \int_D q(t-s, x, z) f(s, z, y)\, m(dz)$$

の連続性をいえばよい。

任意に $0 < t_1 < t_2 < +\infty$ を固定し、$t \in (t_1, t_2)$ とする。(3.1) と、$f(t, x, y)$ が $(\frac{t_1}{2}, t_2) \times \bar{D} \times \bar{D}$ で有界なこと（これは (1.66) から分る）によって、$0 < \delta < \frac{t_1}{2}$ に対して

(3.5) $$\left| \int_{t-\delta}^t ds \int_D q(t-s, x, z) f(s, z, y)\, m(dz) \right| \leq K\delta$$

なる常数 K（t, δ, x, y によらない）が存在する。一方、δ を固定して

(3.6) $$v(s; t, x, y) = \chi_{(0, t-\delta)}(s) \int_D q(t-s, x, z) f(s, z, y)\, m(dz)$$

とおく。s を $s \neq 0, t-\delta$ に固定し $t' \to t$, $x' \to x$, $y' \to y$ とする時

$$v(s; t', x', y') \to v(s; t, x, y)$$

である。なぜなら s, z を固定した時 (1.37) で定義さ

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

れた $\ell \gamma(s,z,y)$ は y について連続（帰納法で確かめられる）（1.38）の収束の y に関する一様性から $f(s,z,y)$ も y について連続であり，しかも $\sup_{z,y\in D}|f(s,z,y)|<+\infty$ によって Lebesgue の定理が使えるからである．しかも $v(s;t,x,y)$ は (3.11) と (1.68) によって

$$|v(s;t,x,y)| \leq K_1 \delta^{-\frac{N}{2}} \int_D |f(s,z,y)| m(dz)$$

$$\leq K_1 \delta^{-\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} K^{n+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1} s^{\frac{n-1}{2}} \cdots$$

という風に s に関し $(0,t_2)$ で可積分な函数でおさえられる．従って Lebesgue の定理によって，

$$\int_0^{t_2} v(s;t',x',y')\,ds \to \int_0^{t_2} v(s;t,x,y)\,ds,$$

即ち，

$$\int_0^{t'-\delta} ds \int_D q(t'-s,x',z) f(s,z,y') m(dz)$$

(3.7)

$$\to \int_0^{t-\delta} ds \int_D q(t-s,x,z) f(s,z,y) m(dz)$$

である，(3.5) と (3.7) によって

$$u(t',x',y') \to u(t,x,y) \quad \lrcorner$$

Proposition 3.2 $f(x)$ が有界可測ならば，

$\int_D P(t,x,y) f(y) m(dy)$ は x の函数として $\bar{D}$ で連続である．[1] 」

<u>証　明</u>　　t を固定するとき，前 proposition により $P(t,x,y)$ は $\bar{D}\times\bar{D}$ で連続であるから有界である．故に Lebesgue の定理が使えて

---

1) 実は x の函数として $\bar{D}$ で C^2 級になるであろう。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$\lim_{x\to x_0}\int_D p(t,x,y)f(y)\,m(dy)=\int_D \lim_{x\to x_0} p(t,x,y)f(y)\,m(dy)$$

$$=\int_D p(t,x_0,y)f(y)\,m(dy)$$

である。」

次に、準備として、微分と積分の交換に関する一般的 lemma をあげる。

Lemma 3.1 (M, m) を測度空間とし、$R^1\times M$ の函数 $f(z,\alpha)$ が z を固定した時 m 可積分、α を固定した時 z に関し C^1 級で、

(3.8) $\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,\alpha)\right|\le h(\alpha)$

なる m 可積分函数 $h(\alpha)$ が存在するとする。この時

(3.9) $g(z)=\int_M f(z,\alpha)\,m(d\alpha)$

は C^1 級で

(3.10) $\frac{dg(z)}{dz}=\int_M \frac{\partial f}{\partial z}(z,\alpha)\,m(d\alpha)$

証明

$$\frac{g(z+\xi)-g(z)}{\xi}=\int_M \frac{f(z+\xi,\alpha)-f(z,\alpha)}{\xi}\,m(d\alpha)$$

$$\left|\frac{f(z+\xi,\alpha)-f(z,\alpha)}{\xi}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z+\theta\xi,\alpha)\right|\le h(\alpha)$$

$$0<\exists\theta<1$$

であるから $\xi\to 0$ として Lebesgue の定理を使うと、(3.10) を得る。これが z について連続なことも (3.8) とし Lebesgue の定理から出る。」

Proposition 3.3 $h(t,x)$ を $(0,+\infty)\times\bar{D}$ で有界可測とすると、

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(3.11)\qquad u(t,x)=\int_0^t ds\int_D p(t-s,x,y)\,h(s,y)\,m(dy)$$

が存在して $x\in\overline{D}$ に関し C級である。しかも任意のTに対し

$$(3.12)\qquad \sup_{\substack{0<t\leq T\\ x\in\overline{D}}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)\right|<+\infty\ \lrcorner$$

<u>証 明</u>

基本解 $p(t,x,y)$ は

$$(3.13)\qquad p(t,x,y)=q(t,x,y)$$
$$+\int_0^t ds\int_D q(t-s,x,z)\sum_{n=0}^{\infty}e_n(s,z,y)\,m(dz)$$

である（(1.33)参照）が、これは

$$(3.14)\qquad p(t,x,y)=q(t,x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{e}_n(t,x,y)$$

とかける。ただし

$$(3.15)\qquad \overline{e}_n(t,x,y)=\int_0^t ds\int_D q(t-s,x,z)\,e_{n-1}(s,z,y)\,m(dz)$$

とする。実際、(3.1) と (1.61) から

$$\int_D|q(t-s,x,z)||e_n(s,z,y)|\,m(dz)$$
$$\leq K^{n+2}\left(\frac{4\pi}{K_2}\right)^{\frac{(n+1)N}{2}}K_3^{\,n+1}$$
$$\cdot\prod_{\nu=1}^{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)s^{\frac{n-1}{2}}t^{\frac{-N}{2}}\exp\frac{-K_2\sum_{i=1}^{N}|x^i-y^i|^2}{4t}$$

従ってある const. K により

$$\int_0^t ds\int|q(t-s,x,z)||e_n(s,z,y)|\,m(dz)$$
$$\leq K^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1}t^{\frac{n-N+1}{2}}$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

と書け、右辺の n についての和は有限であるから．Fubini の定理を適用できたのである。

(3.15) を微分すると．

(3.16) $$\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial x^j}(t, x, y) = \int_0^t ds \int_D \frac{\partial q}{\partial x^j}(t-s, x, z)\, e_{n-1}(s, z, y)\, m(dz)$$

である．実際

$$\bar{\bar{e}}_n(s, t, x, y) = \int_D q(t-s, x, z)\, e_{n-1}(s, z, y)\, m(dz)$$

とおくと．

$$\frac{\partial \bar{\bar{e}}_n}{\partial x^j}(s, t, x, y) = \int_D \frac{\partial q}{\partial x^j}(t-s, x, z)\, e_{n-1}(s, z, y)\, m(dz)$$

で．$0 < s < \frac{t}{2}$ では (3.2) により．

(3.17) $$\left|\frac{\partial \bar{\bar{e}}_n}{\partial x^j}(s, t, x, y)\right| \leq k_1 \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{-N-1}{2}} \int_D |e_{n-1}(s, z, y)|\, m(dz)$$

$\frac{t}{2} \leq s < t$ では

(3.18) $$\left|\frac{\partial \bar{\bar{e}}_n}{\partial x^j}(s, t, x, y)\right| \leq k_1 \left(\frac{4\pi}{k_2}\right)^{\frac{N}{2}} k_3 (t-s)^{\frac{-1}{2}} \sup_{\substack{s \in (t/2, t] \\ z \in \bar{D}}} |e_{n-1}(s, z, y)|$$

が成り立ち．(1.61) により (3.17) の右辺は $s \in (0, \frac{t}{2})$ で可積分 (3.18) の右辺は有界であるから．Lemma 3.1を適用でき (3.16) を得る。(3.16) から (3.2) と (1.61) により．

(3.19) $$\left|\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial x^j}(t, x, y)\right| \leq k_1^{n+1} \left(\frac{4\pi}{k_2}\right)^{\frac{nN}{2}} k_3^n \prod_{\nu=1}^{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right) t^{\frac{n-N-1}{2}} \exp \frac{-k_2 \sum_{i=1}^{N} |x^i - y^i|^2}{4t} \leq k^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1} t^{\frac{n-N-1}{2}}$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

で(3.19)の右辺のnについての和は有限であるから、再び Lemma 3.1を適用できて、

$$\frac{\partial p}{\partial x^d}(t,x,y)=\frac{\partial q}{\partial x^d}(t,x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial e_n}{\partial x^d}(t,x,y) \tag{3.20}$$

を得る。しかも(3.19)により Const k' が存在して $t \in (0,T]$ では

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial e_n}{\partial x^d}(t,x,y)\right| \leq k' t^{-\frac{N}{2}} \exp\frac{-k_2 \sum_{i=1}^{N}|x^i-y^i|^2}{4t} \tag{3.21}$$

である。

Proposition の証明にうつる。

$$v(s,t,x)=\int_D p(t-s,x,y)\,h(s,y)\,m(dy) \tag{3.22}$$

とおく。vが存在して有界だから(3.11)のuの存在は明らか、vが$x\in\overline{D}$に関しC^1級で、

$$\frac{\partial v}{\partial x^d}(s,t,x)=\int_D \frac{\partial p}{\partial x^d}(t-s,x,y)\,h(s,y)\,m(dy) \tag{3.23}$$

なることは上の評価から明らかである。
hの有界性と(3.2)と(3.21)により

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x^d}(s,t,x)\right| \leq K''(t-s)^{-\frac{1}{2}}+K''' \tag{3.24}$$

であるから、Lemma 3.1が適用でき、

$$\frac{\partial u}{\partial x^d}(t,x)=\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x^d}(s,t,x)\,ds \tag{3.25}$$

で、しかも(3.12)が成り立つ。」

Proposition 3.4 (2.4)を仮定する。$h(x)$を$\overline{D}$で有界可測とすると、

$$u(x)=\int_D g(x,y)\,h(y)\,m(dy) \tag{3.26}$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

は $\bar{D}$ で C' 級である。」

証明　const $\alpha>0$ に対し $(A-\alpha.L)$ の Green 函数を $g_\alpha(x.y)$ とし、

(3.27) $$u_\alpha(x)=\int_D g_\alpha(x.y)\,k(y)\,m(dy)$$

とおく。Proposition 1.3 と (2.5) によって

$$u_\alpha(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\int_D p(t.x.y)\,k(y)\,m(dy)$$

である。

$$v(t.x)=\int_D p(t.x.y)\,k(y)\,m(dy)$$

とおくと x について $\bar{D}$ で C' 級で

$$\frac{\partial v}{\partial x^i}(t.x)=\int_D \frac{\partial p}{\partial x^i}(t.x.y)\,k(y)\,m(dy)$$

であることは Proposition 3.3. の証明の中で云った。

(3.2), (3.19), (3.20) により

(3.28) $$\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}(t.x)\right|\le k_1\left(\frac{4\pi}{k_2}\right)^{\frac{N}{2}}K_3K_4t^{-\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(k_1^{n+1}\left(\frac{4\pi}{k_2}\right)^{\frac{(n+1)N}{2}}K_3^{n+1}K_4t^{\frac{n-1}{2}}\prod_{\nu=1}^{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)\right]$$

である。たゞし、k_3 は $\sqrt{a(y)}$ を、k_4 は $|k(y)|$ をおさえる const とする。$K_1\left(\frac{4\pi}{k_2}\right)^{\frac{N}{2}}K_3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=K$ とおくと (1.15) により (3.28) は次のようにかける。

(3.29) $$\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}(t.x)\right|\le k_4\sum_{n=0}^{\infty}K^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1}t^{\frac{n-1}{2}}$$

α を $\sqrt{\alpha}>K$ にとれば、

$$\int_0^\infty\left(k_4\sum_{n=0}^{\infty}K^{n+1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1}t^{\frac{n-1}{2}}\right)e^{-\alpha t}dt=k_4\sum_{n=0}^{\infty}K^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$<+\infty$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

なぜなら

$$\int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}} e^{-\alpha t}\,dt = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

だからである。故に Lemma 3 1 によって u_α は $\bar{D}$ で C^1 級である。定理 2 4 (I) により、u は u_α を用いて

$$u(x) = u_\alpha(x) + \alpha\int_D g_\alpha(x,y)\,u(y)\,m(dy)$$

と書けるから、u も $\bar{D}$ で C^1 級である。」

§4 反射壁 吸収壁の process の構成

A は微分しない項を含まない、すなわち $c \equiv 0$ とする。

A と境界条件 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ に対する基本解を $p^+(t,x,y)$ と書き、A と境界条件 $u = 0$ に対する基本解を $p^0(t,x,y)$ と書く。W_C は第1章 §1 で定義した path space とする。ただし、S として $\bar{D}$ をとる。

定理 4 1 $\{p^+(t,x,y)\,m(dy)\}$ を遷移確率系とし、W_C を path space とし、強 Markov 性をもつような Markov 過程 $M^+ = (W_C, \mathcal{B}(W_C), P_x : x \in \bar{D})$ が存在する。」

定義 4 1 M^+ を(A から決まる)反射壁の process という。」

この定理を証明するためにまず

Lemma 4 1 $\mathcal{F} = \{u \in C^2(\bar{D});\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}$ とおく。$u \in \mathcal{F}$ ならば、$x \in \bar{D}$ に関する一様収束で

(4 1) $$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\left(\int p^+(t,x,y)\,u(y)\,m(dy) - u(x)\right) = Au(x)$$

が成立つ。」

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

<u>証 明</u> まず $\mathfrak{F}$ が $C(\bar D)$ で dense なことを云う。任意に $f\in C(\bar D)$ と $\varepsilon>0$ が与えられたとする。$\tilde g\in C^2(\partial D)$ を

$$\left|f(x)-\tilde g(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4},\quad x\in\partial D$$

にとり、

$$g_j(y)=\tilde g(P(y))\qquad y\in V_2(x_j)$$

$$g(y)=\sum_{j=1}^{L} g_j(y)\,\lambda_j(y)^2\qquad y\in\bar D$$

とおく。($V_2(x_j)$, λ_j の定義は Prop 1 2 を参照 $P(y)$ は (1.56)) $\bar D$ における x の近傍 $W(x)$ を

$$|f(y)-f(x)|,\ |g(y)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{4},\quad y\in W(x)$$

にとれば、

$$|f(y)-g(y)|<\frac{3\varepsilon}{4}\qquad y\in\bigcup_{x\in\partial D}W(x)$$

で、しかも $g\in\mathfrak{F}$ である。次に $h\in C^2(\bar D)$ を

$$|f(y)-g(y)-h(y)|<\varepsilon\qquad y\in\bar D$$

でかつ、∂D の近傍で 0 にとれば $g+h$ が $\mathfrak{F}$ に属しかつ、$\|f-(g+h)\|<\varepsilon$ である。故に $\mathfrak{F}$ は dense。

定理23により f が $\bar D$ で一様 Hölder 連続ならば $(\alpha-A)u=f$ なる $u\in\mathfrak{F}$ が存在して唯一つである。しかも定理22により $\|u\|\le\frac{1}{\alpha}\|f\|$ である。従って Hille－吉田の定理（第1章定理22 なお第3章 Prop 21 を参照）により A を $\mathfrak{F}$ へ制限したものの closure が $C(\bar D)$ 上のある強連続半群 T_t の generator になっている。故に $u\in\mathfrak{F}$ ならば ノルムの意味で

$$\frac{1}{t}(T_t u-u)\to Au,\quad t\downarrow 0 \text{ である。}$$

次に、

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(4.2)\quad T_t f(x) = \int_D p^t(t, x, y) f(y)\, m(dy)$$

をいえば証明が終る。

$$v(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_D p^t(t, x, y) f(y)\, m(dy)$$

とおくと、定理2.3とProp 1.3によって、$v \in \mathfrak{D}$かつ$(\alpha - A)u = f$であるから

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f(x)\, dt$$

である。

$T_t f(x)$も$\int_D p^t(t, x, y) f(y)\, m(dy)$も$t$に関し右連続であるから、Laplace逆変換の一意性により(4.2)が成り立つ。」

定理4.1の証明　オ1章の定理1.2と定理3.1によりオ1章の(1.2) (1.3) (1.7) (1.8) (2.2)をいえばよい。このうち(1.8)以外は§1でいってある。

以下(1.8)を証明する。

$x \in \bar{D}$と$\varepsilon > 0$を任意にとる。$\bar{D}$におけるxの近傍を$U_\varepsilon(x)$とする。$u(y)$を$u \in \mathfrak{D}$, $0 \le u \le 1$　xのある近傍Vで$u = 0$, $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)^c$で$u = 1$にとる。[1]（このような$u$の作り方はProp 1.2の証明と同様）$y \in V$ならば$\chi_{U_\varepsilon(y)^c} \le u$である。なぜならば$z \in U_\varepsilon(y)^c$ならば$dis(z, x) \ge dis(z, y) - dis(y, x) \ge \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$により$u(z) = 1$であるから。従ってLemma 4.1により

$$\sup_{y \in V} \frac{1}{t} \int_{U_\varepsilon(y)^c} p^t(t, y, z)\, m(dz) \le \sup_{y \in V} \frac{1}{t} \int_{\bar{D}} p^t(t, y, z) u(z)\, m(dz)$$

1) cは$\bar{D}$に関するcomplementを表す。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$\le \max_{y\in\bar{D}} \left| \frac{1}{t}\int_{\bar{D}} p^{+}(t, y, z)\, u(z)\, m(dz) - u(y) - Au(y) \right|$$

$\to 0$ である。あとは $\bar{D}$ の compact 性により才1章 (1.8) がいえる。」

$w \in WC$ に対し

$$(4.3)\quad \sigma_{\partial D}(w) = \begin{cases} \inf\{t \ge 0;\ x_t(w) \in \partial D\} & \{\ \}\text{内が} \ne \phi \text{の時} \\ +\infty & \{\ \}\text{内が} \phi \text{の時} \end{cases}$$

とおくと、$\sigma_{\partial D}$ は Markov time である。[2] S として D をとって才1章§1で W_C, $\mathbb{B}(W_C)$ とおいた path space をこの節では W°, $\mathbb{B}^{\circ}$ と記す。写像 $\varphi: W_C \ni w \to \varphi(w) \in W^{\circ}$ を

$$x_t(\varphi(w)) = \begin{cases} x_t(w), & t < \sigma_{\partial D}(w) \\ \infty, & t \ge \sigma_{\partial D}(w) \end{cases}$$

によって定義すると、φ は $(\mathbb{B}(W_C), \mathbb{B}^{\circ})$ 可測である。

$P_x^{\circ}(B) = P_x(\varphi^{-1}(B))$ と定義する。P_x° による積分を E_x° で表す。$E_x^{\circ}(f) = E_x(f\circ\varphi)$ である。

<u>Proposition 4.1</u>　$M^{\circ} = (W^{\circ}, \mathbb{B}^{\circ}, P_x^{\circ};\ x \in D^{\circ}\cup\{\infty\})$ は Markov 過程である。」

<u>証　明</u>　才1章§1 の $(P1)$ $(P2)$ は明らかであるから Markov 性 $(P3)$ をいえばよい。これは M^{+} の強 Markov 性による[3] $s < t$, $E \in \mathbb{B}(D)$, $B \in \mathbb{B}_s^{\circ}$ とする。$\varphi^{-1}(B) \in \mathbb{B}_{s+}$ である。なぜなら $\varphi^{-1}(\{w \in W^{\circ};\ x_u(w) \in F\}) = \{w \in W_C;\ x_u(w) \in F, \sigma_{\partial D}(w) > u\} \in \mathbb{B}_{st}$, $u \le s$ であるから。

---

2) [15] p.21 参照

3) 強マルコフ性といっても ここで使うのは単に constant time s に関する次の性質である。
$P_x(w \in B_1, w_s^{+} \in B_2) = E_x(P_{x_s(w)}(B_2);\ B_1)$, $B_1 \in \mathbb{B}_{s+}$, $B_2 \in \mathbb{B}(W_C)$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$P_x^0(x_t\in E,B)=P_x(x_t\in E\ \sigma_{\partial D}>t,\ \varphi^{-1}(B))$$
$$=P_x(x_{t-s}(w_s^+)\in E.\ \sigma_{\partial D}(w_s^+)>t-s\ \ \sigma_{\partial D}(w)>s\ \ \varphi^{-1}(B))$$
$$=E_x(P_{x_s(w)}(x_{t-s}\in E,\sigma_{\partial D}>t-s)\ ;\ \sigma_{\partial D}>s.\ \varphi^{-1}(B))$$
$$=E_x^0(P^0_{x_s(w)}(x_{t-s}\in E)\ ;\ B).$$

すなわち（P.3）がいえた。」

<u>定義 4.2</u>　M^0 を（A から決まる）吸収壁の process という。」

<u>Lemma 4.2</u>　Uを$\bar{U}\subset D$なる領域とし，$\sigma_{\partial U}$ を（4.3）と同様に定義する。その時 $E_x(\sigma_{\partial U})\leq K$，$x\in U$なる const．$K<+\infty$ が存在する。

<u>証　明</u>　M^+ の generator を $\mathcal{G}$ とする．f を$\bar{D}$でC^2級でUで$Af\geq 1$，しかも $\mathrm{Car}\,C f)\subset D$ にとる。$f\in\mathcal{D}(\mathcal{G})$ であるから，第1章定理3.2により，

$$E_x\left(\int_0^{\sigma_{\partial U}\wedge n}Af(x_t)dt\right)=E_x(f(x_{\sigma_{\partial U}\wedge n}))-f(x)$$

である．左辺 $\geq E_x(\sigma_{\partial U}\wedge n)$ だから $E_x(\sigma_{\partial U}\wedge n)\leq 2\|f\|$ である．$n\uparrow\infty$とすれば $E_x(\sigma_{\partial U})\leq 2\|f\|$ を得る．」

<u>Proposition 4.2</u>　M^0の遷移確率は $\{P^0(t,x,y)\,m(dy)\}$ である，

<u>証　明</u>　$C_0(\bar{D})$ を ∂D で 0となる$\bar{D}$上の連続函数の全体とする，これは $C(\bar{D})$ の閉部分空間である，$T_t^0f(x)=\int_D P^0(t,x,y)f(y)\,m(dy)$ とおくと，定理1.3により T_t^0 は $C_0(\bar{D})$ を $C_0(\bar{D})$ 内に写す強連続半群である．T_t^0 の generator を $\mathcal{G}^0$ とする．Aを $\mathcal{F}=\{f\in C_0(\bar{D})\,;\,f$ は$\bar{D}$でC^2級 で $Af\in C_0(\bar{D})\}$ に制限したものの closure が丁度 $\mathcal{G}^0$ であることが Lemma 4.1 の証明中で使ったのと同じ方法

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

で分る。

M^* の半群が有界可測函数を連続函数に写すこと(Proposition 3.2)とDの境界の正則性とから $f \in C_0(\bar{D})$ ならば $E_x^0(f(x_t))$ は x の函数として D で連続であり、x が ∂D 上の点に近づく時0に収束することが分る(Girsanov〔8〕)。

依って $T_t' f(x) = E_x^0(f(x_t))$ とおくと T_t' は $C_0(\bar{D})$ の上の mapping と考えることが出来る。各点 $x \in D$ に対し

$$E_x^0(f(x_t)) - f(x) = (E_x(f(x_t)) - f(x)) - (E_x(f(x_t)) - E_x^0(f(x_t))) = o(1) + \|f\| P_x(\sigma_{\partial D} \leq t) = o(1) \quad t \downarrow 0$$

であるから、T_t' は $C_0(D)$ の上の強連続半群である[4)](オ1章定理21に対して述べたことを参照。そこでは state space が compact の場合を扱っているが、今の場合も同様である。)

その generator を $\mathcal{G}'$ とする。T_t' はD上の有界連続函数を有界連続函数に写す(Girsanov〔8〕)から強Markov性をもち(オ1章定理31)

従って $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}')$ $x \in D$ に対し

$$\lim_{U \downarrow x} \frac{E_x^0(f(x_{\sigma_{\partial U}})) - f(x)}{E_x^0(\sigma_{\partial U})} = \mathcal{G}' f(x) \tag{4.4}$$

である(オ1章定理33と同節の注意参照、$E_x^0(\sigma_{\partial U}) < +\infty$ は Lemma 4.2 による)。(4.4)の左辺が存在しその極限値 $g(x)$ がD上で連続で $\lim_{x \to \partial D} g(x) = 0$ であるような $f \in C_0(\bar{D})$ の全体を $\mathcal{D}(\mathcal{G}'')$ とし、$g = \mathcal{G}'' f$ とする。$\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}''$ である。

α を正の const とすると、$\alpha - \mathcal{G}'$ は明らかに $\mathcal{D}(\mathcal{G}')$ か

---

4) ここでは $P_x(\sigma_{\partial D} \leq t) = o(1)$ のみを用いたが、くわしく吟味すると $P_x(\sigma_{\partial D} \leq t) = o(t)$、$x$ に関しDで広義一様がいえる。Nelson〔 〕pp.418-419 参照

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

ら $C_0(\bar{D})$ への1対1写像であり一方、$\alpha-\mathcal{G}'$ は $\mathcal{D}(\mathcal{G}')$ から $C_0(\bar{D})$ への1対1, onto の写像であるから. $\mathcal{G}''=\mathcal{G}'$ である,

次に $\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{G}''$ をいう。$f \in \mathfrak{F}$ とする。x の近傍 V を $\bar{V} \subset D$ にとる, g を V で f と一致し

$Car(g) \subset D$. $\bar{D}$ で C^2 級にとれば、g は M^+ の generator $\mathcal{G}$ の定義域に属し $\mathcal{G}g = Ag$ であるから.

$$\frac{E_x^0(f(x_{\sigma_{\partial U}}))-f(x)}{E_x^0(\sigma_{\partial U})} = \frac{E_x(f(x_{\sigma_{\partial U}})-f(x))}{E_x(\sigma_{\partial U})}$$

$$= \frac{E_x(g(x_{\sigma_{\partial U}}))-g(x)}{E_x(\sigma_{\partial U})} \xrightarrow[U \downarrow x]{} Ag(x) = Af(x)$$

故に $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G}'')$ で $\mathcal{G}''f = Af = \mathcal{G}^0 f$ である, $\mathcal{G}'=\mathcal{G}''$ は closed operator であるから $\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{G}'' = \mathcal{G}$ になる。
$\alpha - \mathcal{G}^0$ が onto $\alpha - \mathcal{G}^0$ が 1対1 であるから $\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}$ である。故に $T_t^0 = T_t'$ である。」

Proposition 43

$P_x^0(\sigma_\infty < +\infty$ かつ $\lim_{t \uparrow \sigma_\infty} x_t$ が存在して ∂D 上の点$) = 1$, $x \in D$

説明 $P_x^0(\sigma_\infty > t)$ は t に関し単調減少であり. また、Prop 42 と定理21 によって

$$P_x^0(\sigma_\infty > t) = \int_D p^0(t, x, y)\, m(dy)$$

$$\int_0^\infty P_x^0(\sigma_\infty > t)\, dt = \int_0^\infty dt \int_D p^0(t, x, y)\, m(dy) < +\infty$$

であるから. $\lim_{t \to \infty} P_x(\sigma_\infty > t) = 0$。 従って

$P_x^0(\sigma_\infty < +\infty) = 1$ である。これをいいかえると、確率1で $\lim_{t \uparrow \sigma_\infty} x_t(w)$ が存在して ∂D 上の点になることは M^0 の作り方から明か。」

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$\{p^0(t,x,y)\,m(dy)\}$ を遷移確率とする process は、内部での行動が A で表されるような process の中で最も簡単なものと考えられる。

われわれが今構成した M^0 が丁度 $\{p^0(t,x,y)\,m(dy)\}$ を遷移確率とする process ではあるが、これは反射壁の process M^+ を境界で殺すというやり方で作ったから、反射壁の process というはるかに複雑な構造を持つものを途中で使っている。このようなものを途中に使わずに、基本解は $p^0(t,x,y)$ だけを用いて $\{p^0(t,x,y)\,m(dy)\}$ を遷移確率とする process を構成することが望ましい。その際、構成した process は path が D 上で連続でしかも、$\lim_{t\uparrow\sigma_\infty} x_t$ が ∂D 上の点として確定しなければならない。

なお Proposition 4.2 の証明は 相当重要な点を Girsanov 〔8〕 の結果に頼っているので、不満足なものである。

境界 ∂D 上の連続函数 φ を任意に与える時 φ に対する Dirichlet 問題の解 u すなわち $\bar{D}$ で連続 D で C^2 級で

(4.5) $\quad Au(x)=0 \qquad x\in D,$

(4.6) $\quad u(x)=\varphi(x), \qquad x\in\partial D$

なる函数 u が存在してただ一つであることは §2 で述べた。u を吸収壁の process を使って表そう。

Proposition 4.4

$u(x)=E_x^0(\varphi(x_{\sigma_\infty -})),\quad x\in D$

ただし $x_{\sigma_\infty -}=x_{\sigma_\infty}(w)-=\lim_{t\uparrow\sigma_\infty(w)} x_t(w)$ とする。

証明 D_n を D を内側から近似する領域の列で、境界が十分滑かとする。u を $D-D_n$ で修正して C^2 級かつ ∂D で 0 として容易に確かめられるように

$$E_x^0\left(\int_0^{\sigma_{\partial D_n}} Au(x_t)\,dt\right)=E_x^0\left(u(x_{\sigma_{\partial D_n}})\right)-u(x).$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$x \in D_n$ である（Lemma 42 を使う）。右辺は (4.5) により 0 だから $u(x) = E_x^0(u(x_{\sigma_{\partial D_n}}))$ を得る。$n \to \infty$ とすると、$x_{\sigma_{\partial D_n}}$ は境界に近づくから M^0 の構成法から明らかなように

$\lim \sigma_{\partial D_n} = \sigma_\infty$ 従って

$$u(x) = E_x^0(u(x_{\sigma_\infty -})) = E_x^0(\varphi(x_{\sigma_\infty -}))$$

である。

一方、u は定理 25 で述べたように函数 $h(x,y)$ $x \in \bar{D}$ $y \in \partial D$ を用いて $u(x) = \int_{\partial D} h(x,y)\varphi(y)\, m(dy)$ と表わされるから

次のことが分る。

<u>Corollary</u> $\int_E h(x,y)\, \tilde{m}(dy) = P_x(x_{\sigma_\infty} \in E)$

$h(x,y)\,\tilde{m}(dy)$ による積分 operator は後にしばしば用いられるが、それは上のような確率論的意味を持っているのである。$A - \alpha$ に対する Dirichlet 問題の解 u_α も、$A - \alpha$ に対する process を構成すれば同様に表される。u_α を M^0 を使って表せば $u_\alpha(x) = E_x^0(e^{-\alpha\sigma_\infty}\varphi(x_{\sigma_\infty -}))$ である。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

第3章 Wentzell の境界条件をみたす diffusion の構成

§1 解法の概略

方程式

$$(1.4.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Au \quad [1]$$

できまる diffusion をすべて求めるという問題を Wentzell に従って定式化したが [2], これを第1章§2でのべた resolvent operator のことばで云えば $C(\bar{D})$ 上の linear 的な operator G_α の系 $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$ で

$$(1.2.18) \quad u \geqq 0 \quad \text{ならば} \quad G_\alpha u \geqq 0$$

$$(1.2.19) \quad G_\alpha 1 \leqq \frac{1}{\alpha}$$

$$(1.2.20) \quad G_\alpha u - G_\beta u + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta u = 0$$

$$(1.2.21) \quad \alpha G_\alpha u \longrightarrow u \quad (\alpha \to \infty)$$

$$(1.1) \quad (\alpha - \bar{A}) G_\alpha u = u, \quad u \in C(\bar{D})$$

をみたすものをすべて求めることである。所でもしもこのような条件をみたす $\{G_\alpha\}$ があるならば、$\{G_\alpha\}$ できまる半群の generator の domain に入る函数 乃ち $\mathcal{R}(G_\alpha)$ に入る十分なめらかな函数に対して、才1章定理5.1でのべ

1) 才1章(4.2) ただしAの中の係数に対する仮定は、本章では、才2章と同じである。

2) 才1章§4参照。そこでのべたようにこれは十分満足すべき定式化とは云えない。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

たように，ある条件をみたすLが存在して

$$(1.2)\quad Lu(x)=0,\ x\in\partial D,\ u\in\mathcal{R}(G_\alpha)\wedge C^3(\bar{D})$$

が成立する。この章では，第1章定理5，1と逆に，与えられたAとLに対して適当な条件がみたされれば、上のような性質をみたす *resolvent operator* の系が，従ってこれに対応する Markov process が存在することを証明しよう。

厳密な叙述に入るまえに解の構成法について *rough* な説明をする。これは1次元の *diffusion* のばあいのW.Feller [5]の *idea* を一般化したものである。第2章でこの節の最初の方程式と境界条件

$$u(x)=0,\quad x\in\partial D$$

できまる所謂吸収壁をもつ *diffusion* を考えたが，これの *resolvent* を G_α^0 とする。これに対しても（1.2.18）～（1.2.20）および（1.1）の成立することは前にのべた。G_α^0 の存在はすでに判っているから，G_α が求まるためには G_α と G_α^0 の差

$$v=G_\alpha u-G_\alpha^0 u$$

が各 u に対してもとまればよい。今，求める $\{G_\alpha\}$ が存在したとしよう。性質（1.1）と（1.2）に注意すればこの v は

$$(1.3)\quad (\alpha-\bar{A})v=(\alpha-\bar{A})G_\alpha u-(\alpha-\bar{A})G_\alpha^0 u=u-u=0$$

$$(1.4)\quad Lv(x)=LG_\alpha u(x)-LG_\alpha^0 u(x)=-LG_\alpha^0 u(x),\quad x\in\partial D$$

を満すはずである。v のなめらかさを適当に仮定すれば $\bar{A}v=Av$ であるから（1.3）に注意すれば　第2章定理

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

2,5 によって vは境界値 $[v]_{\partial D}$ [3] だけで定まり

$$(1.5) \qquad v = H_\alpha [v]_{\partial D}$$

と表される。これと(1.4)と合せれば

$$Lv(x) = LH_\alpha [v]_{\partial D}(x) = -LG_\alpha^0 u(x), \quad x \in \partial D$$

$f \in C(\partial D)$に対して $f \to LH_\alpha f = L(H_\alpha f) \in C(\partial D)$ を $C(\partial D)$上の operator と考えて，これの inverse $(LH_\alpha)^{-1}$ がもしも存在するなら上の式から

$$[v]_{\partial D}(x) = -(LH_\alpha)^{-1}(LG_\alpha^0 u)(x)$$

従って vの定義と(1.5)によって

$$v = -H_\alpha (LH_\alpha)^{-1}(LG_\alpha^0 u)$$

ゆえに$G_\alpha u$はつぎのように表わされる。

$$(1.6) \qquad G_\alpha u = G_\alpha^0 u - H_\alpha (LH_\alpha)^{-1}(LG_\alpha^0 u)$$

上の計算から、実際にLが与えられた時、条件を満す$\{G_\alpha\}$の存在を示す方法として次のような手順が考えられる。まず$(LH_\alpha)^{-1}$が定義できるために $f \in C(\partial D)$に対して 方程式

$$(1.7) \qquad LH_\alpha g = f$$

の意味を確定し、これが unique な解gをもつことを示すこと。つぎに

$$u \longrightarrow LG_\alpha^0 u, \quad u \in C(\bar{D})$$

の意味を確定すること。最後にこれらを用いて(1.6)で定義

3) これから先も $[\quad]_{\partial D}$ をこの意味につかう。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

されたG_αが$C(\bar{D})$上の operator であって(1.1)(1.2)以外の条件をも満すことを調べることが必要である。以下、§2では方程式(1.7)を扱い、§3ではG_αの正確な定義と条件の check を行う。§2の結果と古典的な境界値問題に関する結果とを用いるとLH_αは integro-differential operator として表されるのであって，このことを§4で証明し、その応用として§5でいくつかの実例について解が構成できることを示す。一次元のばあいには方程式(1.7)は2元連立の1次方程式に相当する。$(LH_\alpha)^{-1}$は従って二次の正方行列で与えられ常に存在することが判っている。4)
我々のばあい解の存在は一般には明らかでない。

§2 方程式 $LH_\alpha g = f$

第1章でのべたよりもやゝ一般に

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_x^i \partial \xi_x^j}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x) \frac{\partial u}{\partial \xi_x^i}(x) + \overset{ガンマ}{\gamma}(x) \cdot u(x) + \delta(x) \lim_{y \to x} Au(y) + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \int_{\bar{D}} \Big[u(y) - u(x) - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial u}{\partial \xi_x^i}(x) \xi_x^i(y) \Big] \nu_x(dy)$$

が与えられたとする。各項のもつ性質は第1章定理5.1でのべたのと同じものとする。ただし、$\{\xi_x^i(y)\}$は次のようにして得たものとする。まずxの近傍に canonical な局所近傍$\{\bar{y}^i\}$をとる。$\bar{y}^i = \varphi^i(y)$とする。xの近傍では$\xi_x^i(y) = \varphi^i(y) - \varphi^i(x)$とおき，これを第1章§5に述べた条件を

4). W. Feller [5] 参照

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

みたすように$\bar{D}$上に拡張する。

$u \in C^2(\bar{D})$であれば、各点$x \in \partial D$に対して$Lu(x)$は確定する。実際最終項を除けば uは$\bar{D}$で2回微分可能だから$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_x^i \partial \xi_x^j}$, $\frac{\partial u}{\partial \xi_x^i}$, $Au(y)$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ などはすべて定まる。最終項について云えば、xの近傍U_xを適当にえらんでuのxにおけるTaylor展開を行えば、

$$u(x) = u(y) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial \xi_x^i}(x)\xi_x^i(y) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_x^i \partial \xi_x^j}(x) \cdot$$

$$\cdot \left(\xi_x^i(y)\right)^2 + o\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_x^i(y)\right)^2\right), \ y \in U_x$$

であるから $y \in U_x$に対しては

$$u(x) - u(y) - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial x}{\partial \xi_x^i}(x)\xi_x^i(y) = \frac{\partial u}{\partial \xi_x^N}(x)\xi_x^N(y)$$

$$- \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_x^i \partial \xi_x^j}\left(\xi_x^i(y)\right)^2$$

$$+ o\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_x^i(y)\right)^2\right)$$

が成り立つ。そこで第1章定理5.1でのべた条件

$$\int_{U_x}\left[\xi_x^N(y) + \sum_{i=1}^{N-1}\left(\xi_x^i(y)\right)^2\right]\nu_x(dy) < \infty,$$

を用いれば U_x上の積分が確定することは判る。また最終項の被積分函数が有界なことと、ν_xに関する今ひとつの条件

$$\nu_x(\bar{D} - U_x) < \infty$$

とから $\bar{D} - U_x$における積分が確定する。従って、$\bar{D}$にお

ける積分が定まる。

$\bar{D}$上の函数uに対して$Lu(x)$が各$x\in\partial D$に対して定まるなら

$$u \longrightarrow Lu(x)$$

は$\bar{D}$上の函数uから∂D上の函数への *mapping* が与えられたと考えることが出来る。*mapping* としての意味を明確にするために

$$\mathcal{D}(L)=\{u\in C(\bar{D})\,;\,Lu(x)\in C(\partial D)\}$$

とし、以下ではLは$\mathcal{D}(L)$から$C(\partial D)$への *mapping* と考えることにしよう。$Lu(x)$が連続かどうかは(3.8)の各項の性質に依存しているから、$\mathcal{D}(L)=\phi$なることもあり得る。そこで次のことを仮定する。

<u>Lに対する仮定</u>[1]　i) $u\in C^2(\bar{D})$ならば$Lu\in C(\partial D)$ 即ち $C^2(\bar{D})\subset\mathcal{D}(L)$　ii) $\mu(x)+|\delta(x)|=0$なる$x\in\partial D$に対しては$\nu_x(D)=\infty$

$f\in C(\partial D)$に対して$H_\alpha f\in C(\bar{D})$であるが、特に$H_\alpha f\in\mathcal{D}(L)$ならば$L(H_\alpha f)\in C(\partial D)$であるから、このばあい、$f$に$C(\partial D)$の函数を対応させる *mapping* が得られることになる。これを次のように定義する。

$$\mathcal{D}(LH_\alpha)=\{f\in C(\partial D)\,;\,H_\alpha f\in\mathcal{D}(L)\},$$
$$LH_\alpha f=L(H_\alpha f),\quad f\in\mathcal{D}(LH_\alpha)$$

1) Lに対する仮定のii)は定理2.1の議論では全く必要でない。定理2.2の結論を得るためには$\mu(x)+|\delta(x)|+\nu_x(D)>0$があればよい。§3で$G_\alpha$を定義する場合にもこれだけで十分なのであって、ii)が本当に必要になるのは$\alpha G_\alpha u\to u\ (\alpha\to\infty)$すなわち半群が$u$に関する強連続性をもつための保障としてである。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

LH_α の2種類の restriction $\widehat{LH_\alpha}$ および $\widehat{\widehat{LH_\alpha}}$ を次のように定義しておく。

$$\widehat{LH_\alpha} f = LH_\alpha f, \text{ for } f \in \mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha}) = \{f \in C(\partial D);\ H_\alpha f \in \mathcal{D}(L) \wedge C^{(H)}(\bar{D})\}$$

$$\widehat{\widehat{LH_\alpha}} f = LH_\alpha f \quad \text{for } f \in \mathcal{D}(\widehat{\widehat{LH_\alpha}}) = \{f \in C(\partial D); H_\alpha f \in C^2(\bar{D})\}$$

たゞし、$C^{(H)}(\bar{D})$ は $\bar{D}$ で一様 Hölder 連続な函数の全体を表すとする。第2章 Prop. 2.2 で $H_\alpha: C^3(\partial D) \to C^2(\bar{D})$ なことが判っているから $C^3(\partial D) \subset \mathcal{D}(\widehat{\widehat{LH_\alpha}})$ なことは明らか。従って LH_α, $\widehat{LH_\alpha}$, $\widehat{\widehat{LH_\alpha}}$ などの domain は $C(\partial D)$ で dense なことが判る。これらの operator に対して次のことが成立つ。

<u>Lemma 2.1</u> LH_α, $\widehat{LH_\alpha}$, $\widehat{\widehat{LH_\alpha}}$ はそれぞれ $C(\partial D)$ の subset の上で定義された $C(\partial D)$ 内の operator としてそれぞれ closure $\overline{LH_\alpha}$, $\overline{\widehat{LH_\alpha}}$, $\overline{\widehat{\widehat{LH_\alpha}}}$ をもつ。

<u>証明</u> $LH_\alpha \supset \widehat{LH_\alpha} \supset \widehat{\widehat{LH_\alpha}}$ であるから LH_α が closure をもつことをいえば十分である。$f_n \in \mathcal{D}(LH_\alpha)$, $f_n \to 0$ かつ $LH_\alpha f_n \to g \in C(\partial D)$ なる系列 $\{f_n\}$ があるとき $g=0$ となることを示せばよい。今このような系列があり，しかも $g \neq 0$ だと仮定して矛盾が生ずることを示そう。仮定から $g(x_0) \neq 0$ なる $x_0 \in \partial D$ があるはずであるが、一般性を失わずに $g(x_0) > 0$ としてよい。このとき次のことが成立つ。

$r > 0$, $\varepsilon > 0$, $n(\varepsilon)$ が存在して

$$LH_\alpha f_n(x) > 2\varepsilon \quad \text{for } |x - x_0| < r,\ n \geq n(\varepsilon)$$

そこで g_n を次のように定義する。

i) $g_n = f_n + \varepsilon \qquad \|LH_\alpha 1\| = 0$ のとき

ii) $g_n = f_n + \varepsilon/\|LH_\alpha 1\|$ $\quad \|LH_\alpha 1\| > 0$ のとき

$LH_\alpha g_n$ を計算してみると、それぞれ

$$\left.\begin{array}{l} \text{i)}\ LH_\alpha g_n(x) = LH_\alpha f_n(x) > 2\varepsilon \\ \text{ii)}\ LH_\alpha g_n(x) = LH_\alpha f_n(x) + \varepsilon \dfrac{LH_\alpha 1(x)}{\|LH_\alpha 1\|} > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \end{array}\right\} |x-x_0|<r,\ n>n(\varepsilon)$$

である。従って，いずれにせよ、$a>0$, $n(\varepsilon, a)$ が存在して

$$\left.\begin{array}{l} g_n \geq a > 0 \\ LH_\alpha g_n(x) > \varepsilon \end{array}\right\} |x-x_0|<r,\ n \geq n(\varepsilon, a)$$

が成立つ。こゝで $0<\varepsilon$, $a \leq 1$ を仮定しても差支えないから、仮定する。

$$h_n(x) = g_n(x) - a\cdot\varepsilon\cdot v(x)\cdot\left(\max_{|x-x_0|\leq r}|LH_\alpha v(x)| + 1\right)^{-1}$$

とおく。こゝに v は $v(x_0)=0$, $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$, $\min_{|x-x_0|\geq r} v(x) > 0$, $v \in \mathcal{D}(\widehat{\widehat{LH_\alpha}})$ をみたすものとする。

例えば

$$v(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\xi^i_{x_0}(x)\right)^2 \cdot \left\|\sum_{i=1}^{N-1}\left(\xi^i_{x_0}(\cdot)\right)^2\right\|^{-1}$$

ととってもよい。このとき

$$\left.\begin{array}{l} h_n(x) \geq \frac{1}{2}a > 0 \\ LH_\alpha h_n(x) > 0 \end{array}\right\} |x-x_0|<r,\ n \geq n(\varepsilon, a)$$

が成立つ。このことから $h_n(x)$ は $|x-x_0|<r$ では ∂D 上の *maximum* をとることはない。なぜなら，今 $f \in \mathcal{D}(LH_\alpha)$ が点 x で $f(x)>0$ かつ x で ∂D 上の *max* をとったとする。$H_\alpha f$ は第2章定理2.6によって境界上で *positive max*

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

をとる。従って $u=H_\alpha f$ は x で max をとるとしてよい。このことに注意して $LH_\alpha f(x)$ の各項を計算すれば、

$$\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}(x)\leq 0,\ \beta^i(x)\frac{\partial u}{\partial\xi^i}(x)=0,\ \gamma(x)u(x)$$

$$=\gamma(x)f(x)\leq 0\quad \delta(x)\lim_{y\to x}Au(x)=\delta(x)\alpha u(x)=\alpha\delta(x)f(x)\leq 0,$$

$$\mu(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\leq 0,$$

$$u(y)-u(x)-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial\xi^i}(x)\xi^i(y)=u(y)-u(x)\leq 0$$ であるから

$$Lu(x)=LH_\alpha f(x)\leq 0$$

従って

$$g_n(x_0)=h_n(x_0)<\max_{x\in\partial D}h_n(x)=\max_{|x-x_0|\geq r}h_n(x)$$

$$\leq\max_{|x-x_0|\geq r}g_n(x)-a\cdot\varepsilon\inf_{|x-x_0|\geq r}v(x)\cdot\left(\max_{|x-x_0|\leq r}|LH_\alpha v(x)|\right.$$

$$\left.+1\right)^{-1}=\max_{|x-x_0|\geq r}g_n(x)-b$$

b は正の数である。こゝで $n\to\infty$ とすると

i) $\varepsilon\leq\varepsilon-b$

ii) $\varepsilon/\|LH_\alpha 1\|\leq\varepsilon/\|LH_\alpha 1\|-b$

でいずれにせよ矛盾を生じた。

つぎに Hille-吉田の定理を以下のように云いかえておく。

<u>Proposition 2.1</u> K を compact な空間とし、この上で定義された連続函数のつくる Banch 空間を $C(K)$ とする。ノルムは $\|F\|=\max_{n\in K}|f(v)|$。B が $C(K)$ の subspace $\mathcal{D}(B)$ 上で定義された linear operator であって closure $\bar{B}$ をもつものとする。B がさらに以下でのべる性質 i)-iii)をもつならば、C 上に (1.2.4)-(1.2.8) をみたす linear operator T_t のつくる半群 $\{T_t,\ t\geq 0\}$ が unique に存在して $\bar{B}$ はそ

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

の generator である。

i) $\mathcal{D}(B)$ は $C(K)$ 内で dense

ii) もし $\max_{x\in K} f(x)>0$ for $f\in\mathcal{D}(B)$ であれば、$x_0\in K$ があって $f(x_0)=\max_{x\in K} f(x)$ かつ $Bf(x_0)\leq 0$

iii) 任意の $\alpha>0$ に対して $C(K)$ 内に dence な subset があって、それに属する f に対しては

$$(2.1)\qquad (\alpha-B)g=f$$

が解をもつ。

<u>証明</u>　f, g が (2.1)をみたせば $\|g\|\leq\frac{1}{\alpha}\|f\|$ である。なぜなら，$\|g\|=\max_{x\in K} g(x)>0$ なら ii)の x_0 をとると $\alpha\|g\|=\alpha g(x_0)\leq(\alpha-B)g(x_0)\leq f(x_0)\leq\|f\|$ である。$\|g\|=-\min_{x\in K} g(x)<0$ の場合も同様。従って，$(\alpha-B)^{-1}=K_\alpha$ が $C(K)$ 内 dence な $\mathcal{D}_\alpha$ で定義される。任意の $f\in C(K)$ に対し $f_n\in\mathcal{D}_\alpha$ を $f_n\to f$ にとると $g_n=K_\alpha f_n$ も収束する。従って Bg_n も収束し，$\exists g\in\mathcal{D}(B)$, $(\alpha-B)g=f$ である。明らかに $\|g\|\leq\frac{1}{\alpha}\|f\|$ である。その他の条件もすべて満たされるから Hille-吉田の定理（第1講定理2.2）を適用すればよい。

<u>定理2.1</u>　$\alpha\geqq 0$ をひとつ fix する。もしも、任意の $\beta>0$ に対し $C(\partial D)$ の dense subspace $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ があって

i) 方程式

$$(2.2)\qquad \begin{aligned}(\alpha-A)u(x)&=0, \quad x\in D\\ (\beta-L)u(x)&=f(x), \quad x\in\partial D,\end{aligned}$$

が任意の $f\in\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ に対して解 $u\in\mathcal{D}(L)\cap C^{(H)}(\bar{D})$ をもてば，あるいは（見かけ上これより弱い仮定であるが）

ii) 方程式

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(2.3)\qquad (\beta - \widehat{LH_\alpha})g = f$$

が任意の $f \in \mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ に対して解 $g \in \mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha})$ をもつならば，$C(\partial D)$ 上に条件（1.2.4）－（1.2.8）をみたす operator の半群 $\{\widetilde{T}_t^\alpha, t \geqq 0\}$ が存在して $\widehat{LH_\alpha}$ がその generator である。この半群の resolvent を $\{\widetilde{G}_\beta^\alpha, \beta > 0\}$ とすれば、（2.2）および（2.3）の解は unique であって，それぞれ

$$u = H_\alpha \widetilde{G}_\beta^\alpha f, \qquad g = \widetilde{G}_\beta^\alpha f$$

によって与えられる。

証明　i)（2.2）の解 u は $u = H_\alpha [u]_{\partial D}$ と表わされるから $u = H_\alpha [u]_{\partial D} \in C^{(H)}(\bar{D})$ なる条件と合せると、方程式

$$(2.4)\qquad (\beta - \widehat{LH_\alpha})g = f$$

と同等である。従って operator $\widehat{LH_\alpha}$ が Prop. 2.1 の条件をみたせばよい。$\mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha})$ が dense なことは $\widehat{LH_\alpha}$ の定義のすぐあとでのべた。$\widehat{LH_\alpha}$ の存在は Lemma 2.1 で判っている。また $\max_{x \in \partial D} f(x) > 0$，$f \in \mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha})$ なる f があれば、∂D は compact だから、$f(x)$ が positive maximum をとる点 x_0 がある。このような点で $\widehat{LH_\alpha} f(x_0) \leqq 0$ なることは Lemma 2.1 の証明の中でのべた。方程式（2.4）が dense な subspace $\mathcal{D}_\alpha$ に属する f に対して解をもつことは仮定であるから Prop. 2.1 の条件はすべてみたされた。従って $\widehat{LH_\alpha}$ を generator にもつ $C(\partial D)$ 上の半群で上の条件をみたすものが unique に存在する。

ii) の場合、closure の定義から明らかなように、dense subspace $\mathcal{D}'_{\alpha,\beta}$ があって $(\beta - \widehat{LH_\alpha})g = f$ が $f \in \mathcal{D}'_{\alpha,\beta}$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

に対して解 $g \in \mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha})$ をもつから i)の場合に帰着する。

(2.3) 及び (2.4) の解が $g=\widehat{G}^\alpha_\beta f$ であたえられることは $\widehat{G}^\alpha_\beta$ が $(\beta-\widehat{LH_\alpha})$ の inverse であるから当然である。uniqueness は $\widehat{G}^\alpha_\beta$ の対応が1対1だからである。従って (2.2) の解は $u=H_\alpha g = H_\alpha \widehat{G}^\alpha_\beta f$ でこれに対しても一意性が成立つ。

注意 i) 定理2.1の仮定 i)で $u\in C^{(H)}(\bar{D})\cap\mathcal{D}(L)$ の代りに $u\in\mathcal{D}(L)$ とするか、又は仮定ii)で $\widehat{LH_\alpha}$ の代りに LH_α をおきかえれば結論で、$\widehat{LH_\alpha}$ の代りに $\overline{LH_\alpha}$ としたものが得られる。 ii) 定理2.1の仮定の下に $\widehat{LH_\alpha}=\overline{LH_\alpha}$ である。iii) 同様に定理2.1の仮定 i) で $u\in C^{(H)}(\bar{D})\cap\mathcal{D}(L)$ の代りに $u\in C^2(\bar{D})\cap\mathcal{D}(L)$ とするか、または仮定ii)で $\widehat{LH_\alpha}$ の代りに $\widehat{\widehat{LH_\alpha}}$ とすれば、結論で $\widehat{LH_\alpha}$ の代りに $\widehat{\widehat{LH_\alpha}}$ としたものが得られる。然しながらこの仮定の下では上と同じく $\widehat{\widehat{LH_\alpha}}=\widehat{LH_\alpha}=\overline{LH_\alpha}$ が成り立つ。

証明 i)は定理2.1の証明をこのばあいに対してそのまゝくりかえせばよい。

ii) $\widehat{LH_\alpha}$ は $\overline{LH_\alpha}$ の restriction なことに注意すれば、定理2.1の条件は、LH_α に対する仮定と考えることもできる。従って $\overline{LH_\alpha}$ を generator とする半群があるはずである。各 $f\in C(\partial D)$ に対して $(\beta-\overline{LH_\alpha})g_1=f$, $(\beta-\widehat{LH_\alpha})g_2=f$ なる解 g_1, g_2 がある。$\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})\supset\mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha})$ だから $\widehat{LH_\alpha}g_2=\overline{LH_\alpha}g_2$ 従って前の方の方程式の解の一意性から $g_1=g_2$. 所で $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$ はこのような g_1 で尽されているから $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})\subset\mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha})$. 従って $\overline{LH_\alpha}=\widehat{LH_\alpha}$.

iii) も上の証明と全く同様。

Proposition 2.2 Kを compact な空間とし C(K) 上に条件 (1.2.4) − (1.2.8) をみたす operator の半群

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$\{T_t, t \geqq 0\}$があって、generator $\mathfrak{G}$ をもつものとする。これに対して もし $1 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}1(x) \leqq -a < 0$ が成立つなら、同じく(1.2.4)－(1.2.8)をみたす $C(K)$上のoperatorの半群 $\{S_t, t \geqq 0\}$ で、次の性質をもったgenerator $\mathfrak{G}'$ をもつものが存在する。

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{G}'), \quad \mathfrak{G}'f = \mathfrak{G}f + a \cdot f$$

<u>証明</u> 方程式 $(\alpha - (\mathfrak{G} + a))u = f$ が十分大きい$\alpha > 0$と任意の$f \in C(K)$に対してunique な解をもつことは仮定から明らか。$(\alpha - (\mathfrak{G} + a))^{-1} = M_\alpha$ は $C(K)$ から $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ へ1対1, onto しかも $M_\alpha \geqq 0$ である。あとは $M_\alpha 1 \leqq \frac{1}{\alpha}$ をいえば Hille－吉田の定理により証明が終る。 $u = (\alpha - (\mathfrak{G} + a))1$ とおくと 仮定 $\mathfrak{G}1 \leqq -a$ から $u \geqq \alpha$, 従って $M_\alpha u = 1 \geqq \alpha M_\alpha 1$ である。

<u>定理2.2</u> 定理2.1 の仮定の下に、方程式

$$(2.5) \quad \widehat{LH_\alpha}\, g = f, \quad f \in C(\partial D), \quad \alpha > 0$$

は unique な解 $g \in \mathfrak{D}(\widehat{LH_\alpha})$ をもつ。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

注意 以下では 定理2.2の仮定の下でのみ論ずるから、$\widehat{\overline{LH}}_\alpha$ を $\overline{LH}_\alpha$ とかくことがある。

証明 i) $1 \in \mathcal{D}(\widehat{\overline{LH}}_\alpha)$ であるから、これを計算すると $\widehat{\overline{LH}}_\alpha 1 = \widehat{LH}_\alpha 1 = \gamma(x) + \alpha\delta(x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial n} H_\alpha 1(x) + \int_{\overline{D}} (H_\alpha 1(y) - 1)\nu_x(dy)$ である。$\alpha > 0$ であるから 第2章 Prop 2.1により $\frac{\partial}{\partial n} H_\alpha 1(x) < 0$, また $H_\alpha 1(y) - 1 < 0$ for $y \in D$ である。従ってLに対する仮定 ii) によって $\widehat{\overline{LH}}_\alpha 1(x) = -a < 0$

ii) generator $\widehat{\overline{LH}}_\alpha$ をもつ $C(\partial D)$ 上の半群は prop. 2.2の条件をみたすことが判った。この resolvent を $\{K^\alpha_\beta\}$ とおく。このとき、$\mathcal{G}' = \widehat{\overline{LH}}_\alpha + a$ を generator にもつ process の resolvent を $\{M^\alpha_\beta\}$ とかくこととし $g = -M^\alpha_a f$ とおけば

$$\widehat{\overline{LH}}_\alpha g = -\widehat{\overline{LH}}_\alpha M^\alpha_a f = -(\mathcal{G}' - a) M^\alpha_a f$$
$$= (a - \mathcal{G}') M^\alpha_a f = f$$

従って解の存在が判った。一方 $\widehat{\overline{LH}}_\alpha = -(a - \mathcal{G}')$ なること及び $a - \mathcal{G}'$ が $\mathcal{D}(\widehat{\overline{LH}}_\alpha)$ から $C(\partial D)$ への1対1 mapping をあたえることから uniqueness が云える。

注意 この§では 定理2.1の条件の下に $\widehat{\overline{LH}}_\alpha$ を generator にもつ $C(\partial D)$ 上の半群の存在することが判った。この半群は ∂D 上の markov 過程から定まるものであることが、条件から直ちに判る。こゝでは差当り 方程式(2.5)の解法と関連しているだけであるが、実は diffusion の path の行動と密接な関係をもっている。これについては次章で明らかになるであろう。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

§3 Resolvent $\{G_\alpha\}$ の構成

Proposition 3.1 i) もし $u\in C^{(H)}(\bar{D})$ がD内で C^2 級であって

$$Au(x)=0 \quad , \quad x\in D$$

をみたすならば 次のように表現される。

$$u = H_\alpha[u]_{\partial D} + \alpha G^0_\alpha u \quad , \quad \alpha \geqq 0$$

ii) $f\in C(\partial D)$, $u\in C(\bar{D})$, $\alpha\geqq 0$, $\beta\geqq 0$ に対して

$$v = H_\alpha f + G^0_\beta u = 0$$

ならば $f=u=0$

iii) $f\in C(\partial D)$, $\alpha,\beta\geqq 0$ に対して 次の式が成立つ。

$$H_\alpha f - H_\beta f + (\alpha-\beta)G^0_\alpha H_\beta f = 0 \tag{3.1}$$

iv) $u\in C(\bar{D})$ に対して

$$\lim_{\alpha\to\infty}\|\alpha G^0_\alpha u + H_\alpha[u]_{\partial D} - u\| = 0 \quad u\in C(\bar{D}) \tag{3.2}$$

証明 i) 証明すべき式の両辺に $\alpha - A$ を operate せよ。仮定により、$(\alpha-A)u(x)=\alpha u(x)$, $x\in D$, と, $u(x)=[u]_{\partial D}(x)$, $x\in\partial D$ であることと, $u\in C(\bar{D})$, $[u]_{\partial D}\in C(\partial D)$ に注意すれば 才2章定理2.3 上の結論は明らか。
ii) $G^0_\beta u(x)$ は ∂D 上 0 だから v の境界値は f である。従って仮定から $f=0$, ゆえに $v=G^0_\beta u=0$ であるが、これから $u=0$。 iii) $f\in C^3(\partial D)$ に対して (3.1)の左辺を v とおくと、v の境界値は、$[v]_{\partial D}=f-f+0=0$ である。一方 $x\in D$ に対しては、

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(\alpha-A)v(x)=0-\{(\beta-A)-(\beta-\alpha)\}H_\beta f(x)$$
$$+(\alpha-\beta)H_\beta f(x)=0$$

であるから 再び才2章定理2,3(II)の一意性から $v=0$.
$f\in C(\partial D)$ に対して(3,13)の左辺を対応させる写像が有界なことが次の計算から判る。

$$\|v\|\leq\|f\|+\|f\|+|\alpha-\beta|\cdot\|G^0_\alpha 1\|\cdot\|f\|=\{2+|\alpha-\beta|\cdot\|G^0_\alpha 1\|\}\|f\|$$

従ってこの写像は連続である。所が上で計算したように $C(\partial D)$ の dense な subset $C^3(\partial D)$ の函数に対して常に 0 を対応させるから この写像は任意の $f\in(\partial D)$ に対して 0 を対応させる。すなわち(3,1)が成立つ。iV) 才2章定理2,4の(II)によれば、境界函数が 0 となるような $v\in C(\bar{D})$ に対しては

$$\lim_{\alpha\to\infty}\|\alpha G^0_\alpha v-v\|=0$$

である。そこで v として $v=u-H_{\alpha_0}[u]_{\partial D}$, $u\in C(\bar{D})$ をとれば、v の境界函数は 0 となるから このvに対して上の事実が適用できる。$\alpha_0>0$ は任意に fix した数とする。この時(3,1)に注意して計算すれば

$$0=\lim_{\alpha\to\infty}\|\alpha G^0_\alpha v-v\|=\lim_{\alpha\to\infty}\|\alpha G^0_\alpha(u-H_{\alpha_0}[u]_{\partial D})$$
$$-(u-H_{\alpha_0}[u]_{\partial D})\|$$
$$=\lim_{\alpha\to\infty}\|(\alpha G^0_\alpha u-u)+(H_{\alpha_0}[u]_{\partial D}-\alpha G^0_\alpha H_{\alpha_0}[u]_{\partial D})\|$$
$$=\lim_{\alpha\to\infty}\|\alpha G^0_\alpha u-u+H_\alpha[u]_{\partial D}-\alpha_0 G^0_\alpha H_{\alpha_0}[u]_{\partial D}\|$$
$$=\lim_{\alpha\to\infty}\|\alpha G^0_\alpha u-u+H_\alpha[u]_{\partial D}\|$$

$\{G^0_\alpha\}$ の range が $\alpha>0$ に無関係なことが判っているから、これを $\mathcal{R}^0$ と記す。Lは $\mathcal{D}(L)$ の上だけで定義されているが、これを $\mathcal{R}^0$ の上に次のように拡張する。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

<u>*Lemma* 3.1</u> $u \in R^0$ を $u = G_\alpha^0 v$ とすると、これに対して、次の条件をみたす系列 $\{u_n \in R^0\}$ が存在する。

$$u_n = G_\alpha^0 v_n, \quad v_n \to v, \quad v_n \in C^{(H)}(\bar{D})$$

このような条件をみたす $\{u_n\}$ に対しては

$$(3.3) \qquad L'u = \lim_{n\to\infty} L u_n$$

の右辺はつねに収束し、上のような $\{u_n\}$ の系列のえらび方に無関係である。従って (3.3) により L' を R^0 の上に定義できる。また、この L' は $v \geqq 0$ ならば $L'u \geqq 0$ である。

<u>証明</u> $C^{(H)}(\bar{D})$ は $C(\bar{D})$ で *dense* だから u に対して上のような系列 v_n が存在することは明らかである。また、第2章定理2.3の (I) によって G_α^0 は $C^{(H)}(\bar{D})$ に属する函数を $C^2(\bar{D})$ にうつすから、$Lu_n = LG_\alpha^0 v_n$ が確定することも明らか。(3.3) の右辺が $\{u_n\}$ のえらび方に関係せずに定まることを示すには、*mapping*

$$(3.4) \qquad v \longrightarrow LG_\alpha^0 v$$

が $C^{(H)}(\bar{D})$ から $C(\partial D)$ への *mapping* として連続なことを示せばよい。そうすれば、$C^{(H)}(\bar{D})$ が $C(\bar{D})$ で *dense* なことから、この対応が $C(\bar{D})$ から $C(\partial D)$ への連続な *mapping* として *unique* に拡張されるからである。以下 (3.4) が *linear*, *non-negative*, かつ *bounded* なことを示せばよい。*linear* は明らかである。次に $v \geqq 0$ とすると

$$LG_\alpha^0 v(x) = 0+0+0+\delta(x)\lim_{y\to x} AG_\alpha^0 v(y) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 u(x) + \int_{\bar{D}} G_\alpha^0 v(y)\cdot \nu_x(dy) = -\delta(x)v(x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 v(x) + \int_{\bar{D}} G_\alpha^0 v(y)\, \nu_x(dy) \geqq 0, \qquad x \in \partial D$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

また、$G_\alpha^0 v(x)$ が ∂D 上 0 なことに注意すれば $\left|\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 v(x)\right| \leq \|v\| \frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 1(x)$ だから

$$\|LG_\alpha^0 v\| \leq \left\{\|\delta(x)\| + \left\|\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^0 1\right\| + \int_{\bar{D}} G_\alpha^0 1(y)\, \nu_x(dy)\right\} \cdot \|v\|$$

従って ~~bounded~~ である。 $v \geq 0$ のとき $L' u \geq 0$ は（3.4）の非負性から明らか．

<u>Lemma 3.2</u> i) $\mathcal{D}(\widehat{L}H_\alpha)$ および $\mathcal{D}(\widehat{L}H_\alpha)$ は $\alpha \geq 0$ に無関係である。そこで $\hat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(\widehat{L}H_\alpha)$ とおく。ii) $f \in \hat{\mathcal{D}}$ に対して次の式が成立つ

$$(3.5) \quad \widehat{L}H_\alpha f - \widehat{L}H_\beta f + (\alpha-\beta) L' G_\alpha^0 H_\beta f = 0$$

<u>証明</u> $f \in \mathcal{D}(\widehat{L}H_\beta)$ ならば $H_\beta f \in C^{(H)}(\bar{D})$．従って $G_\alpha^0 H_\beta f \in C^2(\bar{D})$ （3.1）によれば $H_\alpha f = H_\beta f - (\alpha-\beta) G_\alpha^0 H_\beta f$ であるが、$H_\beta f$ については仮定により $G_\alpha^0 H_\beta f$ については $C^2(\bar{D})$ に入ることから，右辺の各項に従って左辺にも L がほどこせる．所で $H_\beta f$，従って $H_\alpha f$ が $C^{(H)}(\bar{D})$ に入ることに注意すれば

$$(3.6) \quad \widehat{L}H_\alpha f = \widehat{L}H_\beta f - (\alpha-\beta) LG_\alpha^0 H_\beta f$$

従って $f \in \mathcal{D}(\widehat{L}H_\alpha)$ なことが判った。α, β をおきかえても議論は同じであるから $\mathcal{D}(\widehat{L}H_\alpha) = \mathcal{D}(\widehat{L}H_\beta)$

次に $f \in \mathcal{D}(\widehat{L}H_\beta)$ とすれば $f_n \ \mathcal{D}(\widehat{L}H_\beta)$ が存在して $f_n \to f$、$\widehat{L}H_\beta f_n \to \widehat{L}H_\beta f$ である。このとき、$H_\beta f_n \to H_\beta f$． 従って Lemma 3.1 から $LG_\alpha^0 H_\beta f_n \to L' G_\alpha^0 H_\beta f$ であるから．（3.6）式を f_n に適用すれば、右辺は $\widehat{L}H_\beta f_n - (\alpha-\beta) LG_\alpha^0 H_\beta f \to \widehat{L}H_\beta f - (\alpha-\beta) L' G_\alpha^0 H_\beta f$ だから $\widehat{L}H_\alpha f_n \to \widehat{L}H_\beta f - (\alpha-\beta) L' G_\alpha^0 H_\beta f$ 定義によってこれが $\widehat{L}H_\alpha f$ にほかならぬから $f \in \mathcal{D}(\widehat{L}H_\alpha)$ 及び（3.5）式が証明できた。α と β をおきかえても同様で

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

あるから、$\mathcal{D}(\widehat{LH}_\alpha)=\mathcal{D}(\widehat{LH}_\beta)$ および (3.5) 式が示された。

<u>Lemma 3.3</u> $u=\sum_{i=1}^{m} H_{\alpha_i} f_i + \sum_{j=1}^{n} G_{\beta_j}^{0} v_j$, $f_i \in \widehat{\mathcal{D}}$, $v_j \in C(\bar{D})$ に対して

$$(3.7)\quad \bar{L}u=\sum_{i=1}^{m}\widehat{LH}_{\alpha_i} f_i + \sum_{j=1}^{n} L' G_{\beta_j} v_j$$

の右辺は u の表現に無関係に確定する。従ってこのような u の全体を $\mathcal{D}(\bar{L})$ と記し、これに する u に対して $\bar{L}$ を (3.7) によって定義することが出来る。

<u>証明</u> $\alpha>0$ をひとつ任意に fix すると、prop.3.1 により u は $u=H_\alpha f+G_\alpha^0 v$ と unique に表現される。(3.7) の右辺が $\widehat{LH}_\alpha f + L' G_\alpha^0 v$ にひとしいことが示されれば十分である。$\sum_{j=1}^{n} G_{\beta_j}^0 v_j \in \mathcal{R}^0$ ゆえ $v' \in C(\bar{D})$ があって $G_\alpha^0 v'=\sum_{j=1}^{n} G_{\beta_j}^0 v_j$、従って L' の linearity から $L' G_\alpha^0 v'=\sum_{j=1}^{n} L' G_{\beta_j}^0 v_j$ である。また u の境界値を比較することによって $f=\sum_{i=1}^{m} f_i$ を得るがこれと (3.1) を合せば

$$(3.8)\quad H_\alpha f=\sum_{i=1}^{m} H_\alpha f_i = \sum_{i=1}^{m} H_{\alpha_i} f_i + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i-\alpha) G_\alpha^0 H_{\alpha_i} f_i$$

また、$u=H_\alpha f+G_\alpha^0 v$ と $u=\sum_{i=1}^{m} H_{\alpha_i} f_i + G_\alpha^0 v'$ とを比較し (3.1) によって差を計算すれば

$$(3.9)\quad G_\alpha^0 v = G_\alpha^0 v' - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i-\alpha) G_\alpha^0 H_{\alpha_i} f_i$$

$\widehat{LH}_\alpha$ が $\widehat{\mathcal{D}}$ 上 linear なことと、(3.5) に注意すれば (3.8) から

$$(3.10)\quad \widehat{LH}_\alpha f=\sum_{i=1}^{m}\widehat{LH}_\alpha f_i=\sum_{i=1}^{m}\widehat{LH}_{\alpha_i} f_i+\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i-\alpha) L' G_\alpha^0 H_{\alpha_i} f_i$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

つぎに L' が R^0 上 linear なことによって

$$(3.11) \qquad L'G_\alpha^0 v = L'G_\alpha^0 v' - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - \alpha) L'G_\alpha^0 H_{\alpha_i} f_i$$

従って(3.10)と(3.11)を合せることにより

$$\hat{L}H_\alpha f + L'G_\alpha^0 v = \sum_{i=1}^{m} \hat{L}H_\alpha f_i + L'G_\alpha^0 v' = \sum_{i=1}^{m} \hat{L}H_\alpha f + \sum_{j=1}^{m} L'G_{\beta_i}^0 v_j$$

<u>Lemma 3.4</u> $u \in \mathcal{D}(\bar{L})$ が D 内で2回連続微分可能であってある $\beta > 0$ に対して

$$(3.12) \qquad \begin{aligned} (\beta - A)u(x) &= 0 \qquad x \in D \\ \bar{L}u(x) &= 0 \qquad x \in \partial D \end{aligned}$$

であれば $u = 0$

<u>証明</u> Lemma 3.3 の証明の最初で注意したように与えられた β に対して $u = H_\beta f + G_\beta^0 v$ と Unique に表現される。(3.12)によって

$$(\beta - A)u(x) = 0 + (\beta - A)G_\beta^0 v(x) = v(x) = 0, \quad x \in D$$

$v \in C(\bar{D})$ だから $v = 0$ であって、$u = H_\beta f$ ところが

$$\bar{L}u = \bar{L}H_\beta f = \hat{L}H_\beta f = 0$$

だから $f = 0$ 従って $u = 0$

<u>Lemma 3.5</u> 定理 2.1 の条件が各 $\alpha > 0$ に対して成立つなら、

$$(3.13) \qquad \lim_{\alpha \to \infty} \| \hat{L}H_\alpha^{-1} \| = 0$$

<u>証明</u> $-(\hat{L}H_\alpha)^{-1}$ は定理2.2によって $C(\partial D)$ 上定義され、有界、非負なことが判っている。
従って $-(\hat{L}H_\alpha)$ $1 \to 0$ $(\alpha \to \infty)$ なことが判ればよいが、

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

このためには

$$(3.14) \quad LH_\alpha 1(x) \downarrow -\infty, \ \alpha \uparrow \infty, \ x \in \partial D$$

が判れば十分である、実際 (3.14) が成立てば$(-LH_\alpha 1(x))^{-1}$ は∂D上連続な函数であって∂D上連続な函数0に$\alpha\uparrow\infty$のとき上から単調に収束する。所が∂Dは Compact だから Dini の定理によってこの収束は一様である。即ち、$(-LH_\alpha 1)^{-1} \longrightarrow 0, \ (\alpha \to \infty)$、従って

$$\| \widehat{LH}_\alpha^{-1} \| = \| \widehat{LH}_\alpha^{-1} 1 \| = \| \widehat{LH}_\alpha^{-1} \left(\frac{LH_\alpha 1}{LH_\alpha 1} \right) \| \leqq$$
$$\| \widehat{LH}_\alpha^{-1} (LH_\alpha 1) \| \, \| (LH_\alpha 1)^{-1} \| = 1 \cdot \| (LH_\alpha 1)^{-1} \| \to 0 \quad (\alpha - \infty)$$

(3.14) を示すため $0 < \alpha \leqq \beta$ とすると、(3.1) で $f = 1$ とおけば $H_\alpha 1 \geqq H_\beta 1 \geqq 0$ であるが、

$$(3.15) \quad LH_\alpha 1(x) = \gamma(x) + \alpha\delta(x) + \mu(x) \frac{\partial}{\partial n} H_\alpha 1(x) + \int_D (H_\alpha 1(y) - 1) \nu_x(dy)$$

であるから、$\delta(x) \leqq 0$, $\mu(x) \geqq 0$ に注意すれば $LH_\alpha 1(x)$ の各項がαについて単調減少なことが判る。従って各xについて (3.15) 右辺のいづれかの項が、$\alpha \to \infty$ のとき $-\infty$ に収束すればよいわけである。もし $\delta(x) < 0$ ならばあきらかに $\alpha\delta(x) \downarrow -\infty$ $(\alpha \uparrow \infty)$, $\delta(x) = 0$ ならば §xのはじめにのべたLについての仮定の ii) によって $\mu(x) > 0$ であるか $\nu_x(D) = \infty$ かどちらかである。従って次の事実が示されれば (3.15) 右辺の第3項又は第4項のいづれかが $\alpha \uparrow \infty$ のとき $-\infty$ に収束することが判る。

$$(3.16) \quad \int_D (H_\alpha 1(y) - 1) \nu_x(dy) \to -\infty, \ \alpha \to \infty, \quad \text{if } \nu_x(D) = \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(3.17)\quad \frac{\partial}{\partial n} H_\alpha 1(x) \to -\infty,\ \alpha \to \infty\ ,\ x \in \partial D$$

$H_\alpha 1(y)$ は はじめにのべたようにαについて単調減少である。従ってもし $H_\alpha 1(y) \to 0$, $(\alpha \uparrow \infty)$ for $y \in D$ なることが判れば (3.25) は Lebesgue の定理と $\nu_x\ (D) = \infty$ とから明らかである。所でこのことは (3.1) と第2章定理2.4 (II) から

$$H_\alpha 1(y) = H_\beta 1(y) - (\alpha-\beta)\, G_\alpha^0 H_\beta 1(y) = H_\beta 1(y) - \alpha G_\alpha^0 H_\beta 1(y) + \beta G_\alpha^0 H_\beta 1(y) \longrightarrow H_\beta 1(y) - H_\beta 1(y) + 0 = 0\ ,\quad y \in D$$

(3.17) を示すために $x \in \partial D$ の座標近傍で xから法線方向に直線 l をとり、この上に単調にxに収斂する点列 $\{x_n\}$ をとる。そこで $H_\alpha 1(y)$ が convex なことに注意すれば十分大きな n に対して α と無関係に

$$-\frac{\partial}{\partial n} H_\alpha 1(x) \geqslant \frac{1 - H_\alpha 1(x_n)}{\xi_x^N(x_n)} \geqslant 0$$

従って

$$\varliminf_{\alpha\to\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial n} H_\alpha 1(x)\right) \geqslant \frac{1}{\xi_x^N(x_n)}$$

nは任意であって $\xi_x^N(x_n) \to 0\ (n \to \infty)$ であるから $\varliminf_{\alpha\to\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial n} H_\alpha 1(x)\right) = \infty$。従って (3.17) が示された。

<u>定義</u> 定理2.1の条件が各 $\alpha > 0$に対して成立つとき、

$$(3.18)\quad G_\alpha u = G_\alpha^0 u - H_\alpha (\widehat{LH}_\alpha)^{-1} (\bar{L} G_\alpha^0 u),\quad u \in C(\bar{D}),\ \alpha > 0,$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

を境界条件Lに対応する resolvent operator とよぶ。

定理3.1 定理2.1の条件が各$\alpha>0$に対して成立つとき、境界条件Lに対応する resolvent operator は$C(\overline{D})$上の linear operator であって$u\in C(\overline{D})$に対して次のことが成り立つ。

$$(1.2.18)\qquad u\geq 0 \quad ならば \quad G_\alpha u\geq 0$$

$$(1.2.19)\qquad G_\alpha 1\leq \frac{1}{\alpha}$$

$$(1.2.20)\qquad G_\alpha u-G_\beta u+(\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta u=0$$

$$(1.2.21)\qquad \alpha G_\alpha u\to u\ (\alpha\to\infty)$$

$$(1.1)\qquad (\alpha-\overline{A})G_\alpha u=u,$$

$$(1.2')\qquad \overline{L}u=0$$

証明 (1.2.18)はG_α^0, H_α, $-(\widehat{LH_\alpha})^{-1}$, $\overline{L}G_\alpha^0$が各々非負なmappingであることから明らか。(1.2.19)を示すために

$$(3.19)\qquad \alpha G_\alpha^0 1+H_\alpha 1=1+G_\alpha^0 C$$

となることに注意する。これは 両辺に$(\alpha-A)$をapplyしたとき各々αとなること、また両辺の境界値が1なことから判る。これによれば

$$\alpha G_\alpha^0 1+H_\alpha 1=1+G_\alpha^0 C\leq 1$$

であるから、$-(\widehat{LH_\alpha})^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 1)\leq\frac{1}{\alpha}$ が判ればよい。

$-(\widehat{LH_\alpha})^{-1}$と$\overline{L}G_\alpha^0$の非負性から，これは

$$\overline{L}G_\alpha^0 1\leq-\frac{1}{\alpha}\cdot LH_\alpha 1$$

と同等である。この式は上記(3.19)に注意すれば次のようにして得られる。

$$-\frac{1}{\alpha}LH_\alpha 1(x)=-\frac{1}{\alpha}\Big\{\gamma(x)+\alpha\delta(x)+\mu(x)\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha 1(x)+\int_{\overline{D}}(H_\alpha 1(y)-1)\nu_x(dy)\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\alpha}\delta(x) - \Big\{ \delta(x) - \mu(x)\frac{\partial}{\partial n}G_\alpha^0 1(x) - \int_{\overline{D}} G_\alpha^0 1(y)\,\nu_x \\
&\quad - \int_{\overline{D}} G_\alpha^0 1(y)\,\nu_x(dy) \Big\} \\
&\quad - \frac{1}{\alpha}\Big\{ \frac{\partial}{\partial n}G_\alpha^0 C(x) + \int_{\overline{D}} G_\alpha^0 C(y)\,\nu_x(dy) \Big\} \\
&\geqq -\delta(x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial n}G_\alpha^0 1(x) + \int_{\overline{D}} G_\alpha^0 1(y)\,\nu_x(dy) \\
&= \overline{L}G_\alpha^0 1(x)
\end{aligned}
$$

次に(1, 2′)を証明しよう。G_α の定義から $u \in C(\overline{D})$ に対し $G_\alpha u \in \mathcal{D}(\overline{L})$。しかも

$$
\begin{aligned}
\overline{L}G_\alpha u &= \overline{L}G_\alpha^0 u - \overline{L}H_\alpha(\widehat{\overline{L}H}_\alpha)^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 u) = \overline{L}G_\alpha^0 u \\
&\quad - \widehat{\overline{L}H}_\alpha(\widehat{\overline{L}H}_\alpha)^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 u) = \overline{L}G_\alpha^0 u - \overline{L}G_\alpha^0 u = 0
\end{aligned}
$$

(1, 2, 20) を証明するためには $C^{(H)}(\overline{D})$ が $C(\overline{D})$ で dense なことに注意すれば $u \in C^{(H)}(\overline{D})$ に対して示せば十分である。$u \in C^{(H)}(\overline{D})$ ならば 左辺の各項は D内で2回連続微分可能であって、$(\alpha - A)$ をほどこすと $y \in D$ に対して 0となる。次に左辺は $\mathcal{D}(\overline{L})$ に属し、いま示した(1, 2′) によって $\overline{L}$ をほどこすと ∂D 上恒等的に 0である。従って Lemma 3.4によって (1, 2, 20) の左辺は 0である。

(1, 2, 21) を証明するためには $\alpha G_\alpha u \to u$ が $C(\overline{D})$ 内 dense な部分集合に属する u に対して成立つことを云えばよい. そのためには (3.20) $\alpha \widehat{\overline{L}H}_\alpha^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 u) + [u]_{\partial D} \to 0$ $(\alpha \to \infty)$ がこのような u に対して成立つことが判ればよい. 実際

$$
\begin{aligned}
\|\alpha G_\alpha u - u\| &= \|\alpha G_\alpha^0 u - \alpha H_\alpha(\widehat{\overline{L}H}_\alpha)^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 u) - u\| \\
&\leqq \|\alpha G_\alpha^0 u + H_\alpha[u]_{\partial D} - u\| + \| -\alpha H_\alpha(\widehat{\overline{L}H}_\alpha)^{-1}\overline{L}G_\alpha^0 u \\
&\quad - H_\alpha[u]_{\partial D}\| = \|\alpha G_\alpha^0 u + H_\alpha[u]_{\partial D} - u\| \\
&\quad + \|\alpha \widehat{\overline{L}H}_\alpha^{-1}\overline{L}G_\alpha^0 u + [u]_{\partial D}\|
\end{aligned}
$$

であるが第1項は (3.2) によって $\alpha \to \infty$ のとき 0に収束するから (3.20)が収束すればよいわけである。そこで次に $\mathcal{D}(\overline{L})$ が $C(\overline{D})$ 内で dense なこと、および $\mathcal{D}(\overline{L})$ に

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

属する函数については(3.20)が成立つことを示そう。

$u\in C(\overline{D})$ があたえられた時、任意の $\varepsilon>0$ に対して β を十分大きくとれば(3.2)によって

$$\| u-(\beta G_\beta^0 u+H_\beta[u]_{\partial D})\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

とすることが出来る。一方 $\widehat{\mathcal{D}}$ は $C(\partial D)$ 内 *dense* だから $f_\varepsilon\in\widehat{\mathcal{D}}$ が存在して

$$\|[u]_{\partial D}-f_\varepsilon\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

従って 上の式と合せると、$v=\beta G_\beta^0 u+H_\beta f_\varepsilon$ とおけば $v\in\mathcal{D}(\overline{L})$ であって

$$\|u-v\|\leq\|u-(\beta G_\beta^0 u+H_\beta[u]_{\partial D})\|+\|[u]_{\partial D}-f_\varepsilon\|<\varepsilon$$

従って $\mathcal{D}(L)$ は $C(\overline{D})$ 上 *dense* である。$u\in\mathcal{D}(\overline{L})$ はつねに

$$u=G_\beta^0 v+H_\beta f\ ,\quad v\in C(\overline{D}),\ f\in\widehat{\mathcal{D}}$$

と表されるから、このuに対して(3.20)を示そう。まず $\{G_\alpha^0\}$ に対する *resolvent* 方程式と、(3.1)式から

$$G_\alpha^0 u=G_\alpha^0 G_\beta^0 v+G_\alpha^0 H_\beta f=\frac{1}{\beta-\alpha}(G_\alpha^0 v-G_\beta^0 v+H_\alpha f\ H_\beta f)$$

であるから

$$\begin{aligned}\|\alpha\widehat{\overline{LH}}_\alpha^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 u)+[u]_{\partial D}\| &=\|\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\widehat{\overline{LH}}_\alpha^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 v-\overline{L}G_\beta^0 v\\ &\quad+\widehat{\overline{LH}}_\alpha f-\widehat{\overline{LH}}_\beta f)+f\|\leq\left|\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right|\cdot\|\widehat{\overline{LH}}_\alpha^{-1}\|\cdot(\|\overline{L}G_\alpha^0 v\|\\ &\quad+\|\overline{L}G_\beta^0 v\|)+\|\frac{\alpha}{\beta-\alpha}f+f\|+\left|\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right|\cdot\|\widehat{\overline{LH}}_\alpha^{-1}\|\cdot\|\widehat{\overline{LH}}_\beta f\|.\end{aligned}$$

(3.13)によって $\|\widehat{\overline{LH}}_\alpha^{-1}\|\to 0\ (\alpha\to\infty)$ であるから、上の式で $\alpha\to\infty$ とすれば 最初の項、すなわち $\left|\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right|\cdot\|\widehat{\overline{LH}}_\alpha^{-1}\|\ \|\overline{L}(G_\alpha^0 v)\|$ をのぞいてすべての項が 0 に収束する。従って

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$\|\bar{L}G_\alpha^0 v\|$ が $\alpha\to\infty$ のとき有界なことを示せば十分である。ところで $\bar{L}G_\alpha^0$ は $C(\bar{D})\to C(\partial D)$ への有界連続な mapping であったから

$$\|\bar{L}G_\alpha^0 v\| \leq \|v\|\cdot\|\bar{L}G_\alpha^0 1\|$$

ところが $\alpha\uparrow\infty$ のとき $G_\alpha^0 1\downarrow 0$ であるから

$$\bar{L}G_\alpha^0 1(x) = -\delta(x)+\mu(x)\frac{\partial}{\partial n}G_\alpha^0 1(x) + \int_{\bar{D}} G_\alpha^0 1(y)\nu_x(dy)\downarrow 0$$

であるから (1.2.21) が証明されたことになる。

(1.1) の証明。$C^{(H)}(\bar{D})$ および $C^3(\partial D)$ はおのおの $C(\bar{D})$ および $C(\partial D)$ で dense であるから、$u\in C(\bar{D})$ に対して $v_n\in C^{(H)}(\bar{D})$, $v_n\to u$ および $f_n\in C^3(\partial D)$, $f_n\to (\widehat{LH}_\alpha)^{-1}(\bar{L}G_\alpha^0 u)$ となる系列がある。H_α, および G_α^0 は有界な mapping であることに注意すれば $u_n = G_\alpha^0 v_n - H_\alpha f_n \in C^2(\bar{D})$ であって、$u_n\to G_\alpha u$ が成立つ。

$(\alpha - A)u_n = v_n$ だから

$$Au_n = \alpha u_n - v_n \to \alpha G_\alpha u - v$$

である。これは $\bar{A}$ の定義から，$G_\alpha u\in\mathcal{D}(\bar{A})$ かつ (1.1) が成立つことにほかならない。

(1.2′) は次のようにして判る。

$$\bar{L}G_\alpha u = \bar{L}G_\alpha^0 u - \bar{L}H_\alpha(\widehat{LH}_\alpha)^{-1}(\bar{L}G_\alpha^0 u) = \bar{L}G_\alpha^0 u - \widehat{LH}_\alpha(\widehat{LH}_\alpha)^{-1}(\bar{L}G_\alpha^0 u) = \bar{L}G_\alpha^0 u - \bar{L}G_\alpha^0 u = 0$$

<u>注意</u> 定理3.1の条件 (1.2′) は次のものでおきかえることが出来る。

$$(1.2)\qquad Lu(x)=0,\ x\in\partial D,\ u\in\mathcal{R}(G_\alpha)\wedge C^3(\bar{D})$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

証明 $u\in R(G_\alpha)$ ならば $u=G_\alpha v=G_\alpha^0 v-H_\alpha(\widehat{LH_\alpha})^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 v)$ であるが、$u\in C^3(\overline{D})$ だから境界値 $(\widehat{LH_\alpha})^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 v)$ が $C^3(\partial D)$ に属し、従って $H_\alpha(\widehat{LH_\alpha})^{-1}(\overline{L}G_\alpha^0 v)$ が $C^2(\overline{D})$ に入る。このことから $G_\alpha^0 v$ も $C^2(\overline{D})$ に入る。$C^2(\overline{D})$ に属する函数に対しては L と $\overline{L}$ とをほどこした結果は一致する。従って (1、2′)の証明中 $\overline{L}$ を L でおきかえれば (1、2) が得られる。

§4 Integro-differential equation への reduction

与えられたLとAに対する解があるかないかは、§2で問題にした方程式 $(\beta-\widehat{LH_\alpha})\varphi=f$ の系が十分多くのfに対して解をもつかどうかできることが判った。所でこの方程式は、本質的には∂D上の integro differential aquation である。このことを示すために $\widehat{LH_\alpha}$ をもっと explict に表すことを考える。そのための準備として次のことを証明する。証明は第1章 §5で境界条件を導いた方法を殆んどそのまゝくり返したものに他ならない。

<u>proposition 4.1</u> KをcompactなC^2-class のn次元 manifold とし、$C^l(K)$をK上のl回連続微分可能な函数全体のつくる空間とし $C^0(K)=C(K)$とおく。K上に Markov 過程が存在し、その遷移確率系$\{P(t,x,dy)\}$が$C(K)$上のもについて強連続な半群$\{T_t\}$を定めるものとする。函数の組$\{\eta^i(y)\in C^2(K), 1\le i\le n\}$が点$x\in K$における座標系をなし、さらに$\{T_t\}$の generator を $\mathfrak{A}$ とするとき、$1, \eta^i(y), \sum_{i=1}^n(\eta^i(y))^2\in\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$とする。
尚$\sum_{i=1}^n(\eta^i(x))^2=0$とする。このとき

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(4.1)\quad \mathfrak{A} f(x)=\sum_{i,j=1}^{n} \hat{\alpha}^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^i \partial \eta^j}(x)+\sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}^i(x) \frac{\partial f}{\partial \eta^i}(x)+\hat{\gamma}(x) f(x)+\int_K\Big\{f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta^i}(x) \eta^i(y)\Big\} \hat{\nu}_x(dy),$$

$$f \in C^2(K) \cap \mathfrak{D}(\mathfrak{A}).$$

こゝに $\{\hat{\alpha}^{ij}(x)\}$ は *non-negative definite* な行列，$\hat{\gamma}(x) \leq 0$。また $\nu_x(dy)$ はK上の測度であって U を x の任意の近傍とするとき.

$$\nu_x(K-U)<\infty,\quad \int_U \sum_{i=1}^{n}(\eta^i(y))^2 \nu_x(dy)<\infty$$

証明　$f \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) \cap C^2(K)$ に対して

$$\mathfrak{A} f(x)=\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t f(x)-f(x))=\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(\int_K f(y) P(t, x, dy)-f(x)\Big)$$

$$=\lim_{t \to 0}\Big\{\hat{\gamma}(t) f(x)+\sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}^i(t) \frac{\partial f}{\partial \eta^i}(x)+\int_K \frac{f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta^i}(x) \eta^i(y)}{\sum_{i=1}^{n}(\eta^i(y))^2} l(t) \nu(t, dy)\Big\}$$

ただし

$$\hat{\gamma}(t)=\frac{1}{t}\{P(t, x, K)-1\}=\frac{1}{t}(T_t 1(x)-1)$$

$$\hat{\beta}^i(t)=\frac{1}{t} \int_K \eta^i(y) P(t, x, dy)=\frac{1}{t}(T_t \eta^i(x)-\eta^i(x))$$

$$l(t)=\frac{1}{t} \int_K \sum_{i=1}^{n}(\eta^i(y))^2 P(t, x, dy)$$

$$=\frac{1}{t}\Big\{T_t\Big(\sum_{i=1}^{n}(\eta_i)^2\Big)(x)-\sum_{i=1}^{n}(\eta_i)^2(x)\Big\}$$

$$\hat{\nu}(t, A)=\frac{1}{t \cdot l(t)} \int_A \sum_{i=1}^{n}(\xi^i(y))^2 P(t, x, dy)$$

である。従って仮定により、次の量は確定する。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$\lim_{t\to 0}\hat{\gamma}(t)=\mathfrak{A}1(x)=\hat{\gamma}\qquad \lim_{t\to 0}\hat{\beta}^i(t)=\mathfrak{A}\eta^i(x)=\hat{\beta}^i.$$

$$\lim_{t\to 0}\ell(t)=\mathfrak{A}\left(\sum_{i=1}^n(\eta^i)^2\right)(x)=\hat{\ell}$$

$\hat{\alpha}^{ij}$

つぎに

$$g(y)=\frac{f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial\eta^i}(x)\eta^i(y)}{\sum_{i=1}^n(\eta^i(y))^2}$$

$$h^{ij}(y)=\frac{\eta^i(y)\eta^j(y)}{\sum_{i=1}^n(\eta^i(y))^2}$$

とおいて、gの分子のfをxのまわりで展開すると

$$g(x)=\frac{\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^i\partial\eta^j}(x)\eta^i(y)\eta^j(y)+r(f,y)}{\sum_{i=1}^n(\eta^i(y))^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^i\partial\eta^j}(x)h^{ij}(y)+\frac{r(f,y)}{\sum_{i=1}^n(\eta^i(y))^2}$$

$r(f,y)$ は $K-\{x\}$ で連続であり，xの近くでは $O\left(\sum_{i=1}^n(\eta^i(y))^2\right)$ であるから、$g(x)$ の第二項はK上の連続函数に一意的に拡張できる。 $K-\{x\}$ から $K\times R^{n^2}$への mapping

$$\varphi:\ y\to\varphi(y)=(y,h^{ij}(y))\in K\times R^n$$

を考え、この mapping による $K-\{x\}$の像の$K\times R^{n^2}$における closure を M とする。$-1\leq h^{ij}(y)\leq 1$ であるから，Mは compact である。

$$G(y,h^{ij})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^i\partial\eta^j}(x)h^{ij}+\frac{r(f,y)}{\sum_{i=1}^n(\eta^i(y))^2}$$

をφ による$K-\{x\}$ の image に入る$\zeta=(y,h^{ij})$に対して定義する。この函数は第2項がK上の連続函数に一意的に拡張できることから M 上の連続函数に一意的に拡張できる。このM上の 函数をあらためて $G(\zeta)$, $\zeta\in M$ とおく。定義から、 $g(y)=G(\varphi(y))$, $y\in K-\{x\}$である。
M上に測度 $N(t,\cdot)$ を

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$N(t, A) = \hat{\gamma}(E, \varphi^{-1}(A)), \quad A \subset M$$

によって定義する。あきらかに $N(t, M) = 1$。従って $\{t_n \downarrow 0\}$ を適当にえらんで $N(t_n, \cdot)$ が weak star limit $N(\cdot)$ をもつようにすることが出来る。そこでこれらの量によって $\mathfrak{A}u(x)$ を表せば

$$\mathfrak{A}u(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \Big\{ \gamma(t_n) f(x) + \sum_{i=1}^{n} \beta^i(f) \frac{\partial f}{\partial \eta^i}(x)$$
$$+ \int_M G(\xi)\, l(t_n) N(t_n, d\xi) \Big\}$$
$$= \hat{\gamma} f(x) + \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}^i \frac{\partial f}{\partial \eta^i}(x) + \int_M G(\xi)\, \hat{l} \cdot N(d\xi)$$

最後の項をかきかえるために $\hat{\nu}(A) = N(\varphi(A)), A \subset K$ とおけば

$$\int_M G(\xi) N(d\xi) = \int_{M \cap \{y = x\}} G(\xi) N(d\xi) + \int_{M \cap \{y \neq x\}} G(\xi) N(d\xi)$$

$$= \int_{M \cap \{y = x\}} \Big(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^i \partial \eta^j}(x) h^{ij} \Big\} N(d\xi) + \int_{M \cap \{y \neq x\}} G(\xi) N(d\xi)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^i \partial \eta^j}(x) \cdot \int_{M \cap \{y = x\}} \Big(\frac{1}{2} h^{ij} \Big) N(d\xi) + \int_{K - \{x_0\}} G(\varphi^{-1}(y))\, \hat{\nu}(dy)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \hat{\alpha}^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^i \partial \eta^j}(x) + \int_{K - \{x_0\}} g(y)\, \hat{\nu}(dy)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \hat{\alpha}^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^i \partial \eta^j}(x) + \int_{K - \{x_0\}} \frac{f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta^i}(x) \eta^i(y)}{\sum_{i=1}^{n} (\eta^i(y))^2}\, \hat{\nu}(dy)$$

ただし $\hat{\alpha}^{ij} = \frac{1}{2} \hat{l} \cdot \int_{M \cap \{y = x\}} h^{ij} N(d\xi)$ である。さらに $\hat{\nu}_x(dy)$ を $\nu_x(A) = \int_A \frac{l}{\sum_{i=1}^{n} (\eta^i(y))^2} \hat{\nu}(dy)$ によって定義すれば、以上をまとめて (4.1) が得られる。$\hat{\alpha}_{ij}$ の定符号性，ν に付する条件、$\hat{\gamma} \leq 0$ なることは、すべて定義から明

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

らかである。

Lemma 4.1 $L=\frac{\partial}{\partial n}$ であるとき $\alpha \geqq 0$ をひとつfixすると $\widehat{LH_\alpha}=\widehat{\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha}$ をgenerator とする ∂D 上のmarkov 過程が存在する。また $C^3(\partial D)\subset \mathcal{D}(\widehat{\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha})\subset \mathcal{D}(\widehat{\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha})$ であって

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha}f(x)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha_{1\alpha}^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^i\partial\xi^j}(x)+\sum_{i=1}^{N-1}\beta_{1,\alpha}^{i}(x)\frac{\partial f}{\partial\xi^i}(x)+\gamma_{1,\alpha}(x)f(x)$$
$$+\int_{\partial D}\left\{f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial f}{\partial\xi^i}(x)\xi^i(y)\right\}\widetilde{\nu}'_{\alpha,x}(dy), \tag{4.2}$$

$$f \quad \mathcal{D}(\widehat{\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha})$$

こゝに $\{\alpha_1^{ij}(x)\}$ は non-negative definite, $\gamma_1(x)\leqq 0$ また $\widetilde{\nu}_{\alpha,n}(\cdot)$ は ∂D 上の σ-finite な測度で x の任意の近傍 U_x に対して

$$\widetilde{\nu}'_{\alpha,x}(\partial D-U_x)<\infty,\ \int_{U_x\cap\partial D}\sum_{i=1}^{N-1}(\xi^i(y))^2\,\widetilde{\nu}'_{\alpha,x}(dy)<\infty \tag{4.3}$$

証明 第2章定理2.3(I)によって $f\in C^{(H)}(\partial D)$ に対し方程式

$$(\alpha-A)u(x)=0,\quad x\in D$$
$$(\beta-L)u(x)=f(x),\ x\in\partial D,\ \beta>0$$

は解 $u\in C^{(H)}(\bar{D})$ をもつ。従って定理2.1によって $\widehat{LH_\alpha}=\widehat{\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha}$ をgenerator にもつMarkov 過程が ∂D 上に存在し、$C(\partial D)$ 上に強連続な半群 $\{T_t^\alpha\}$ を定める。一般のLに対して $C^3(\partial D)\subset\mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha})$ なことはすでに注意してあるから $C^3(\partial D)\subset\mathcal{D}(\widehat{\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha})\subset\mathcal{D}(\widehat{\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha})$, 所で $\xi_x^i(y)\in C^3(\partial D)$ は最初に仮定してあるから, $1,\ \xi_x^i(y),\ \sum_{i=1}^{n}(\xi^i(y))^2$ $\mathcal{D}(\widehat{\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha})$ である。従ってprop.4.1によりLemma

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

が成立つ。」

Lemma 4.2　$\alpha \geqq 0$ をひとつ fix すると ∂D 上に次の条件をみたす σ-finite な測度 $\tilde{\nu}^{2}_{\alpha,x}(dy)$ が各 $x \in \partial D$ に対して唯ひとつ存在する。

$$(4.4)\quad \int_{\partial D} f(y)\,\tilde{\nu}^{2}_{\alpha,x}(dy) = \int_{D} H_{\alpha} f(y)\,\nu_x(dy),\quad f \in C(\partial D)$$

$$(4.5)\quad \int_{\partial D} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\xi^{i}_{x}(y)\right)^2 \tilde{\nu}^{2}_{\alpha,x}(dy) < \infty,\quad \tilde{\nu}^{2}_{\alpha,x}(\partial D - U_x) < \infty$$

こゝに U_x は $x \in \partial D$ の任意の近傍である。(4.4)の等式は右辺が確定する時に意味をもつものとする。

証明　$x \in \partial D$ をひとつ固定して考えるものとし

$$\eta(y) = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \left(\xi^{i}_{x}(y)\right)^2\right]_{\partial D} \in C^3(\partial D)$$

とおく。$f \in C^3(\partial D)$ に対して $f \cdot \eta \in C^3(\partial D)$ であるから $H_{\alpha}(f \cdot \eta) \in C^2(\bar{D})$, しかも $\frac{\partial}{\partial \xi^i}(f \cdot \eta)(x) = 0$, $i = 1, \cdots, N-1$ であるから functional

$$\Phi(f) = \int_{D} H_{\alpha}(f \cdot \eta)(y)\,\nu_x(dy)$$

は f $C^3(\partial D)$ に対し確定し、linear であって non-negative, しかも $\Phi(1) < \infty$ であるから、Φ は $C(\partial D)$ 上の bounded, linear, non-negative な functional に一意的に拡張される。従って才一章 Lemma 2.1 により、∂D 上に測度 μ で次の性質をもつものが唯ひとつ存在する。

$$\Phi(f) = \int_{\partial D} f(y)\,\mu(dy)\quad,\quad f\ \ C(\partial D)$$

この μ は $x \in \partial D$ で point mass をもたない。実際 $f_n \in C^3(\partial D)$, $f_n \downarrow 0$ on $\partial D - \{x\}$ となる列をとれば $H_{\alpha}(f_n \cdot \eta) \downarrow 0$ であるから $\Phi(f_n) \downarrow 0$. これに注意して $\tilde{\nu}^{2}_{\alpha,x}$ を

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$\widetilde{\nu}^{\alpha}_{\alpha,x}(A)=\int_{A-\{x\}}\eta(y)^{-1}\mu(dy)$$

によって定義すれば、$f\in C^3(\partial D)$ かつ $\lim_{y\to x} f(y)\cdot\eta^{-1}(y)$ が有限に確定するような f に対しては $f\cdot\eta^{-1}$ が ∂D 上の連続函数に uniquee に拡張できるから

$$\int_{\partial D} f(y)\,\widetilde{\nu}^{x}_{\alpha,x}(dy)=\int_{\partial D-\{x\}} f\cdot\eta^{-1}(y)\mu(dy)=\Phi(f\cdot\eta^{-1})$$

$$=\int_D H_\alpha f(y)\,\nu_x(dy)$$

U_x を x の任意の近傍とする時 carrier が $\partial D-U_x$ に入る $f\in C(\partial D)$ に対しては同じ性質をもつ $f_n\in C^3(\partial D)$ があって $f_n\to f$, 各 f_n に対しては (4.4) が成立つから、極限 f に対しても (4.4) が成立つ。次に (4.4) の右辺がある $f\in C(\partial D)$ に対し成立つなら x の近傍列 $U_n\downarrow\{x\}$ と carrier が各々 $\partial D-U_n$ にふくまれる $C(\partial D)$ の函数列 $\{f_n\}$ で $f_n\to f$, $|f_n|\uparrow|f|$ となるものが存在する。各 f_n に対しては (4.4) が成立つから $|f|$ 及び f に対しても (4.4) が成立つ。(4.5) は測度 $\nu^{x}_{\alpha,x}(\cdot)$ の定義から明らかである。

<u>定理4.1</u> f $\mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha})$ に対して 次の式が成立する

$$(4.6)\quad \widehat{LH}_\alpha f(x)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}_{\alpha}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^i\partial\xi^j}(x)$$
$$+\sum_{i=1}^{N-1}\beta^i_\alpha(x)\frac{\partial f}{\partial\xi^i}(x)+\delta_\alpha(x)f(x)$$
$$+\int_{\partial D}\left\{f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial f}{\partial\xi^i}(x)\xi^i(y)\right\}\widetilde{\nu}_{\alpha x}(dy)$$

x ∂D

こゝに $\{\alpha^{ij}_\alpha(x)\}$ は non-negative definite, $\delta_\alpha(x)\leq 0$ かつ $\widetilde{\nu}_{\alpha,x}$ は ∂D 上の測度であって

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(4.7)\quad \int_{\partial D}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\xi_x^i(y)\right)^2\tilde{\nu}_{\alpha,x}(dy)<\infty,$$

$$\tilde{\nu}_{\alpha,x}(\partial D-U_x)<\infty,$$

U_x は x の任意の近傍である。

<u>証明</u> まず、次の量が各 $x\in\partial D$ に対して有限なことを注意する。

$$(4.8)\quad \gamma_{x,\alpha}(x)=\int_D(H_\alpha 1(y)-1)\nu_x(dy),$$

$$\beta^i_{x,\alpha}(x)=\int_D\left(H_\alpha\xi_x^i(y)-\xi_x^i(y)\right)\nu_x(dy)$$

実際、これらの被積分函数およびその ξ_x^i, $i=1,2,\cdots N-1$ に関する1階微分は x で 0 であり、被積分函数は $C^2(\bar{D})$に入るから $\nu_x(\cdot)$ の性質から有限なことは明らか。 次に $\widehat{LH_\alpha}f(x)$ を $f\in\mathcal{D}(\widehat{LH_\alpha})$ に対し定義に従って計算すれば

$$(4.9)\quad \widehat{LH_\alpha}f(x)=\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^i\partial\xi^j}(x)$$
$$+\sum_{i=1}^{N-1}\beta^i(x)\frac{\partial f}{\partial\xi^i}(x)+\gamma(x)f(x)$$
$$+\delta(x)\lim_{y\to x}A(H_\alpha f)(y)+\mu(x)\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha f(x)+$$
$$\int_{\bar{D}}\left(H_\alpha f(y)-f(x)-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial f}{\partial\xi^i}(x)\xi^i(y)\right)\nu_x(dy)$$

この内第4項は $(\alpha-A)H_\alpha f(x)=0$, $x\in D$ に注意すれば.

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$$(4.10)\quad \delta(x)\lim_{y\to x} A(H_\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

才5項はLemma 4.1 によって (4.2) のように書きかえられる。最終項を書き直すため Dの上の積分だけをLemma 4.2 および (4.8) によって計算すると

$$\int_D \Big(H_\alpha f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x)\xi^i(y)\Big)\nu_x(dy)$$

$$= \int_D H_\alpha\Big(f - f(x) - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x)\xi^i\Big)(y)\nu_x(dy) +$$

$$(4.11)\quad \int_D (H_\alpha 1(y) - 1) f(x)\nu_x(dy)$$

$$+\int_D \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x)\big(H_\alpha \xi^i(y) - \xi^i(y)\big)\nu_x(dy)$$

$$= \int_{\partial D}\Big(f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x)\xi^i(y)\Big)\tilde{\nu}^2_{\alpha,x}(dy)$$

$$+\gamma_{2,\alpha}(x)f(x) + \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i_{2,\alpha}(x)\frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x)$$

従って $\nu_x(\cdot)$ の ∂D への restriction を $\tilde{\nu}_x(\cdot)$ とおき

$$(4.12)\quad \alpha^{ij}_\alpha(x) = \alpha^{ij}(x) + \mu(x)\alpha^{ij}_{1,\alpha}(x),$$

$$\beta^i_\alpha(x) = \beta^i(x) + \mu(x)\beta^i_{1,\alpha}(x) + \beta^i_{2,\alpha}(x)$$

$$\gamma_\alpha(x) = \gamma(x) + \alpha\delta(x) + \mu(x)\gamma_{1,\alpha}(x) + \gamma_{2,\alpha}(x)$$

$$\tilde{\nu}_{\alpha,x}(\cdot) = \tilde{\nu}_x(\cdot) + \mu(x)\tilde{\nu}^1_{\alpha,x}(\cdot) + \tilde{\nu}^2_{\alpha,x}(\cdot)$$

とおくことにすれば、(4.9) は (4.2), (4.10) および (4.11) によって (4.6) のように書くことが出来る。

$\{\alpha^{ij}_\alpha(x)\}$ が non-negative definite なこと、

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$\gamma_\alpha(x)\leq 0$なことは（4.12）の定義とLの各項の性質及び Lemma 4.1 から明らか。$\widehat{V}_{\alpha,x}(\cdot)$の性質も同様。

こゝで応用上の目的で定理2.1，定理3.1およびこれらの直後の注意と定理4.1とを次の形にまとめておくことにする。

定理4.2　各$\alpha>0$に対し　$C(\partial D)$内 dense な subset $\mathcal{D}_\alpha$ が存在し、これに対して　i) 任意の$\beta>0$に対して

$$(\alpha-A)\,u(x)=0\ ,\quad x\in D$$
$$(\beta-L)\,u(x)=f(x)\ ,\quad x\in\partial D\ ,\quad f\in\mathcal{D}_\alpha$$

が解 $u\in C^{(H)}(\overline{D})$をもつとする。あるいは ii) 任意の$\beta>0$に対して

$$(4.13)\qquad (\beta-\overline{\widehat{LH}_\alpha})\,g=f\ ,\quad f\in\mathcal{D}_\alpha$$

が解 $g\in\mathcal{D}(\overline{\widehat{LH}_\alpha})$ をもつものとする。但し、$\widehat{LH}_\alpha$ は（4.6）によって与えられる。このとき$\overline{D}$上にMarkov過程が存在し、その遷移確率系は$C(\overline{D})$上に時間tについて強連続な半群$\{T_t\}$を定める。$\{T_t\}$の generator を$\mathcal{G}$とすれば $\mathcal{G}$は$\overline{A}$の contraction であり

$$\overline{L}u=0\ ,\quad u\in\mathcal{D}(\mathcal{G})$$

あるいはこれよりもよわく

$$Lu(x)=0,\quad x\in\partial D\ ,\ u\in C^2(\overline{D})\cap\mathcal{D}(\mathcal{G})$$

（4.13）は 定理4.1でみたような型の integro-differential equation であるが、これが何等かの方法でとけることが判っている場合、上の意味で与えられた境界条件をみたす diffusion が存在することが判るのである。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

§5. 例

例1 領域D及び作用素Aについての仮定は今までのとおりとし境界条件 L が次のように与えられた場合、これに対応する diffusion はつねに存在する。

$$Lu(x) = \gamma(x)u(x) + \delta(x)\lim_{y\to x} Au(y) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial n}u(x) = 0, \quad x \in \partial D$$

但し γ, δ, μ は十分なめらかとする。

証明 Theorem 3.1 により $C(\partial D)$ 上 dense な sub set に属する f と任意の α, $\beta > 0$ に対し

$$(5.1) \quad (\alpha - A)u(x) = 0 \qquad x \in D$$
$$(5.2) \quad (\beta - L)u(x) = f(x) \qquad x \in \partial D$$

が $C^{(H)}(\bar{D})$ に属する解 u をもてばよい。所で (5.1) から $Au(x) = \alpha u(x)$, $x \in D$ が成立つから (5.2) 式は

$$(5.3) \quad (\beta - \gamma(x) - \alpha\delta(x))u(x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial n}u(x) = f(x) \quad x \in \partial D$$

とかきかえられる。所で (5.1)、と (5.3) の解は $f \in C^{(H)}(\partial D)$ ならば第2章定理 2.3 によって唯ひとつ存在し $C^{(H)}(\bar{D})$ に属する。$C^{(H)}(\partial D)$ は $C(\partial D)$ 内で dense であるから上の結論が得られる。

準備として次のことを証明する。

Proposition 5.1 K を compact な空間とする。$C(K)$ 上の non-negative operator の半群 $\{S_t\}$ が $t \geq 0$ につき強連続で $\|S_t\| \leq 1$ が成立つとする。$C(K)$ 上に bounded linear operator で $f \in C(K)$ が positive maximum をとる点ではMfが負となるようなMがあれば $\mathcal{G}$ を $\{S_t\}$ の

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

generator とするとき．以下によって定義される $\boldsymbol{\mathfrak{G}}$ を generator にもち，$\{S_t\}$ について上にのべた性質をもつ C(K) 上の semigroup $\{S_t\}$ が存在する．

$$\boldsymbol{\mathfrak{G}} f = \mathfrak{G} f + Mf, \quad f \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$$

証明　第1章定理22でのべたHille－吉田の定理によって十分大きなαに対して次のことを証明すればよい。i) $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}+M)$ は C(K) で dense　ii) 任意の f に対して

$$(5.4) \quad (\alpha - \mathfrak{G} - M) g = f$$

は解 $g \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}+M)$ をもつ。iii) (5.4) の f, g に対して $\|g\| \le \frac{1}{\alpha}\|f\|$，iv) (5.4) で $f \ge 0$ ならば $g \ge 0$． i) は M が C(K) 上定義されているから明らか。ii) を証明するため $K_\alpha = (\alpha - \mathfrak{G})^{-1}$ とおけば $\|K_\alpha\| \le \frac{1}{\alpha}$ であるが、これを用いれば (5.4) は

$$(5.5) \quad g - K_\alpha M g = K_\alpha f$$

と表される。α が十分大きければ $\|K_\alpha M\| < 1$ であるから

$$\{ I + K_\alpha M + (K_\alpha M)^2 + (K_\alpha M)^3 + \cdots \} K_\alpha f$$

は収束するが、これが (5.5) 従って (5.4) の解である。
iv) を示すため $f \ge 0$ とし，g が負になることがあるとする K は compact だから g が negative minimum をとる点 $x_0 \in K$ がある。ところが $\|S_t\| \le 1$ と S_t が非負なことから $S_t g(x) \ge g(x_0)$，$x \in K$, $t \ge 0$ が成立つから $\mathfrak{G} g(x_0) \ge 0$ 従って M が non-positive なことと合せて $0 \le f(x_0) = \alpha g(x_0) - \mathfrak{G} g(x_0) - M g(x_0) \le \alpha g(x_0) < 0$ で矛盾を生じた。iii) は g が x_0 で negative minimum をとれば上の計算から $f(x_0) \le \alpha g(x_0) \le \alpha g(x)$，同様 positive

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

maximum をとれば $f(x_0) \geqq \alpha g(x_0)$ が得られるから
$\|\alpha g\| = \alpha \|g\| \leqq \|f\|$

例2　Dとして R^3 の中の点集合 $\{(x_1, x_2, x_3);\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ で $(x_1, x_2, 0)$ と $(x_1, x_2, 2\pi)$ とを *identify* したものをとる．境界 ∂D は2次元の *torus* である．この時次の条件をみたす A, L が与えられたとする。たゞし以下で各点 $x \in \partial D$ に対して与えられた座標系 $\{\xi_x^i(y)\}$ は x_3 軸を中心とする回転およびこの軸にそった平行移動について不変で ξ^1_x と ξ^2_x による微分が *torus* の自然な座標系による微分と一致するようにとったものとする。

1）Aの係数は上記の運動について不変

2）Lの係数のうち，$\alpha^{12}(x) = \alpha^{21}(x)$，$\beta^1(x)$，$\mu(x)$ および *measure* $\nu_x(\cdot)$ が上記の運動について不変（β^1 の代りに β^2 としてもよい）．

3）Lの各項の係数が $C^\infty(\partial D)$ に入る。

以上の条件の下で A, L できまる *diffusion* が $\bar{D}$ 内に存在し，これによってきまる半群は *unique* である。

証明　定理4.1によって $\widehat{LH_\alpha}$ を書き直す訳であるが，その際，方程式と $\mu(x)$ とが上記の運動で不変だから $\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha$ の項と，$\nu_x(\cdot)$ によってきまる部分とは *rotation* について不変である。従って

$$\widehat{LH_\alpha} f(x) = \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_\alpha^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j}(x) + \sum_{i=1}^{2} \beta_\alpha^i(x) \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x) + \delta_\alpha(x) f(x) + \int_{\partial D} \Big\{ f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(x)\, \xi_x^i(y) \Big\} \nu_x^\alpha(dy)$$

の係数の内 x に関係するのは $\alpha^{11}(x)$，$\alpha^{22}(x)$，$\beta_\alpha^1(x)$，$\delta_\alpha(x)$ だけであり $\nu^\alpha_x(\cdot)$ は前記の運動について不変である。従って次の定理を $\widehat{LH_\alpha}$ に適用することによって $C(\partial D)$ 上に

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$\hat{L}H_\alpha$ を generator にもつ半群が存在することが判るから、方程式

$$(\beta - \hat{L}H_\alpha)\,g = f\ ,\ f \in C(\partial D)$$

はつねに解をもつ。従って定理 4.2 によって上にのべたことが成立つ。

<u>定理（K. Sato）</u>[1)]　x を m 次元 Euclid 空間 R^m の点とし C を次の条件をみたす R^m 上の連続函数のつくる Banach space とする。

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = f(x_1 + 2n_1\pi, \cdots, x_m + 2n_m\pi)$$

n_i は任意の整数

C^n は C に属する函数で n 階連続微分可能なものの全体とする。Au を

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$
$$+ c(x)u(x) + \int_{R_0}\Big[u(x+\xi) - u(x) - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\xi_i\Big]\,g(x,\xi)\,G(d\xi)$$
$$,\ u \in C^2$$

によって定義する。たゞし $R_0 = \{\xi = (\xi_1, \cdots \xi_m)\ ;\ \xi_i \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)\ \text{for}\ {}^\forall i\}$ とする。又 $R_n = \{\xi = (\xi_1, \cdots \xi_m)\ ;\ \xi_i \in (-\pi, -\frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{n}, \pi)\ {}^\forall i\}$ とおき、以下の仮定がみたされるものとする。

i)　a_{ij} b_i および c は C^∞ に属し、$\{a_{ij}(x)\}$ は symmetric かつ non-negative definite である。
また $c(x) \leq 0$

ii)　$g(x, \xi)$ は non-negative で x の函数として C^∞ に属し、ξ については measurable とする。$G(d\xi)$ は R_0 上の measure とする。$k = 0, 1, 2 \cdots$ に対して

1) K. Sato [29]

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

$g(x,\xi)$ のxに関するk回の偏ビブンの絶対値をすべて上からおさえる函数 $g_k(\xi)$ で、次の条件をみたすものがある。

$$\int_{R_n} g_k(\xi)\, G(d\xi) < \infty \qquad (n=1,2,\cdots,\ k=0,1,2\cdots)$$

$$\int_{R_0} \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2\, g_k(\xi)\, G(d\xi) < \infty \qquad (k=0,2)$$

$$\int_{R_0} \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|\, g_1(\xi)\, G(d\xi) < \infty$$

iii) $i, j \neq 1$ に対しては a_{ij} は x_i のみに a_{ij} は x_i と x_j のみにまた b_i は $x_2, x_3, \cdots\cdots, x_m$ のみに、さらに $g(x,\xi)$ の方は $(x_2, \cdots, x_m)$ と ξ のみに依存するものとする。

我々のは、$m=2$ とし、$g(x,\xi)$ はxにもξに無関係な constant ととって上の定理を応用したのである。従って、$\nu_x^0(\cdot)$ がいずしも上べのべた運動について不変でなくとも適当に条件をつけて対象を拡張することが出来る。準備としてのべた prop 5.1 を用いれば L における ν_x が運動依存しない部分 $\nu'_x(\cdot)$ と $\partial\xi_x^2$ 方向の運動にのみ依存し total mass $\nu^2_x(\bar{D})$ がxについて一様に有界な部分 $\nu'_x(\cdot)$ との和 $\nu_x(\cdot) = \nu'_x(\cdot) + \nu^2_x(\cdot)$ に書けている時にも同じ事が成立つのが判る。

<u>例 3</u>　Dが2次元の開円板、又は3次元の開球とする。AとLは本章を通しての条件のほか、次の条件をみたすものとする。

1) Aの係数は rotation について invariant.

2) Lの係数のうち、$\{\alpha^{ij}\}$, $\{\beta_i\}$ μ が常数で $\nu_x(\cdot)$ は rotation について invariant、但し $\{\xi_x^i(y^3)\}$ も rotation invariant にえらびとくに $\{\xi_x^i(y)\}_{\partial D} \in C^\infty(\partial D)$ のようにとるものとする。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

以上の条件の下で A と L できまる diffusion が存在し、これから $C(\bar{D})$ 上にきまる半群は unique である。

<u>証明</u>　再び定理 4.1 によって $\widehat{L}H_\alpha$ を書き直すが、上につけた条件から、$\gamma_\alpha(x)$ だけが rotation に依存することが判る。$\widehat{L}H_\alpha - \gamma_\alpha(x) = M$ とおけばこれは rotation invariant で常数項をもたない。もしも $\bar{M}$ を generator にもつ $C(\partial D)$ 上の半群で non-negative, t について強連続かつノルム ≤ 1 のものが存在すれば、Prop 5.1 によって $\widehat{\bar{L}}H_\alpha$ を generator とする $C(\partial D)$ 上の半群の存在が判る。これによって $(\beta - \widehat{\bar{L}}H_\alpha)g = f$, $f \in C(\partial D)$ はつねに解をもつから、定理 4.2 から上述の結論が得られる。$\bar{M}$ を generator とする半群の存在は次の G.Hunt の定理によるが、これは、∂D が rotation について Lie 群をなすこと、M が rotation について不変なこととによっている。但し、Hunt の記号と、こゝで用いた記号との関係は省略し、単に定理を引用するにとゞめる。なお、$\{\xi^i_x(y)\}$ についての最後の条件は下の定理中、$X_i \in C_2$ なこと、C_2 は十分回微分可能な函数をすべてふくむ (Hunt [11] PP. 268) から ξ^i_x を X_i として用いられるようにとったのである。

最初に記号を説明しよう。G は e を単位元とする Lie 群 G_c はその one point compactification とする。C は G_c 上の連続函数の space にノルム $\|f\| = \sup_{x \in G_c} |f(x)|$ を入れて得る Banach 空間。C_k は Lie algebra の元 Y_i, $1 \leq i \leq k$ を任意にえらんだ時, $Y_1(Y_2(\cdots(Y_k f)\cdots))$ が意味をもつようなfの全体に Lie algebra の base $\{X_1, \cdots X_k\}$ をひとつ固定し、これから定まるノルム

$$\|f\| + \sum_i \|X_i f\| + \cdots + \sum_{i_1 \cdots i_k} \|X_{i_1} \cdots X_{i_k} f\|$$

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

を入れて得られる Banach 空間とする。$x_1, \cdots, x_d$ は C_2 に属する函数で $x_i(\varepsilon)=0$, $X_i x_j(\varepsilon)=\delta_{ij}$ をみたすもの φ は $\mathfrak{g}_C-\{\varepsilon\}$ 上正で ε の近くでは $\sum_{i=1}^{d} x_i^2$ と一致する C_2 函数とする。このとき次の定理が成立つ。

<u>定理 (G. Hunt)</u>[2] $\{S_t\}$ が C 上の non-negative linear かつ $S_t 1 = 1$ をみたす operator の半群で $t \geq 0$ に関し強連続であるとする。このとき、その generator M は、少くし C_2 上で定義され C_2 上で次のような表現をもつ。

$$Mf(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i f(t) + \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} X_i X_j f(t) + \int_{\mathfrak{g}_C-\{\varepsilon\}} \left\{ f(T_\sigma) - f(z) - \sum_{i=1}^{d} X_i f(t) \cdot x_i(\sigma) \right\} G(d\sigma)$$

こゝに matrix $\{a_{ij}\}$ は non-negative definite, G は $\mathfrak{g}_C-\{\varepsilon\}$ 上の測度であり $\int \varphi(\sigma) G(d\sigma)$ が有界。G と $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} X_i X_j$ は M だけに関係し base $\{X_1, \cdots, X_d\}$ と x_i のえらび方に関係しない。さらに M の C_2 上の restriction は半群を決定する。

逆に、もしも、変換 $M: C_2 \to C$ が上の式であたえられ $\{a_{ij}\}$ と G とが上にのべた性質をもつなら M に対応して上記の性質をもつ半群が丁度ひとつ存在し M はその generator を C_2 上に restrict したものになっている。

こゝでのべた<u>例 3</u> はすべての term が rotation invariant のばあい Wentzell [37] が別の方法で解をあたえている。しかも、そこでは rotation invariant な場合は、我々の定式化した問題の解は第3章のはじめにのべた条

2) G. Hunt [11, p 279]

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

件をみたすLに対応するものでつくされていることが同時に示されている。

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

文　　　献

[1]. J. L. Doob. ; *Stochastic processes*, 1953.

[2]. F. G. Dressel; *The fundamental solution of the parabolic equation*. I. II. Duke Math. J. 7. (1940), 186–203 ; 13. (1946), 61–70.

[3]. G. F. D. Duff ; *Partial differential equations*, Toronto. 1956.

[4]. W. Feller ; *Zur Theorie der stochastischen Prozesse*, Math. Ann. 113 (1936), 113–160.

[5]. 〃 ; *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations*. Ann. of Math. 55 (1952) 468–519.

[6]. 〃 ; *Boundaries induced by nonnegative matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 19–54

[7]. 〃 ; *On boundaries and lateral conditions for the Kolmogoroff differential equations*. Ann. of Math., 65 (1957) 527–570.

[8]. I.V. Girsanov ; *Fellerche Prozesse. I. Allgemeine Eigenschaften*. Theor. of prob. and its appl. 5 (1960), 7–28 (ロシア語)

Sem. on Probab.
Vol.5 1960年
P1-133

[9] R.Z Hasminsky ; Diffusion processes and elliptic equations degenerating at the boundary of the region, Theor of prob. and its appl. 3 (1958) 430−451. (ロシア語)

[10] E.Hille and R.S.Phillips ; Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 31. (1957)

[11] G.A. Hunt ; Semi-groups of me sures on Lie groups Trans Amer. Math. Soc. 81 (1956), 264−293.

[12] N. Ikeda ; On two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions (to appear)

[13] 伊藤 清 ; 確率論, 岩波書店 (1953)

[14] 〃 ; 確率過程, 岩波現代応用数学講座 (1957)

[15] 伊藤清, 渡辺信三, 福島正俊 ;
拡散過程 Seminer on probability vol 3. (1960).

[16] K.Ito−H.P.McKean ; Diffusion, (to appear)

[17] S. Ito ; The fundamental solution of the parabolic equation in a differentiable manifold, I. Osaka Math. J., 5 (1953), 75−92 ; II, 6 (1954), 167−185.

[18] 〃 ; A boundary value problem of partial differential equations of parabolic type.

Duke Math. J. 24 (1957), 299–312.

[19] 〃 ; Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems, Jap. J. Math. 27 (1957), 55–102.

[20] 〃 ; A remark on my paper "a boundary value problem of partial differential equations of parabolic type" in Duke Math. J., proc. Japan. Acad. 34 (1958) 463–465.

[21] 伊藤清三；拡散方程式．数学 10巻4号 (1959) 219–227.

[22] R.S Martin ; Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941) 137–172.

[23] 丸山儀四郎，十時東生：確率過程の収束に関する位相解析的方法 Seminar on probability vol. 4.

[24] H.P. McKean–H. Tanaka ; (to appear)

[25] M. Motoo ; Diffusion process corresponding to $\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}+\sum b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ Ann of the Institute of Statistical Math Vol 12. No 1. (1960–61) 37 – 61.

[26] M. Motoo ; Some properties of process corresponding to $\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}+\sum b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ (to appear).

[27] E. Nelson ; An existence theorem for second order parabolic equations Trans. Amer. Math.

Sec. 88 (1958) 414—429.

(28) O.A Oleinik ; 楕円型方程式に対する境界値問題のいくつかの性質について Math. Сборник 30 (1952) 695—702 (ロシア語)

(29) K. Sato ; Integration of the generalized Kolmogorov - Feller backward equations. J. of the Faculty of Sciences Univ. of Tokyo (to appear)

(30) 〃 ; Local times on the boundary for multidimensional diffusion (to appear)

(31) K. Sato - T. Ueno : Multi-dimensional diffusion and Markov process on the boundary (to appear)

(32) 高 木 貞 治 ; 解析概論 岩波書店 (1943)

(33) T. Ueno ; The Brownian motion satisfying Wetzell's boundary condition, presented to the 32-nd session of the international statistical institute, Tokyo (1960)

(34) T. Ueno ; Diffusion satifying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary concerning the diffusion (to appear)

(35) M. I. Visik ; Doklady Akademii Nauk, 82 (1952), No. 2.

〔36〕 渡 辺 毅；可附番空間の上のMarkov過程から導かれるMartin境界とその応用．Seminar on Probability Vol 1 （1959）

〔37〕 A. D. Wentzell ； On lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes. Theor of prob and its appl 4 (1959) 172—185 （ロシア語）

〔38〕 K. Yosida ； On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators. J. Math. Soc Japan. 1. (1948) 15—21

〔39〕 吉 田 耕 作；位相解析Ｉ．岩波書店（1951）

〔40〕 〃 ；位相解析（岩波現代応用数学講座）（1957）

〔41〕 〃 ；発展方程式に関連して．数学 10巻4号 （1959） 205—211

〔42〕 マルコフ過程について．確率論シンポジウム講演アブストラクト，1959年5月，日本数学会．