Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

SEMINAR ON PROBABILITY

vol. 9

Paul Lévy の業績

池 田 信 行　国 田 寛　野 本 久 夫
飛 田 武 幸　渡 辺 毅

1 9 6 1

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

前　書　き

現存の数学者の仕事について云々することは，まことに危険なことである．とくに，20世紀に這入ってからの数学における潮流の変動の激しさを見ているとその感じを一層深くする．その上わが国のように数学の歴史が浅く，国際的な変動に敏感なところでは，判断の基準が一定しない場合も多いので，このようなことをするのは一つの冒険とさえ思われる．

そのようなことは重々知りながらも既に70才を越えながら休むことなく個性味豊かな労作を発表し続けている *P. Lévy* の研究を追跡していると，ついそのようなことをしたい誘惑を感ずる．確率論がまだ賭の問題に密接な関係を持っていた初期の頃の研究者達，例えば，*Bernoulli*, *de Moivre*, *Laplace* から最近の *Borel* に到るまで，確率論の伝統に富んだ地に育った彼の研究には国際的な数学の流れの中を遊弋している姿でなく，その大河の流れの源である泉のような姿を見ることが出来る．このような特徴は，*P. Lévy* について論ずることの危険が変動という意味では他の人についてより遥かに小さいことを教えていると思える．しかし，その泉がどのような流れになるかをみることの難しさは誰にでも納得して貰えることであろう．

われわれがここにまとめたのは，このような興味ある作業への一里塚として，先ずその素材の整理を試みたものである．このようなことを始めたのは，実は1960年の秋確率論セミナーの第2回総会の行事として予定されていたことが急に実行不可能となり，代りのものとして，われわれが話をしたのがその一つの動機になった．その話は，当時関西に居た確率論セミナーの討論をまとめた形でなされたものであるが，2時間内に話をするという制約と準備の期間が極端に短かかったこともあって，内容的にもかたよった簡単なものであった．その後間もなく確率論セミナーの仕事の一環として，このようなものを作ることが決まったのであるが，われわれ共通の事情やまた個人的な事情もあって，実際この仕事に費したのは最近の短期間になってしまい，セミナーの方で与えられた充分な準備期間を活用出来なかったこと，又多くの方々の御援助にもかかわらず，素材が実に興味あるのにくらべ，ここにまとめた内容が貧弱なものになってしまったのではないかと思われる点について，一同申訳けないことと思っている．

まとめたことの概要は§1で述べているが，主として彼の著書といくつかの論

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

文を中心に論じた．そこで長い論文や，また短い論文でも興味に富んだ内容をもつと思われるものについてもその内容がごく一部しか述べられていなかったり，全くふれられていないものが少なからず見出されるであろう．このことは，われわれの努力の足りないことは云うまでもないことだが，P. Lévy の仕事の内容が非常に独創性に富んでいることと，表現の仕方がわれわれの慣習をはずれることの多い独特のスタイルのため充分理解出来なかったことにもよる．またここでは可能な限り今日確率論で用いられている慣習的な仕方で書くことを心掛け，関連ある P. Lévy 以外の人達の仕事及びわれわれ自身が気づいたことも取り入れて書くように努力した．しかし，ここに書いてあることをすべてその趣旨の仕方で理解しているとは限らない．P. Lévy の主張をそのままに近い形で述べたものも沢山ある．完全に証明出来るものとそうでないものとを，あまり明確に区別しないで書いているので，文章としては調子に高低があり，読みづらいものとなったのではないかと心配している．こうした多くの難点は，すべて始めに目標とした"一里塚"としての仕事だということで許して貰えると信ずるのは，勝手過ぎることかも知れないが，敢えてこの段階でまとめ，徒らに完全を期して時期をおくらせることをさけた．これがわが国の研究者に P. Lévy により以上の関心をもつことの一端となり，研究への刺激となることが出来れば，われわれにとってはこの上ない幸である．

われわれの中には，個人的に Lévy と文通し別刷を送ってもらっているものもいる．そのような際に示された Lévy の厚意に対し，この機会を利用して心から感謝の気持を表わしたい．又最近健康がすぐれない　とも聞くが，早く快復して今后とも ますます多くの仕事を発表し，われわれのみならず多くの確率論研究者を導いて欲しいと願っている．

尚執筆の分担は次の通りである．§§2〜3（渡辺），§4（池田），§5（野本，国田），§§6〜7（飛田）．§1と§8は全体で相談の上主として関西在住の池田，野本，飛田が執筆した．原稿の完成がおくれて最後に全部を通して検討する余裕がなかったので統一性の欠除があるかも知れない．印刷上のミスや不体裁があるとすればその責任は九州在住の渡辺，国田にある．また個人としては，自分で執筆した部分以外は充分理解していない所もあるが，最終的に出来上った内容については一同が共同の責任を感じている．

最後に，準備の段階で討論に参加して御意見をのべて下さった関西在住のメンバー及び数多くの確率論セミナーの方々にここで厚くお礼を申し述べたい．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

目　次

前書き ………… 1

§1. 概観 ………… 5

§2. Théorie de l'addition des variables aléatoires. ………… 11

§3. Processus stochastiques et mouvement brownien. ………… 32

§4. Brown運動 ………… 45

§5. Markov chain. ………… 71

§6. 確率過程の表現 ………… 96

§7. 多次元 parameter Brown 運動 ………… 118

§8. 結び ………… 129

参考文献 ………… 139

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

§1 概観

P. Lévy の確率論についての研究全体をスケッチし，そこに現われている問題点を可能な限り整理することがこのノートの目的である．しかしながら彼の研究は，確率論のある特定の題目に限定されているのではなく，多方面に亘っているので，この目的を完全に達成することは非常に困難である．そこで我々は彼の確率論についての主著２冊（[26]，[43]）と，最近の研究の問題点が述べられている論文[56]，[82]，[87]等を中心にして，彼の研究の思想乃至は傾向を骨組として，あとはそれに肉付けをする形で，或る程度この目標を達成したいと思う．

このような方針で Lévy の研究を概観するときに，まず第一に気付くことは彼が確率論の重要ないくつかの問題において，それを確率過程の理論と理解して取扱っていたことである．現在の時点で考えると，このような立場は極く自然のように思われるが，確率論における興味の多くが，確率変数の和に関する極限定理などにおかれていた時代に既にそのような考え方が行なわれている．当時，このような立場での研究者は Lévy だけではなかったにもせよ，彼の研究方法の特色といえよう．例えば[26]における無限分解可能な分布を加法過程のもつ特性量と理解して研究しているような点はその顕著なものの１つである．

彼は，確率分布や確率変数について特性函数その他多くの研究をした後，確率過程の研究に進んでいるが，彼の関係したものを大別すれば

(1) 加法過程（独立確率変数の和の理論を含む）

(2) Brown 運動

(3) 拡散過程（Markov 過程を含む）

(4) Markov chain

(5) 確率過程の表現

等々が主なものである．これらが確率論の殆んど全テーマにわたっている点からも彼の研究の巾の広さが推察されよう．更に，その研究方法は，後に詳しく述べるが，典型を詳細に調べていき，より広いクラスにまで発展させていくという形をとっているので非常な深みをもっている．従って今日確率論の多くの分野において，彼の名を抜きにしては語ることが出来ないような状態になっている．

彼の広範囲に亘る研究も，多方面への研究を同時に進めている最近の状態を除

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

けば，いくつかの時期的な特徴がみられる．大まかに分けてみれば，4つの時期が考えられ，それぞれ次のような文献にまとめられている．

（i） 第一期の研究（1920〜1935） …… [26]，
（ii） 第二期の研究（1935〜1945） …… [43]，
（iii） 第三期の研究（1950年頃） …… [56]，
（iv） それ以後 [82]，[87]，[101]他．

最近の研究（iv）では，新しい方向だけでなく（ii），（iii）における研究の発展をも含んでいるが，Lévy の確率論における基本的な考え方は，既に [26]，[43]，特に後者に述べられている．

そこで上に述べた内容区分および時代的区分について，より具体的に述べるためにまず彼の確率過程についてのイメージを [43] の第1章及び第2章に従って説明しよう．そこには確率過程の定義が述べられているが，いくつかの公理系を掲げてそこから理論を展開していくという方法はとらず，確率過程の構成的な説明といった形をとっている．先ず path が連続であるようなもので最も基本的である Brown 運動の構成法を示し，次いで Poisson 過程が path が純粋不連続であるような例として示されて居り，それらをモデルとして一般の確率過程の定義に進んでいる．

Lévy が確率過程と呼んでいるものは，時間的に変化していく偶然現象であって，この現象の各時刻 t における状態を確率論的に記述することができるような法則が存在するようなものである．今各瞬間 t に対して，この現象を数量的に $X(t,\omega)$ で表わすとき，それは確率変数になるが，これが亦 t を連続的に変化させたとき，1つの系としてこの現象を記述しているためには，何等かの意味でのつながりが必要であると考えられる．この事情を詳しくいえば，Lévy が Slutsky の立場と呼んでいる（[43]，§6）方法であって，それは任意の有限個の時点 $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n$ を定めたとき，同時分布

$$U_n = P(X(\theta_1)<x_1,\ X(\theta_2)<x_2, \cdots, X(\theta_n)<x_n).$$

が $\{X(\theta_i),\ i=1,2,\cdots,n\}$ のつながり方をきめているとする方法である．U_n は当然 compatibility の条件をみたさなければならないが，それでも，t の函数として path（fonction aléatoire）$X(t,\omega)$ がきまるわけではなく，それが実現出来るためには U_n に対して適当な条件が課されなければならない．例えば，U_n に応じて可附番個の dense な $\{t_i\}$ に対し $X(t_i,\omega)$ を

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

きめたとき，すべての t にまで拡張して $X(t,\omega)$ が定義されるためには連続性があれば十分である．このように分布の系が与えられたとして，それを確率過程と考えると同時に，それを記述する path の全体を考え，それのもつ特性を調べるという立場で確率過程を研究している．例えば拡散過程の path $X(t,\omega)$ は一般にその dt 時間の増分 $dX(t,\omega)$ が drift $a(X(t,\omega))dt$ の項と，純 random な項 $b(X(t,\omega))\cdot dB(t,\omega)$ との和になるもの，すなわち

$$(1.1) \qquad dX(t,\omega)=a(X(t,\omega))dt+b(X(t,\omega))dB(t,\omega)$$

で定まるものとしている．こゝで $dB(t,\omega)$ は Brown 運動の増分である．従って，その Brown 運動の測度を通じて新しい拡散過程の測度がきまり，各種の特性量が計算されるという筋道をしばしば通っている．この考え方をより一般にして，確率過程全般について次のような非常に直観的な把握をしている．すなわち確率過程 $X(t,\omega)$ をきめるのに屡々（例えば［　］参照）

$$(1.2) \qquad dX(t,\omega)=\Phi(X(\tau,\omega),\tau\leqq t\,;\ t,\,dt,\,\xi_t(\omega))$$

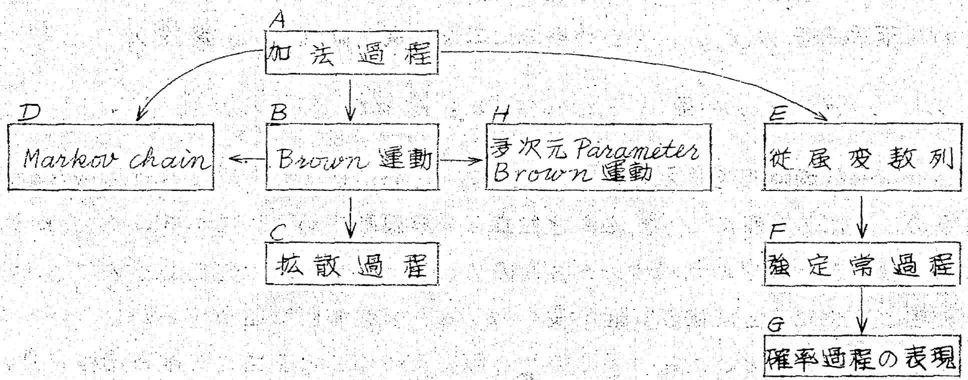
といった形式的な式を考えている．こゝに $\xi_t(\omega)$ は（1.1）における $dB(t,\omega)$ のように t 以前の $X(\tau,\omega)$ と独立な確率変数である．この式は $X(\tau,\omega)$，$\tau\leq t$ がきまったとき次の dt 時間後の $X(t+dt,\omega)$ をきめるのに，t 以前の量と，それらとは独立な確率変数 $\xi_t(\omega)$ とを如何に組合せるかという方法を示しているものといえよう．この Φ の形をきめることを通じて確率過程を定めようとするのが Lévy の考え方である．こゝで特に重要なことは，Φ の函数形が，確率過程についての主要な研究課題の1つである従属性のあり方を十分良く反映しているということである．例えば加法過程では $X(t+dt,\omega)$ は $X(t,\omega)$ と t 以前の量とは独立な $\xi_t(\omega)$ との和を作ればよいから Φ は最も簡単な一次函数である．又（1.1）で定まる拡散過程では Φ は $X(t,\omega)$ と $\xi_t(\omega)$（この場合は Brown 運動の増分 $dB(t,\omega)$）のみの函数で t 以前の $X(\tau,\omega)$ には関係していない．それは単純 Markov 性の反映に他ならない．又（1.1）で確率過程（拡散過程）をきめるのを，微分方程式によって通常の函数を決定するのと類似の考え方でとらえるとき，高階微分方程式の類似として，Φ が $\xi_t(\omega)$ の他に $X(t,\omega)$ 及びその高階微分のみを含む場合が考えられ，これから多重 Markov 過程の概念にまで発展している（［43］，［82］）．

Markov 性とは少し違った方向として，Φ が線型であるようなものゝクラス

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

を決定し，そのクラスに属する確率過程の従属性や path の性質など詳しく調べることも彼の最近の研究の1つとなっている．このクラスのものを線型過程とよんでいるが，その中で最も重要なものは正規過程である．それについては，特に(1.2)の型の形に注目した立場からかなり詳しい研究がなされ豊富な結果も得られている．

このように考えてくると，確率過程の研究で最も基本的な役割を演ずるものは上の $dB(t,\omega)$ または $\xi_t(\omega)$ の形のものであることは言うまでもないが，Lévy の研究もそのようなものが単純に現われるクラスから出発している．そこで，物事を図式的に述べることは常に考えが固定する危険があるけれども，今敢えてその危険を冒して，P. Lévy の全業績を通じての特徴や関連を次のような図式に表わして眺めてみよう．



この図式に現われている各項目の内容については，後の各節において詳しく論ずることにして，まずこの図式について簡単に説明することにしよう．加法過程すなわち端点以外を共有しない時間間隔における増分がお互に独立になるような確率過程の研究は独立確率変数の和の極限分布に関する研究に対応して起っている．1800年代の中心極限定理についての結果が1900年前後の Liapounov，1920年代の Lindeberg の仕事によって完成される一方，統計力学と関連して時間と共に変化する偶然量の研究が物理学者によって進められようとしている時代に加法過程という概念が既に確立され，その基本的な性質である今日 Lévy-Itô の表現と呼ばれるものが導かれた．この部分がAである．この研究は"分布が無限分解可能"という概念に関連して多くの人々の注意を惹いたわけであるが，上記のような一般の確率過程のとらえ方の立場からして，この加法過程がそ

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

れらの中で基本的であるという意味が明瞭になるような形でなされた点に特徴がある.

次には加法過程の中で *path* が連続であるようなものゝ研究として, *Brown* 運動の研究がある. この場合に加法過程一般よりもより詳細に *path* の性質を調べることにより, *Markov* 過程全体の *path* のもつ性質を調べる立場すなわち, 純確率論的な方法による確率過程の研究の道筋の典型を示している. この事情は後に§4で詳しく述べるが, 問題を表面的な形で解析的なものに帰着させるのではなくて, 一度このように純確率論的な方法で研究することにより, より深い解析学との相互関係が明瞭にされる基礎となっているところに1つの特徴がある.

BからCの拡散過程の研究へのつながりは, 時間を局所的にとったとき, すなわち各瞬間瞬間に増加していく独立な量を *Brown* 運動の増分で表わすことによって空間的に一様でない拡散過程を研究していく方向で(1.1)について説明した通りである. こゝで *Brown* 運動のような基本的なものから稍複雑なものへと進んでいく態度が明瞭にうかがわれる.

A又はBと, Dの *Markov chain* との関連は *Markov* 性を保存し, 状態空間のみを可算空間として, 同じく *path* に注目してそれを詳しく調べるという点において同じ観点に立っていることである. *Markov chain* の *path* の立場からのこの研究は, 後に§5で細かく述べるように, Bの研究と同様, 最近 *Feller* によって提起され確率論に豊かな問題をもたらした境界の研究に1つの立場を与えて, 刺激になっている.

A→E→F→G という方向は, B, C, D等のように *Markov* 性を中心としたものではなくて, 一般に従属性が複雑なものを, 加法過程のようなそれがより単純なもので表現していくという観点から(1.2)の型に注目し, そこでの $X(t,\omega)$ と $\xi_t(\omega)$ を増分としてもつ加法過程の性質の相互関係を調べていくという方向である. こゝでEやFは殆んど基礎的な注意や例をあげる程度に止まっていて, この方向の仕事が全面的に開花しているのはGで, 年代的にいうと1950年以降である. 又, 今述べたつながりの他にA→Eはもう1つの側面をもっている. これはF, Gに発展して行く方向ではないが, [26]の中で *Lévy* がかなり重点をおいて書いていることなので触れておく. 独立確率変数の和に対して成り立つ中心極限定理や大数の法則が従属変数列に対してどうなるかという問題は, *Lévy* 以前にも *Bernstein* の研究等が有名であるが, *Lévy*

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

はこれらの定理が成り立つためには分散の加法性が1つの基本的な要請であるという考察から出発して，今ではマルチンゲール性と呼ばれている概念に到達した. Lévy 自身はこれを条件(C)と名付け，この条件を満す従属変数列に対して独立変数列と略同様な極限諸定理を導びいたのである．概収束に関する部分はその后 Doob によって系統的に研究され，確率過程の研究で有力な道具になっている.

Hは，Brown 運動の拡張を parameter の方の次元をふやすというやり方で，こゝで Lévy 自身による研究は現在のところ path の連続性の他，それから導かれる正規過程がGの研究での重要な問題を提供するといった範囲に止まっている．

以上図式の各項目の関連をみてきたが，こゝに述べた順序は Lévy の研究の発展の歴史的段階を追ってなされたものではなく，研究内容のつながりに応じて述べたに過ぎない．

この他，1950 年以降は，より一般の確率過程の典型の研究へ進もうとする強い意向がみられ，上の図式に現われない多くのこと，例えば Semi-Markov 過程の研究や，Gをおし進めて非線型表現を考えるための準備等，その他にも古くから彼が扱ってきていることの再発見等々，近年は非常に多面的なように思われる．勿論過去においてもそうであり，我々が時を経て眺めているので整理されて見えるという面もあるに違いないが，単にそれだけではないように思える面がある．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

§2 Théorie de l'addition des variables aléatoires (Lévy[26]).

2. 1.

この本は表題からも知られるように'確率変数の和の理論'を扱っている．当時までのこの方面の研究は殆んど網羅されているようであるが，その大部分に Lévy 自身の研究が本質的に寄与している．テーマの限られたモノグラフを別にすれば，このような例を確率論の世界で他に見出すことは出来ない．幅の広いことと内容の深いことは前に述べた通りであるが，研究の速度も極めて早い．ここにおさめられた彼の研究はすべて1929～36年の間になされた．この本が当時の特に若い確率論研究者達に与えた影響は随分大きなものであったと思われる．また聞きで確かではないが，我が国でも例えば河田龍夫・国沢清典はこの本があまりに難解なので別な立場からの独立変数列の研究を思い立ち，それが彼らの平均濃度函数の理論に発展したと云われているし（国沢[1]，及び2.2参照），伊藤清がこの本の才7章を現代的により厳密に論じることを研究の出発点に選んだこともよく知られている（伊藤[1]）．Doob のマルチンゲール理論[4]が，その源をこの本の才8章の条件(C)に発していることは§1で述べた通りである．このようにその后の研究によってより完全な形で整理され，成書として発表された部分も多いが，一方でごく最近になってその重要性が認識され研究が進み始めた部分――例えば確率法則の分解，確率変数列の表現の問題等に関する部分――も少くない．

この本の豊富な内容の全部を詳しく説明することは，我々の能力からも限られた紙数からも出来ないことである．そこで最初に全体を概観し，次に特に重要と思われるテーマについてその后の諸研究と関連して述べることと，比較的日頃我々が接することの少ない問題をトピック的にとり上げることによって紹介としたい．

才1章は'確率概念の基礎'となっている．Lévy 自身の言葉によれば，「数学的な観点からすれば，出発点に取る公理系を述べれば十分であるが，公理系と確率概念の実際の価値を説明しておくことは有益と思われる」のである．この部分は彼の前の本[6]で詳しくのべたものの抜すいである．'確率の経験的定義の批判(§6)'という節等は興味がある．才2章，才3章は確率論の数学的

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

な基礎概念の説明である．抽象空間の上での確率法則（確率分布）と分割（*partition*）の概念がオ2章で，1次元及び多次元の確率変数とその法則に関する諸量（特性函数，最大濃度函数，分布間の*Lévy*の距離等）と，確率変数列の種々の収束がオ3章で導びかれる．オ4章は法則の畳み込みの定義から始まって古典確率論の結果としてよく知られているベルヌーイ列に対する弱大数の法則，中心極限定理，ポアソンの小数の法則が与えられる．最后の§29で畳み込みによって最大濃度函数が減少することを証明している．

オ5章はガウス法則（正規分布）に関する諸定理という表題で，始めに安定法則の定義とその特性函数の形が導びかれ，ガウス法則は有限分散の唯1つの安定法則としてとらえられる．次にガウス法則の分解に関する*Cramer*の定理を証明し，以下は独立変数列の和のガウス法則への収束が詳しく論じられている．これらについては2.4及び2.5で述べる．オ6章は独立変数を項にもつ無限級数の収束の条件に関する研究がまとめられている．*Borel-Cantelli*の*Lemma*に始まって，*Kolmogorov*の0-1法則，法則収束・確率収束・概収束の同等を主張するいわゆる*Lévy*の定理，*Kolmogorov-Khintchine*の3級数収束定理等が主な内容である．これらはいずれも伊藤［4］の3章に分り易く書かれている．最大濃度函数による収束判定条件（§42）と，下に有界な収幅度函数をもつ独立変数列の和の収幅度函数を一様に下から評価する　’最大濃度函数の一様減少定理‘（§48）については，§2.3でのべる．級数の発散の*order*に関する§47の部分は重複対数の法則と関連している．

オ7章は内容的にも歴史的にも最も興味のある部分である．今日加法過程（或は独立増分過程）と呼ばれる確率過程の研究で，結果の殆んどすべてが*Lévy*自身による．彼の研究の特色についてはすでに§1で述べたが当時としては異例にぞくする．’種々の従属性をもつ確率過程の*path*の解析‘という立場を彼が始めから確立していたとは思われない．このことは，この本で加法過程が主に独立変数列の和の連続経数の類似としてこられていること（表題も’独立な確率要素の積分‘となっている），単に*process*といえば加法過程を意味していることからも伺われる（8章の始めに連続径数の*Markov*過程について簡単な注意があるが，*path*の立場がそれ程強調されているわけではない）．それが加法過程という特殊な確率過程について深く研究することにより，従来極限法則の形で導びかれた分布の広いクラスが加法過程の*exact*な法則として得られること，法則の形が*path*の性質と密接につながっている事情を知ることが出来た

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

のである．このような確認が，時代に先んじて彼が'確率変数の和の研究'から'確率過程の path の研究'に決定的に移行した動機と思われる．その意味で7章はこの本の表題からはみ出た部分とも云える．伊藤がこの章の前半の解明を研究の出発点にしたことは，その后の我が国の確率論特に我々の現在の研究の在り方に，直接 Lévy の仕事とつながりをもたない場合にも大きな影響を与えている．章の前半は加法過程の構造に関する基本理論である．最初に6章の結果を用いて加法過程が固定不連続点をもつ部分 $X_1(t)$ と確率連続な部分 $X_2(t)$ に独立に分解されること，かくして問題は $X_2(t)$ の研究に帰着することを示す（§50）． $X_2(t)$ の path としては右連続なものが可能である（§51）．次は $X_2(t)$ が連続な path をもつ場合，それがガウス法則にしたがうこと，その path の連続性の研究である（§52）．§53は動く不連続点をもつ典型としての Poisson 過程から始まって，一般の構成定理を導びいている．次が主定理で，無限分解可能法則の Lévy の標準形が，対応する加法過程の分解から導びかれる[1]．§55の始めに Lévy の標準形の一意性が証明してある．ここまでが前半で后半は無限分解可能法則の諸性質の研究にあてられている．無限分解可能法則の分解の問題，Lévy 測度の具体的な決定（以上§55），安定法則の特性函数の完全な決定と関連した話題（§§56，57），半安定法則（§58），準安定法則（§59），確率法則の巾集合に関する注意（§60），§61以後はパラメーターの一般化及びベクトル値加法過程の研究である．特に后半では Khintchine からの手紙がしばしば引用され，当時の研究の交流を偲ぶことが出来る．この章については，内容的に見て才之の主著（Lévy[43]）により深い関係があるので，詳しい紹介は§3にゆずる．

才8章は'従属変数の和に関する種々の問題'と題されている．始めの2節（§§64，65）は一般な従属変数列及び Markov 連鎖（過程）に関する簡単な注意である．ここに確率変数列の表現（§6）に関するもっとも基本的な idea が含まれている．§66で独立性にかわるものとして条件(C)が導入され，以下の諸節で条件(C)の下で中心極限定理，和の収束，大数の法則が導びかれる．独立変数列の強大数の法則もここで始めて扱われる．§§70，71は重複対数に関する結果や問題，§72はベルヌーイ列に対する極限定理の収束の速さの評価である．才9章は連分数の理論の確率論的接近である．これが数論でどの程度価

---

1) 加法過程の分解は Lévy の本では exact な形では求められていない．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

値のあるものか知らないが，確率論的には興味ある結果を含んでいる．§2.7で紹介する．

2. 2.

分割（*partition*）の概念は我々が比較的接することの少ないものであるが，いくつかの便利な点を含むように思われるので述べておく．この本では§§10，11，20の部分である．一般な集合Ɛの分割$\mathbb{P}$というのは，次の一連の*operation*（細分）を意味する．先ず集合Ɛを互に*disjoint*な高々可附番個の集合E_h（$h=1,2,\cdots$）に分ける．次に各E_hを互に*disjoint*な高々可附番個の集合E_{hk}（$k=1,2,\cdots$）に分ける．この操作を無限回くり返す．いいかえると分割$\mathbb{P}$が与えられるとはƐの高々可算個の部分集合の系$\{E_j\}$で，E_iとE_jがその系にぞくする時，必らず$E_i\cap E_j=\phi$，$E_i\supset E_j$，$E_i\subset E_j$のいずれかが成り立つものが与えられることと同値である[1]．

前にもどって，分割にあらわれる部分集合の単調減少列E_h，E_{hk}，E_{hkl}，$\cdots$を鎖（*chain*）と呼ぶ．鎖が無限個の集合を含み，その共通集合が空集合の時空であるという．§§10，11には分割に関する色々な結果が出ているがここではふれない．

今1つの$\mathbb{P}$が与えられたとし，正の値$\alpha_{k_1,\cdots,k_p}$を各集合$E_{k_1,\cdots,k_p}$に対応させ，

$$(2.1)\qquad \sum_h \alpha_h=1,\quad \sum_k \alpha_{hk}=\alpha_h,\quad \sum_l \alpha_{hkl}=\alpha_{hk},\ \cdots$$

を満足するように選んだとすれば，それは明らかにすべての$E_{k_1,\cdots,k_p}$を含む最小の有限加法族$F(\mathbb{P})$の上の有限加法的な確率測度を定義する．それではいかなる条件の下で$E_{k_1,\cdots,k_p}$を含む最小の*Borel*集合族$B(\mathbb{P})$の上の測度

---

1) この場合の$\{E_j\}$は一般には前の$\{E_h,E_{hk},\cdots,\ h=1,\cdots,\ k=1,\cdots\}$と一致しないがそれらを含む有限加法族は同じになる．

2) 任意の分割と，任意の$\alpha_{k_1,\cdots,k_p}$に対してこの命題が正しいというのは明らかに誤りである．例えばƐとして自然数全体，$E_1=\{0\}$，$E_2=\{1,2,\cdots\}$，$E_{11}=E_1$，$E_{21}=\{1\}$，$E_{22}=\{2,3,\cdots\}$，$E_{111}=E_1$，$E_{211}=E_{21}$，$E_{221}=\{3\}$，$E_{222}=\{3,4,\cdots\}$，$\cdots$という分割を考え，$\alpha_1=0$，$\alpha_2=1$，$\alpha_{11}=\alpha_{21}=0$，$\alpha_{22}=1$，$\alpha_{111}=\alpha_{211}=\alpha_{221}=0$，$\alpha_{222}=1$，$\cdots$を与える．この場合鎖$E_2,E_{22},E_{222},\cdots$に対して連続性の条件が成り立たないから$B(\mathbb{P})$上の測度に拡張することは出来ない．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

に拡張出来るか?[2] これについてわれわれは次の *Lemma* を証明することが出来る。

Lemma $\mathbb{P}$が空な鎖を含まないならば，(2.1)を満足する任意の $\alpha_{k_1,\cdots,k_p}$ は$\mathbb{B}(\mathbb{P})$の上に1つの確率測度を導く.[3]

証明は *Kolmogorov* の拡張定理と類似の考えでできる. *Bochner* [1] の *formulation*には含まれているような気もするがはっきりしないので簡単に証明の筋を述べる. $\mathbb{F}(\mathbb{P})$ は $\mathbb{P}$ にあらわれる集合の有限個の和集合およびその補集合の全体である. したがって $\mathbb{F}(\mathbb{P})$の元はすべて $E_{k_1,\cdots,k_p}$ の有限又は無限個の和集合として書ける. $\mathbb{F}(\mathbb{P})$上に $\alpha_{k_1,\cdots,k_p}$ から導びかれた有限加法的測度Pが連続性をもつことを示せばよい. そのためには単調減少列 $E_n \in \mathbb{F}(\mathbb{P})$ が $\lim_{n\to\infty} P(E_n) = \varepsilon > 0$ の時 $\{E_n\}$が鎖の部分列を含むことを云えば十分である. 仮定によって $\bigcap_n E_n \neq \phi$ となるからである. 各E_n は $\mathbb{P}$ の集合の高々可附番和であるから，$\mathbb{P}$の集合の有限和であらわされるような E_n の部分集合E_n'が存在して $P(E_n - E_n') < \frac{\varepsilon}{2^n}$ を満足する. $E_n'' = E_1' \cap \cdots \cap E_n'$ とおけば E_n'' は単調減少列で $\lim_{n\to\infty} P(E_n'') \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ を満す. E_n''も$\mathbb{P}$の集合の有限和でしかも E_{n+1}'' にあらわれる$\mathbb{P}$の集合は一般性を失わずに E_n'' にあらわれるものの部分集合と考えてよい. 各E_n'' から1つづつ$\mathbb{P}$の集合を取り出してそれを E_n''' とする. E_1 に対し，それにあらわれる$\mathbb{P}$の集合の少くとも1つはE_n''' $(m \geqq n)$ の中の無限個を含む. これを $\widetilde{E}_1$ とする. そこで $\widetilde{E}_1$ の部分集合で E_2 の表現にあらわれる$\mathbb{P}$の集合が必らず存在してその中の少くとも1つは上にぬき出した E_m''' の部分列の中の無限個を含む. それを $\widetilde{E}_2$ とする. 以下同様にくり返してえられる列 $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \widetilde{E}_3 \cdots$ は明らかに鎖の部分列になっている.

これから次の定理が容易に導びかれる.

定理2.1 (*p.60, Théorème 20, I*). 分割$\mathbb{P}$は (i) 各段階の細分にあらわれる集合が有限個で，(ii)空な鎖を含まないとする. その時 $(\varepsilon, \mathbb{B}(\mathbb{P}))$ の上の確率測度の集合は，'$\mathbb{P}$にあらわれるすべての集合の上での $P(E)$の収束' によって測度の収束を定義した時，その収束の意味で *compact* である.

証明は殆んど明らかである. $\{P_n\}$ を任意の確率測度の列とすれば，$\mathbb{P}$の集合は高々可附番だから，$\alpha^{(n)}_{k_1,\cdots,k_p} = P_n(E_{k_1,\cdots,k_p})$ がすべての $k_1,\cdots,k_p$に

---

3) *Lévy* 自身はこのことをはっきりとは述べないで，自明のことと考えているように思われる.

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

対して収束する部分列がとれる．仮定(i)によって極限$\alpha_{k_1,\cdots,k_p}$が(2.1)を満す．従って Lemma からそれは1つの確率測度を定める．

この定理の応用として，例えば separable な compact 空間S上の測度列に関する Helly の選出定理が導びかれる．この場合Sが直接$B(\mathbb{P})$が位相的 Borel 集合族と一致し定理2.1の条件をみたすような分割をもつのではないが，本質的にそうみなしてさしつかえない場合になるからである．簡単のために，一次元の確率法則についてこの事情を調べよう．$S=[0,1]$でPはふつうの Borel 集合の上で定義される確率測度とする．一次元確率法則の収束には種々の同等な定義の仕方があるが，ここでは一般化の便利のために$P_n \to P$をPのすべての連続集合[1)]Eに対して$P_n(F) \to P(F)$によって定義する．これが対応する分布函数F_n, Fに対しては，Fの連続点xで$F_n(x) \to F(x)$となることと同等であるのはよく知られている．ここでは必要ないがついでに Lévy の距離(§17)についてふれておく．一般に一次元確率法則P（つまり$S=(-\infty,\infty)$）の分布函数$F(x)$の graph をその不連続点では$F(x+)$と$F(x-)$をつないで，[2)] 新らしい坐標$u=x-y$, $v=x+y$について眺めたものを$v=g(u)$とすれば，gはすべてのPに対して同程度連続な連続函数で，かつ2つのP, P'に対して$g(u)-g'(u)$は有界である．$\rho(P,P')=\sup_u |g(u)-g'(u)|$を Lévy の距離と呼ぶ．上に述べた$g$の性質から$\rho$が完備な距離で，$\rho$による収束は上に述べた2つの収束に同等なことが分る（詳しくは伊藤[2]）．

前にもどって，$S=[0,1]$の上の任意の確率法則の列P_nをとる．Sの中に両端を含む稠密な列x_ν, $\nu=1,2,\cdots$を勝手に定める．各x_νに対し2点x_ν^+とx_ν^-を対応させた集合（Cantor集合）を$\widetilde{S}$とする．$\widetilde{S}$の上に次の分割$\mathbb{P}$を定義する．第1細分は$E_1=[0,x_1^-]$, $E_2=[x_1^+,1]$．第2細分はもしx_2が$(0,x_1)$の間にあれば$E_{11}=[0,x_2^-]$, $E_{12}=[x_2^+,x_1^-]$, $(x,1)$の間にあれば$E_{21}=[x_1^+,x_2^-]$, $E_{22}=[x_2^+,1]$とする．以下同様に繰り返す．$\mathbb{P}$が定理2.1の条件を満すことは明らかである．次に各P_nをx_νが点測度をもつ場合には勝手にx_ν^+とx_ν^-に配分することによって，$(\widetilde{S},\widetilde{\mathbb{B}}(\mathbb{P}))$の上の確率測度$\widetilde{P}_n$が定まる．そこで適当な確率測度$\widetilde{P}$が存在して，定理2.1の意味で$\widetilde{P}_n$の部分列

---

1) closure と内核の測度が一致するもの．

2) $F(x+)=\lim_{\varepsilon\to 0} F(x+\varepsilon)$, $F(x-)=\lim_{\varepsilon\to 0} F(x-\varepsilon)$, 但し$\varepsilon>0$.

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$\tilde{P}_{n'}$ が $\tilde{P}$ に収束する．次に x_ν^+; x_ν^- を x_ν に対応させる $\tilde{S}$ から S への写像 φ は x_ν を稠密に取ったことから可測になる．φ によって $\tilde{P}$ から導びかれる S 上の測度を P とする．この時 $P_{n'}$ が前に定義した意味で P に収束する．実際 E を P の連続集合とせよ．E' をその内核が $\bar{E}$ を含み，$[x_\nu, x_\mu]$ の形の高々有限個の和集合から成るもので，

$$P(E)=P(\bar{E}) \geqq P(E')-\varepsilon$$

を満すものとする．E' の決め方から，$\mathbb{P}$ の互に素な集合の有限和 $\tilde{E}'$ で $\bar{E} \subset \varphi(\tilde{E}') \subset E'$ となるものが存在する．十分大きな n' に対しては $\tilde{P}_{n'}(\tilde{E}') > \tilde{P}(\tilde{E}')-\varepsilon$ であるから結局

$$\begin{aligned} P(E) &\geqq P(E')-\varepsilon \geqq \tilde{P}(\tilde{E}')-\varepsilon \geqq \tilde{P}_{n'}(\tilde{E}')-2\varepsilon \\ &\geqq P_{n'}(\bar{E})-2\varepsilon \geqq P_{n'}(E)-2\varepsilon. \end{aligned}$$

$n' \to \infty$ とし，次に $\varepsilon \to 0$ とすれば

$$P(E) \geqq \overline{\lim_{n'\to\infty}}\ P_{n'}(E).$$

同様に $P(E) \leqq \underline{\lim}_{n'\to\infty} P_{n'}(E)$ である．

separable compact な空間 S の場合も全く類似である．x_ν の代りに可附番の *open base* $\{O_i\}$ を取り $\bar{O}_i - O_i$ の点は２点と考えればよい．１次元確率法則の場合は分布函数という便利なものがあるのでわざわざ上のように面倒に考える必要はないが，一般の場合には P_n 自身を *base* について収束させても極限が確率測度を定めるかどうかが問題なのである．ふつうはこの困難を汎函数の方法で解決しているのであるが上のような接近も可能である．また *locally compact* な場合に法則の集合が *compact* にならないことも簡単に説明がつく．例えば $S=(-\infty,\infty)$ の場合には上のように定義される $\tilde{S}$ の上の分割が必らず空な鎖，$E_1=(-\infty, x_{\nu_1}^-]$，$E_2=(-\infty, x_{\nu_2}^-]$，…（但し $i\to\infty$ の時 $x_{\nu_i}\to -\infty$）を含むからである．又空な鎖があらわれることをさけようとすると仮定 (i) がこわれてしまうのである（后述）．ではこの場合に法則の族 $K=\{P\}$ が *compact* であるための条件は何か．*Lévy* は

$$(2.2) \qquad \lim_{L\to\infty} \sup_{P\in K} P\{|x|>L\}=0$$

が必要十分であると述べている．これも彼は自明と思っているようで証明はして

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

いない（伊藤[2]，[4]に証明がある）．

最后に *Lemma* の条件附確率法則の定義への応用についてふれておく．この場合にも伊藤[4]では，確率変数Yの値域が *locally compact separable* な空間の時，変数X（値域は任意）の下でのYの条件附法則が定義出来ることを汎函数を使って証明しているが，われわれの *Lemma* を使うと簡単に証明出来る．例えば $S=(-\infty,\infty)$について考える．前と同じく稠密列 x_νをとり$\widetilde{S}$を作る．すでに注意したように前のような分割では空な鎖があらわれるので少し変更して次のようにする．x_ν から x_{ν_i}（$i=0,\pm1,\pm2,\cdots$）を $i\to-\infty$の時 $x_{\nu_i}\to-\infty$，$i\to\infty$ の時 $x_{\nu_i}\to\infty$ となる部分列を選び，$E_i=[x^+_{\nu_i},x^-_{\nu_{i+1}}]$を第1細分にとる．第2細分から先は $\{x_\nu\}$ から $\{x_{\nu_i}\}$を除いた列について先のようにする．得られる分割$\mathbb{P}'$が空な鎖を含まないことは明らかである．この分割について，$P(E_{k_1,\cdots,k_n}\in\widetilde{Y}\mid X)$[1]が殆んどすべての ω について(2.1)をみたすように *version* をとり，それを$\widetilde{B}(\mathbb{P}')$に拡張して（*Lemma*）后$S$にもどせばよい．

2. 3.

*Lévy*の本では，独立変数列の理論で最大濃度函数 $Q(l)$（*fonction de concentration*）或はその逆函数としての *dispersion* の函数[2] $\omega(\alpha)$が重要な役割を果している．直接その性質を論じた部分（§§16, 29, 48）と1つの応用（§§42, 43）を解説する．

以下この節全体を通して1次元（実数値）確率法則のみを扱う．法則のちらばりをあらわすものとしては，分散（或は標準偏差）がよく知られているが，分散の存在しない法則も多い．*Lévy* は一般な法則（分布函数F）のちらばりをあらわすものとして，最大濃度函数（或は単に濃度函数）

$$(2.3)\qquad \alpha=Q(l)=\sup_x[\overline{F}(x+l)-\underline{F}(x)],\qquad l>0$$

の逆函数 $l=\omega(\alpha)$ を *dispersion* の函数と呼んだ．たゞし $\overline{F}(x)=F(x+0)$，$\underline{F}(x)=F(x-0)$ である．$Q(l)$ が矢張り分布函数になっていること

---

1) $\widetilde{Y}$は前のようにして，Yから$\widetilde{S}$上にみちびかれる確率変数．

2) 収幅度函数の訳である．なおこのωは基本空間の元ではない．混同はないと思うので *Lévy* の記号にしたがっておく．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

から，$\underline{\omega}(\alpha)=\inf \ell$（inf は $Q(\ell)\geqq\alpha$ なる ℓ についてとる）と，$\overline{\omega}(\alpha)=\underline{\omega}(\alpha+0)$ がすべての $\alpha\in[0,1]$ について定まる．$\omega(\alpha)$ は $\underline{\omega}(\alpha)$ と $\overline{\omega}(\alpha)$ の間の任意の値とする．$\alpha<1$ の時 $\omega(\alpha)<+\infty$ なことは明らかである．$\omega(\alpha)$ は一般に原点からのちらばりの程度をあらわすものではない．例えば極端な例として原点から十分遠い点 x_0 における単位法則を考える．$\omega(1)=0$ であるが，原点からのちらばりは x_0 の長さの order である．しかし $\varepsilon=\mathrm{Min}[\overline{F}(0),\ 1-\underline{F}(0)]>0$ の場合には，$L=\inf\ell$（inf は $\overline{F}(\ell)-\underline{F}(-\ell)\geqq\alpha$ でとる）と定義した時，(2,3)から定まる長さ $\underline{\omega}(\alpha)$ の区間 I は，$\alpha\geqq 1-\varepsilon$ の時原点を含み又は $-L$ をその端点にもつことがわかる．すなわち $L\leqq\ell=\underline{\omega}(\alpha)\leqq 2L$ となって ℓ は L と同じ order をもつ．したがって一般の法則に対しては，例えば原点をその中央値 μ に移すことによって，$\alpha\geqq\frac{1}{2}$ なる限り $\omega(\alpha)$ は原点からのちらばりをあらわすものと考えてよいのである．つまり $Q(\ell)$ が 1 に近いという条件は，$P(|X-\mu|>\ell)$ が十分小さいという条件に同等になる．

河田及び国沢は（国沢［1］），$Q(\ell)$ の代りに平均濃度函数 g_F を考えて，$Q(\ell)$ について以下にのべると類似の結果を導びいた．$Q(\ell)$（或は $\omega(\alpha)$）に対しては非常に深い直観を必要とする．一様減少定理が g_F に対しては比較的 formal な計算で出るようである．$\mu(z)$ を $\geqq 0$，対称，可積分な $(-\infty,\infty)$ 上の函数でかつその Fourier 変換 $m(x)$ が可積分で $x\geqq 0$ で単調非減少なものとする．法則 F の特性函数を $\varphi(z)$ であらわす時

$$g_F(h)=Ch\int_{-\infty}^{\infty}\mu(hz)|\varphi(z)|^2dz,\qquad C\text{ は定数}$$

を F の平均濃度函数という．ふつうには $\mu(z)=e^{-|z|}$ がつかわれる．ついでながら伊藤［5］では

$$q(F)=\iint e^{-|x-y|}dF(x)dF(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi(z)|^2}{1+z^2}dz$$

を集中度，$\delta(F)=-\log q(F)$ を散布度とよんで $Q(\ell)$，$\omega(\alpha)$ に代るものとしたが，この $q(F)$ は $\mu(z)=\frac{1}{1+z^2}$ とおいて得られる g_F で $h=1$ とおいたものに他ならない．α（或は ℓ）というパラメターを含まない利点がある．

Lévy にもどって，X，Y を互に独立な確率変数で $S=X+Y$ とする．それぞれに対応する分布函数を F，G，H で，最大濃度函数を Q_1，Q_2，Q と書けば，$\overline{G}(u-x+\ell)-\underline{G}(u-x)\leqq Q_2(\ell)$，したがって H が F と G の畳み込みであることに注意して

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$\overline{H}(u+\ell)-\underline{H}(u) \leqq \int_{-\infty}^{\infty} Q_2(\ell)\,dF(x) \leqq Q_2(\ell).$$

$Q(\ell)$ は左辺の sup であるから

(2.4) $\qquad Q(\ell) \leqq Q_2(\ell)$

が得られる．これは畳み込みによって dispersion の函数が減少しないことを示す．この結果を精密にしたのが次の命題である（p. 91, Théorème 29, I）'もしすべての $\ell>0$ に対し(2.4)で＝が成立するならば，X は唯1つの可能な値をもつのみである（単位法則）．ここで X の可能な値とは $^\forall\varepsilon>0$ に対し $\underline{F}(x+\varepsilon)>\overline{F}(x-\varepsilon)$ となる点である'．証明はごく簡単で X が2つ以上の可能な値をもつとして矛盾を出せばよい（省略）．ところがこの簡単な命題の系として次の重要な定理が導びかれる．

定理2.2 （p. 92, Corollaire 29, I） $[0,\infty)$ の上の分布函数 $Q_0(\ell)$ と，正数 $\alpha'(<1)$, $\ell'(<\infty)$ が与えられたとする．この時 Q_0, α', ℓ' のみに関係する正数 ε が定まって，$Q(\ell) \geqq Q_0(\ell)$, $Q_1(\ell') \leqq \alpha'$ なる限り

(2.5) $\qquad \rho(Q, Q_2) \geqq \varepsilon, \qquad \rho(H, G) \geqq \varepsilon$

である（但し，Q, Q_1, Q_2, H, G 等は前に説明したもの．$\rho(Q, Q_2)$ は Q, Q_2 間の Lévy の距離である）．

対偶を取った形で大ざっぱに云うと，S がある程度以上ちらばりがなく，Y の法則が S の法則に十分近ければ X は一様に十分小さいというのである．証明は法則の compact 集合（正規族）の話にもち込んで（Q が中央値の廻りのちらばりであったことに注意して）上の命題を適用する（詳細は省略）．

$\omega(\alpha)$ が畳み込みによって減少しないことは(2.4)式が示しているが dispersion が或程度以上大きい独立変数列 $X_1, X_2, \cdots$ の部分和 $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ の dispersion がどの位の order で増加するかを下からおさえるのが Q の一様減少定理と呼ばれる次の定理である．

定理2.3（p. 155, Théorème 48）． 1をこえない2つの正数 α, β が与えられたとし，すべての X_ν の dispersion の函数が

(2.6) $\qquad \overline{\omega}(\alpha) \geqq 2\ell$

を満すものとする．この時 α, β のみに関係する正数 k と N を次のようにえらぶ

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

ことが出来る．$n>N$ な限り S_n の確率 β に対する dispersion は少くとも $k\ell\sqrt{n}$ にひとしい[1]．

証明は大変興味があるが大筋のみ述べる．最初に X_ν が $\frac{1}{2}$ づつの確率で a_ν, $-a_\nu$ $(a_\nu \geqq \ell)$ の値を取る場合を証明する（Lemme 48, 2）．次に Lemme 48, 3 で X_ν が対称な場合を証明するが，すべての $|X_\nu|$ を知ったという条件の下での評価を前の Lemme 48, 2 によって行い，あとでそれを平均して求める．一般の場合は対称化して Lemme 48, 3 に帰着させる．なお定理の k の良い評価（大きい程よい）を与えるのに使われる Lemme 48, 1 は，それ自身興味があるので結果だけのべておく．"仮定（2.6）を満すすべての確率法則の中で，最小分散を与えるものが存在する．その標準偏差を $2\ell\sigma(\alpha)$ によってあらわす時，$\alpha=\frac{1}{p}$ で p が整数の時 $\sigma_1^2(\alpha)=\frac{p^2-1}{12}$ で，α が $\frac{1}{p}$ から $\frac{1}{p+1}$ に変る時それは線型に変る．

濃度函数 Q による S_n の収束判定条件をのべる．$X_1, X_2, \cdots$ を独立変数列，$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$，$Q_{n,N}(\ell)$ を $S_N-S_n=\sum_{i=n+1}^{N} X_i$ の濃度函数とする．各 ℓ について $Q_{n,N}(\ell)$ が N について減少，n について増加なことから $Q_{n,N}(\ell)\downarrow Q_n(\ell)$ $(N\to\infty)$，$Q_n(\ell)\uparrow Q(\ell)$ $(n\to\infty)$ が存在する．この $Q(\ell)$ を<u>極限濃度函数</u>，その逆函数を<u>極限の dispersion の函数</u>という．次の定理が成り立つ．

<u>定理 2.4</u>（p.131, Théorème 42 及び p.133, Théorème 43, I）．(i) $Q(\ell)$ は恒等的に 0 か又は 1 である．(ii) 次の3条件は同等である．(a) $Q(\ell)=1$，(b) S_n から適当な定数 a_n を引いた $S_n'=S_n-a_n$ が確率収束する，(c) S_n' が法則収束である[2]．

後半の (b)，(c) の同等性はいわゆる Lévy の定理の一部である．前半の証明の大筋を紹介する．各 ℓ に対して n と共に増加な適当な正の整数列 $\varphi(\ell,n)$ $(\geqq n)$ が存在して，$Q_{n,\varphi(\ell,n)}\to Q(\ell)$ となることは明らかである．$[0,\infty)$ での稠密列 ℓ_p を取り $\varphi(n)=\max(\varphi(\ell_1,n),\cdots,\varphi(\ell_n,n))$ とおけば，すべての ℓ_p で $Q_{n,\varphi(n)}(\ell)\to Q(\ell)$ となる．$N=\varphi(n)$，$N'\geqq\varphi(N)$ とおけば，$U_n=S_N-S_n$，$V_n=S_{N'}-S_N$，$U_n+V_n=S_{N'}-S_n$ の濃度函数はい

---

1) $\beta\geqq\alpha$ なら，すべての n について定理が成り立つように k がとれる（Corollaire 48）．

2) 強収束との同等性の証明にも $Q(\ell)$ が使われる．その時にえられる不等式（p.138, (7)）から Kolmogorov の不等式が出る（§45）．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

ずれも $Q(\ell)$ の連続点で $Q(\ell)$ に近づく．(A) $Q(\infty)=0$，(B) $Q(\infty)=1$，(C) $0<Q(\infty)=\alpha<1$ の場合をそれぞれ考える．(A) Q は $\geqq 0$，↑ だから $Q(\infty)=0$ ならすべての ℓ で 0 である．(B) U_n の中央値 A_n，V_n の中央値 B_n とする．$Q(\ell)>\frac{1}{2}$ なる ℓ に対しては，n を十分大きく取れば $Q_{n,N}(\ell)>\frac{1}{2}$．よって小節始めの注意から

$$Pr.\{|U_n-A_n|\leqq \ell\}\geqq Q_{n,N}(\ell).$$

これから U_n-A_n のしたがう法則の集合が (2.2) をみたし，compact 集合をなす．V_n-B_n についても同様で，各々の 1 つの極限法則を F，G であらわす．始めから共通の部分列をえらんで $\{U_n-A_n$ の法則$\}\to F$，$\{V_n-B_n$ の法則$\}\to G$ と仮定してよい．F，G の濃度函数はいずれも $Q(\ell)$ である．この時 $U_n+V_n-A_n-B_n$ の法則は $H=F*G$ に近づくが，$Q_{n,N'}(\ell)\to Q(\ell)$ により，H の濃度函数も $Q(\ell)$ である．前にのべた命題から F は唯 1 つの可能な値をもつ．これは $Q(\ell)=1$ $(\ell>0)$ を示す．(C) 任意の $\varepsilon>0$ に対し，適当な ℓ，n，L，N' が存在して

$$Q(\ell)>\alpha-\varepsilon,\quad \alpha-\varepsilon<Q_{n,N}(\ell)<\alpha+\varepsilon,$$
$$Q_{n,N}(L)>1-\varepsilon,\quad Q_{N,N'}(\ell+L)<\alpha+\varepsilon$$

を満す．U_n，V_n，U_n+V_n に関する簡単な probability 的考察から，

$$\alpha-\varepsilon<Q_{n,N'}(\ell)\leqq \varepsilon+(\alpha+\varepsilon)^2$$

がみちびかれる．ε は任意だから $\alpha\leqq\alpha^2$．これは不可能である．

2.4.

確率法則の分解問題（§31，§55，2°，3°）で典型的なものは次の Cramer の定理[1]（p.97, Théorème 31）である．'平均値 0 の正規（ガウス）法則の全体を $\mathcal{G}$ であらわす．今変数 S の法則が $\mathcal{G}$ にぞくするとし，別に独立な 2 変数 X，Y があって $S\sim X+Y$（$\sim$ は法則として一致することを示す）であるとする．この時適当な定数 m があって，$X-m$，$Y+m$ の法則が $\mathcal{G}$ にぞくす

1) この定理は，独立変数列の和の収束問題，正規加法過程の構造の研究にも有効な応用をもつ．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

る．証明は整函数論における Hadamard の分解定理を使うが，比較的よく知られたことだから省略する．ここに1つの問題がおこる．

問題1．一般に $\mathfrak{g}$ が畳み込みによって閉じている法則の或る族とする．その時 Cramer の定理の命題が正しいための $\mathfrak{g}$ に対する必要十分条件は何か？

この問題は非常に難かしくて一般な形での解決はまだない．例えば $\mathfrak{g}$ として法則全体をとればこの問題は自明である．つまり $\mathfrak{g}$ としてあまり広い族を取るのでは興味がない．誰でも思いつくのは $\mathfrak{g}$ を無限分解可能法則の全体としたら，ということであるが，その場合には答は否定的である（後述）．そこで $\mathfrak{g}$ を無限分解可能法則の部分族に取ればということになる．この本が出た頃 Raikov は $\mathfrak{g}$ が Poisson 法則の全体の時は Cramer の定理の命題が正しいことを証明した（この本では，Khintchine からの通信でこの事を知ったことが書かれている）．Poisson の場合は特性函数の代りに generating function を考えるとそれが order 1 の整函数になっているので，証明はむしろ正規法則の場合より易しい．この問題については Lévy 自身にもこの本と前後しこの研究（[28]，[30]）があり，その他にも色々結果があるが（国沢[1]，§8.5参照），いずれも十分満足すべきものとは思われなかった．しかし最近になって Linnik [1]，[2]，[3] は無限分解可能法則の部分族に関する限り殆んど最終的な結果を導いたようである．例えば簡単な場合として [1] では，$\mathfrak{g}$ が平均0の正規法則と Poisson 法則の畳み込みの全体の時，Cramer の定理の命題の正しいことが証明されているが，この場合にも証明は著しく困難になる．特性函数の形が $\varphi(z)=\exp\{-\frac{v}{2}z^2+\lambda(e^{iz}-1)\}$，$v\geq 0$，$\lambda\geq 0$ となって有限位数の整函数に帰着されないからである．ここで我々の習慣的な発想としては

問題2　分解問題の確率過程による取扱いが可能であるか？

ということが頭に浮かぶ．しかしこれは問題の設定そのものが妥当か否かについてさえ今のところ見通しがつかない．

分解問題に若干の補足を加えておく．法則 $\mathcal{L}_1$，$\mathcal{L}_2$ の積

(2.7) $$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$$

を畳み込みによって定義する．与えられた $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}_1$ に対し (2.7) をみたす $\mathcal{L}_2$ がある時それを商 $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1$ という．又 $\mathcal{L}$ の任意の分解 (2.7) について，$\mathcal{L}_1$ 又は $\mathcal{L}_2$ の濃度函数が $Q(0)=1$（つまり1点分布）の時 $\mathcal{L}$ を分解不可能であるとい

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

う．Cramer の定理は，正規法則の族 $\mathfrak{G}$ がその中で，そしてその中でのみ割算が可能で商が一意的に定まることを示す．しかしこの場合も恒に割算が可能ではないから，$\mathfrak{G}$ が群をなすわけではない．$\mathfrak{G}$ の代数的性質をしらべることによる接近も考えてよいことであろう．$\mathfrak{G}$ が無限分解可能法則の全体の時その中で割算が可能なための必要十分条件は Lévy の標準形から容易にみちびかれる．又最小公倍数，最大公約数にあたるものも容易に求められる．このように法則の算術は或場合には自然数の集合に似ているが，又他の面では複素数体に部分的に類似していることもあり，全く似ていない面もあって今のところ一寸とらえどころがない．次の命題はいずれも否定的な答をもつ．(A) 分解不可能な法則は素数の性質をもつか，すなわち $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_1'\mathcal{L}_2'$ で $\mathcal{L}_1$ が分解不可能の時 $\mathcal{L}_1$ は $\mathcal{L}_1'$, $\mathcal{L}_2'$ のいずれかを割るか？ (B) 商は一意的に定まるか？ (C) $\mathfrak{G}$ を無限分解可能法則の全体とする時，Cramer の命題は正しいか？各々の反例が pp. 189−191 にあげられている．最後に次の問題は筆者の知る限り未解決のようである[1]．(D) $\mathcal{L}$ が無限分解可能で $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ の時 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ のいずれか一方は無限分解可能であるか？ この問題を提起したのは，Lévy の (C) の反例の作り方から見て，これが肯定的な答をもちそうな気がすること，その解決が問題 1 への接近に関連しそうに思えるからである．

2.5.

中心極限定理に関連した話題は，§§33〜38 で扱われている．この問題はその后 Gnedenko-Kolmogorov [1] で無限分解可能法則への収束問題の特別な場合に帰着する方法が示された．比較的よく知られ，又完全に解決された問題だから，簡単な remark を与えるに止める．ここでも Lévy の研究態度は簡単な場合からより複雑な場合へである．そして簡単なものへの帰着の手段という点で彼の独創性が顕著にあらわれるようである．ここで採用されているのは有界変数の場合に帰着させる truncation の方法で，それ自体は恐らく前からあった考えであろうが，例えば 1 つの主定理である Théorème 35 の必要性の証明 (pp. 108〜109) の方法等は全く ついて行けない感じがする．今 1 つ例をあげておこう．

---

1) Linnik の研究（前述）を詳しく読めば分るかも知れないが，それで分るとすれば答は否定的であろう．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$\varepsilon>0$ を任意に固定する。$X_1, X_2, \cdots$ を中央値0の独立変数列とする．S_n を X_ν の部分和，$1-\varepsilon$ に対する S_n の dispersion を L_n とする．或る番号 n_0（ε に関係する）以後のすべての n について

$$(2.8)\qquad 1-\alpha_\nu = P_r.\{|X_\nu| \leqq \varepsilon L_n\} > 1-\varepsilon, \quad \nu=1,\cdots,n$$

が成り立つ時 X_ν は S_n に対し個々に無視可能という。これは §2.3 の注意により，X_ν の $1-\varepsilon$ に対する dispersion の order が高々 εL_n であることを示すからである．もう少し強い条件として

$$(2.9)\qquad \eta_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \to 0 \quad (n\to\infty)$$

を考える．Lévy はこの条件を X_ν の最大項が無視可能であると呼んでいるがこの呼び方が問題である．実は条件 (2.9) は

$$(2.10)\qquad P_r.\{\max_{\nu=1,\cdots,n} |X_\nu| \leqq \varepsilon L_n\} \to 0$$

と同等なことが示されるのであって（Gnedenko-Kolmogorov [1], pp. 126~7），ここで始めて Lévy の呼び方の意味が分るのであるが，彼はそれを殆んど自明と思っているようで，それについての説明はない．前に引用した主定理の結果だけのべておこう．

定理 2.5[1]（p.107, Théorème 35）．各 X_ν の集中度函数は $Q(0)=1$ でないとする．その時適当な定数列 $B_n(>0)$ と A_n が存在して $\frac{S_n}{B_n}-A_n$ が標準正規法則に近づくための必要十分条件は，X_ν の最大項が S_n に対し無視可能なことである．

その他正規法則の牽引域の研究も含まれている．

2. 6.

従属変数の和の研究（8章）はこの本でかなり重点がおかれているテーマの1つであるが，紙数の都合で個々の結果に詳しくふれる事は出来ない．又新らしい

---

1) ふつうこの定理は2重級数の形でのべられる．Lévy は2重級数を使うべきところも1重級数のように書く場合があるので，彼の意図はよく分らないが，ここでは1重級数の形で云っておく．2重級数への拡張は容易である，つまり Lévy の証明でよい．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

問題点をあげる能力も我々にはない．主として新らしい概念や方法の説明をする[1]．

独立変数列の和の極限定理で基本的役割を果すものの１つは分散の加法性である．そこで従属変数列への拡張の目安として，分散の加法性を保存するものに対象を制限することが考えられる．例えば弱大数の法則だけならこの要請で十分であるが，中心極限定理では X_ν の $X_1, \cdots, X_{\nu-1}$ に対する従属性の度合を知る必要がある[2]．この２つの要請をみたすものとして Lévy が研究の出発点においた仮定が

$$(C) \qquad \mathfrak{M}_{\nu-1}\{X_\nu\} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

である．ここで $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ は $X_1, \cdots, X_{\nu-1}$ に関する条件附平均値をあらわす．以下記号はすべて Lévy にしたがうことにする．今のふつうの記号では概念の説明にはかえってはん雑だからである．条件 (C) の自然さと広さを示すのは，例えば任意の $X_1, X_2, \cdots$ に対して（$\mathfrak{M}(|X_\nu|)$ は有限として），$Y_\nu = X_\nu - \mathfrak{M}_{\nu-1}(X_\nu)$ が (C) をみたすことであろう．又条件附の法則にまでは仮定が及んでいないことも利点にあげられよう．

この準備的な考察に続いて§67では先ず条件 (C) の他に

$$(C_1) \qquad \mathfrak{M}_{\nu-1}\{X_\nu^2\} = \sigma_\nu^2 = \mathfrak{M}\{X_\nu^2\}, \quad (\mathfrak{M}\text{はふつうの平均値})$$

及び，任意の $\varepsilon > 0$ に対し或る番号以後の n について

$$(C') \qquad |X_\nu| < \varepsilon b_n, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, n,$$
$$b_n^2 = \sum_1^n \sigma_\nu^2$$

という仮定の下で，$S_n = \sum_{\nu=1}^n X_\nu$ に関する中心極限定理を導びく．(C′) は 2.5 における条件に対応するものをやゝ強い形で要請したのである[3]．方法は独立変数列に対する Lindeberg の方法（特性函数を使わない）を用いる．証明の要点をのべよう．$X_\nu' = \dfrac{X_\nu}{b_n}$，$\sigma_\nu' = \dfrac{\sigma_\nu}{b_n}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$，$S_n' = \sum_{\nu=1}^n X_\nu' = \dfrac{S_n}{b_n}$ とお

1) 最初の２節については，§§5〜6で詳しくのべるのでここではふれない．
2) 分散の加法性を満すものとして２番目にあげられている直交性の条件も別な意味で有効だが，極限法則に関する結果をみちびくには不十分である．
3) (C_1)，(C′) は独立変数列の場合と同じやり方で，もっと一般な場合に拡張されることが始めにことわってある．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

く．別に $\{X_\nu\}$ と独立でかつ互に独立な列で，各々が標準正規法則にしたがうもの $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ を取る．$\xi = \sigma_1'\xi_1 + \cdots + \sigma_n'\xi_n$ は標準正規法則にしたがう．更に

$$U_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} X_\mu' + \sum_{\mu=\nu+1}^{n} \sigma_\mu' \xi_\mu, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

とおく．別に Z として $\{X_\nu, \xi_\nu, \nu = 1, 2, \cdots, n\}$ と独立で，分布函数の3次の微係数（までが存在して）が定数 k でおさえられるようなものを選ぶ．λ を正の定数，Z' を X_ν, ξ_ν の函数とすれば，畳み込みの性質から $Z' + \lambda Z$ の分布函数の3次の微係数は k/λ^3 でおさえられる．つまりその分布函数は3次までの展開が可能である．この事を使うと結局若干の計算の后，$U_\nu + \lambda Z$ の分布函数を Φ_ν とした時

$$|\Phi_\nu(x) - \Phi_{\nu-1}(x)| \leqq \frac{k\varepsilon}{2\lambda^3} \cdot \sigma_\nu'^2$$

が得られる．$\nu = 1$ から n まで上の式の両辺を加え，Φ が $U_n = S_n'$，Φ_0 が $U_0 = \xi$ の分布函数にしたがうことに注意して

$$(2.11) \qquad \left| Pr.\left\{\frac{S_n}{b_n} + \lambda Z < x\right\} - Pr.\{\xi + \lambda Z < x\}\right| \leqq \frac{k\varepsilon}{2\lambda^3}$$

が得られる．λZ を加えて法則を滑らかにした点に秘密がある．次に Z としてうまい法則をえらんで（λ も適当にえらび），

$$(2.12) \qquad \left| Pr.\{S_n < x b_n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| < c\varepsilon^{\frac{1}{4}},$$

（c は定数，例えば $\frac{16}{3}$ でよい）が導びかれる．

次に条件（C_1）をおとして考える．その時 S_n の一種の *time change* $s(t)$ を次のように定義する．$\sigma_\nu^2 = \mathfrak{M}_{\nu-1}\{X_\nu^2\}$ はこの場合は1つの確率変数である．今 $b_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu^2$ は確率1で発散を仮定する．任意の正の実数 t に対し $b_n^2 \geqq t$ となる最小の n（ω に関係）を考える．更にこの n に対し $b_{n-1}^2 + c^2\sigma_n^2 = t$ となるような確率変数 c を定める．

$$(2.13) \qquad s(t) = S_{n-1} + c X_n$$

と定義する．σ_ν^2 が $X_1, \cdots, X_{\nu-1}$ について可測だから c もそうである．この事に注意すると t を固定して考える時は $c = 1$ と仮定してよいことが分る．実際，各 ν について $b_\nu^2 \leqq t$ ならば $c_\nu = 1$，$b_\nu^2 > t \geqq b_{\nu-1}^2$ ならば c_ν は

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$b_{\nu-1}^2 + c_\nu^2 \sigma_\nu^2 = t$ をみたす c_ν, $b_{\nu-1}^2 > t$ なら $c_\nu = 0$ と定義すれば, $X_\nu' = c_\nu X_\nu$ は矢張り条件 (C) をみたし,

$$s(t) = S_n' = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu'$$

となるからである. 今この $s(t)$ にあらわれる各項(個数は ω に関係する)がすべて $\varepsilon\sqrt{t}$ でおさえられるならば,[1] (2.11), (2.12) で S_n の代りに $s(t)$, b_n の代りに $\sqrt{t}$ とおいた式が成立つ (*p.243, Théorème 67, 2*). 証明は S_n の場合と全く類似に行なわれる. これを精密化して $\Sigma\sigma_\nu^2$ が発散する確率 β が 0 の時, その条件の下での条件付確率法則が矢張り標準正規法則に近づくことも示される (*p.246, Théorème 67, 3*).

§68 は *Doob* のマルチンゲール理論に最も関係のある部分である. S_n の収束を論じる. *Kolmogorov* の不等式が条件 (C) の下でも成立つことから次の定理が示される.

<u>定理 2.6</u> (*p.247, Théorème 68*). ΣX_ν の各項は一様に有界で, 条件 (C) をみたすとする. この時 ΣX_ν が発散する ω については $\Sigma\sigma_\nu^2$ も発散, 収束する ω については $\Sigma\sigma_\nu^2$ も収束である.

独立変数列の時は σ_ν^2 が ω に関係しないから, $0-1$ 法則にほかならない. 更にこの定理は *Doob* [4] の *p.320, Théorème 4.1. (V)* に他ならないことを注意しておく.

§69 は大数の強法則を扱う. 始めの3つは条件 (C) を満す場合で最后 (4°) に (C) を満さない場合の例が出ている. 1° で X_ν が一様有界の場合を示し, 2° で (C) の他に前述の (C_1) をみたす場合, つまり σ_ν^2 が *random* でない場合に強法則が成り立つ必要十分条件が $\sum \frac{\sigma_n^2}{n^2}$ の収束であることを証明する. 独立変数列の場合に充分なことはよく知られているが, 必要の方は筆者には始めて見ることであった. 3° で平均値のみをもつ同分布の変数列に関する強法則が, 独立な場合には今知られているより少し強い条件の下で示される. この当時 *Birkoff* の個別エルゴード定理にもち込む方法は未発表であったらしい. しかし条件 (C) の下でも今日全く一般に証明が出来ているかどうか知らない. (C) の下では個別エルゴード定理にもち込むことは出来ないと思われるからである. 1°~3° までの証明は前述の *Kolmogorov* の不等式の拡張 (*p.247, (18)*) にもとづく.

---

1) これは条件 (C′) の類似.

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

§§70, 71は重複対数の法則に関する結果と残された問題点の説明である．結果は条件が複雑だから省略し，問題の1つを述べる．$\varphi(t)$を区間(a,∞)（aは或る正の数）で$\geqq 0$，↑な函数とし，積分

(2.14) $$\int_a^\infty \varphi(t)\, e^{-\varphi^2(t)}\, \frac{dt}{t}$$

を考える．この積分が有限の時 $\Phi(t)=\varphi(t)\sqrt{t}$ が $s(t)$の上級にぞくする，すなわち $\tau=\sup\{t;\, s(t)\geqq\Phi(t)\}$ が確率1で有限であり，積分が発散の時 $\Phi(t)$ が $s(t)$の下級にぞくする，すなわちτが確率1で無限である——という性質をもつならば，$s(t)$は Kolmogorov の判定条件を満すという．例えばベルヌーイ列がそうである．Lévyの提出した問題は'条件(C)が満される場合，どの程度の附加条件を与えれば，$s(t)$はKolmogorovの判定条件にしたがうだろうか？'というのである．この問題がその後どこまで研究されたか，或はこのシリーズのvol 2（白尾[2]）のような方法でどの程度接近可能か筆者にはよく分らない．

§72は省略する．その一部がGnedenko-Kolmogorov[1]の8及び9章でもっと一般に扱われていることのみを注意しておく．

2.7.

実数Xの正則連分数による展開

(2.15) $$X=a_0+\frac{1}{x_1},\quad x_1=a_1+\frac{1}{x_2},\ \cdots\cdots,\quad x_n=a_n+\frac{1}{x_{n+1}},\ \cdots\cdots$$

を考える．ここでa_nはx_nの整数部分$[x_n]$，$\frac{1}{x_{n+1}}$は小数部分である．任意の無理数Xに対し，(2.15)の展開は無限に続く．(2.15)を$X=(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$とか，$(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, x_n)$とあらわす．この記号の下で有理数$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$の既約分数による表示を$P_n/Q_n$とすれば，$P_{-1}=0$，$P_0=1$，$Q_{-1}=1$，$Q_0=0$というconventionを設ける事によって$P_n$，$Q_n$は次の漸化式をみたす．

(2.15) $$P_{n+1}=P_n a_n+P_{n-1},\qquad Q_{n+1}=Q_n a_n+Q_{n-1},$$
$$P_n Q_{n+1}-Q_n P_{n+1}=(-1)^n,\qquad n\geqq 0.$$

更にXは

(2.16) $$X=\frac{P_n x_n+P_{n-1}}{Q_n x_n+Q_{n-1}}$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

とあらわされる．

特に $X\in[0,1)$ の時は $a_0=0$，したがって $1/X=x_1=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},x_n)$ であるから $Q_{n+1}/P_{n+1}=(a_1,\cdots,a_n)$ となる．$y_n=Q_{n+1}/Q_n$ とおけば，(2.15)によって $y_n=a_n+\dfrac{1}{y_{n-1}}$．これから

(2.17) $$y_n=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}=(a_n,a_{n-1},\cdots,a_1)$$

が得られる．今Xが $[0,1)$ 上の一様法則にしたがうとし，確率変数 x_n，y_n の分布函数を $F_n(x)$，$G_n(x)$，$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ を知ったという条件の下での x_nの分布函数を $\Phi_n(x)$ と書く．ここで取上げる問題は2つある．

<u>問題1</u>． 確率変数列 $\{a_n\}$ の漸近的な性質を求めること．

<u>問題2</u>． 分布函数 F_n，G_n の極限法則を求めること（ガウスの問題）．

準備として $\Phi_n(x)$の具体的な形を求める．P_k，Q_k $(k\leqq n)$が $a_1,\cdots,a_{n-1}$ の可測函数であることに注意して，前の公式 (2.15)，(2.16)，(2.17) を使うと

(2.18) $$P_r\{x_n>x\,|\,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}=1-\Phi_n(x)$$
$$=\frac{y_{n-1}+1}{y_{n-1}x+1}\qquad(x>1)$$

が容易に示される．右辺の値はxを固定した時，すべての $y_{n-1}(\geqq1)$ に対して $1/x$ と $2/x$ の間にあることは明らかである[1]．

問題1に対する接近は表現の問題（本稿§6）の簡単な応用であるという点に興味がある．いま

$$F(a_1,\cdots,a_{n-1},x)=P_r\{a_n>x\,|\,a_1,\cdots,a_{n-1}\},$$

$$U_n=\frac{1}{V_n}=F(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n),\quad n\geqq1$$

とおけば U_n（したがって V_n）が互に独立で，U_nが $[0,1)$ 上の一様法則にしたがうことはよく知られている（この本の§§39，64）．ところで定義から $a_n+1\geqq x_n\geqq a_n$ であるから，前の注意により，

$$\frac{2}{x}\geqq\frac{y_{n-1}+1}{y_{n-1}x+1}=P_r\{x_n>x\,|\,a_1,\cdots,a_{n-1}\}$$

---

1) $\{X=\text{有理数}\}$の確率が0だから，$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ がすべてのnに対して定義される確率が1であることを注意しておく．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$\geqq P_r\{a_n > x \mid a_1, \cdots, a_{n-1}\} = F(a_1, \cdots, a_{n-1}, x)$$
$$= P_r\{a_n + 1 > x + 1 \mid a_1, \cdots, a_{n-1}\}$$
$$\geqq P_r\{x_n > x + 1 \mid a_1, \cdots, a_{n-1}\} = \frac{y_{n-1}+1}{y_{n-1}(x+1)+1} \geqq \frac{1}{x+1}.$$

故に V_n は a_n+1 と $a_n/2$ の間の値を取る．こうして a_n の order が問題になるような場合には，独立変数列 V_n に関する結果が適用出来るのである．結果の1つをあげておこう．

定理2.7 (p.294, Théorème 74. I). 正数列 $b_1, \cdots, b_n, \cdots$ を取る．この時 $a_n > b_n$ となる n が無限にたくさんある確率は，$\Sigma 1/b_n$ が発散ならば1，収束ならば0である[1]

問題2の答は F_n, G_n が共通の極限

$$F(x) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{2x}{x+1} \tag{2.19}$$

をもつということである．この式は既にガウスによって（十分な証明なしに）発見されていたそうだが，ここでは差分方程式に帰着する Kuzmin の方法の概略を述べたのち（§75），(2.18)をもとにして一種の積分方程式に帰着する新らしい方法を述べている（§77）．これはXの法則が一般な絶対連続分布の場合にも適用出来るもので興味があるが，詳細は省略する．以上で第9章の紹介を終る．

---

1) 証明は $\{V_n > b_n\}$ に Borel-Cantelli の Lemma を適用すればよい．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

§3 Processus stochastiques et mouvement brownien (Lévy [43]).

3.1.

この本は1948年に発表されたが，確率過程全般に亙る教科書としては世界で恐らく始めてのものであろう．そして新らしい多くの ideaや問題点が提起され（或は埋蔵され）ている点で，その后にも類を見ないものである．この本の全体的な解明はこれ迄なされなかったし，我々にもそれをする事は出来なかった．それにも拘らず，この本は全体としては§2で紹介した'L'addition'よりもむしろ近づき易い感じがする．その理由には次のようなことが考えられる．①この本のテーマが我々の現在の研究に直接，間接に深く結びついていること．②§1の分類での才3期の研究がこの本で追求した方向とやゝ異った位置にある（それは平行的な関係と云えよう）ことを除けば，Lévyのその后の研究（才4期）はこの本の直接の発展であるものが多いこと．③Lévy以外の人によっても，ここに含まれているideaが系統的に発展させられたものが少なくないこと等である．

これらの理由によって，特に重要な問題点を含み，現在の我々の研究にも直接つながりをもつ后半の部分（才6～8章）については，それぞれ節を別にして述べることにした（§§4,7）．それでこの節の最初の予定は，この本の概観と前半のやゝ詳しい説明を与えることにあったが，才3章の拡散過程については，その考えの基本を§1で述べたこと，それ以上厳密に言おうとすると多くの紙数が必要なことの他に，后に述べるもう1つの理由からも詳しい解説は省略する．また才4章の定常過程は，その興味ある部分が本稿§§6，7に関係があるので，そこで触れ，残りの部分は大体伊藤[4]の才6章に出ている範囲を出ないのでこれも省略する．結局我々は次の小節で章毎に概略を説明し，§3.3以后では§2で残した'L'addition'の7章とこの本の才5章'加法過程'について解説したい．Lévyの意図した範囲での完全な解決はLévy自身と伊藤[1]で与えられ，最近での加法過程の研究の傾向はむしろ彼のBrown運動の研究からの発展として見る方が自然なものが多い．その意味ではここに紹介するのは確率過程論の古典にぞくするものと云えようが，それが確率論の歴史の中で占める比重

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

の大きさと，Lévyの業績の最大の1つであるということから，well known なものとして解説を省略するのは適当でないと思われたからである．

3.2.

全体を通じて前の本の結果はすべて仮定されている．その意味では2冊を合せて，1つのものと見ることも出来よう．Introduction はこの本の構成と簡単な歴史的叙述の部分および確率論のごく基礎的な結果の説明から成る．よく知られた Schmidt の直交化定理の証明で，分散有限の確率変数が1つの Hilbert 空間の点であるという幾何学的立場が強調されている（これが2次の確率過程 $X(t)$ が Hilbert 空間での curve であるという考えにつながる）．第1章（§§1～4）からが本論であるが，始めに Brown 運動の構成と1つの基本定理 '射影不変性の原理' が述べられ（本稿§4），つづいてポアソン過程，複合ポアソン過程が動く不連続点をもつ典型として導入される．

第2章（§§5-14）は '確率過程に関する一般概念' と題されている．最初にどんな小さな区間でも新らしく偶然的な要素が入り込み，しかも或種の連続性をもつ確率過程を 'normal' と呼んでいる[1]．そして 'normal' な確率過程は必らず可附番個の確率変数 $C_1, \cdots, C_n, \cdots$ によって

$$(3.1) \qquad X(t) = \varphi(t, C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots)$$

とあらわされることが示されている．このような概念を精密化したものが Doob [4] の可分性（少し広い）であるとも考えられよう．つづいて確率過程 $X(t)$ の法則の意味での決定（Slutsky の立場 — 本稿§1）から，$X(t)$ の path の決定が可能な条件に及ぶ（§6）．§7は $X(t)$ の連続性，§8は Markov 過程の定義である．続く4つの節（§§9～12）は確率微分方程式（s.d.e）に関する一般論と種々の例である．残念ながら我々はこの部分（特に一般論の部分）を，紹介出来る程十分に理解することは出来なかった．一般な s.d.e とは $X(t)$ と t と $t+dt$ の間の増分 $\delta X(t)$ が t 以前の $X(\tau)$ と，$(t, t+dt)$ の間に新たに独立に入り込んで来る要素 $\xi, \eta, \cdots$ によって

$$(3.2) \qquad \delta X(t) = \varphi(t, dt, X(\tau), \xi, \eta, \cdots)$$

---

1) 正規法則のいみの normal ではない．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

の形で定まるとするものであるが，その例として

(3.3) $\delta X(t)=A[t,X(t)]dt+B[t,X(t)]\xi\sqrt{dt}$ [1]

の形のものは，拡散を定める *s.d.e.* として *Bernstein*，*Lévy*（この本の3章），伊藤（[3]，[4]）によってこの式の完全な意味附と解決が与えられた．しかしその后この方向の接近は境界条件をもつような一般の拡散過程の特徴付には適しないことが *Feller* によって指摘され，むしろ *Brown* 運動の *local time* の概念（*Lévy* による――本稿§4）の有効なことが伊藤-McKeanの研究[1]によって明らかになったので，(3.3)のように特殊な型の方程式に関する限り問題は残っていないと見てよい[2]．けれども(3.3)で典型的にあらわれたように，種々のφに対して(3.2)の明確な意味附を与えること，その時(3.2)の解が *process* としてどういう性質をもっているかを研究することは重要であろう．これらについて示唆に富んだ叙述が§§9-12に見られるのである．いずれ機会を見て十分検討したいと考えている．§§13，14は確率過程の微分と積分に関する結果であるが，これは伊藤[4]の§§46，47にある．

第3章は拡散過程であるが，ここで述べられている結果や方法（前述）はすべて今では古典にぞくする．又後半の *Brown* 運動の場合の結果は§4を参照されたい．第4章の定常過程で興味があるのは，§24で種々の例があげられていることと，§28の正規過程のパラメターを多次元にした場合の *Markov* 性に関するものである．前者は§6で，後者は§7で扱う．§§25-27はよく知られた定常過程の調和解析や微分に関する結果である．第5章'加法過程'の前半は，中心化（§31）に関する部分が稍詳しくなり，無限分解可能法則への解析的接近の一端（§36）が加えられた以外は前の本の7章の要約である．後半は'*L'addition*'以後の彼の研究で，*Pearson* 型の分布（§38），円周上の加法過程（§39），もっと一般な空間上の加法過程――特に *Brown* 運動――の研究（§40）である．第6章'一次元 *Brown* 運動の深い研究'，第7章'平面上の *Brown* 運動'は§4において，第8章'多パラメターの *Brown* 運動'は§7においてそれぞれこの本のことも含めて説明があるので省略する．附録は *Lévy* が書いた部分でないのでこれも省略する．

---

1) このξは特に標準正規法則とする．

2) これが拡散過程の解説を省略したもう1つの理由である．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

3.3.

加法過程の構造に関する Lévy - 伊藤の理論を紹介する．これは 'L'addition' では §50 から §55 の始めまで，'Processes' では §29 から §33 の始めまでの部分にあたる．Lévy が得た結果の精密化と，もう少し分り易いとらえ方が伊藤[4]，[5]，[6]と Doob [4]の加法過程の項に一部分宛出ている．

$X(t)$ を法則の意味で定まっている確率過程とする．簡単のために t の変域 T は区間 $[0,\infty)$，$X(0)\equiv 0$ と仮定する[1]．T の任意の点列 $0=t_0\leqq t_1\leqq t_2\leqq\cdots\leqq t_n$ に対し，$X(t_i)-X(t_{i-1})$ $(i=1,\cdots,n)$ が互に独立な確率変数である時，$X(t)$ を加法過程であるという．特に t_i-t_{i-1} の長さがすべて同じならば $X(t_i)-X(t_{i-1})$ が同分布にしたがう――という性質をもつ時，時間的に一様な加法過程という．$X(t)$ が法則の意味で定まるためには，すべての $s<t$ に対し $X(t)-X(s)$ の法則 $\mathcal{L}_{st}$ (その分布函数 F_{st}) が決まればよい．§2.4における法則の積の定義(2.7)を思い出して，$X(t)$ が加法過程ならば，任意の $s\leqq u\leqq t$ に対し

$$(3.4)\qquad \mathcal{L}_{st}=\mathcal{L}_{su}\mathcal{L}_{ut}$$

は明らかであるが，逆に(3.4)を満す任意の系 $\{\mathcal{L}_{st},\ s\leqq t\}$ に対し $\mathcal{L}_{st}=\{X(t)-X(s)$ の法則$\}$ となるような加法過程が唯1つ(法則のいみで)定まる(伊藤[4]，p.116，定理25.1)．

Lévy は任意の $X(t)$ が次の形に分解されると述べている([43]，§31)．

$$(3.5)\qquad X(t)=f(t)+X_0(t)+X_1(t)+X_2(t),^{2)}$$

ここで各項の性質は次の通り．(a) $f(t)$ は ω に無関係，(b) $X_0(t)$ は高々可附番個の固定不連続点(後述)のみで変化する部分，(c) $X_1(t)$ は確率1で t の函数として連続な部分，(d) 飛躍のみで変動し，固定不連続点のない部分を，必要ならば ω に無関係な収束項で変形したもの，(e) $X_0(t)$，$X_1(t)$，$X_2(t)$ はいずれも加法過程でかつ互に独立である．Lévy は X_0，X_1，X_2 を $X(t)$ の3つの

---

1) T が閉区間の時は，議論が少し複雑になる．$X(0)\equiv 0$ は全く本質的でない制限にすぎない(伊藤[4]参照)．

2) §2での $X_1(t)$ がここでは $X_0(t)$，$X_2(t)$ は $X_1(t)+X_2(t)$ にあたる．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

型と呼んでいる．(3.5)は$X(t)$の構造をしらべるためには，各$X_i(t)$について調べればよい事を示している．Doobは(3.5)より少しあらい分解$X(t)=f(t)+X_0(t)+X^c(t)$，$(X^c(t)=X_1(t)+X_2(t))$を中心化と呼んでいる．(3.5)は例えば連続函数（ωに無関係）を加減する自由度があるから，明らかに一意的ではないが，その最も便利な形への分解は本質的[1]には一意的である．Doob[4], pp. 407〜417，は$X_0(t)$が次のように述べる事を証明している．その前に若干記号の説明をする．一般な確率過程$X(t)$において任意の$t_j \downarrow t$（tは固定）に対し$X(t_j)$が確率収束する時，その極限を$X(t+0)$とかく．$X(t+0)$は$\{t_j\}$の取り方によらない．$X(t-0)$の定義も自明であろう．$X(t+0)$，$X(t-0)$が存在しそれらが確率1で$X(t)$と一致する時，$X(t)$はtにおいて確率連続，確率連続でない時tは固定不連続点であるという．

定理3.1. $X_0(t)$は次のようにえらぶことが出来る．(i) すべてのtで$X_0(t+0)$と$X_0(t-0)$が存在する．(ii) $X_0(t)$の固定不連続点の集合をDで書き，$t\in D$に対し$U(t)=X(t)-X(t-0)$，$V(t)=X(t+0)-X(t)$とおけば，$U(t)$，$V(t)$の少くとも一方は定数でない確率変数．(iii) すべての$t\in[0,\infty)$に対し

$$(3.6)\qquad X_0(t)=\sum_{s\in[0,t)\cap D}(U(s)+V(s))+X_0(t)-X(t-0).$$

(iv)集合Dは(i)〜(iii)を満す任意の$X_0(t)$について無関係．

この定理によって，$X_0(t)$の部分の構造は完全に分ったことになる．$X_0(t)$の法則は何の制限も受けないし，これ以上の分析は無意味である．

ここで分解(3.5)で$f(t)$の出て来る事情を見てみよう．$X(t)$の定義によって，$t_j \uparrow t$の時$X(t_j)=\sum_{k=1}^{j}[X(t_k)-X(t_{k-1})]$[2]の各項は独立でしかもその濃度函数$Q_j(\ell)$は$X(t)$の濃度函数$Q_t(\ell)$より常に大きいから，$X(t_j)$に対する極限濃度函数は$Q(\ell)\equiv 1$，したがって$X(t_j)$を定数だけ修正したものが確率収束する（定理2.4を見よ）．この修正項にあたるのが$f(t)$[3]で，一般にこれは非可測なことさえありうる．

---

1) この意味は以下の説明で明らかになる．

2) $t_0=0$として．

3) これは大体の説明で，定理3．1をうるためにはもう1度修正を必要とする．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

こうして我々の関心は確率連続な部分 $X^c(t)=X_1(t)+X_2(t)$ に向けられる．上と同じように $X(t_j)$ を独立変数の和と考えることにより，Lévy の収束定理から $X(t_j)$ が $X(t-0)$ （同様に $t_j \downarrow t$ なら $X(t_j)$ が $X(t+0)$）に概収束していることが分る．そこで $\tilde{X}^c(t)=X^c(t+0)$ とすることによって，確率1で右連続な path をもった加法過程が得られる．これはふつう Lévy過程と呼ばれている．以下始めから $X(t)$ が Lévy過程であったとして，その分解

(3.7) $$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

を調べよう．ところで $X_2(t)$ の意味は(d)で述べた言い方だけではあまり明確でない．実際 Lévy の証明を見ればその感じが出ているというので，Lévy 自身の接近では $X_2(t)$ が $X(t)$から決まる様子や(d)の意味をそれ以上には知り得ないのである．伊藤［1］は Lévy の接近をもっと精密に検討して，$X_2(t)$が $X(t)$ から決まる様子を具体的な形にとらえた．これはこのノートの読者には比較的よく知られたことと思うので結果だけを述べる．

説明に必要な概念をいくつか導入しよう．加法過程 $X(t)$ が確率1で連続な pathをもつLévy 過程の時 $X(t)$ を正規加法過程という．次に右半平面 $[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ のすべての Borel 集合Eに対して定義される非負な確率変数の族 $N(E)$[1] が次の性質をもつ時 Poisson 加法系という．(N.1) Eを固定すれば確率1で $N(E)$ が有限であるか，確率1で無限大であるかいずれかである．前者の場合 $N(E)$ は Poisson 分布にしたがう．(N.2) $E_1, E_2, \cdots$ が互に素ならば $N(E_i)$は互に独立で，確率1で $\Sigma N(E_i)=N(\Sigma E_i)$ が成立つ．(N.3) $n(E)=E(N(E))$[2] とおけば

$$\lim_{n\to\infty}\int_s^t\int_{|u|>\frac{1}{n}}\frac{u^2}{1+u^2}\,n(d\tau,du)$$

は有限でかつt-連続．ここで $s,t,\tau\in T$, $u\in(-\infty,\infty)$ である．今別に $N(E)$ と独立な正規加法過程 $X_1(t)$ をとり

(3.8) $$X(t)=X_1(t)+\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\left[uN(d\tau,du)-\frac{u}{1+u^2}\,n(d\tau,du)\right]$$

を考える．この表示をLévy－伊藤の分解と呼ぶ．又右辺の積分は広義積分

1) $+\infty$ を取ることも許す．

2) $N(E)$の平均値．

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \downarrow 0} \left[\int_{u > \varepsilon_1} \int_0^t - \int_{u < -\varepsilon_2} \int_0^t \right]$$

の意味で確率 1 をもって，Riemann 式に定義可能で収束は t について広義一様なことが示される（伊藤 [4], p.157 定理 31.3）．主定理は次のように述べられる．

定理 3.2. 確率過程 $X(t)$ が Lévy-伊藤の分解のもつためには，それが Lévy 過程であることが必要十分である．かつこの時分解は一意的で，(3.8)における $N(E)$ は次の如くして $X(t)$ から導びかれたものに他ならない．

(3.9) $\quad N(E) = \{(t, X(t) - X(t-0)) \in E$ なるものの個数$\}$.

必要の方は構成定理，十分の方は分解定理とよばれることがある（伊藤[4]）．又一意性の部分はふつう explicit には述べられていないが，比較的簡単に証明出来る．(3.8)の右辺の積分が(3.7)の $X_2(t)$（ω に無関係な連続函数の自由度を除いて）にあたるわけで，これで主張(d)の意味も明確になったのである．$X(t)$ から導びかれる $N(E)$ が (N.3)より少し強い条件をみたせば，(3.8)の積分の収束のための補正項 $\frac{u}{1+u^2} n(d\tau, du)$ は不必要になったり，もっと簡単なものでよくなる．例えば

(3.10) $\quad \int_0^t \int_{-1}^1 |u| n(d\tau, du) < +\infty, \quad {}^\forall t > 0$

は $\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t u N(d\tau, du)$ の部分が単独で絶対収束することと同値だから，この場合は補正項（t の連続函数）を $X_1(t)$ に繰り込んで（それを $\tilde{X}_1(t)$ とあらわす）

(3.11) $\quad X(t) = \tilde{X}_1(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t u N(d\tau, du)$

となる．この時は積分の項（すなわち $X_2(t)$）は真に飛躍のみで変動する部分である．又

(3.12) $\quad \int_0^t \int_{|u|>1} |u| n(d\tau, du) < \infty, \quad {}^\forall t > 0$

の時には

(3.13) $\quad X(t) = \tilde{\tilde{X}}_2(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t [u N(d\tau, du) - u n(d\tau, du)]$

と修正出来る．このような修正は安定過程の path の構造をしらべたりするの

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

に有効である．

$X(t)$ の分布を知るためには，$X_1(t)$ の部分（正規加法過程）についてもう少ししらべておく必要がある．正規加法過程については，'L'addition' の§52 でその path の連続性まで詳しく研究されているのであるが，本質的に Brown 運動と同じだから省略する．さしあたり今必要な結果は '任意の正規加法過程に対して，$m(t)=E(X(t))$ と $\sigma^2(t)=E\{(X(t)-m(t))^2\}$ が存在して t-連続，$\sigma^2(t)$ は又 t の増加函数である．しかもこの時 $\mathcal{L}_{st}$ は平均 $m(t)-m(s)$，分散 $\sigma^2(t)-\sigma^2(s)$ の正規法則である[1]'．これと Lévy-伊藤の分解から，一般の Lévy 過程 $X(t)$ に対して，$\mathcal{L}_{st}$ はその特性函数の対数 $\psi_{st}(z)$ が

$$(3.14) \qquad \psi_{st}(z)=i[m(t)-m(s)]z-\frac{1}{2}[\sigma^2(t)-\sigma^2(s)]z^2$$

$$+\int_s^t\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(d\tau,du)$$

となっているような法則である．特に $X(t)$ が時間的に一様なら $m(t)=m\cdot t$，$\sigma^2(t)=\lambda\cdot t$，$n(d\tau,du)=d\tau\, n(du)$，（但し m,λ は定数で特に $\lambda\geqq 0$）となる．逆に $m(t)$ と $\sigma^2(t)$ が上の命題の条件をみたし，$n(d\tau,du)$ が (N.3) の条件をみたすならば，それぞれに対応して正規加法過程 $X_1(t)$ と Poisson 加法系 $N(E)$ を独立に構成出来るので，定理 3.2 の必要の方を使って，(3.14) の右辺は必らず或る法則の特性函数の対数になっている事がわかる．

3.4.

これまで述べて来た加法過程の理論は無限分解可能法則（以下 i.d.l と略記）の研究に有効に適用される[2]．'L'addition' では§§50～60，'Processes' では§§35, 37, 38 がそれにあたる．この小節では i.d.l の Lévy の標準形を論じ，§3.5 で特別な場合として安定法則及びそれに関連した話題を解説する．

先ず i.d.l の定義を与えよう．一般に法則を $\mathcal{L}$，分布函数 F，特性函数の対数を ψ，法則 $\mathcal{L}$ にしたがう確率変数を X であらわす．$\mathcal{L}$ が i.d.l であるというのは，$^\forall\varepsilon>0$ に対して

---

1) 逆も正しい．

2) i.d.l に対する他の接近は Fourier 解析の方法であるが，ここではふれない (Bochner [1], Gnedenko-Kolmogorov [1], 国沢 [1])．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

(3.15) $\qquad \mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\cdots\mathcal{L}_n$

かつ，各 $\mathcal{L}_i$ が水準 ε で *infinitesimal* すなわち

$$P\{|X_i|>\varepsilon\}<\varepsilon \qquad i=1,2,\cdots,n$$

となるような分解が存在することである．Lévy 過程 $X(t)$ に対し $\mathcal{L}_{st}$ が i.d.l であることは簡単に示されるが（伊藤[4]，定理29.2），i.d.l の話を Lévy 過程に帰着するには次の定理が基本的である．

定理3.3．任意の i.d.l $\mathcal{L}$ に対し，$\mathcal{L}_{01}=\mathcal{L}$ となるような Lévy 過程が存在する．1)

i.d.l の Lévy の標準形を求めよう．$\mathcal{L}$ を i.d.l とせよ．上の定理によって得られる Lévy 過程 $X(t)$ を考えると，$\mathcal{L}_{st}$ に対応する φ_{st} は(3.14)の形をもつ．$m(1)=m$，$\sigma^2(1)=\lambda$，$\int_0^1 n(d\tau,du)=n(du)$ とおき $m(0)=0$，$\sigma^2(0)=0$ に注意すれば

(3.16) $\qquad \varphi(z)=\varphi_{01}(z)=imz-\dfrac{\lambda}{2}z^2+\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)$

で，

(3.17) $\qquad m$ は実数，$\lambda\geqq 0$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{1+u^2}\,n(du)<+\infty$

を満す．分解(3.16)における m,λ,n の一意性2)と，(3.17)の性質をもつ任意の m,λ,n に対し(3.16)の右辺が1つの i.d.l $\mathcal{L}$ の φ になっていること3)は，次の様にして同時に示される．或る函数 $\varphi(z)$ が(3.16)の右辺の形をもつとする．この m,λ,n に対し $(s<t)$

(3.18) $\quad \varphi_{st}(z)=im(t-s)z-\dfrac{\lambda}{2}(t-s)z^2+(t-s)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)$

---

1) 伊藤[5]，p.46，定理1．なおこの定理も Lévy 自身ははっきりとは述べていないように思われる．

2) 一意性だけなら $\lambda\geqq 0$，$n(du)\geqq 0$ は必要ない．すなわち，$\varphi(z)$ given，m,λ,n 未知として(3.16)を1つの函数方程式とみた時，その解はもしあれば一意的なことが容易に示される（'L'addition'，§55，1°）．

3) これの別証が伊藤[4]，pp.134〜137にある．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

を考えると，§3.3末尾の注意によりこれは或る時間的に一様な Lévy 過程の $\mathcal{L}_{st}$ の特性函数の対数である．$\psi(z)=n\psi_{0,\frac{1}{n}}(z)$ だから $\psi(z)$ は i.d.l の特性函数の対数である．これから $\psi_{st}(z)$（それは $\psi(z)$ から決まる）が唯1つの Lévy 過程 $X(t)$ を定めるから，Lévy 伊藤分解の一意性によって，$n(d\tau, du)=d\tau\, n(du)$ は $X(t)$ から導びかれる $N(E)$ の平均に他ならない．m, λ の一意性も同様にして出る．今の説明に次の事が含まれている．

定理3.3'. 定理3.3の Lévy 過程としては，実は時間的に一様なものが（唯1つ）えらべる．[1)]

上に見たように，i.d.l を定める要素 m, λ, n 等が，対応する Lévy 過程 $X(t)$ の汎函数の平均としてあらわされる点に我々の接近の特徴がある．
この事情は解析的には，n を定める次の式に反映している．u', u'' が n の連続点でかつ同符号ならば

(3.19) $$n(u'')-n(u')=\frac{1}{2\pi}\lim_{t\to 0}\lim_{C\to\infty}\int_{-C}^{+C}\frac{e^{-izu'}-e^{-izu''}}{iz}\,\frac{e^{t\psi(z)}}{t}\,dz$$

である．この式も Lévy は対応する Lévy 過程に関する考察から導びいているが詳細は略す（§55, 5°）．更に(3.16)が線型な方程式であるにも拘らず，(3.19)が非線型な形（ψ について）であることに注意を拂っている．そして(3.19)を変形することによって n は ψ について線型な

(3.20) $$n(u'')-n(u')=\frac{1}{2\pi i}\lim_{C\to\infty}\frac{1}{C^2}\int_{-C}^{C}(e^{-izu'}-e^{izu''})(C-|z|)^2\psi(z)\frac{dz}{z}$$

とあらわされることが予想されると述べているが，その厳密な証明がその後発表されたかどうか我々は知らない．

3.5.

安定法則 $\mathcal{L}$ は，$\mathcal{L}$ にしたがう独立変数 X_1, X_2 と任意の正数 c_1, c_2 に対し，適当な正数 c が存在して

(3.21) $$(c_1X_1+c_2X_2)/c \equiv X$$

の法則が同じ $\mathcal{L}$ にしたがうものをいう．これから比較的簡単な考察で $\mathcal{L}$ の $\psi(z)$ が

---

1) これが i.d.l の Lévy の標準形(3.16)を1度得た後でないと証明出来ないことに注意．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

(3.22) $\psi(z)=(-c_0+i\frac{z}{|z|}c_1)|z|^\alpha \qquad (c_0>0,\ 2\geqq\alpha>0)$

と書けることが示される('*L'addition*' §30, 伊藤[5]§21). しかし(3.22)の右辺が1つの $\psi(z)$ (特性函数の対数)であるためには, c_0, c_1 の間に一定の関係が必要である. この関係を求めるには, i.d.l の *Lévy* の標準形(或は対応する *Lévy* 過程 $X(t)$ の性質)が有効である.

(3.22)からただちに $\psi(az)=t\psi(z)$ $(t=a^\alpha)$ が出るから, $\psi(z)$ は1つの i.d.l であって, これに対応する時間的に一様な *Lévy* 過程 $X(t)$ ——安定過程という——は $X(t)$ と $aX(1)$ が同じ法則にしたがうようなものである. これから

第1の場合: $0<\alpha<1$ には $\psi(z)$ が

(3.23) $\psi(z)=c\int_0^\infty(e^{izu}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+c'\int_{-\infty}^0(e^{izu}-1)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}},\ c, c'\geqq 0.$

の形をもつことが分る. $X(t)$ は(3.10)の条件をみたし, 分解(3.11)で $\tilde{X}_1(t)\equiv 0$. したがって $X(t)$ は飛躍のみで変化する *path* をもつ.

第2の場合: $1<\alpha<2$. $\psi(z)$ は

(3.24) $\psi(z)=c\int_0^\infty(e^{izu}-1-izu)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+c'\int_{-\infty}^0(e^{izu}-1-izu)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}},\ c, c'\geqq 0,$

の形で, $X(t)$ は条件(3.12)を満し, 分解(3.13)において $\tilde{\tilde{X}}_2(t)\equiv 0$ である.

以上の事は伊藤[5], §21にも出ているので詳細は略す. これから(3.22)における c_0, c_1 の関係をみちびく部分を述べよう. 先ず第1の場合について簡単な計算で,

$$\int_0^\infty(e^{izu}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}=\Gamma(-\alpha)\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}-i\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)|z|^\alpha$$

となる. 積分 $\int_{-\infty}^0$ の部分も同じ様に計算出来, 結局(3.22)と比較して

(3.25) $$\begin{cases} -c_0=(c+c')\,\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\pi}{2}\alpha, \\ c_1=(c'-c)\,\Gamma(-\alpha)\sin\frac{\pi}{2}\alpha. \end{cases}$$

が得られる. $c_1=c_0\beta\tan\frac{\pi}{2}\alpha$ とおけば, $\beta=\frac{c-c'}{c+c'}$ で $c\geqq 0$, $c'\geqq 0$ だか

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

ら $|\beta|\leqq 1$ となる．これが c_0, c_1 の関係である．第2の場合も積分の計算は少し複雑になるが，矢張り(3.25)が成り立って同じ結論が得られる．第3の場合($\alpha=1$)は c_1 は全く任意で Cauchy 法則である．第4の場合($\alpha=2$)は $c_1=0$ で平均0の正規法則に他ならない．β から安定過程 $X(t)$ の様子を知ることが出来る．例えば $\beta=+1$ なら $c'=0$ だから，$X(t)$ は飛躍のみで増加する path をもつという風にである．

安定法則の1つの拡張は準安定法則(quasi-stable law)である．Gnedenko-Kolmogorov [1] ではこれを単に安定法則と呼んでいる．これは，(3.21)における右辺 X の法則が $\mathcal{L}\mathcal{L}_{c'}$ ($\mathcal{L}_{c'}$ は或点 c' における単位法則)であるという性質をもつものとして定義される．この法則の ψ は

$$(3.26)\qquad \psi(z)=imz-c_0|z|^{\alpha}\left\{1-i\beta\frac{z}{|z|}\omega(z,\alpha)\right\}.$$

たゞし，m は実数，$c_0\geqq 0$，$0<\alpha\leqq 2$，$|\beta|\leqq 1$ で $\omega(z,\alpha)$ は

$$\omega(z,\alpha)=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi}{2}\alpha, & \alpha\neq 1\\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\log|z|, & \alpha=1\end{cases}$$

によって与えられる．結局 $\alpha\neq 1$ の時 $\mathcal{L}$ は安定法則を平行移動したものに他ならないが，$\alpha=1$ の時は本質的に新らしい法則 $\psi(z)=-c_0\left(|z|-\frac{2}{\pi}z\log|z|\right)$ があらわれる所に興味がある．Lévy の証明は半安定法則(以下にのべる)に関する或る性質を使うが，その性質は筆者には証明がつかない.[1] しかしそれを使わなくても，安定法則の時と全く同じやり方をすれば(3.26)を導びくことが出来る．

安定法則の他の拡張は半安定法則である．これは $\psi(z)$ が少くとも或る正数 $q\,(\neq 0,1)$ について

$$(3.27)\qquad \psi(qz)=q^{\alpha}\psi(z)$$

をみたすような法則 $\mathcal{L}$ のことで，明らかに安定法則の拡張である．この場合も安定法則への接近と類似の仕方で，(3.22)，(3.23)，(3.24)に対応する結果が得られる．特別な例としては

---

1) 'L'addition' §58, p.205, 12〜13 行目．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$\psi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos zq^{\nu} - 1}{q^{\nu}}$$

のようなものがある(詳しくは'L'addition' §58).

3.6.

その他Pearson型法則(前述), limit law ('L'addition' §55, 4°), n次元空間や,もっと一般な空間の値を取る加法過程の研究('L'addition' §§62, 63, 'Processus' §§38-40)も興味があるが省略する.たゞ多次元安定法則の研究においてすでにポテンシャル論との現代的関連の一歩前まで到達していることと,一般の空間上の加法過程の時は独立増分性という最初の定義に固執せず,もう少し広い見地に進んでいることを注意しておく.

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

§4 Brown 運動

4.1. 概 説

先ず記号的な説明を最初にのべれば，他の§同様特別の確率空間を指定することなく，単にある適当なところに定義された一次元 Brown 運動というときには $\{B(t,\omega),\ t \geqq 0\}$，またはたゞ $B(t)$ なる記号を用いる．このときは0から出発するものを意味する，すなわち $P\{B(0,\omega)=0\}=1$ である．一方平均をするときなど積分すべき測度を明示する必要もしばしばおこるので，そのような時にはつぎのような慣習による．

連続函数 $w:\ t\in[0,+\infty)\to R^1$ の空間 W，および W の部分集合 B の Borel algebra で $B=\{w;\ a\leqq X(t)<b\}$，$t\geqq 0$，$a<b$，$X(t)=w(t)$，をすべて含むものを考える．このとき一次元拡散過程 $D=\{W,\ \mathbb{B},\ P_x,\ x\in R^1\}$ で生成作用素が $1/2\,\frac{d^2}{dx^2}$ になるものを同様に一次元 Brown 運動と言う．この他に，ある確率空間 $\Omega(B,P)$ で定義された確率過程 $X(t,\omega)$ を測度を明示した方が好都合のときは $\{X(t,\omega);\ t\geqq 0,\ B,\ P\}$ なる記号を用いる．

また多次元 Brown 運動も同様に $\{B(t,\omega),\ t\geqq 0\}$，$B(t)$，$\{W,\ \mathbb{B},\ P_x,\ x\in R^1\}$ 等の記号を用いて書く．この時 $B(t)$，$X(t)$ の成分等を用いるときは $B(t)=(B_1(t),\cdots,B_n(t))$，$X(t)=(X_1(t),\cdots,X_n(t))$ 等の記号を用いる.[1]

植物学者 R. Brown は1828年に水中における花粉等の運動として所謂 Brown 運動を見出した．この運動の数学的研究は現在の確率論で中心をなしているのみならず，殆んどすべての研究がこの運動についての結果を指針として行われている．それのみならず Dirichlet 問題や熱伝導方程式の基本解の問題を通して数学解析の多方面に関連を持って来ている．P. Lévy [43], [68] の本文や脚註にのべてあるように，このような研究は1900年頃 L. Bachelier [1]等によって始められた．彼はその分布がガウス分布に従い，path は Markov 性を持つことを示した．いうまでもなく，今日用いられている程の厳密な数学的定義を伴ったものではなかった．そのような仕事は1923年 N. Wiener [ ]によってなされ，彼はその后いくつかの文献でその研究を続けた．

---

1) Brown 運動の定義については伊藤[4], K. Ito [6]等をみよ．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

この定義は現代的言葉で言えば，函数空間におけるある特定の測度または積分を導入することであるが，そのようなことの端緒はP. Lévy[2](1922)にも汎函数の積分の問題として考えられている．P. Lévyのそのような考え方はN. Wiener[16]の序文にもふれられている．P. Lévy[26](1937年)では一般の加法過程との関連のもとにその性質が論じられているが，さらにP. Lévy[32](1939年)はN. Wienerとは異なった構成を与え，その性質を詳細に研究している．この論文の内容は[43]の第6章にまとめられていることの大部分をなして居り，今日非常に注目されている部分である．P. Lévy[34](1940年)ではさらに多次元Brown運動の研究へ進んでいる．これが[43]第7章にまとめられたことの大部分をなしている．これらの研究および引続き進められた研究の成果は[43]でまとめられている．[43]で特にBrown運動に密接な関連を持つところは 1，3，6，7の4つの章である．なかでも6，7の両章はBrown運動のみの研究に費されている．[68]は[43]のBrown運動に関連する所を多少の修正をほどこしてまとめてある．それらより后の研究でこゝでふれたいと思うP. LévyのBrown運動についての研究は[66]，[75]，[90]，[96]等である．

このような簡単な年代についての考察からも，1955年前后から急に盛んになった確率過程の研究の一つの方向と同様のことが1940年以前に既にP. Lévyによって始められていることが解る．この間約15年位を要したわけであるが，こゝでは歴史を論ずるのが目的ではないので，その理由についてのべることはやめ，たゞP. Lévyから現代の研究までの間には，P. Lévyが無意識的に用いていた概念例えば強Markov性等に対して一般的な定式化が与えられる必要があったことのみを指摘するにとゞめる．

わが国においてもP. Lévy的な方向の研究は相当に早くから始められて居り，伊藤の初期の仕事や角谷の仕事等があるが，例えば[43]，第1章，第6章の一部にのべてあるBrown運動についての 射影不変性；Hörder連続性；Maximum函数$M(t)$や最小到達時間$T(x)$や，$|B(t)|$や，$Y(t)=M(t)-B(t)$の分布函数等については詳しい証明を附して伊藤[10](1954年)にのべてある．これらの内容とほゞ同じことは丸山[1](1957年)にもみることができる。ところが，上の分布の計算を基礎に$Y(t)$，$|B(t)|$等が共に反射壁のBrown運動になることを示したようなこと，P. Lévyの"mesure du voisinage" すなわち今日local timeまたは正の値をとるadditive random

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

functional と言われているもの等の研究は K. Ito and H. P. McKean [1]等に到ってようやく研究され始めた．

以下この§では[10]，[12]を参考にしながら P. Lévy の Brown 運動についての研究の概観をする．

4. 2. P. Lévy による Brown 運動の構成（[34]等にもあるが特に[43] 才1章参照）

$\Omega=[0,1]$ として通常の Lebesgue 測度空間 $\Omega(\mathbb{B},P)$ を考える．そのとき $\omega\in\Omega$ を2進法展開し，$\omega=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\omega_n}{2^n}=\cdot\omega_1\omega_2\omega_3\cdots\omega_n\cdots$ とする．かつ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ の逆函数を $f^{-1}(x)$ で表わす．さらに

$$
\begin{array}{llllll}
u_1= & \cdot & \omega_1 & \omega_2 & \omega_4 & \omega_7\cdots \\
u_2= & 0 & \cdot & \omega_3 & \omega_5 & \omega_8\cdots \\
u_3= & 0 & 0 & \cdot & \omega_6 & \omega_9\cdots \\
u_4= & 0 & 0 & 0 & \cdot & \omega_{10}\cdots
\end{array}
$$

等として $\{u_n,\ n=1,2,3,\cdots\}$ を定義する．つぎに

$$
\begin{aligned}
&g_1=f^{-1}(u_1),\\
&g_{1/2}=f^{-1}(u_2),\\
&g_{1/4}=f^{-1}(u_3),\quad g_{3/4}=f^{-1}(u_4)\\
&g_{1/8}=f^{-1}(u_5),\quad g_{3/8}=f^{-1}(u_6),\quad g_{5/8}=f^{-1}(u_7),\quad g_{7/8}=f^{-1}(u_8)\cdots
\end{aligned}
$$

等々

という定義をする．こうして出来る $\{g_{k2^{-n}};\ k=1,3,\cdots,2^n-1,\ n=1,2,\cdots\}$ はお互に独立な標準ガウス分布 $N(0,1)$ に従うことはよく知られている．このことを利用して，

$$
e_m(\cdot,\omega)=g_1f_1(\cdot)+\sum_{n\leq m}2^{-\frac{1}{2}(n+1)}\sum_{k=1,3,\cdots,2^n-1}g_{k2^{-n}}f_{k2^{-n}}(\cdot),\quad m\geqq 1,
$$

と定義する．こゝで $\{f_{k2^{-n}}(\cdot),\ k=1,3,\cdots,2^n-1,\ n=1,2,\cdots\}$ は *triangular* 函数，すなわち，

$$
f_{k2^{-n}}(t)=2^n[t-(k-1)2^{-n}],\qquad (k-1)2^{-n}\leq t\leq k2^{-n},
$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$= 2^n[(k+1)2^{-n}-t] \quad , \quad k2^{-n} \leq t \leq (k+1)2^{-n} \quad , \quad k \geq 2,$$

$$= 0 \qquad\qquad , \quad otherwise,$$

$f_1(t) = t,$

とする．このとき，$e_\infty(\cdot,\omega) \in C([0,1])$ が $e_\infty(\cdot,\omega) = \lim_{m\to+\infty} e_m(\cdot,\omega)$ として存在し，$\{e_\infty(t,\omega);\ t \geq 0,\ B,\ P\}$ は原点から出発する１次元 Brown 運動になっている．

4．3． 射影不変性（[43]，オ１章，伊藤[4]オ５章参照）．

0から出発する一次元 Brown 運動 $\{B(t,\omega),\ t \geqq 0\}$ が存在したとする．いま，$0 < t_0 \neq t_1 < +\infty$ として，

$$\tilde{X}(t,\omega) = \frac{(t_1-t)(B(t)-B(t_0))-(t-t_0)(B(t_1)-B(t))}{t_1-t_0}$$

とおき，

$$X(t,\omega) = X(t;t_0,t_1) = \sqrt{\frac{(t_1-t)(t-t_0)}{t_1-t_0}}\ \tilde{X}(t,\omega)$$

とおけば $\{X(t,\omega),\ t_0 \leqq t \leqq t_1\}$ は平均 0 で $E\{X(t)X(s)\} = (s \wedge t,\ s \vee t,\ t_0 \wedge t_1,\ t_0 \vee t_1)$ の Gaussian system（正規型変数系）になっている．こゝで $(a,b,c,d) = \frac{a-c}{a-d} \Big/ \frac{b-c}{b-d}$ （非調和比）とする．このことに注意すれば，$\{X(t,\omega),\ t_0 \leqq t \leqq t_1\}$ は t の射影変換に関して不変であることが解る．このことから

$$X^-(t) = 0 \qquad , \quad t = 0$$

(4,1) $$\qquad = tB(1/t) \ , \quad t > 0$$

$$X^+(t) = cB(t/c^2) \ , \quad t \geqq 0 \ , \quad (c > 0),$$

とおけばいずれも 0 から出発する１次元 Brown 運動になる．このような変換は $t=0$ の近傍の性質と $t=+\infty$ の近傍の性質を比較するとき，また path の局所的な性質の研究にしばしば用いられる．また G. Hunt [1]はこれらの性質　　　　　　をポテンシャル論の研究，例えば Green 函数の対称性の証明等に用いている．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

4.4. 熱伝導の方程式（[43]，オ3章，[68]オ2章参照）

1次元Brown運動 $D=\{X(t,w);\ t\geqq 0,\ B,\ P_x,\ x\in R^1\}$ の定義より，

$$P_x\{X(t,w)\in dy\}=p(t,x,y)dy, \quad (t,x,y)\in(0,+\infty)\times R^1$$

とおけば

$$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$$

となり，$p(t,x,y)$ は熱伝導の方程式

$$(4.2)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t>0$$

の source（green）函数となる．従っていま初期分布 $U_0(d\xi)$ の場合に

$$\int_{R^1}U_0(d\xi)P_\xi\{X(t,w)\in dx\}=u(t,x)dx$$

とおけば，やはり $u(t,x)$ も又（4,2）の解になる．また $U(t,x)=\int_{-\infty}^{x}u(t,\xi)d\xi$ とおけば

$$(4.3)\qquad \frac{\partial U}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$$

となる．上の方程式（4,3）はつぎのような物理的な説明が出来る（[43]，オ3章，$n^\circ 19$）．切口が無視可能のような均質の棒での $(-\infty,x)$ での熱の量を U とする．点 x を通る熱の流のために熱の増加または減少がおこる．ところがそのような流の原因は点の両側での温度の差である．熱の増減は $\frac{\partial U}{\partial t}$ に比例し，温度の差は $\frac{\partial u}{\partial x}$ に比例する．この関係より（4.3）が得られる．

またBrown運動をしていて相互にその変動はお互に独立な粒子を考える．それは理論的分布の密度を十分表わすように非常に沢山の数だけあるとする．その時 dt 時間内に点 x を通る粒子の数によって確率の流れと考えることが出来る．それは一方では $\frac{\partial u}{\partial x}$ に，他方では $\frac{\partial U}{\partial t}$ に比例すると思うことが出来る．そうして再び方程式（4.3）を得る．

つぎに $x_1(t)$，$x_2(t)$ なる連続で微分可能な函数を考える．$t=t_0$ で $[x_1(t_0),\ x_2(t_0)]$ にあるなめらかな分布 $u_0(x)dx$ で分布していて，時間 (t_0,t_1) の間ではすべて

$$x_1(t)\leq X(t)\leq x_2(t)$$

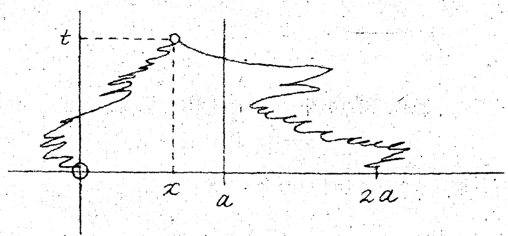
Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

で，時間 t_1 では

$$x \leq X(t_1) \leq x + dx$$

となる確率を $u(t_1, x)$ とすればそれを求める問題は，"$u(t_0, x) = u_0(x)$ なる条件の下で，境界では 0 となるような区間 $[x_1(t), x_2(t)]$ の中で定義された熱伝導の方程式の解を求める" ことになる．とくに $x_1(t) = x_1$，$x_2(t) = x_2$ なるようなときは L. Bachelier [2] 以来知られている．

(i) $x_1 = -\infty$，$x_2 = a > 0$ の場合．この場合は出発点が 0，すなわち $B(t_0) = 0$ のときは Kelvin の鏡像原理が利用出来る．



いま 0 の所に熱い熱源をおき，$2a$ の所に逆の冷い熱源をおくと考える[1]．その両方の大きさは同じで符号だけ違うとする（左図参照）．そうすると

$$(4.4) \qquad u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\left[e^{-\frac{x^2}{2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(2a-x)^2}{2(t-t_0)}}\right]$$

となることは 0 から出発したものが時間 t で x に到達するのに対して，$2a$ から出発した冷たいものがそのとき x に到達し，前者を減らしている．したがって，前者に対する確率から後者の確率を引けばよい．それがすなわち (4.4) である．

(ii) $x_1 = -a_1 < 0$，$x_2 = a_2 > 0$ の場合．やはり $B(t_0) = 0$ のときを考える．このときも鏡像原理は応用可能である．$x_h' = 2ha$ ($a = a_1 + a_2$，$h = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$)，$x_h'' = 2a_2 - 2ha$ とおく．上の x_h' のところに熱い熱源をおき，x_h'' の所に冷たい熱源をおくと考え，

$$(4.5) \qquad u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-x_h')^2}{2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x-x_h'')^2}{2(t-t_0)}}\right]$$

となる．

(iii) $x_1 = 0$，$x_2 = a = \pi$ とする．いま初期分布 $u_0(x)dx$ で $u_0(x) = \sum_1^{\infty} c_n \sin nx$ とすれば，

$$(4.6) \qquad u(t,x) = \sum_1^{+\infty} c_n \sin nx \, e^{-\frac{n^2 t}{2}}$$

1) 冷たい熱源をおくというのは変な言葉であるが，意味はそこでは冷やしてやるという意味である．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

となる．さらに $x_1=0,\ x_2=+\infty$ のときも類似な方法で

$$u(t,x)=\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\, e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}\,\Phi(d\lambda)$$

となる．

以上 (i), (ii), (iii) にのべたような解はもっと一般な拡散に対する H. P. Mc-Kean [1] の結果を用いると求まる．特に (iii) は密接な関連がある。

つぎに $t\to+\infty$ のときは (4.6) より (iii) の場合は

$$u(t,x)=C_1 e^{-\frac{t}{2}}+O(e^{-2t}),\qquad t\to+\infty,$$

となることは特徴的である．また $t_0=0$ として $x_1=0,\ x_2=+\infty,\ X(0)=a>0$ の場合に $u(t,x)$ を $u_a(t,x)$ とすれば，(i) と同様にして求まるが，それを用いると

$$u_a(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}}-e^{-\frac{(x+a)^2}{2t}}\right]\sim\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\frac{ax}{t}\,e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

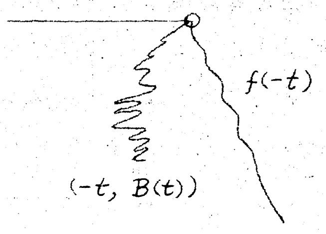
となる．

先にのべた吸収壁の問題の一般の場合は Kolmogorov の判定法が関連している．[43]，第3章，n°21，にのべてある通り I. Petrowsky [1] によれば "函数 $f(t)$ が下級である" とは $B(0)=0$ のとき，如何なる小さな区间でも $B(t)$ が $f(t)$ によっておさえられることは確率1でおこらないことであり，"函数 $f(t)$ が上級に属する" とは $B(t)$ が $f(t)$ でおさえられる1つの random な区間が確率1で存在することである．
すなわち，正の $f\in C([0,1])$ に対して $P(B(t,\omega)<f(t),\ t\downarrow 0)=0$ または1で，前者のとき $f(t)$ と "上級" という．

<u>定理4.1.</u>　$f\in C((0,1])$，$f\in\uparrow$，$t^{-\frac{1}{2}}f\downarrow\in\downarrow$ のとき，

$$\int_{0+}^{1} t^{-\frac{3}{2}} f e^{-f^2/2t}\,dt=+\infty,\quad <+\infty$$

に応じ，それぞれ f は下級，上級である．



この結果は J. L. Doob [5] で示されたように時空 Brown 運動を考えれば左図で $f(-t)$ の左側を G とするとき，G に対して 0 が時空 Brown 運動についての Dirichlet 問題に関し正則か非正則を論じていることになる．なお，[4 3]，第3章

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$n°21$ にはこの結果の他にこの種の問題に関連することが多くのべてある．

4.5. 一次元Brown運動の振動．([43], 第6章, [34] 参照)．

一次元Brown運動 $\{B(t,\omega),\ t\geqq 0\}$ の殆んどすべての path は t の函数として有界変動でないことは良く知られているが，さらにつぎのことが成立つ．$\{t_n;\ n=1,2,\cdots\}$ を (t_0,t_1) における dense な点列とする．$t_0,t_2,t_3,\cdots,t_n,t_1$ を大きさの順にならべたものを $t_1^{(n)},t_2^{(n)},\cdots,t_{n+1}^{(n)}$ とし，$S_n(\omega)=\sum_{k=2}^{n+1}(B(t_k^{(n)})-B(t_{k-1}^{(n)}))^2$ とおけば殆んどすべての ω に対して $n\to+\infty$ のとき $S_n(\omega)$ は極限をもち，その極限は t_1-t_0 に等しい．このことが成立つ直観的な説明はつぎのようになる．いま $[\{B(t_k^{(n)})-B(t_{k-1}^{(n)})\}^2,\ k=2,3,\cdots,n+1]$ はお互に独立な確率変数で平均 $t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}$ で分散も有限である．従って強大数の法則が成立つと同じような事情が存在するので結果が得られる．この性質は確率積分の定義と密接な関連を持ち，同様な研究は多次元Brown運動についてもなされている(§4.16を参照)．

4.6. P. Lévy の逆正弦法則．([32],[68] 第2章参照)．

P. Lévy は種々の形の逆正弦法則を示して居り，その中のいくつかは別の所(§4.11 参照)でのべるが，こゝではその中の1つを示す．

$$P_0\left\{\int_0^t \chi_{[0,+\infty)}(X(s))ds < \theta t\right\}=\frac{1}{\pi}\int_0^\theta \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\theta},\quad 0\leq\theta\leq 1,^{1)}$$

また，

$$P_0\left\{a\leq \frac{\int_0^t \chi_{[0,+\infty)}(x(s))ds}{t}<b\,/\,X(t)=0\right\}=b-a,\quad t>0,\ 0\leq a\leq b\leq 1$$

が成立つ。([32], P. 323, [68] 第2章を参照)．

4.7. 特性量の分布．([32],[43] 第6章，[68] 第2章参照)．

Brown運動から定まるいくつかの量の中，反射壁，吸収壁に関連したもので以后の議論に対して特に重要なものがある．これらは例えば[32] ，または[43]第6章にまとめられている．こゝでのべるものの中いくつかは L. Bachelier [2], [3], [4], [5]でのべられているが，P. Lévy の一次

1) $\chi_E(x)$ は集合 E の indicator 函数．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

元の重要な研究の中，これらを基礎として出発したものが多い．なおこれらは伊藤[4]，K. Ito-H. P. McKean [1]に整理された証明がある．先ずつぎのような定義をする．今一次元Brown運動 $D=\{X(t,w);\ t\geqq 0,\ B,\ P_x,\ x\in R^1\}$ を考える．

$$m(t)=\min_{\sigma_0\leqq s\leqq t} X(s,w),\quad M(t)=\max_{\sigma_0\leqq s\leqq t} X(s,w),\quad Y_0(t)=|X(s,w)|$$

$$(4.7)\quad Y_1(t)=\begin{cases} X(t,w), & t<\sigma_0(w), \\ M(t)-X(t,w), & t\geqq\sigma_0(w), \end{cases}$$

$$Y_2(t)=\begin{cases} -X(t,w), & t<\sigma_0(w), \\ X(t,w)-m(t), & t\geqq\sigma_0(w), \end{cases}$$

とおけばつぎの関係式が成立つ．こゝで $\sigma_0(w)=\min\{t;\ X(t,w)=0\}$ とする．

$$P_0\{M(t)\geqq\xi\}=2P_0\{M(t)\geqq\xi,\ X(t,w)>\xi\}=P_0\{|X(t,w)|>\xi\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_\xi^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2t}}dy,\quad \xi>0,$$

$$P_0\{M(t)\in d\xi,\ X(t,w)\in dx\}=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\,\dfrac{2\xi-x}{t}\,e^{-\frac{(2\xi-x)^2}{2t}}d\xi dx, & \xi>0,\ x<\xi, \\ 0 & ，\text{他の場合}, \end{cases}$$

$$P_0\{M(t)\in d\xi,\ Y_1(t)\in dy\}=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\,\dfrac{\xi+y}{t}\,e^{-\frac{(\xi+y)^2}{2t}}d\xi dy, & \xi>0,\ y>0, \\ 0 & ，\text{他の場合}. \end{cases}$$

これらの式を用いるとつぎの事実を証明することが出来る．

定理 4.2. 任意に固定した $t\,(>0)$ に対して，$M(t)$, $-m(t)$, $Y_i(t)$, $i=0,1,2$, は P_0 — 測度に関して同じ分布を与える．

また §4.4の (4.5)式は $X(t)$, $-m(t)$, $M(t)$ の同時分布を考えていることは (4.7)式で与えられる定義より容易に導かれる結論である．すなわち

$$P_0\{m(t)>x_1,\ M(t)<x_2,\ X(t)\in dx\}$$

$$=\frac{dx}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-2nl)^2}{2t}}-e^{-\frac{(x-2x_1+2nl)^2}{2t}}\right],$$

こゝで $x_1<0$, $x_2>0$, $l=x_2-x_1$ とする．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

4.8. 最小到達時間 $\{\sigma_x(w), x\geqq 0; \mathcal{B}, P_0\}$.（[32], [43] 才6章, [68] 才2章参照）.

§4.7の $\sigma_0(w)$ を一般化して $\sigma_x(w)=\min\{t; X(t,w)=x\}$ を Brown 運動の x への最小到達時間というが, $x>0$ の時は当然 $\sigma_x(w)=\min\{t; M(t,w)=x\}$ となる. 従って $\{\sigma_x(w), x\geqq 0\}$ は $\{M(t), t\geqq 0\}$ の逆函数である. このとき

$$(4.8) \qquad P_0\{\sigma_x(w)<t\}=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2s}} s^{-\frac{3}{2}}\,ds$$

なることは容易に示される. さらに x をパラメータとする確率過程 $\{\sigma_x(w); x\geqq 0, \mathcal{B}, P_0\}$ を考えると, それは片側 $1/2$ 一安定過程となる（§2, §3を参照）. すなわち時間的に一様な加法過程で, $E_0\{e^{-\alpha\sigma_x(w)}\}=e^{-\sqrt{2\alpha}\,x}$ となるものである. このことに注意すれば $\{\sigma_x(w), x\geqq 0\}$ の Lévy-Ito の表現が得られる. すなわち,

$$(4.9) \qquad \sigma_x(w)=\int_0^{+\infty} l\, p([0,x]\times dl)$$

である. こゝで $p(dx\times dl)$ は $(y; \sigma_y(w)-\sigma_{y-}(w)\in dx\times dl)$ なる y の数であって, それは平均 $dx\times\frac{dl}{\sqrt{2\pi l^3}}$ なる Poisson 測度に従う. このことから $\sigma_x(w)$ は正の飛躍の和になっている（§2, §3参照）.

4.9. 反射壁の Brown 運動（[32], [43] 才6章, [68] 才2章参照）.

まえに §4.7でのべた定理4.2の内容はより詳細な形で言える. 一次元 Brown運動 $\mathbb{D}=\{W, \mathcal{B}, P_x, x\in R^1\}$ があるとする.

定理4.3 $\mathbb{D}^{(0)}=\{Y_0(t); t\geqq 0, \mathcal{B}; P_x, x\in R^1\}$, $\mathbb{D}^{(1)}=\{Y_1(t); t\geqq 0, \mathcal{B}, P_x, x\in R^1\}$ は共に同じ拡散過程で反射壁の Brown 運動, すなわち生成作用素は $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ で, その定義域の函数は $u^+(0)=0$ の条件をみたす拡散過程である.

この事実の証明に関して, P. Lévy は Brown 運動の零点等についてそれ以前に研究していて, 証明はそれらを用い直観性をもたせて行ってある. つぎの §4.10, §4.11 ではそれらについてのべる.

4.10. local time (mesure du voisinage). （[32], [43] 才6章, [68] 才2章, [90], [96] 参照）.

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

いま一次元Brown運動 $D=\{W, B, P_x, x\in R^1\}$ に対して；

$$\mathcal{E}_i=\mathcal{E}_i(w)=\{t;\ Y_i(t)=0\}\quad,\qquad i=0,1,2,$$

とする．このとき，$\mathcal{E}_i$ は非可附番集合だが，そのLebesgue測度は0である．また $\mathcal{E}_i$ は閉集合で $[0,+\infty)-\mathcal{E}_i$ は開区間 $e_i(w)$ の和集合となる．この $\mathcal{E}_0$，$\mathcal{E}_1$，$\mathcal{E}_2$ は共に同じ確率法則に従うことが示される．こゝで

$N_1^{(t)}(\varepsilon)$ を $M(s)$；$s\leqq t$，の長さがεより大きい flat strech の数

とする．このとき §4.8の事実に注意すれば

$$(4.10)\qquad P_0\left\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}}\,N_1^{(t)}(\varepsilon)=M(t);\ t\geqq 0\right\}=1$$

となる．

このことから $M(t)$ は $\mathcal{E}_1(w)$ の函数で，$\mathcal{E}_1(w)$ で増加し，その他の所では平らである．§4.9の D^+ と D^- は同じ拡散過程であるので，$\mathcal{E}_1(w)$ の函数としての $M(t)$ に対応する $\mathcal{E}_0(w)$ で増加し，他では平らな $\mathcal{E}_0(w)$ の函数 $\underline{t}_+(t,w)\ (\equiv\underline{t}_+(t))$ が存在する．(4.10)より明らかに

$$(4.11)\qquad P_0\left\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}}\,N_0^{(t)}(\varepsilon)=\underline{t}_+(t);\ t\geqq 0\right\}=1$$

である．こゝで $N_0^{(t)}(\varepsilon)$ は長さがεより大きい $[0,t]$ に含まれる区間 $e_0(w)$ の数とする．

また同じようなことから

$L_0^{(t)}(\varepsilon)$＝長さがεより小さい $[0,t]$ に含まれる区間 $e_0(w)$ の数

とすればつぎの式を得る．

$$(4.12)\qquad P_0\left\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}L_0^{(t)}(\varepsilon)/\varepsilon=\underline{t}_+(t);\ t\geqq 0\right\}=1\ .$$

$N_1^{(t)}(\varepsilon)$；$N_0^{(t)}(\varepsilon)$ の定義を考えると上の(4.10)，(4.11)式より解るように $M(t)$ は $\mathcal{E}_1(w)$ の $\underline{t}_+(t)$ は $\mathcal{E}_0(w)$ の集合の大きさを測るある量であることは直観的には理解されるだろう．このような意味で $\underline{t}_+(t)$ を $[0,t)\cap\mathcal{E}_0(w)$ を測る一つの測度と考え，それを local time という．さらに

$$(4.13)\qquad P_0\left\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\,\underline{\underline{s}}_\varepsilon(t,0)=\underline{t}_+(t);\ t\geqq 0\right\}=1,$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

および[96]で予想されているつぎの事実も成立する．

$d_n(t) = 2^{-n}$と0の間を $X(s)$, $0 \leqq s \leqq t$ が往復する回数

とすれば

(4.14) $\quad P_0\{\lim_{n \to +\infty} 2^{-n-1} d_n = \underline{\underline{t}}_+(t) \;\; ; \;\; t \geqq 0\} = 1.$

従って(4.11)～(4.14)式の{ }の中のいずれの右辺をもって来ても $\underline{\underline{t}}_+(t)$ が定義出来ることになる．しかも $\{\underline{\underline{t}}_+(t);\ t \geqq 0\}$ と $\{M(t)\ ;\ t \geqq 0\}$ が確率論的に同じ性質を持つことは(4.10)と(4.11)の関係より明らかである．

このような local time の概念は P. Lévy 自身によって Feller-McKean 過程の研究に用いられたが([96]または§5参照)，K.Ito-H.P. McKean[1]はこの量を広く用い，elastic な境界を持ったBrown運動や一般の拡散過程の研究を行い，その有効性を示した．さらにその量は正の値をとる additive random functional として一般の Markov 過程で定義されている．いまその立場から考えるとつぎのようになる．

反射壁のBrown運動の遷移確率の密度を $g^+(t, x, y)$ とする．そのとき，

$$e_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} g^+(t, 0, x)\, dt, \quad \alpha > 0,$$

を考えればそれは反射壁のBrawn運動についてのα次の excessive 函数になる．従って測度0を除いて唯一つの $e_\alpha(x)$ に対応する一つの additive random functional $\underline{\underline{t}}^{(\alpha)}(t, w)$ が定義される．

$$\underline{\underline{t}}^{(0)}(t, w) = \int_0^t e^{\alpha s}\, \underline{\underline{t}}^{(\alpha)}(ds, w)$$

とおけば $E_x\{\underline{\underline{t}}^{(0)}(t, w)\} = \int_0^t g^+(s, x, 0)\, ds$ となるから確率1で $\underline{\underline{t}}^{(0)}(t, w)$ と $\underline{\underline{t}}_+(t)$ は一致する．このような additive random functional は Markov 過程のポテンシャル論的な研究に対して有用なものである．

4.11. Brown 運動の excursion．([32]，[43]第6章参照)．

§4.10 でのべたように $[0, +\infty) - \mathcal{E}_i(w)$ は開区間 $e_i(w)$ の和集合として表わされる．簡単のため $\mathcal{E}_0(w)$ に対応する $e_0(w)$ を考えることにする．$e_0^{(n)}(w)$, $n = 1, 2, \cdots$ をつぎのように定義する．いま

1,

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 2,$

$\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{4},\ \frac{11}{4},\ 3$

etc.

を考え，$e^{(n)}_{(0)}(w)=e^{(n)}$ を上のリストの中 $\mathcal{E}_0(w)$ または $\bigcup_{m<n} e^{(m)}_0(w)$ に含まれない最初の数を含む $[0,t)-\mathcal{E}_0(w)$ を作る1つの開区間とする．P. Lévy は例えば［43］才6章に於いて，$\mathcal{E}_0(w)$ を与えると，excursion $\underline{\underline{e}}_n$: $X(t)$, $t\in e^{(n)}_0(w)$, $n=1,2,\cdots$ はお互に独立になり，しかも $\underline{\underline{e}}_n$ の分布は，$e^{(n)}_0(w)$ がその長さ $|e^{(n)}_0(w)|$ の形でのみ関係して来ることを示している．彼は excursion $\underline{\underline{e}}_n$ の分布を調べることにより，先ず $\mathcal{E}_0(w)$ を構成し，それに応ずる $\underline{\underline{e}}_n$ を作ってBrown運動を再構成出来ることを論じている．しかも才6章の詳しい結果の証明ではしばしばそのような構成が可能だという事実を基礎にしている．例えば，定理4.3の証明でも，各区間 $e^{(n)}_0(w)$ が解ったとき，その excursion が解ればよいという論法がある．また§4.10 の(4.13)の証明でもそうである．このことに注意すれば

$$\text{measure}\{s;\ Y_0(s)\leq\varepsilon,\ s\leq t\}=\sum_{n\geq 1}\text{measure}\{s;\ Y_0(s)\leq\varepsilon,\ s\in e^{(n)}_0(w)\cap[0,t)\}$$

であるので，上の和の各項は $\mathcal{E}_0(w)$ を知ると独立になる．そこで大数の法則により，上の才2項は

$$\sum_{e^{(n)}_0(w)\subset[0,t)} E_0\{\text{measure}[s;\ Y_0(s)\leq\varepsilon,\ s\in e^{(n)}_0(w)]\,/\,\mathcal{E}_0(w)\} \tag{4.15}$$

となるというのが Lévy の主張である．ところが上の和の各項は

$$|e^{(n)}_0(w)|\left(1-e^{-\frac{2\varepsilon}{|e^{(n)}_0(w)|}}\right) \tag{4.16}$$

なることを彼は示している．後は $\underline{\underline{t}}_+(t)$ の逆函数の Poisson 測度 $p(dt\times d\ell)$ を用いると(4.15)が(4.16)により

$$\int_0^{+\infty}\ell(1-e^{-2\varepsilon^2/\ell})\,p([0,\underline{\underline{t}}_+(t))\times d\ell)$$

になるのでそれから結論が導かれるという道筋である．

そこで $\mathcal{E}_0(w)$ と各 excursion についての P. Lévy の結果について K. Ito-H.P. McKean［ 1 ］にのべてある形をのべればつぎのようになる．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$\tilde{\underline{e}}_n(t)=\frac{X(t|e_0^{(n)}(w)|+\inf e_0^{(n)}(w))}{\sqrt{|e_0^{(n)}(w)|}}, \quad 0\le t\le 1$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}-1, & X(t)>0,\\ +1, & X(t)\le 0,\end{cases} \quad t\in e_0^{(n)}(w),$$

とおけば，先ず $\varepsilon_0(w)$，$\tilde{\underline{e}}_n(\cdot)$，$n=1,2,\cdots$，$\varepsilon_n$，$n=1,2,\cdots$ はお互に独立で，$\tilde{\underline{e}}_n(\cdot)$，$n=1,2,\cdots$ はいずれも同一の型の Markov 過程で次の法則に従う．

$$P_0(\tilde{\underline{e}}_n(t)\in dx)=\frac{2e^{-x^2/2t(1-t)}}{\sqrt{2\pi t^3(1-t)^3}}x^2dx, \quad 0<t<1,$$

$$P_0(\tilde{\underline{e}}_n(t)\in dy/\tilde{\underline{e}}_n(s)=x)$$

$$=\frac{e^{-(y-x)^2/2(t-s)}-e^{-(y+x)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\left(\frac{1-s}{1+t}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{ye^{-y^2/2(1-t)}}{xe^{-x^2/2(1-s)}}, \quad 0<s<t<1.$$

勿論 ε_n $n=1,2,\cdots$ もお互に独立で $P_0(\varepsilon_n=1)=P_0(\varepsilon_n=1)=1/2$ である．（P. Lévy の結果については［４３］，第６章，§49，pp. 233－237 をみよ）．

また彼は多くの逆正弦法則を与えていることは前にのべたが，例えば［４３］，第６章，§44，§45，pp. 215－221 には零点に関してその型の定理がのべてある．例えば特定の $t(>0)$ を含む $e_0^{(n)}(w)$，$n=1,2,\cdots$ を $e_0^{(n_0)}(w)$ とすれば，$T_1(w)=\inf e_0^{(n_0)}(w)$，$T_2(w)=\sup e_0^{(n_0)}(w)$ とおくとき，

$$P_0(T_1(w)\le t_1<t_2\le T_2(w))=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$$

で，

$$P_0(T_1(w)\in dt_1,\ T_2(w)\in dt_2,\ M(t)\in dx)$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{2\pi^3(t-t_1)^3(t_2-t)^3}}e^{-\frac{x^2(t_2-t_1)}{2(t-t_1)(t_2-t)}}dt_1dt_2dx,$$

$$0<t_1<t<t_2.$$

（［４３］第６章，§44 定理 44.4，44.5 参照）．

<u>4. 12.</u> 強大数の法則，Hölder 連続性（［27］第７章，［43］第６章，［68］第１章参照）．

§4.4 でわれわれは Kolmogorov の判定法についてのべたが，これから

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$(4.17) \qquad P\left\{\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\ \frac{B(t,\omega)}{\sqrt{2t\log|\log t|}}=1\right\}=1,$$

なる A. Khintchine の結果が得られる．この式と，§4.3 の (4.1) 式を用いると

$$P\left\{\overline{\lim_{t\uparrow+\infty}}\ \frac{B(t,\omega)}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\right\}=1,$$

を得る．勿論この対応は (4.17) のみならず Kolmogorov の判定法についても言える．すなわち，$f\in C([1,+\infty))$，$t^{-1}f\in\downarrow$，$t^{1/2}f\in\uparrow$ ならば

$$\int^{+\infty} t^{-3/2} f e^{-f^2/2t}\,dt=+\infty \quad \text{または} \quad <+\infty$$

に応じ，

$$P\{B(t)<f(t),\ t\uparrow+\infty\}=0 \quad \text{または} \quad 1$$

である．

これは $t=0$ と $t=+\infty$ の近傍の状態についてのものであるが，これと類似の式は任意の t に対する Brown 運動の局所連続性としても考えられる．[26]，第2章で P. Lévy は

$$P\left\{\overline{\lim_{\substack{t_2-t_1=\varepsilon\downarrow 0\\ 0\le t_1<t_2\le 1}}}\ \frac{|B(t_2)-B(t_1)|}{\sqrt{2\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}}}=1\right\}=1$$

が成立つことを示した．このときの P. Lévy の証明はこの種の結果に対する多くの人の証明の典型となった．またこの型についても K. L. Chung - P. Erdös - T. Sirao [1] はつぎの判定法を与えている．$f\in C([0,1])$ なる正の値をとる函数で $f\in\uparrow$，$t^{-1/2}f\in\downarrow$ とする．そのとき

$$\int_{0+} t^{-\frac{7}{2}} f^3 e^{-f^2/2t}\,dt<+\infty \quad \text{または} \quad =+\infty$$

に応じ

$$P_0\left\{\max_{\substack{|t_2-t_1|=\varepsilon\\ 0\le t_1<t_2\le 1}}|B(t_2)-B(t_1)|<f(\varepsilon),\ \varepsilon\downarrow 0\right\}=0 \quad \text{または} \quad 1$$

である．このことについての [68]，第1章でのべていることの一部は訂正の必要がある．

4.13. Wiener の汎函数の分布（[57]，[58] 参照）．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

[α]で汎函数の積分を求める問題を考えているが，[57]，[58]等では特殊な汎函数の分布を正確に求める問題を論じている．例えば

$$I=\int_0^1 B^2(t)\,dt$$

の分布の特性函数は

$$E(e^{i\theta I})=\frac{1}{\sqrt{\cos\sqrt{2i\theta}}}$$

で与えられる．さらに一般に

$$U(t)=\int_0^t \Phi(B(s))\,ds$$

の分布を決める問題も論じているが，これは Kac の方法として今日良く吸収の問題に対し用いられているものに関連している．

これまでわれわれは一次元 Brown 運動についての P. Lévy の結果について論じて来たが，これから後は主として多次元の値をとる Brown 運動について論ずる．特に2次元の場合について，これは[34]で大部分やられたことで[43]第7章に整理されている．

4.14. ベッセル過程（[34]，[43]第7章，[68]第3章参照）．

いま，$\mathbb{D}=\{X(t);\ t\geqq 0,\ P_x,\ x\in R^n\}$ を n 次元 Brown 運動とすれば $\mathbb{D}^+=\{r(t)=|X(t)|,\ t\geqq 0;\ P_x,\ x\in R^n\}$ は生成作用素が

$$\mathfrak{G}^+=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\right)$$

で，

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{G}^+)=C([0,+\infty))\cap\{u;\ \mathfrak{G}^+u\in C([0,+\infty)),\ \lim_{r\downarrow 0} r^{n-1}u'(r)=0\}$$

の1次元拡散過程になる．このような拡散過程をパラメーター n のベッセル過程という．この遷移確率の密度 $p(t,x,y)$ は

$$p(t,x,y)=t^{-1}e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}}(xy)^{1-\frac{n}{2}}I_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{xy}{t}\right)y^{n-1},\quad t>0,\ x,y>0,$$

こゝで $I_{\frac{n}{2}-1}$ は通常の変形ベッセル函数である．

P. Lévy は $n=2$ のときにこのことをのべて，その性質をあげている．上のことから

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

(4.18) $$P_0\{r(t)>\rho\sqrt{t}\}=e^{-\frac{\rho^2}{2}}, \quad \rho>0,$$

となる．いま $t_n=t_0q^n$, $q>1$ に対し，$\rho_n=r(t_n)/\sqrt{t_n}$ とおけば $n-n'$ が大きいときは ρ_n と $\rho_{n'}$ は殆んど独立に近いので，大数の法則を応用して，$u\rho_k$, $k=1,2,\cdots,n$, の中 ρ より大きい個数は $n\to+\infty$ のとき (4.18) に近づく．また§4.12 に関連して

$$P_0\left\{\lim_{t\uparrow+\infty}\frac{r(t)}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\right\}=1$$

が成立つ．また [68] ではこれに関する上級，下級函数の問題，局所 Hölder 連続性の問題が論じてある．これらについては更に K.L. Chung-P. Erdös-T. Sirao [1] を参照．§4.21 で再び [73], [75] でのべられているそれらに関連する事実にふれる．

4.15. 回転成分について．([34], [43] 才7章，[68] 才3章参照)．

いま $t_n=t_0q^n$, $q>1$ に対して§4.14 の $n=2$ のときの Brown 運動の位置 $X(t_n)$ を考える．$A_n=X(t_n)$ として角 $A_{n-1}OA_n$ を α_n とする．そのときは

$$E_0(\alpha_n)=0, \quad E_0(\alpha_n^2)=\sigma<\pi,$$

である．$\theta_n=\xi_n\sqrt{n}\,\sigma$, $\theta_n=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ とおけば $\{\alpha_k, k=1,2,\cdots,n\}$ が漸近的な独立性を持った系列であることから P. Lévy [26] の従属確率変数列に関する中心極限定理の拡張を用いれば，ξ_n は正規分布に近づく分布に従うことが解る．また重複対数の法則に注意すれば $\sigma(1+\varepsilon)\sqrt{2n\log\log n}$ と $-\sigma(1+\varepsilon)\sqrt{2n\log\log n}$ の間を漸近的に振動することも解る．

また与えられた点の近傍の path の状態についてのべている．今 0 から出発した path を考える．そうすると $\frac{X(t)}{\sqrt{t}}$ は射影不変性により t と $\frac{1}{t}$ の変換に関してその確率法則が不変であるので，t が $+\infty$ の近くの状態の研究は t が 0 の近くの研究に移せる．このことから，$t\downarrow 0$ のときに path は一方の方向に回転して 0 に近づくのでなく，両側に振動しながら，両側とも有界でなく振動して 0 に近づく．

これらのことは K. Ito-H. P. McKean [1] にのべてある 2 次元

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

Brown 運動の 1 つの version の構成を用いると明らかになる．1 つのベッセル過程 $\{r(t),\ t \geqq 0,\ P_r^{(1)},\ r \in [0, +\infty)\}$ とそれと独立な円周上の Brown 運動 $\{\tilde{\theta}(t);\ t \geqq 0,\ P_\theta^{(2)},\ \theta \in [-\pi, \pi]\}$ を別に用意する．そうして

$$\underset{=}{s}(t) = \int_0^t \frac{1}{(r(s))^2}\, ds$$

とおき $\theta(t) = \tilde{\theta}(\underset{=}{s}(t))$ とおけば $\{(r(t), \theta(t));\ t \geqq 0,\ P_r^{(1)} \times P_\theta^{(2)},\ (r, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi]\}$ は 1 つの 2 次元 Brown 運動になる．ところが $P_0^{(1)}\{\underset{=}{s}(t) = +\infty,\ t > 0\} = 1$ であるので，原点から出発した path の角成分 $\{\tilde{\theta}(\underset{=}{s}(s)),\ 0 \leq s \leq t\}$ の行動は $\{\tilde{\theta}(s'),\ 0 \leq s' \leq +\infty\}$ の行動になる．

以上のことは 0 のまわりでなく，他の点すなわち t_0 のときの $X(t_0)$ への近づき方についても全く同じである．さらに固定された時間のみでなく，$X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ の 1 つの成分 $X_1(t)$ が最大または最小の時間というような特殊なものを除けば random な時間でも同じような事情が現われることもある．

4.16. Curve (path) の幾何学的性質（[34],[43] 第7章，[68] 第2章）．

Brown 運動の path が非常に特異な曲線であることは一部については §4.15 でふれたが，こゝではさらにそれについて続ける．

path は curve として Peano 曲線になっているが，つぎのようなことが言える．2 次元以上のときは Brown 運動の軌道がその次元の空間の中の外測度 0 の集合を作っていることの確率は 1 である．殆んどすべての path について，重複点に対応する時点は到る所 dense な非可附番集合であるが測度 0 である．[68] 第2章にのべてある通り，A. Dvoretsky - P. Erdös - S. Kakutani [1] によれば $n=3$ までは重複点に対応する時点は無限に沢山存在するが，$n \geqq 4$ では確率 1 で重複点を持たない．P. Lévy のこの種の研究は彼等を始めとする人達によってその後も発展させられている．

また §4.5 にのべたのと類似のことが 2 次元のときも成立つ．$(0, t)$ の中の dense な点列を $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$ とする．その点列の中から大きさの順にならんだ点列 $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \cdots, t_{n-1}^{(n)}$ をとり出す．そうして $A_0^{(n)} = B(0)$, $A_n^{(n)} = B(t)$, $A_k^{(n)} = B(t_k^{(n)})$, $k = 1, \cdots, n-1$ とすれば

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \rho(A_{k-1}^{(n)}, A_k^{(n)})^2, \qquad \rho(x, y) \text{ は } x, y \text{ の距離},$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

とすれば $n \to +\infty$ のとき確率1で $2t$ に近づく．

4.17. path の滞在（[43]第7章，[68]第3章参照）．

いま，2次元 Brown 運動 $D = \{X(t,w),\ t \geqq 0,\ P_x;\ x \in R^2\}$ を考え，Ω を有界領域として $T(w) = \min\{t;\ X(t,w) \in \Omega\}$ とする．$E_x\{T(w)\}$ は x に無関係な有限な定数でおさえられる．この証明は今日，E.B. Dynkin 等で用いられている強 Markov 性を用いた幾何級数でおさえるやり方と同じ思想で行われている．彼はまた吸収壁の問題と考え，§4.4の方法が適用されることを示している．Δ に対して $\partial\Omega$ で0とする境界条件のときの固有値を $\{\lambda_n\}$ とする．それを用いると

$$(4.19) \qquad P_x\{T(w) > t\} = \sum_1^n c_n(x)\, e^{-\lambda_n t}$$

の形に書け正確な分布を求めることが出来る（§4.19参照）．

また2次元 Brown 運動ではどのような小さな円 S をとって来ても殆んどすべての path が無限回それを訪問することを上のことと $\int_0^{+\infty} p(t,x,S)\,dt = +\infty$ を使って証明している．こゝで $p(t,x,S) = P_x\{X(t) \in S\} = \frac{1}{2\pi t}\iint_S e^{-\frac{\rho(x,y)^2}{2t}}\,dy$．なおこの証明の基本的な方法も今日再帰性の証明に用いられているものと非常に似ている．なお

$$p(t,x,S) \sim \frac{\mathrm{meas}(S)}{2\pi t}, \qquad t \to +\infty,$$

の評価式も与えられている．良く知られているように3次元では事情は違い

$$P_x\left(\lim_{t \uparrow +\infty} |X(t)| = \infty\right) = 1$$

なることも $\int_0^{+\infty} p(t,x,S)\,dt < \infty$ なることを用いて示している．

4.18. stochastic な面積（[43]第7章，[50]，[52]，[68]第2章参照）．

2次元 Brown 運動 $\{B(t,\omega) = (B_1(t,\omega),\ B_2(t,\omega));\ t \geqq 0\}$ を考える．P. Lévy は $(0,t)$ までの arc とその弦で作れるところの（符号をもった）stochastic な面積を

$$S(t) = \int_0^t [B_1(t)\,dB_2(t) - B_2(t)\,dB_1(t)]$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

で定義した．このような積分は伊藤の確率積分で定義出来るが，そのような積分の定義可能性を彼の方法による確率積分の説明の后にのべて，その性質の研究を行っている．[43] では色々の研究と同時に $|B(1)|=r(1)$，$S(1)$ の２変数の同時分布の密度函数 $f(\rho,\sigma)$ は

$$f''_{\rho\rho}+\frac{\rho^2}{4}f''_{\sigma\sigma}+(\rho-\frac{1}{\rho})f'_\rho+2\sigma f'_\sigma+(3+\frac{1}{\rho^2})f=0$$

をみたしていることを示している．[50], [52]を至て，[68]では§4.13 の Cameron－W. T. Martin の結果を用いて，

$$E\{e^{i\theta S(1)}\}=\frac{1}{ch(\frac{\theta}{2})}$$

となることを示し，$S(1)$ の分布函数の密度函数が $1/ch\,\pi x$ であることを示している．また [68] にはこの結果の N. Wiener の Brown 運動の path の Fourier 展開を用いる証明も示している．

4.19. intrinsic な性質（[41], [43]オ7章，[68]オ2章）．

P. Lévy は [41] で２次元 Brown 運動が時間の測り方をのぞいて conformal な写像について不変なこと，すなわち，

定理4.4　$\{X(t,w);\ t\geqq 0,\ \mathcal{B},\ P_x,\ x\in R^2\}$ なる D 上の２次元 Brown 運動があるとき，D から D' への conformal な写像を φ とする．そのとき

$$\mathfrak{S}(t)=\int_0^t|\varphi(X(s,w))|^2\,ds$$

とおけば $\{\varphi(X(\mathfrak{S}^{-1}(t)));\ t\geqq 0,\ \mathcal{B},\ P_x,\ x\in R^2\}$ が D' 上での２次元 Brown 運動である．

彼はこのことの証明に本質的には random な時間変更の考えを用いている．([43], オ7章, §56)．このことに関連して彼は $\partial D=\Gamma$ の subarc Γ' への D の内部からの調和測度 $h(x,\Gamma')$ は Γ がなめらかならば

$$h(x,\Gamma')=\int_{\Gamma'}\frac{\partial g(x,y)}{\partial n}\,d\sigma(y),$$

なることをのべている．こゝで $g(x,y)$ は D の Γ で 0 になるような Green 函数．さらにこれが一般の次元についても成立することは言うまでもない．またこれらの問題と吸収壁を持った熱伝導の方程式との関係を示している．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

4.20. Hausdorff 測度について（[43]オ7章，[66]，[68]オ3章，参照）．

[43]のオ7章の終りに簡単な場合に遷移確率の固有展開を示しているが，[66]では後にのべる Hausdorff 測度の計算のためにその問題をより詳しくのべている．

R^n の Brown 運動 $D=\{X(t,w);\ t\geqq 0,\ \mathcal{B},\ P_x,\ x\in R^n\}$，$n\geqq 2$ を考え，Ω を R^n の連続に変化する接平面を持った領域とする．また $T(w)=\inf\{t;\ X(t,w)\in S\}$，$S=\partial\Omega$ とする．

$$U(x,t,V)=P_x\{T(w)>t,\ X(t)\in V\},$$

$$U(x,t)=P_x\{T(w)>t\}=U(x,t,\Omega),$$

とおく．いま S で 0 という境界条件の下での

$$(4.20)\qquad \Delta\varphi_p(x)+2\lambda_p\varphi_p(x)=0,\qquad p=1,2,\cdots,$$

なる Δ の固有函数を $\{\varphi_p(x)\}$，固有値を $\{\lambda_p\}$ とする．いま λ_p は大きさの順にならんでいるとする．このとき λ_1 は最小の固有値であるがそれは "simple" で $\varphi_1(x)$ は Ω で定符号（いまは >0 とする）である．勿論 $\int_\Omega \varphi_p\varphi_q\,dv=0$，$p\neq q$，と出来るが，

$$c_p=\int_\Omega \varphi_p^2(x)\,dv,\qquad c_p'=\int_\Omega \varphi_p(x)\,dv$$

とおく．このとき S で 0 となる境界条件の下での

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta\right)u(t,x)=0$$

の1つの解

$$u(x,t,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{c_p}\varphi_p(x)\varphi_p(y)e^{-\lambda_p t}$$

を用いて　$U(x,t,V)=\int_V u(x,t,y)\,dv$ となることが示される．従って

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_p'}{c_p}\varphi_p(x)e^{-\lambda_p t}$$

となる（§4.17 の (4.19) をみよ）．故に

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$P_x\{X(t)\in dy/T(w)>t\}\equiv p(x,t,y)=\frac{u(x,t,y)}{U(x,t)}$$

となる．§4.14でのべたように $\Omega=\{x;\ |x|\leq\rho\}$ なる sphere の時は事情は一層簡単になる．このときは，(4.20)式のかわりに次の式が重要になる．

$$\psi''(r)+\frac{2m+1}{r}\psi(r)+2\lambda\psi(r)=0,\quad 2m=n-1.$$

そこで

$$\psi(r)=2^n\Gamma(n+1)\xi^{-n}J_n(\xi),\qquad J_n(\xi)\ \text{はベッセル函数},$$

$\xi^2=2\lambda r^2$ とする．(4.20)の固有函数はこの解と球面調和函数をもって作れる．λ_p は $J_n(2\sqrt{\lambda}\rho)=0$ の根として求められる．さらに上の式で λ を λ_p でおきかえたものを $\varphi_p(r)$ とする．後で用いるため $k_p=\sqrt{\lambda_p}\rho$ を導入する．

Ω を上にのべた一般の場合として次のことが成立つ．

(i) 第1エルゴード定理．

$$u(x,t,y)\sim\frac{1}{c}\varphi_1(x)\varphi_1(y)e^{-\lambda_1 t},\qquad U(x,t)\sim\frac{c_1'}{c_1}\varphi_1(x)e^{-\lambda_1 t}$$

$$p(x,t,y)\longrightarrow\frac{1}{c_1'}\varphi_1(y).$$

すなわち $\mathrm{arc}\,\Gamma=\{X(s);\ 0\leq s\leq t\}$ が Ω の内部にあるという条件の下での最後の点 $X(t)$ の分布は，確率密度函数が $\frac{1}{c_1'}\varphi_1(y)$ の分布である．

(ii) 第2エルゴード定理．θ を $0<\theta<t$ となり，θ および $t-\theta$ 共に無限大に近づけるとき，$T(w)>t$ という条件の下で，$X(\theta,w)$ の条件付分布は $P_x(*)$ の x に無関係に密度函数が $\varphi_1^2(y)/c_1$ の分布に近づく．

(iii) 第3エルゴード定理．Ω に含まれる球で，Γ のいかなる点もふくまないようなものが存在する確率は $t\to+\infty$ のときに 0 に収束する．

つぎに curve の測度を測るために新たにつぎのようなものを導入する．

$\Phi(\rho)$ は $\rho>0$ で連続で単調増加で，少くとも ρ が小さいところでは定義されて居り，$\rho\to0$ のとき $\Phi(\rho)\to0$ とする．今球 Ω_ν の直径を ρ_ν とし，

$$m_\varepsilon(E)=\inf_{\substack{\cup\Omega_\nu\supset E\\ \rho_\nu\leq\varepsilon}}\sum\Phi(\rho_\nu)$$

とする．$m_\varepsilon(E)$ は ε について単調減少であるので，$\lim_{\varepsilon\downarrow0}m_\varepsilon(E)=m(E)$ が定

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

義出来る.

つぎに curve Γ があるとき, Γ を disjoint な arc γ_ν にわけ, γ_ν は球 Ω_ν に含まれ, しかも Ω_ν の直径 $\rho_\nu < \varepsilon$ となるようにする. そうして

$$\mu_\varepsilon(\Gamma) \equiv \inf \sum \Phi(\rho_\nu)$$

とおき, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_\varepsilon(\Gamma) \equiv \mu(\Gamma)$ とおく. 明らかに

$$\mu_\varepsilon(\Gamma) \geqq m_\varepsilon(\Gamma)$$

すなわち, $\mu(\Gamma) \geqq m(\Gamma)$ である.

つぎに arc dyadiques γ_ν とは時間の区間 $i_\nu = (\frac{k}{2^k}, \frac{k+1}{2^k})$ における $X(t)$ の像をいう. この $\{\gamma_\nu\}$ を上の分割と思って, $\mu(\Gamma)$ と全く同様にして, $\bar{\mu}_\varepsilon(\Gamma)$ と $\bar{\mu}(\Gamma)$ を定義する. このとき $\bar{\mu}(\Gamma) \geqq \mu(\Gamma)$ は明らか.

こゝで [66] の論文の目的は上の固有函数展開等の結果を用いて, つぎの定理を証明することにある.

<u>定理 4.5.</u> $\Phi(\rho) = \rho^2 \log\log\frac{1}{\rho}$ とおけば確率 1 で $\mu(\Gamma) = \bar{\mu}(\Gamma)$ で更に $\{X(s,\omega);\ 0 \leqq s \leqq t\} \equiv \Gamma_t$ なる arc に対して

$$\mu(\Gamma) = k_1 t$$

である.

この定理から, $\Phi(\rho) = o(\rho^2 \log\log\frac{1}{\rho})$ $(\rho \to 0)$ とおけば, それに対応する $m(\Gamma)$ は殆んどすべての ω に対して 0 になる. 特に $\Phi(\rho) = \rho^2$ とおけば A. Dvoretsky の問題になるが, それは解決されたことになる.

さらに $n > 2$ の時は適当な条件の下で $m(\Gamma) = c\mu(\Gamma)$ なる $c < 1$ が存在することが言える. $n = 2$ のときは事情が違う.

<u>4.21.</u> Brown 運動の曲線の特性と重複対数の法則([4 3] 第7章, [7 5] 参照).

n 次元の Brown 運動について, [4 3] の場合より一層詳細な曲線の性質が [7 5] で研究されている.

n 次元 Brown 運動 $B(t,\omega) = \{B_1(t,\omega), \cdots, B_n(t,\omega);\ -\infty < + \infty\}$, $n \geqq 2$ を考える. $A(t) = B(t,\omega)$ とする. $\Gamma = \{A(t);\ -\infty < t < +\infty\}$, $\Gamma_t = \{A(S);\ 0 < s < t\}$, $\Gamma_{t,t'} = \{A(s);\ t < s < t'\}$ とし, それを単に曲線と考えるのでなく, 運動として考え (例えばその速さを考える) たときに,

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

上に → をつけ，すなわち $\vec{\Gamma}_t$, $\vec{\Gamma}_{t,t'}$ 等と書く．

$M(t)$ を $M(0)=0$ なる動点とし，それは $(0,t)$ の間に1つの連続な与えられた arc C をえがくとする．その動き方まで考えたとき，それを $\vec{C}$ と書く．

$\vec{C}$ と $\vec{\Gamma}$ の距離 $= \max_{0 \leq s \leq t} \rho(A(s), M(s))$,　　ρ は R^n の距離，

C と Γ の距離 $= \inf \{\vec{C}$ と $\vec{\Gamma}_t$ の距離$\}$,　　こゝで $\inf$ は C 上のいろいろな単調で連続な運動全体についてとる．

C および $\vec{C}$ の近傍は上に導入したそれぞれの距離についてとる．
このときつぎのようなことが言える．

(i) 任意の $\varepsilon>0$ に対して C（または $\vec{C}$）の ε 近傍に確率 $p=p(\varepsilon,t)>0$ をもって Γ_t（または $\vec{\Gamma}_t$）を含む．

つぎに $k_1, k_2, \cdots, k_p>0$, $\sum k_i=1$, $K_h=k_1+\cdots+k_h$, $h=1, 2, \cdots, p$; $R_h(t)$ を $A(K_{h-1}t)$ と $A(K_h t)$ の距離とする．$L(t)=\sum_1^p R_h(t)$ とする．

そのとき

(iii)　$$P\left\{ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{L(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \right\} = 1,$$

また　$L_p(t) \equiv \max_{K_1, K_2, \cdots, K_{p-1}} L(t) =$ 折線 $OA(\theta_1)A(\theta_2)\cdots A(\theta_p)$, $0\leq\theta_1\leq\theta_2\leq\cdots\leq\theta_p\leq 1$ の長さの maximum．

とおけば

(iv)　$L_p(t)$ についても重複対数の法則が成立つ．

こゝにのべたのは［75］の結果のほんの1例であり，これらをもっと詳細にした数多くの結果がのべられている．

4．22． 球面上の Brown 運動（［43］オ5章参照）．

F. Perrin の Riemann 空間のうえの Brown 運動については，球面上の Brown 運動に関して［43］オ5章 §40 にのべてある．そこでは遷移確率

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

の Legendre 多項式による固有展開等が与えられている.

4.23. Brown についての全体的注意.

これまで Lévy の結果を列記して来たが, これまでのべたものの中に Lévy の原形からみると変形されていたり, 再証明されたりしたものが数多くある. 例えば, 一次元 Brown 運動の零点, local time, excursion 等については K. Ito - H. P. McKean [1] によって全面的に再編成されている. それらの理由の1つは, 前にものべたように, Lévy の原形の中には, その正当性を充分基礎づけられないまゝの方法で一貫して用いられているものがある. §4.7 ~ 11 等では, 強 Markov 性の一種である "first passage time relation" が非常にしばしば用いられている. ところが, このような性質をより一般の過程について正しく把握することが, 今日の Markov 過程の研究の発展の基礎になり, 解析学一般との関係を明らかにするのに有力な手段となっている. その他にも, 彼は, Brown 運動の構成から時間の符号を逆にしても Brown 運動であることに変りないことを示し, それを有効に用いている. 例えば, [43], 才6章定理 42.4, 定理 42.5の証明や, [43] §49 等で用いられている. 今

$$P_0\{M(t)>\xi / X(t)=M(t)\} = e^{-\frac{\xi^2}{2t}}$$

より, $P_0\{X(t)>\xi / X(s)>0;\ 0\leq s\leq t\} = e^{-\frac{\xi^2}{2t}},\ \xi>0,$

を導くのは, 丁度時間を逆にして考えているわけである. この結果は零点と excursion によって Brown 運動を構成する Lévy のやり方の中で重要な役割を果たしている. このような時間逆行の問題は, Brown 運動については G. Hunt [1] でも扱われて居るし, 彼等は他の場合にも定常過程としてみる場合を参考にして考えようとしているが, 今日の所まだ一般の Markov 過程については充分に活用されているとは言えないように思う.

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

§5 Markov chain

5.1.

§1で述べたように，P. Lévy は従属性のある確率過程のうちで，現在の状態を知れば，未来における確率法則が過去と独立に定まるようなクラスとして Markov 過程をとらえている。1948年の彼の主著[43]においても Markov 過程は典型的なクラスの一つとして取扱われているのであるが，そこではそれ自体に個有な性質の研究を展開しているのではなく，そのうちの特に重要な process である拡散過程乃至 Brown 運動の深い研究が大部分をしめている。

その系統的研究は1951年の論文[ ]で，状態空間が可附番個の場合にはじめてまとまった結果が発表された。そのようなものについての研究としては1936年の A. N. Kolmogorov [ ]がよく知られている。

更に1942年及び45年には J. L. Doob の重要な研究[1]，[3]が出ているが，それらをまとめて，Lévy は1951年の論文において，より新しい研究段階への発展を示すような原理的な仕事をした。

この論文は，研究方法，態度という観点からは前述の48年[43]の才六章一次元 Brown 運動の深い研究の項において示されたやり方を推進したもので，state を一点，一点に局限してみて，そこに path が如何に出入するかとか，又 path の不連続点の集合や，state への滞在時間の構造等に着目したものである。

勿論，P. Lévy の Markov chain に関する研究は，この論文だけでなく，それ以前及びそれ以後においてもいくつかの重要な結果が発表されているが，いずれもこの51年の研究を頂点として，前後につながるものである。

従って Markov chain に対する彼の見解，研究方法等を知るためにはこの論文を中心として，これに関連のある他の諸結果を参照しながら調べてゆくことが大切なように思われる。

51年の論文の内容を概観すれば，才一章から才三章までになっており，才一章は時間のパラメータが離散的な場合である。そこでは states の分類が与えられており，W. Feller [2]や，J. L. Doob [4]の分類とはやや異なった観点でなされている。すなわち，各 state での滞在時間について注目し時間パラメータが連続な場合にもこれと類似のやり方が出来るようにしてある。例え

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

ば，groupとか，その group が final, semi-final, passage というような概念が導入されている．

更にある stateを訪問している時間や再帰時間に関しての極限定理等の研究もあり，Kallianpur-Robbins 型の Ergod定理として知られている ratio theorem というようなものがある．これらの研究は，K.L.Chung の一連の論文等により発展させられている．

尚，ratio theoremについては我が国でもいくつかの研究があり，中でも G. Maruyama and H. Tanaka [1] は相当一般な Markov 過程についてその型の定理が成立つことを証明している．

オ二章，オ三章は時間のパラメータが連続な場合である．この部分は，この論文でも特に重要と思われるので，到底全体にわたって紹介することは出来ないが，主としてこの2章に関連するいくつかの問題を中心に述べたいと思う．

しかし，P. Lévy 特有の直観的 image にもとづく記述や彼の個性に富んだやり方のために，理解が甚だしく困難で，そのため基本的と思われる定理やその他の idea についての紹介が出来ない部分も多い．

又ノートを進めるにあたっても，つねに適当な条件や仮定を正確にしえないところのあることをおことわりしたい．

尚、最近出版された K.L.Chung の本[4]には P. Lévy の結果が部分的に整理されている．

5.2.

連続パラメータの場合には，いろいろな場合を通じて，pathsの連続性が関係してくるが，P. Lévy は与えられた遷移確率から，どの程度の連続性をもった pathsを構成出来るかという段階の問題については，その事情を明らかにしない場合が多く，必要上考慮しなければならない連続性は自明の事実の如くに取扱っている．しかしこの問題の定式化にあたっては，そのことを意識的に用いなければならないので，知られた結果を始めに用意し，2，3の補足的注意から始める．

状態空間Xは可附番集合で，その点を，$x, y, \cdots\cdots$ 等で表わすが，場合によっては便宜上整数 $0, 1 \cdots\cdots$ 等を用いる．

Xには離散的位相を入れ，その一点コンパクト化空間を $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ とする．

定義 5.1　X上の遷移確率 $\{P(t, x, y)\}$ とは次の条件を充すものを云う．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

(5.1) $P(0,x,y)=\delta(x,y)$

(5.2) $P(t,x,y)\geqq 0$

(5.3) $\sum_{y\in X} P(t,x,y)=1$

(5.4) $P(s+t,x,y)=\sum_{z\in X} P(s\,x\,z)\,P(t\,z\,y)$

$P(t,x,y)$ がすべての $t(>0)$ について可測なとき，単に可測な遷移確率と云う．これについて

定理A (J. L. Doob) 「可測な遷移確率 $P(t,x,y)$ は $t(>0)$ について連続である」(c.f. Doob [1])

又しばしば附帯的に

(5.5) $\lim_{t\to 0} P(t,x,y)=\delta(x,y)$.

なる連続性の條件を入れる．

$\{P(t,x,y)\}$ に対応する pathを $X(\cdot\,\omega)$ とする．

$X(t,\cdot)$ は一般には抽象的な確率空间で定義され $\bar{X}$ の値をとる確率変数であるが，特にその連続性がわかっている場合には，ω は函数 $W=\{w(t);0\leqq t<+\infty\}$ で $X(t\,\omega)$ は w の t 座標 $w(t)$ のように扱って $W_t^+(\cdot)=W(t+\cdot)$ や $W_t^-(\cdot)=W(t\wedge\cdot)$ などの普通の書き方をすることがある．

次に paths の連続性に関する結果をまとめておこう．

定理B 「$\{P(t,x,y)\}$ は可測で任意の $x\in X$ と $t>0$ に対して $P(t,x\,x)\neq 0$ とする．$X(\cdot\,\omega)$ が well-separable[1] 且つ (t,ω) 一可測であるための必要十分条件は (5.5)が成り立つことである．」(cf. K. L. Chung [4] Theorem 4.3)

定理C 「(5.1)〜(5.5) が成り立つならば，$\forall\omega$ に対して次の性質がある．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

点とする。

(c) $X(s,\omega)\to\infty$

更に

(α) $X(t,\omega)=x$ で x が stable ならば $s\downarrow t$ 又は $s\uparrow t$ のいずれかに対して(α)が成り立つ。

(β) $X(t,\omega)=x$ で x が instantaneous ならば，$s\downarrow t$ 又は $s\uparrow t$ のいずれかに対して(β)が成り立つ。

特に $t(\geqq 0)$ を固定したとき，

(d) x が stable ならば $P(\lim\limits_{s\to t} X(s,\omega)=X(t,\omega)/X(t,\omega)=x)=1$

(e) x が instanteous ならば

$P($ $s\downarrow t$（又は $s\uparrow t$）のとき $X(s\,\omega)$ の集積点は x と ∞ である．
$/X(t,\omega)=x)=1$

(f) $P(X(t,\omega)\neq\infty)=1$

(cf. Chung [4] Theorem 6.2, 7.4)

この§を通じて状態空間の位相や，それに関連した paths の連続性をいつも明確にしておくことは出来ないが，多くの場合は(B)(C)を利用することが出来る．例えば(C)によって強く Markov 性のあることが証明されている．(e.g. Chung [ ]).

5.3 States の分類

$\lim\limits_{t\to 0} P(t,x,y)=\delta(x,y)$ を仮定する．
(B)より $X(t,\omega)$ は (t,ω) 可測であるから

$$\tau\equiv\tau^{(x)}(\omega)\equiv\inf\{t>0;\ X(t,\omega)\neq x\}$$

は確率変数であり，$\Phi_x(t)=P_x(\tau(\omega)>t)$[1] は Markov 性によって，$\Phi_x(t+s)=\Phi_x(t)\Phi_x(s)$ となるから

(5.6) $\Phi_x(t)=e^{-q_x t}\qquad 0\leqq q_x\leqq+\infty$

---

1) 初期分布 μ を明確にするときは P_μ と書き，特に $\mu(\cdot)=\delta(x,\cdot)$ のとき単に P_x とする．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

である．τは state x での滞在時間であり，その平均は

$$(5.7) \qquad E_x(\tau) \fallingdotseq r_x = 1/q_x$$

で與えられる．

$q_x = 0$ のとき x を final state (ètat final)

$q_x = +\infty$ のとき x を instantaneous state (ètat instantané)

$q_x < +\infty$ のとき x を stable state (ètat stable)

と云う．

又(5.1)も可測性も仮定しない任意の遷移確率$\{P(t, x, y)\}$において，すべての $t>0$ と $y \in X$ に対して $P(t, y, x) = 0$ となる x を fictitious と云う．

fictitious state は始めから除外してしまって考えることも出来る．しかし逆に或る process があるとき，その process 固有の仕方で fictitious state を新たにつけ加え，つけ加えられた fictitious state は境界と考えられる場合が多く，P. Lévy はこのような states の重要性を各所で主張している．

上の定義から fictitious ならば instantaneous であり，stable ならば $P(t, x x) \geqq e^{-q_x t} > 0$ より fictitious にはならない．

5.4 Processes の分類

始めに，state がすべて stable な場合を考える．

$$C = \{(t, \omega);\ \lim_{s \to t} X(s, \omega) = X(t, \omega)\}$$

は(B)によって$(t\ \omega)$可測である．(C)の(d)によって $C_t = \{\omega; (t, \omega) \in C\}$ とおけば $P(C_t) = 1$ となり，Fubini の定理より，$\mathcal{E}'(\omega) \equiv \{t; (t, \omega) \in C\}$ は $\tilde{\forall} \omega$ に対して $(0, +\infty)$ と零集合を除いて一致することがわかる．ここで $\mathcal{E}(\omega) \equiv (0, +\infty) - \mathcal{E}'(\omega)$ とおけば，これは path の不連点の全体であり，且つ(C)から閉集合である．即ち「state がすべて stable ならば，殆んどすべての ω に対して path $X(\cdot\ \omega)$ の不連続点 $\mathcal{E}(\omega)$ は零測度をもつ閉集合である」．P. Lévy は $\mathcal{E}(\omega)$ のこの性質にもとづいて，path function $X(\cdot\ \omega)$ を次の4つの型に分類した．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

第1型（有限型, *type fini*）の *path*

「$\mathcal{E}(\omega)$は高々一つの集積点 $+\infty$ をもつ.」

$X(S\omega)$は有限時間内には有限回しか飛躍せず, *final state* がなければ, 飛躍点は $+\infty$ に集積する. そうしてすべての t について $X(t+0,\omega)$, $X(t-0,\omega)$が存在する。

第2型（超限型 *type transfini*）の *path*

「$\mathcal{E}(\omega)$は全順序集合であり, 少くとも1つは, 有限な集積点をもつ.」 全順序と云うことから, $\mathcal{E}(\omega)$は右から集積することはなく, $X(t+0,\omega)$が存在する. しかし $X(t-0,\omega)$ は必ずしも存在しない.

第3型の *path*

「$\mathcal{E}(\omega)$は可附番であるが全順序ではない.」 この場合には $X(t-0,\omega)$ 及び $X(t+0,\omega)$は一般には存在しない.

第4型の *path*

「$\mathcal{E}(\omega)$は非可附番な零集合である.」

次に *instantaneous state* がある場合を考えて, 滞在時間

$$e_x(\omega) = \{t;\ X(t,\omega) = x\}$$

に注目して, 更に次の二つの型を導入する

第5型の *path*

「$e_x(\omega)$ はすべての $x \in X$ に対して可測であり, 且つある *instantaneous state* x が存在して, 正測度をもつ.」

第6型の *path*

「$e_x(\omega)$の中に非可測なものが存在する.」

以上のような *path function* の分類をとおして, *process* そのものを次のように分類する.

定義5.2. $1 \leqslant n \leqslant 6$とする. 遷移確率が可測であり, 対応する *path function* が第n型である確率が正でありかつ第n型以上でない確率が1であるとき, この *process* は第n型であるという. $P(t,x,y)$ が可測でないとき, 第7型であるという.

各型に属する *process* を構成的に特徴づけようとするのがこの論文[56]

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

における P. Lévy の主要なテーマをなしている．各型は，夫々典型的なクラスをなしていて，第1，2型については，J. L. Doob「3」，W. Feller［1］等の研究があり，第7型は定理(A)と関連してすでにDoobの例がある．

5.5. 遷移確率の微分可能性

q_x を state x での滞在時間 τ の分布のパラメータとしてとらえたが，J. L. Doob［3］等の結果

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(t,x,y)}{t} = P'(0+,x,y) = q_{xy} < +\infty \quad (x \neq y),$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-P(t,x,x)}{t} = -P'(0+,x,x) = q_x$$

が II. 7 の Kalmogorov 方程式への準備として用意されている．

$$\pi(x,y) = P_x(X(\tau(\omega)+0,\omega) = y)$$

とおけば

$$q_{xy} = \pi(x,y)\, q_x\,, \quad q_x < +\infty \quad (x \neq y)$$

で

$$\pi(x,y) \geqq 0, \quad \pi(x,x) = 0, \quad \sum_y \pi(x,y) \equiv \pi(x) \leqq 1.$$

以下この q_x，$\pi(x,y)$ $(x, y \in X)$ を q と π と云う．

Kolmogorov 方程式については J. L. Doob［3］の研究結果を§5.4で分類した型のものと関連させて述べている．

(5.8) $P'(t,x,y) = -q_x P(t,x,y) + \sum_z q_{xz} P(t,z\,y)$ (backward equation)

(5.9) $P'(t,x,y) = -P(t,x,y)\, q_y + \sum_z P(t,x\,z)\, q_{zy}$ (forward equation)

(i) $\sup_{x\in X} q_x = q < +\infty$ (cf. 第1型) $\pi(x) = 1$ のとき

$$P^{(n)}(t,x,y) = P_x(\mathcal{E}(\omega) \cap (0,t) = n, \ X(t\omega) = y)$$

$$S^{(n)}(t,x) = \sum_y P^{(n)}(t,x,y)$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

とおけば

$$(5.10)\quad P^{min}(t,x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(t,x,y)$$

は才1型の遷移確率(cf. §5.6)で(5.8)(5.9)を充す.

これらについて次の性質がのべられている;

(a) $P^{(n)}(t,x,y)\equiv 0$, 又は $P^{(n)}(t,x,y)>0$ $(t>0)$

$$P^{(n)}(t,x,y)=O(t^n)\quad t\to 0.$$

(b) $S^{(n+1)}(t,x)=o\left[S^{(n)}(t,x)\right]$ $t\to 0$ で

$$1-e^{-q_x t}=\sum_{n=1}^{\infty}S^{(n)}(t,x)$$

が左辺の $t=0$ における漸近展開を与えている. これは才2型のときには transfinit な和をとって拡張出来るが $X(t+0,\omega)$ が存在しない(例えば才3型)ようなときは成立しない.

5.6. 才1型

$\tau_1,\tau_2,\cdots$ を才1, 才2, $\cdots$ の飛躍時間とする. 即ち

$\tau_1(\omega)\equiv\tau(\omega)\equiv\{t>0;\ X(t,\omega)\neq x\}$,

$\tau_2(\omega)\equiv\tau_1(\omega)+\inf\{t>0; X(t+\tau_1(\omega),\omega)\neq X(\tau_1(\omega)+0,\omega)\}$,

- - - - - - - - - -

$\tau_\infty(\omega)\equiv\lim_{n\to\infty}\tau_n(\omega)$.

才1型であるための必要十分条件は

(a) $P_x(\tau_\infty(\omega)\equiv+\infty)=1$

である.

P. Lévy は q と π から process を構成することを考え, 才1型をこれらの量で特徴づけることを問題としている.

$\sum_{y\in X}\pi(x,y)=\pi(x)<1$ ならば $X(\tau_1(\omega)+0,\omega)$ は必ずしも X の内部には存在しない. これが $=1$ となる場合は $X(t-0,\omega)$ の存在する場合には, $X(t+0,\omega)$ も存在し, 才1, 才2型であるためにはこのことが必要である. 即ち才1型に関しては

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

(b) $\pi(x) \equiv 1$ $(x \in X)$ が必要である。

次に

(c) $\sup_{x \in X} q_x \equiv q < +\infty$ ならば才1型である。

ことを注意している。実際この場合には，強 Markov 性から

$$E_x(e^{-\alpha\tau_\infty}) = \lim_{n\to\infty} E_x(e^{-\alpha\tau_n}) = \lim_{n\to\infty} E_x(e^{-\alpha\tau_{n-1}} E_{X(\tau_{n-1}+0)}(e^{-\alpha\tau_1}))$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} E_x\{e^{-\alpha\tau_{n-1}}(1+\alpha q^{-1}_{X(\tau_{n-1}+0)})^{-1}\} \leq \lim_{n\to\infty} E_x(e^{-\alpha\tau_{n-1}})(1+\alpha q^{-1})^{-1}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} (1+\alpha q^{-1})^{-n} = 0$$

となり，(a)の場合になる。

この論文では，q と π に関する必要十分條件はのべられていないが，これから Feller [3] が minimal process と呼んでいるもの，即ち q と π で τ_∞ までの間の path を定められることを定理 II.5 に述べている。

<u>定理 5.1</u> 1) 才1型の process は q と $\pi(x) \equiv 1$ なる π で定まる。2) 才2型の process は上記の q と π で τ_∞ までの path の行動が定まる。

minimal process を構成する方法は Feller [3] にあるとおり，

$$(5.11) \quad \begin{cases} \Pi = (\pi(x,y)); & \Pi^n = (\pi^{(n)}(x,y)) \\ \Pi_\alpha = (\pi_\alpha(x,y)) & \Pi_\alpha^n = (\pi_\alpha^{(n)}(x,y)) \end{cases}$$

但し $\pi_\alpha(x,y) = q_x(\alpha+q_x)^{-1}\pi(x,y)$

として

$$G_\alpha^{min}(x,y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \pi_\alpha^{(n)}(x,y)\ (\alpha+q_x)^{-1}$$

とおけば，これがある遷移確率（一般には substochastic）$P^{min}(t,x,y)$ の Laplace 変換を与えている。X に extra point θ をつけ加えて

$$(5.12) \quad \begin{cases} P^{min}(t,x,\theta) \equiv 1 - \sum_{y\in X} P^{min}(t,x,y) \\ P^{min}(t,\theta\,\theta) \equiv 1, \quad P^{min}(t,\theta,x) \equiv 0 \end{cases}$$

とすれば θ を final state とする $X \cup \{\theta\}$ 上の process が定まり，これが minimal process である。才4型までの process があれば，その

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

path を $X(t,\omega)$ とし，

$$X^{min}(t,\omega) \equiv X(t,\omega) \qquad t < \tau_\infty(\omega)$$
$$= \theta \qquad t \geqq \tau_\infty(\omega)$$

と定義した path $X^{min}(t,\omega)$ は

$$P^{min}(t,x,y) \equiv P_x((0,t) \cap \mathcal{E}(\omega) \text{ が有限集合かつ } X(t,\omega)=y) \quad x, y \in X$$

及び (5.12) で定まる $X \cup \{\theta\}$ 上の遷移確率に対応する minimal process の path であるから P. Lévy の問題は minimal process が才1型になるための条件即ち $P_x^{min}(\tau_\infty = \infty) = 1$ をみたす条件を求めることに他ならない．この問題に対しては W. Feller [3] 及び T. Watanabe [2] によっていろいろの必要十分な条件が与えられているが，ここではその一つとして次のものをあげておく．

(d) q, Π により定まる minimal process が才1型になるための条件は $u(0 \leqq u \leqq 1)$ が $\Pi_\alpha u = u$ をみたすならば，恒等的に0であることである．

実際，もし $P_x^{min}(\tau_\infty = \infty) \equiv 1$ ならば $E_x^{min}(e^{-\alpha\tau_\infty}) \equiv 0$ だから，$E_x^{min}(e^{-\alpha\tau_1}; x(\tau_1+0,\omega)=y) = \Pi_\alpha(x,y)$ に注意すれば

$$u(x) = \Pi_\alpha u = \Pi_\alpha^n u = E_x^{min}(e^{-\alpha\tau_n} u(x_{\tau_n}))$$

$$\leqq \|u\| \, E_x^{min}(e^{-\alpha\tau}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

逆に $u(x) = E_x^{min}(e^{-\alpha\tau_\infty})$ は $\Pi_\alpha u = u$, $0 \leqq u \leqq 1$ をみたすから，条件より $E_x^{min}(e^{-\alpha\tau_\infty}) \equiv 0$ したがって $P_x^{min}(\tau_\infty = \infty) = 1$ である．

5.7 才2型

まず例から始めよう．$\rho_1, \rho_2, \cdots$ を指数分布 $P(\rho_j > t) = e^{-q_j t}$ に従う独立立確率変数列とする．

$$X = \{1, 2, \cdots\}$$
$$0 < q_j < +\infty, \qquad \Pi(j, j+1) = 1$$
$$\tau_0^{(i)}(\omega) \equiv 0, \quad \tau_n^{(i)}(\omega) \equiv \sum_{j=i}^{n+i-1} \rho_j(\omega), \quad \tau_\infty^{(i)}(\omega) \equiv \lim_{n\to\infty} \tau_n^{(i)}(\omega)$$

とおく．

$$X^{(i)}(t,\omega) \equiv j+i \qquad \tau_j^{(i)}(\omega) \leqq t < \tau_{j+1}^{(i)}(\omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$= \theta \qquad t \geq \tau_\infty^{(i)}(\omega)$$

と定義すれば，これは上の q と Π に対応する i から出発している *minimal process* である．

$$E_i(e^{-\alpha\tau_\infty}) = \prod_{\nu=i}^{\infty}(1+\alpha q_\nu^{-1})^{-1}$$

又は (d) からすぐわかるようにこれが才1型であるための必要十分な条件は $\sum_{i\geq 1} q_i^{-1} = +\infty$ であって，$<+\infty$ のときは $P_i(\tau_\infty < +\infty) = 1$ となる．このときには，$\theta = 0$ として

$$X(t,\omega) \equiv X^{min}(t,\omega) \qquad t < \tau_\infty(\omega)$$
$$\equiv 0 \qquad\qquad t \geq \tau_\infty(\omega)$$

上の場合以外は，$\equiv 0$ 　　すべての t, ω

とすれば，$X(t,\omega)$ は0を *final state* とする $\{0, 1, 2 \cdots\}$ 上の *process* で，その不連続点は

$$\mathcal{E}(\omega) = \{\tau_1(\omega);\ \tau_2(\omega),\ \cdots\}$$

であって，唯1つの有限な集積点 $\tau_\infty(\omega)$ をもつ．$X(\tau_\infty(\omega)+0, \omega) = 0$ であるが，$X(\tau_\infty(\omega)-0, \omega)$ は $\{0, 1, 2, \cdots\}$ の中にはない．P. Lévy の例（[56] p. 354；II. 10 例1．p. 365）では *ficticious state* ∞ をつけ加えて，$X(\tau_\infty(\omega)-0, \omega) = \infty$ とし，そこから $\hat{\pi}(\infty, 0) = 1$，$\hat{\pi}(\infty, j) = 0$ $(j \neq 0)$ 対る分布で0にかえしたものとして考えた方がよいことを注意している．例えば $\hat{\pi}(\infty, 1)$ 　とすれば，この *process* の *state* に0はあらわれず，その不連続点は，$\omega+1$ 番目，$\cdots 2\omega$ 番目，$\cdots$ のものを $\tau_{\omega+1}(\omega), \cdots \tau_{2\omega}(\omega), \cdots$ とすると $P_j(\tau_{\omega 2}(\omega) = +\infty) = 1$ となり丁度可附番ケの集積点 $\tau_\infty(\omega)$，$\tau_{2\omega}(\omega), \cdots \tau_{\omega 2}(\omega)$ をもつ．したがってこの *process* は q, Π 及び新たに導入した $\hat{\pi}(\infty, 1)$ により定まるわけである．もっと一般な才2型の *process* についても，適当な *fictitious state* b（必ずしも一点ではなく，一般には非可算個の点の場合もあり得る）をつけ加え，b より内部の点 X への *jump* の仕方を規定する分布 $\hat{\pi}(b, \cdot)$ を定めれば，*process* は q, Π 及び $\hat{\pi}$ で定まることを指摘している．

このような才2型の *process* は，一般の Markov 過程の境界理論より見れば *instantaneous return process* として特徴づけられる．我々は Lévy の方法を厳密にする事が出来ないので Martin 境界の理論を用いて，

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

その構造を簡単にのべる．（くわしくは H. Kunita [2] を参照）．

第2型の chain $X(t,\omega)$ から導びかれる minimal process $X(t,\omega)$ の Martin 境界を ∂X とする．$u(x)=P_x(X(\tau_\infty+0,\omega)=y,\ \tau_\infty<\infty)$ は $\Pi u=u$ をみたすから，

$$(5.13)\quad u(x)=\int_{(\partial X)}\tilde{\pi}(b,y)h(x,db)=\int_{(\partial X)}\tilde{\pi}(b,y)P_x^{min}(X(\tau_\infty-0)\in db)$$

と表現される（e.g 渡辺［1］）．ここで $X(\tau_\omega-0,\omega)$ は Martin 空間の位相での path の左からの極限であり，境界上の値をとる確率変数である．更に有限時間で到達出来る境界点の全体（Feller の意味の exit 境界）を $(\partial X)_e$ とすれば，(5.13) の積分範囲は $(\partial X)_e$ でよく，しかも $\sum_{y\in X}\tilde{\pi}(b,y)=1$ となることが示される．だから (5.13) は，path が境界点 $b\in(\partial X)_e$ に有限時間内に到達し，その後，過去の運動とは独立に分布 $\tilde{\pi}(b,\cdot)$ に従って直ちに内部の点に帰ることを示している．$\tilde{\pi}(b,\cdot)$ が Lévy の $\hat{\pi}(b,\cdot)$ に相当するものである．一般に Markov 過程は generator $\mathfrak{g}u=(\alpha-G_\alpha^{-1})u$，$u\in\mathcal{D}(\mathfrak{g})=\{$ 有界可測函数の Green 作用素 G_α による写像の値域 $\}$ により定まることがよく知られているが，今の場合は $u\in\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ に対して $\mathfrak{g}u=q(\Pi-I)u$ となる．$\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ を第2型の process 一般について，Martin 境界の立場から定めることは，まだ出来ていないけれども $P_x(\tau_{\omega^2}=\infty)=1$ をみたすときは，

$$\mathcal{D}(\mathfrak{g})=\{u;\ q(\Pi-I)u \text{ が有界かつ } \tilde{u}(b)=\sum_{y\in X}\tilde{\pi}(b,y)u(y)\}$$

となる．ただし $\tilde{u}$ は u により一意的に定まる境界上の函数であり，$u(x)$ を path に沿って境界に近づけたときの極限値である．

以上のことから $P_x(\tau_{\omega^2}=\infty)=1$ である第2型の chain は q,Π 及び $\tilde{\pi}$ によって定まることがわかったわけであるが，$P_x(\tau_{\omega^2}=\infty)<1$ の場合について，chain を定める量を求めるためには高次の境界を導入しなければならない．$\pi^\infty(x,y)=P_x(X(\tau_\infty+0)=y,\ \tau_\infty<\infty)$ を one step の遷移確率とする時間系数が離散的な Markov chain を考え，その Martin 境界を $(\partial X)_2$ とする．$u(x)=P_x(X(\tau_{\omega^2}-0)=y,\ \tau_{\omega^2}<\infty)$ は二次境界を用いて (5.13) と類似の表現が得られ，そのときの $\tilde{\pi}$ を $\tilde{\pi}_2(b,y)$ とあらわすことにする．そうすれば $P_x(\tau_{\omega^3}=\infty)=1$[1)] の場合には

$$\mathcal{D}(\mathfrak{g})=\{u;\ q(\Pi-I)u \text{ が有界で } \tilde{u}=\sum_{y\in X}\tilde{\pi}(b,y)u(y),\ \tilde{u}_2=\sum_{y\in X}\tilde{\pi}_2(b,y)u(y)\}$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

である．ここで $\tilde{u}_2$ は二次境界 $(\partial X)_2$ 上に，u から一意的に定まる函数である．したがって $P_x(\tau_{\omega^3}=\infty)=1$ をみたすときには，その chain は $q,\ \pi,\ \tilde{\pi},\ \tilde{\pi}_2$ により定まる．同様にして $P_x(\tau_{\omega^3}=\infty)<1$ のときは更に高次の境界を導入しなければならない．

こゝで P. Lévy のあげている例を列挙しておく．（II. 10. p 365）

(i) $\pi(j,j+1)=1-\alpha_j \quad \pi(j,0)=\alpha_j,\ \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j<+\infty,\ \sum_{j\geq 0}^{\infty}1/q_j<+\infty$

これはすでにのべたもの $(\alpha_j\equiv 0)$ を少し一般にしたものであり，有限時間 τ_∞ で $X=\{0,1,2,\cdots\}$ の外に出る．$\alpha_j\equiv 0$ として $\hat{\pi}(\omega,j)$ を前のものより一般にすれば，例えば

$$E_j(\tau_{2\omega}-\tau_\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}1/q_k\sum_{j=0}^{k}\hat{\pi}(\infty,j).$$

(ii) $\pi(j,j-1)=1-\alpha_{j-1},\ \sum\alpha_j<+\infty,\ \sum 1/q_j<+\infty$

このとき $X(0,\omega)=j$ ならば確率 α_j で殺され，$X(\tau_1(\omega)+0,\omega)$ は X の中にはない．オ1型のときにも Killing を許せば，そこで述べたように minimal process と理解しなければならない．

(iii) $X=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\} \quad \pi(j,j+1)=1,\ \sum 1/q_j<+\infty$

path は有限時間 τ_∞ で $+\infty$ に到着する．その瞬間に $-\infty$ に飛躍させれば，$X(\tau_\infty+0,\omega)$ も $X(\tau_\infty-0,\omega)$ も X の中にはなく，オ3型と考えられる．又 $+\infty$ から有限のところへ飛躍させればオ2型となる．

この例については W. Feller [3] に Kolmogorov 方程式と関連させて研究されている．

5.8 オ4型

P. Lévy はオ4型を2つあげているが，その1つは（II. 10. 5°）1点 $+\infty$ が fictitious state であって

$$\pi(j,j-1)=1-\alpha_j>0,\ \pi(j,+\infty)=\alpha_j,\ \pi(0,+\infty)=1 \quad (j=1,2,\cdots)$$

---

1) $\tau_{n\omega^2}(\omega)=\tau_{(n-1)\omega^2}(\omega)+\tau_{\omega^2}(\omega^+_{\tau_{\omega^2}}),\cdots,\ \tau_{\omega^3}=\lim_{n\to\infty}\tau_{n\omega^2}$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j=+\infty,\quad \delta=\sum_{j=0}^{+\infty}1/q_j\,\varphi(j)<\infty,\quad \varphi(j)=\Big[\prod_{\nu=1}^{j}(1-\alpha_\nu)\Big]^{-1}$$

となるようなものであり，この process では $e_{+\infty}(\omega)$ は零測度をもつ完全集合（従って非可附番）となっている．

これと類似の process は次のような出生死滅過程である．

$X=\{0,1,2,3,\cdots\}$ を状態空間とし

$$\Pi(x,x-1)=\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\mu_x+\nu_x},\ \Pi(x,x+1)=\frac{\mu_x}{\lambda_x+\mu_x+\nu_x},\quad \Pi(x,\infty)=\frac{\nu_x}{\lambda_x+\mu_x+\nu_x}$$

$0<\lambda_x,\ \mu_x<\infty,\quad \lambda_0=0.$

$$s(x)-s(x-1)\equiv A_x\equiv\frac{\mu_1\cdots\lambda_{x-1}}{\lambda_1\cdots\lambda_{x-1}},\quad m(x)-m(x-1)\equiv B_x\equiv\frac{\lambda_1\cdots\lambda_{x-1}}{\mu_1\cdots\mu_{x-1}}\ \frac{1}{\mu_x}$$

$$\Delta_s u(x)\equiv\frac{u(x+1)-u(x)}{s(x+1)-s(x)},\quad \Delta_m\Delta_s u(x)\equiv\frac{\Delta_s u(x)-\Delta_s u(x-1)}{m(x)-m(x-1)}$$

とし，生成作用素 $\mathcal{G}=\Delta_m\Delta_s-\nu$ なる出生死滅過程を考える．簡単のために $x=0$ 以外は killing はないものとし（$\nu_x=0,\ x\neq 0$）かつ非再帰であるとする．更に X の 1 点コンパクト化によって $\bar{X}=\{0,1,2,\cdots,+\infty\}$ をつくったとき $+\infty$ が反射壁となるような場合を考える．即ち $+\infty$ が W. Feller の意味で正則境界になる条件を $s(x)$ と $m(x)$ がみたしているとき $\mathcal{D}(\mathcal{G})\ni u$ が $\lim_{x\to\infty}\Delta_s u(x)=0$ になるような場合であり，このような process の遷移確率は Karlin-Mcgregor の方法で実際に作ることが出来て，$+\infty$ は fictitious になるように出来る．$\mathcal{G}u=\alpha u$ の基本解の性質を用いれば反射壁のある Brown 運動の場合（cf §4）と同じ方法で $P_{+\infty}(\lim_{\tau\downarrow 0}t+\sigma_{+\infty}(\omega_t^+)=0)=1$ となり，$e_{+\infty}(\omega)$ は完全集合となる．いま $+\infty$ は状態空間の中に入っていないと考えられるのでそう思ったときこの process は第4型である．

この場合非再帰ということから $g(x,y)=\int_0^\infty P(t,x,y)\,dt<\infty$ $(x,y\in X)$ で $e(x)\equiv\lim_{y\to\infty}g(x,y)$ は連続な excessive function である．これに対応する正の値をとる additive functional (c.f vol 6) を $\xi(t,\omega)$ とすると，$X(\xi^{-1}(t,\omega),\omega)$ は $x=+\infty$ を instantaneous state とするいわゆる $+\infty$ に滞留のあるものが得られ，第5型の process になっている．

5.9. 第 5 型

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

P. Lévy [56] の才三章は才5型から才7型のものについて述べられている.

才5型に関して，すべての state が instantaneous であるような場合はないと云うのが，彼の予想であった。

この章で研究されているものも，そのようなことを念頭において，1つ instantaneous なものがあったとして，その state 1点における path の行動や滞在時間の構造をくわしくしらべあげるというやり方である．才4型はこの型の process から適当な時間変更によってつくれること，及びその逆の事実が述べられているが，その部分は理解に困難である．

後になって，W. Feller-McKean，H. P. [1]，Dabrusin [1] 及び Blackwell [1] 等によって，才5型に関する P. Lévy の予想に反する例がつくられた．彼自身も Feller-McKean の反例について，それを一次元 Brown 運動から直接につくることを試みている．(cf [96])

才5型の例から始めよう．

1°) $X=\{0,1,2,\cdots\}$ 上の process で 0 だけが instantaneous であるもの．(cf. K. L. Chung [4] Example 3)

$$(5.14)\quad \begin{cases} q_{0x}=1, & q_{x0}=q_x \quad x\geqq 1 \\ 0<q_x<+\infty, & \sum_{x=1}^{\infty} 1/q_x<+\infty \end{cases}$$

に対して次の連立積分方程式

$$(5.15)\quad P(t,0,0)+\int_0^t P(s,0,0)h(t-s)ds=1,\quad h(t)=\sum_{x=1}^{\infty} e^{-q_x t}$$

$$(5.16)\quad P(t,x,y)=\int_0^t P(s,x,0)q_{0y}e^{-q_y(t-s)}ds+\delta(x,y)e^{-q_y t}\qquad x\geqq 0,\quad y\geqq 1$$

$$(5.17)\quad P(t,x,0)=q_x P(t,0,x)\qquad x\geqq 1$$

条件 (5.14) から，これが (5.1)〜(5.5) を充す解 $\{P(t,x,y)\}$ をもち，0だけが instantaneous である．容易にわかるように $meas(e_0(\omega))>0$ であって，才5型である．

尚，Chung の本 [4] では，この例について，くわしいことが書いてある．

2°) すべての state が instantaneous なもの (cf. W. Feller-McKean H. P [1])．

$S=[0,1]$ 上の拡散過程を $\tilde{X}(t,\omega)$ とする．(境界条件は適当につける)

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

これの局所生成作用素を $\mathfrak{G}=\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ とし，speed measure m は (0, 1) の有理点上にのみ分布し，0, 1 及び無理点上には 0 測度を与えているものとする．

$X=\{x;\ 0<x<1,\ x=\text{有理数}\},\ m(\{x\})=m_x>0\quad x\in X$

とする．

このようなものの遷移確率 $\tilde{P}(t,x,B)$ は

(5.18) $\quad \tilde{P}(t,\xi,B)=\int_B \tilde{P}(t,\xi,\eta)\,m(d\eta)$

となる (t,ξ,η) について連続な密度をもつ[1]．

又 $\tilde{P}(t,x,B)$ は局所性

(5.19) $\quad \tilde{P}(t,\xi\ U_\varepsilon^c(\xi))=o(t)\qquad U_\varepsilon(\xi)=\{\eta;\ |\xi-\eta|<\varepsilon\}$

がある．

(5.20) $\quad P(t,x,y)\rightleftharpoons\tilde{P}(t,x,y)\,m_y\qquad x,\ y\in X$

とおけば，これは (5.18) より (5.1)～(5.4) を充している．

(5.19) で $\varepsilon<|x-y|\ (x\neq y)$ ととってみれば

$$P(t,x,y)\leq\tilde{P}(t,x,\ U_\varepsilon^c(x))=o(t)$$

すなわち $\lim_{t\to 0}P(t,x,y)=0\quad (x\neq y)$ である．

次に (5.4)

$$P(t+\varepsilon,x,x)=\sum_z P(t,x\,z)\,P(\varepsilon,z,x)$$

の両方の Laplace 変換をとって，

$$e^{\alpha\varepsilon}G_\alpha(x,x)+o(1)=G_\alpha(x,x)P(\varepsilon,x,x)+\sum_{z\neq x}G_\alpha(x,z)P(\varepsilon,z,x)\qquad (\varepsilon\to 0)$$

今得た性質より，$\varepsilon\to 0$ として $P(\varepsilon,x,x)\to 1$ が得られ (5.5) もみたされている．

この process の state がすべて instantaneous であることを云うに

---

1) 一次元拡散過程については，例えば，K. Ito-McKean H.P.［1］，伊藤，福島，渡辺［1］を参照．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

は，$\mathcal{D}(\mathcal{G}) \ni v$ で $v(x)=1$，$-\mathcal{G}v(x)$ が，任意に大きく出来るようなものをとり，

$$\frac{1}{t}[1-P(t,x,x)] \geqq \frac{1}{t}[1-T_t v(x)] = -\mathcal{G}v(x)+o(1)$$

なることを用いればよい．

$\{P(t,x,y)\}$に対応する *path* の1つの *version* は ∞ を *extra point* として

$$\begin{aligned} X(t,\omega) &\equiv \tilde{X}(t,\omega) & \tilde{X}(t,\omega) &\in X \\ &= \infty & \tilde{X}(t,\omega) &\notin X \end{aligned}$$

としてえられる．

$X(t,\omega)$ の状態空間をSと思えば，$S-X$ の点はすべて *fictitious* であるが，Xを通常の一様位相で考えたとき，そのコンパクト化に従って生じたものとも考えられる．

上のように $\tilde{X}(t,\omega)$ の *trace* として $X(t,\omega)$ を考えているときにはS自身を状態空間と思う方が自然である．

このような理解の仕方は，しばしば大切であり，P. Lévy はつねに *path* の不連続点で$X(t\pm,\omega)$ が X に存在しないときには適当の仕方で *fictitious state* をつけ加えるべきことを述べている．

3°) P. Lévy の構成

[96]で，Feller-McKean の例が，Brown運動から時間の変換によって構成されている．その方法は[43]でくわしく研究された Brown 運動の Local time を用いるやり方である．K. Ito-McKeanによって研究された一次元拡散過程の場合の記号で書けば，$B(t,\omega)$ を一次元 Brown 運動とし，$\underline{\underline{t}}(t,x,\omega)$ をその *local time* とするとき，2°)のような測度 dm によって

$$\underline{\underline{S}}(t,\omega) = \int \underline{\underline{t}}(t,x,\omega)\,dm(x)$$

$$X(t,\omega) \equiv B(\underline{\underline{S}}^{-1}(t,\omega)\,\omega)$$

とすればよい．

$X(t,\omega)$ がある条件を充している場合に m-測度を定める問題がこの[96]

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

の最後に述べてある．1958 年の［91］では Blackwell［1］の例が補足的注意をつけ加えて説明されている．

4°) 再び［56］の第5型の項にもどる．$x_0 \in X$ を $e_{x_0}(\omega)$ が正測度をもつような instantaneous state とし

$$(5.21) \qquad \underline{\underline{\tau}}(t,\omega) \doteqdot meas\,(e_{x_0}(\omega) \cap (0,t))$$

とおく．密度定理によって

$$(5.22) \qquad P\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\left[\underline{\underline{\tau}}(t+\varepsilon,\omega)-\underline{\underline{\tau}}(t-\varepsilon,\omega)\right]=1 \middle/ X(t,\omega)=x_0\right)=1$$

となることを注意し，$t=0$ のときには $\underline{\underline{\tau}}(t,\omega)=t+o(t,\omega)$ となることから，平均をとって，

$$E_{x_0}(\underline{\underline{\tau}}(t,\omega))=\int_0^t P(s,x_0,x_0)\,ds$$

としてみれば

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t P(s,x_0,x_0)\,ds=1$$

がわかる．これから，$P(s,x_0,x_0)$ が $s=0$ で連続であれば $\lim_{s\to 0}P(s,x_0,x_0)=1$ となることをみちびく．

この部分は第5型の定義を(5.5)を前提として理解したのでは意味がなくなるが，滞在時間から遷移確率の性質を出すやり方としては注目すべきである．

第4型のときには，この論文［56］の定理II.8.1で

<u>定理 5.2</u> 第4型までの process の遷移確率 $P(t,x,y)$ [7] は

$P(t,x,y)\equiv 0\ (t>0)$ であるか又は $t>0$ で決して0にならない

を証明し，［96］の7の定理で

<u>定理 5.3</u> (5.1)〜(5.4)を充す可測な遷移函数は $P(t,x,y)\equiv 0\ (t>0)$ であるか，又は $P(t,x,y)>0\ (t>0)$ である．

をいずれも確率論的に path の滞在時間と通過時間を用いて証明している．始めの場合には，$\sigma_x(\omega)=\inf\{t\,;\,X(t,\omega)=x\}$ と $\sigma_x^{(1)}(\omega)=\tau(\omega)+\sigma_x(\omega_a^+)$ の分布を

$$F(t)\doteqdot P_x(\sigma_y\leqq t/\sigma_y<+\infty),\qquad G(t)\equiv P_y(\sigma_y^{(1)}\leqq t/\sigma_y^{(1)}<+\infty)$$

$$\alpha=P_x(\sigma_y<+\infty),\qquad \beta=P_y(\sigma_y^{(1)}<+\infty)$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

とおいて

$$P(t,x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\beta^{n-1}\int_0^t e^{-q_y(t-u)}d[F(u)*[G(u)]^{*n-1}] \quad x\neq y$$

$$P(t,x,x)=e^{-q_x t}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n\int_0^t e^{-q_x(t-u)}d[G(u)]^{*n}$$

と書きあらわしている．

5°) x_0 が *instantaneous* のとき

$\bar{e}_0(\omega)$ は *nowhere dense* な完全集合で，$e_0(\omega)$ と零集合を除いて一致する．$\underline{\tau}(t,\omega)$ は $e_0(\omega)$ の上で増加することが証明されている．$T(t,\omega)\equiv\underline{\tau}^{-1}(t,\omega)-t$ は *Lévy* 過程となって，これによる時間変更により，$X(\underline{\tau}^{-1}(t,\omega)+(c-1)t)$ $c\geqq 0$ は又才5型となる．

$c=0$ のときだけが才4型になることが述べられているが，この部分は充分には理解出来ない．

5.10. 才 6 型

この型の *process* は才5型までの *process* と特殊な才6型のものから構成出来，逆にそのようにして構成されたものに限るという著しい結果が証明されている．

直観的な云い方をすれば才6型の *process* は次のようなものしかない．すなわち，その遷移確率をとおして見るとき互に区別出来ない *state* がある．これらを夫々グループにして状態空間を分割する．各グループの上には，それに属する *state* を見出す確率法則が与えられている．特定の *state* から出発したら，グループの間を才5型までの *process* の法則に従って運動し，他のグループに到達する．そうしたら，到着時刻とは無関係に，直ちにそのグループの上の法則に従ってその時刻における最終的な到着点が見出される．

以下このような *process* を具体的に構成してみよう．

1°) 遷移確率が[1]

(5.23) $\quad P(t,x,y)\equiv P(y)>0 \qquad \sum_{y\in X}P(y)=1$

ならば，対応する $\{X(t,\omega);\ 0\leqq t<+\infty\}$ は各点独立な才6型の特殊なも

---

1) (5.5) が成り立っている．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

のである.

2°) $X(t,\omega)$ を X^* 上を動く高々オ5型までの process の paths とし，遷移確率を $\Pi(t,x^*,y^*)$ とする.

$X^* \ni x^*$ には，有限又は可附番無限ケの点集合 $N(x^*)$ が対応しており，$N(x^*)$ 上には，その上を動く 1°) の場合の各点独立なオ6型の特殊な process $\xi_{x^*}(t,\omega)$ を attach し，その遷移確率を $P(x^*,\zeta)$ $(\zeta\in N(x^*))$ としておく. 更に

$$\{X(t,\omega);\ 0\le t<+\infty\},\quad \{\xi_{x^*}(t,\omega);\ 0\le t<+\infty\}\quad x^*\in X^*$$

は process として独立なものとして用意する.

次に，これらの process から $\{(x^*,\xi);\ x^*\in X^*,\ \zeta\in N(x^*)\}$ 上を動く process $z(t,\omega)$ を

$$z(t,\omega)\equiv(X(t,\omega),\ \xi_{X(t,\omega)}(t,\omega)) \tag{5.24}$$

によって定義する.

用意したすべての process が互に独立なことと，各 $\xi_{x^*}(t,\omega)$ が各点独立なことより，

$$P(z(t,\omega)=(z^*,\zeta)/z(0,\omega)=(x^*,\zeta_0))\quad \zeta\in N(z^*),\ \zeta_0\in N(x^*)$$

$$=P(X(t,\omega)=z^*;\ X(0,\omega)=x^*;\ \xi_{x^*}(0,\omega)=\zeta_0,\ \xi_{z^*}(t,\omega)=\zeta_0)$$

$$\times[P(X(0,\omega)=x^*,\ \xi_{x^*}(0,\omega)=\zeta_0)]^{-1}$$

$$=P(X(t,\omega)=z^*/X(0,\omega)=x^*)\cdot P(\xi_{z^*}(t,\omega)=\zeta)$$

となり，$z(t,\omega)$ は遷移確率が

$$P(t,(x^*\zeta_0),(z^*,\zeta))=\Pi(t,x^*,z^*)P(z^*,\zeta) \tag{5.25}$$

$$\zeta_0\in N(x^*),\quad \zeta\in N(z^*)$$

なる Markov process である.

$$e_{(x^*,\zeta_0)}(\omega)\equiv\{t;\ z(t,\omega)=(x^*,\zeta_0)\}$$

$$=\{t;\ X(t,\omega)=x^*\}\cap\{t;\ \xi_{x^*}(t,\omega)=\zeta_0\}$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$\equiv e_{x^*}(\omega) \cap e_{\zeta_0}^{(x^*)}(\omega)$$

において，$e_{\zeta_0}^{(x^*)}(\omega)$ は非可測であるから，$e_{(x^*,\zeta_0)}(\omega)$ の中には非可測なものが存在し，$z(t,\omega)$ は (5.23) に対応する才6型の *path* である．

$e_{x^*}(\omega)=\bigcup_{\zeta_0\in N(x^*)} e_{\zeta_0}^{(x^*)}(\omega)$ $(N(x^*)>1$ とする) は，x^* が *stable* ならば非可測集合 $e_{\zeta_0}^{(x^*)}(\omega)$ の和が開集合をあらわし，x が *instantaneous* ならば，それが *nowhere dense* な集合となっていることを P. Lévy は注意している．

3°) 逆に任意の才6型の *process* は，(5.24) 又は (5.25) のような形に分解出来ることを主張するのが P. Lévy の定理 III. 3 [56] である．即ち

<u>定理 5.4</u> 才6型の *process* は 2°) で構成したような型のものに限る．

P. Lévy の証明は，次の Lemma

<u>Lemma</u> (P. Lévy). State x が *instantaneous* で $e_x(\omega)$ が稠密ならば $P(t,x,y)=P(y)$ である．

を利用し，$\bar{e}_{x_0}(\omega)$ (非可測集合 $e_{x_0}(\omega)$ の閉包) 上の滞在時間 $\tau(t,\omega)=$ *meas* $(\bar{e}_{x_0}(\omega)\cap(0,t))$ に関する時間変更によるという確率論的なやり方をしている．しかし，その方法の各段階を完全にチェックすることが出来ない．しかし，遷移確率を (5.25) の形に分解することはすでに J. L. Doob [1] によって成されている．ここでは D. Ray [1] の結果を使って，分解の方法をのべることにする．(c.f. 国田 [1])．

$P(t,x,y)$ を可測な才6型の遷移確率とし，*fictitious state* を含まないとする．その Laplace 変換を $G_\alpha(x,y)$ とし，α を固定して X に同値関係

$$x\sim y \iff G_\alpha(x,z)=G_\alpha(y,z) \quad \text{すべての } z\in X$$

を入れ，X を同値類 $x^*, y^*, \cdots$ に分割する．ここで x^* は x を含む同値類で，それらの全体を X^* とする．$x_1\sim x_2$ ならば $P(t,x_1,y)=P(t,x_2,y)$ (すべての $y\in X$) より $\pi(t,x^*,y)\equiv P(t,x,y)$ と定義できる．次に

$$\pi(t,x^*,y^*)\equiv \sum_{\eta\in y^*} \pi(t,x^*,\eta)$$

とおけば

(5.26) $\qquad P(t,x,y)=\pi(t,x^*,y^*)\,P(y^*,y)$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$(5.27)\qquad P(y^*, y) \geq 0, \quad \sum_{y \in y^*} P(y^*, y) = 1$$

となる. $\Pi(t, x^*, y^*)$ は, X^* 上の可測な遷移確率で, $\lim_{t \downarrow 0} \Pi(t, x^*, y^*) = \delta(x^*, y^*)$ となることは Ray の結果を用いて簡単に証明される. したがって $\Pi(t, x^*, y^*)$ に従う $Markov\ chain$ は第1より第5までの型のどれかである. 次に

$$P(t+\varepsilon, x, y) = \Pi(t, x^*, y^*) P(\varepsilon, y, y) + \sum_{z^* \neq y^*} \Pi(t, x^*, z^*) \Pi(\varepsilon, z^*, y)$$

と書きなおして $\varepsilon \to 0$ とすれば左辺は定理(A)により $P(t, x, y)$ に近づき右辺の第2項は上にのべた $\Pi^*(\varepsilon, x^*, z^*) \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} \delta(x^*, z^*)$ の性質により 0 に近づく. したがって $P(y^*, y) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P(t, y^*, y)$ が存在して (5.26) が得られる. (5.26) の両辺を $y \in y^*$ について加えれば左辺は $\Pi(t, x^*, y^*)$ だから (5.27) は明らかである. したがって x^* に $N(x^*) = \{\xi, \eta, \cdots ; \xi, \eta \in x^*\}$ を対応させ $\xi \in x^*$ に (x^*, η) を対応させて 2°) のようにして $z(t, \omega)$ を構成すれば $z(t, \omega)$ は $P(t, x, y)$ に従う第6型の $process$ の $path$ と考えてよい.

5.11 第7型

この型のものは, すでに J. L. Doob [1] に例がある. P. Lévy のものも, それと本質的なちがいはなく, いずれも函数方程式 $f(t+S) = f(t) + f(S)$ の解をもちいる.

状態空間 X は次のような実数の集合とする.

(a) X は可附番集合である.

(b) $x, y \in X$ ならば, 任意の有理数 r_1, r_2 に対して $r_1 x + r_2 y \in X$ である.

次に整列可能定理によって $Hamel$ の底 B をつくる. 即ち

(c) B は実数のある集合で, 有理数を係数とするとき一次独立である; $b_1, \cdots, b_m \in B$, $r_1 \cdots r_m$ が有理数ならば

$$\sum_{i=1}^{m} r_i b_i = 0 \iff r_1 = \cdots = r_m = 0$$

(d) $t (\neq 0)$ ならば, $b_1, \cdots, b_m \in X$ と $r_1, \cdots r_m$ 有理数が存在して

$t = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i$ とかける. (c.f. 辻正次; 集合論)

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$b\in B$ に対して $f(b)$ を X の中の値に定め，$f: B\to X$ が上への写像であるようにしておく．任意の $t(\neq 0)$ に対しては (d) の形にかけるから，$f(t) \equiv \sum_{i=1}^{m} r_i f(b_i)$ $(\in X)$ と定義すれば，$f(t+S)=f(t)+f(S)$ である．

ここで

$$(5.28)\quad P(t,x,y)\equiv \delta(x+f(t),\,y),\quad x,y\in X,\quad t>0$$

とおくと (5.1) ～ (5.3) が成り立つ．

$$\sum_{z} P(S,x,z)P(t,z,y)=\sum_{z}\delta(x+f(S),\,z)\,\delta(z+f(t),\,y)$$

において，これが $\neq 0 \Leftrightarrow \exists z_0;\ x+f(S)=z_0,\ z_0+f(t)=y$ であるが $f(t+S)=f(t)+f(S)$ より，これは $f(t+S)+x=y$ のときに限る．従って (5.4) も充されている．

$P(t,x,y)$ は 0 と 1 にしかならないから，連続でなく，J. L. Doob の定理 (A) より非可測である．

J. L. Doob の例は $X=$ 有理数の全体の場合である．

この遷移確率に対応する path は例えば次のようなものである．

$\xi(\omega)$ を X の値をとる確率変数とし，

$$X(0,\omega)\equiv\xi(\omega),\qquad X(t,\omega)\equiv\xi(\omega)+f(t),\quad t>0$$

とおけば，二つの事象

$$\{\omega;\ \xi(\omega)=x\}\quad と\quad \{\omega;\ \xi(\omega)=y-f(t)\}$$

は互に排反するか一致するかのいずれかしかなく，

$$P(X(t,\omega)=y/X(0,\omega)=x)=P(\xi(\omega)=y-f(t),\ \xi(\omega)=x\ /P(\xi(\omega)=x)$$
$$=P(t,x,y)$$

となって，$X(t,\omega)$ は (5.28) に対応する path であることがわかる．

この運動は，出発点だけを random に定めて，それ以後は deterministic に行なわれる．P. Lévy はこのような第7型の process を Doob 型と云っている．又遷移函数が 0 又は 1 以外の値をとらないとき，純粋な第7型 (Septième type pur) と呼んでいる．Doob 型は純粋な第7型であるが，

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

逆についてはわかっていない．

第6型がそれ以下の型と，その特殊なものから構成出来るように，第7型についても，例えば，純粋な第7型とそれ以下のものから，もっと一般のものを構成出来ないかと云う問題が，この項の終りに述べられている．

5.12 Semi-Markov 過程

［69］では［56］と同じ研究方針で semi-Markov 過程に関することが述べられている．

semi-Markov ということを明確に定義していないので，今までの部分より更に大雑把になるが，どういうものかと云うことだけでもあとづけて見ることにする．

第1〜4型の Markov chain の場合には，一点の滞在時間 τ は指数分布に従い，又それが終ったときの飛躍点 $X(\tau(\omega)+0,\ \omega)$ と $\tau(\omega)$ とは独立になるという特性があった．逆にこの2つの性質によって Markov chain は特徴づけられていると云ってもよい．

しかし，しばしばこの性質の一方の失なわれるような場合もおこりうる．例えば，直線上の Random walk $X(0,\omega)\equiv 0,\ X_1(\omega),\ X_2(\omega)\cdots$ の再帰現象を考え，$\sigma^{(n)}_{(\omega)}$ で第 n 番目の再帰時間をあらわし，process $\xi(n,\omega)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を

$$\begin{aligned}\xi(n,\omega) &= 0 \qquad n<\sigma^{(1)}(\omega)\\ &= 1 \qquad \sigma^{(1)}(\omega)\leqq n<\sigma^{(2)}(\omega)\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

と定義すると，これは状態空間を $X=\{0,1,2,\cdots\}$ とし，$0,1,\cdots\cdots$ の滞在時間が $\sigma^{(1)},\ \sigma^{(2)}-\sigma^{(1)},\ \cdots\cdots$ なる process となる．$\sigma^{(1)},\ \sigma^{(2)}-\sigma^{(1)},\ \cdots\cdots$ は幾何分布には従わないから，これは Markov chain ではないが，上述のような意味では semi-Markov である．このように，飛躍点の分布を滞在時間とは独立に与え，且つ滞在時間を任意にしたような場合は，Markov chain 及び renewal process を含むような semi-Markov 過程となっている．［69］では，飛躍点を表わす確率変数を $K(\omega)$ とし，滞在時間 $\tau(\omega)$ のこれに関する条件附分布 $P(\tau(\omega)\leqq t / K(\omega)=y)$ を与えるような場合についても少し述べられている．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

このように完全にはMarkov性のないものであっても，その性質の一部を残したprocessは応用上しばしば現われるが，P. Lévyの関心はその点にあるのではなく，そのようなprocessについて[　　]と類似の分類を行い，各型の性質を研究すると云う点にある．

型の分類は$e_x(\omega)$を始めから可測と仮定して大体§5.4と同じようなやり方で才1～才5型まで分けている．

この各型に関する研究はこの§で述べたような立場で進めているが，Markov chainの場合程には明確なものではない．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

§6 確率過程の表現

6.1.

これまでとはやゝ趣を異にするが，§1の図式でいえば $E \to F \to G$ といった方向の Lévy の研究について，特に G を中心にしながらその発展の経過を眺めてみよう．この方向の研究において常にその底を流れている彼の考え方は，すでに§1でも述べたように

(6.1) $\qquad dX(t,\omega)=\Phi(X(\tau,\omega);\ \tau\leq t,\ \xi_t(\omega),\ t,\ dt)$

を通じて $X(t,\omega)$ を構成的にとらえていくということであるが，更に詳しく $\xi_t(\omega)$ を増分として持つ加法過程を選び出してその汎函数として $X(t,\omega)$ を表現し，$X(t,\omega)$ の性質を調べていこうとする方法である．§§2～4 で述べた加法過程特に1次元 Brown 運動の研究は，その意味ではこの方面の研究の礎石にもなって居り，又拡散過程は Φ が単純になる典型と考えることが出来る．そしてこの表現の問題の研究方法も Lévy がいつも辿る路筋，すなわち一般論を展開するというよりは単純なものから複雑なものへといった過程を経ている．例えば時間が離散的なものから連続なものへ，Φ も線型なものから非線型なものへと移行している．項目をまとめる関係で必ずしも年代順ではないが，我々もその線に沿い順を追って述べたい．

6.2.

先ず離散型の parameter をもつ確率過程 $X_n,\ n=1,2,\cdots,$ を考える．X_n の表現に関する問題の萌芽はすでに[26]に現れていて（特に8章§64），X_n の法則をきめるために

(6.2) $\qquad X_n(\omega)=G_n(Y_1(\omega),\ Y_2(\omega),\cdots,\ Y_n(\omega))$.

がすべての n について成り立つような独立な確率変数の列 $Y_n(\omega),\ n=1,2,\cdots$ ですべて一様分布に従うようなものを求める問題を扱っている．これは一般には複雑な従属性をもつ確率過程 X_n を最も簡単な従属性をもち性質のはっきりした独立変数の列 $\{Y_\nu;\ \nu\leq n\}$ の函数として表わし，その表現の仕方すなわち G_n の函数形を研究することにより X_n が明らかにされることを示している．こ

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

こで(6.2)の G_n は一意に定まることが望ましいが一般にはそれは不可能である．*Lévy*は例えば最後の変数について単調非減少を要求すれば一意に定まり，そのときは

$$(6.3) \qquad Y_n(\omega) = F_n(X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ \cdots,\ X_n(\omega))$$

と表わすことができると述べている([26]§64).

確率過程 X_n の法則をきめるという目的からは，*Lévy* は[63]§2.3. において

i) 任意の n に対し $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の同時分布を与える，

ii) 任意の n に対し $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が知られたとき X_{n+1} の条件つき確率を与える，

iii) (6.2)の G_n をきめる，

iv) iii)での $\{Y_n(\omega)\}$ は，一様分布に従う確率変数 $Y(\omega)$ をとって $Y_n(\omega)= \varphi_n(Y(\omega))$ と表わすことが出来ることから(6.2)は

$$(6.4) \qquad X_n(\omega) = \Phi_n(Y(\omega))$$

ともかける．故に Φ_n をきめれば X_n の法則がきまる，

の各方法があると述べている．表現の問題を扱う場合には iii)の立場で考えるが，iv)は例えば確率過程を *path* の集合に測度が定義されたと考える立場と深い関係がある．表現に関連した，すなわち iii)についての*Lévy*の結果は，§2に於ても触れたように，先ず1つの確率変数の場合から始まる．確率変数Xの分布函数を $F(x)$ とするとき

$$(6.5) \qquad Y(\omega) = F(X(\omega))$$

とすれば $Y(\omega)$ は一様分布に従う確率変数である．それは $y = F(x)$ が1対1対応の場合には明らかであるが，$F(x)$ がある区間で定数であったり，或は不連続である場合には適当な注意が必要である([26] p.30). しかし $X(\omega)$ は一様分布に従う確率変数 $Y(\omega)$ の函数となることは結論できる．それは(6.2)の特別な場合である．次に2つの確率変数 X_1, X_2 について考えると，先ず一様分布に従う $Y_1(\omega)$ が存在して $X_1(\omega)$ はその函数になる．そして $Y_1(\omega)$ と独立で一様分布に従う $Y_2(\omega)$ は $X_1(\omega) = x$ のとき $X_2(\omega)$ の条件つき確率を $G(y|x)$ とするとき，

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$(6.6) \qquad Y_2(\omega) = G(X_2(\omega)/x)$$

として求められる．この場合も G が不連続なら（6.5）に対すると同じ注意が必要であるが，何れにしても（6.2）が $n=1, 2$ について成立つことが知られる（[26] §23）．この方法を $n>2$ の場合に一般化して，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がきまったとき X_{n+1} の条件つき確率を利用して $Y_{n+1}(\omega)$ を $\{Y_\nu(\omega);\ \nu \leq n\}$ と独立でしかも一様分布に従うようにえらぶことが出来て，それらは（6.2）をみたすことが知られる．しかし（6.3）の成立を主張するには若干の注意が必要である（詳しい議論は Rosenblatt [1] 参照）．

（6.2）及び（6.3）の表現に関するこの方向の研究は，Wiener の問題と呼ばれてよく知られているものと類似のものであり，最近 N. Wiener [2]，M. Rosenblatt [1] 等によって問題提起とその研究が進められている．以下それについて簡単に触れよう．

X_n，$-\infty<n<\infty$，を強定常過程とするとき，M. Rosenblatt [ ] に従えば次のような問題が提起される．$\mathfrak{X}_n=(\cdots X_{n-1}, X_n)$，$\mathfrak{X}=(\cdots X_{n-1}, X_n, \cdots)$，$\mathbb{B}(\mathfrak{X})=\{\mathfrak{X}$ の元を可測にする最小の Borel field$\}$，$\mathbb{B}_n(X)=\mathbb{B}(\mathfrak{X}_n)$，$T=$ shift operator 等の記号を用いれば

<u>問題 1.</u> (a)．$\mathbb{B}_0(X)$ 可測で $\mathbb{B}_{-1}(x)$ と独立な一様分布に従う確率変数 $\xi_0(\omega)$ で $\mathbb{B}_0(x)=\mathbb{B}(\xi_0, \mathfrak{X}_{-1})$ となるものは存在するか？

もし (a) が解けたら $\xi_n(\omega)=T^n\xi_0(\omega)$ とすることにより独立な確率変数列 $\xi_n(\omega)$，$-\infty<n<\infty$，が得られ，何れも一様分布に従っている．このとき

<u>問題 1.</u> (b)．$\mathbb{B}_n(X)=\mathbb{B}_n(\xi)\ (\equiv\mathbb{B}(\xi_\nu, \nu\leq n))$ であるか？

これは (a) が解けたら直ちに肯定的に解かれる種類の問題ではないことに注意しよう（Rosenblatt [1] 参照）．

<u>問題 2.</u> X_n に対して，互に独立で一様分布に従う確率変数の列 ξ_n，$-\infty<n<\infty$ と Borel 可測函数 $g(\xi)=g(\xi_0, \xi_{-1}, \cdots)$ とが存在して

$$\tilde{X}_n(\omega)=g(T^n\xi(\omega)), \quad \xi=(\cdots\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots), \ -\infty<n<\infty$$

が X_n と同じ確率過程になるように出来るか？

これらの問題に対して各種の結果が得られている．我々の場合と特に関係の深い定理を述べよう．その前に必要な定義をする．

<u>定義 6.1.</u> 1次元分布函数 F, G の不連続点の全体をそれぞれ D_F，D_G であ

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

らわす．若しD_FとD_Gとの間に1対1の対応φが存在して，任意の$x \in D_F$に対し

$$F(x)-F(x-0)=G(\varphi \cdot x)-G(\varphi x-0)$$

となるならばFとGは equivalent であるという．
条件つき確率$P(X_0 \leq c/\mathcal{B}_{-1}(X))$を$F(c, \mathcal{B}_{-1})$で表わせば

定理6.1（Rosenblatt）．問題1.(a)の条件をみたす$\xi_0(\omega)$が存在するための必要十分条件は，殆んどすべてのωに対して$F(c, \mathcal{B}_{-1})$が equivalent になることである．
この結果は（6.2）及び（6.3）に関する問題の発展と考えてよかろう．この他，parameter が連続である場合にも問題1，2に相当する問題が考えられ，Wiener，J. L. Doob（[4]9章§5）M. Nisio（[1]）等により新しい結果が得られている．それらはいずれも（6.2）のG_nが非線型なときに特に注目したものである．

一方 Lévy はその後G_nが線型であるようなクラスの確率過程について深く研究し，parameter が連続な場合にまで発展した．そして遂には彼の業績の中で比較的大きな位置を占める正規過程の表現に関する研究を完成するに到るのである．尚[26]，[63]ではこゝに紹介したように確率過程の表現の理論について基本的な考え方の端緒が見られるにとどまり，この理論の発展は1955年以降である．

6．3．

（6.1）のΦ或は（6.2）のG_nが線型であるような確率過程のクラスの中で最も重要なものは正規過程である．Lévy は次節で述べる多次元 parameter をもつ Brown 運動を研究する際，それから導かれるある種の正規過程を詳細に調べていきながら正規過程の表現の重要性を認めかつその研究方法の素地を見出している（[88]参照）．Lévy に従って正規過程の表現の定義をする前に離散型の parameter をもつ正規過程について表現の意味を調べてみよう．それは唯理論が簡単になるだけでなく，§6.2で述べた事と直接の関係もつけられるからである．尚§6.2で考えた$Y_n(\omega)$或は$\xi_n(\omega)$一様分布としたがそれを標準正規分布としても本質的に変らない．何故なら両者は Borel field の関係を妨げることなく，分布の型のみが互に他に移れるからである．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

X_n, $n=1,2,\cdots$ を正規過程とする．表現を扱う範囲では $EX_n\equiv 0$ としても一般性を失うことはない．このとき互に独立な標準正規分布に従う確率変数列 $\{\xi_n\}$を $\{X_n\}$ から構成して，任意の X_n は

(6.7) $$X_n=\sum_{\nu=1}^{n}a_{n,\nu}\xi_\nu$$

と表わすことが出来る．実際 X_nは Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ の要素と考えられるので[1] ξ_n を求めるのは Schmidt の直交化の方法でよい（正規型だから $L^2(\Omega)$ での直交は独立におきかえられる）．この方法によれば $a_{n,n}\neq 0$ となる場合には ξ_n は一意に確定し§6.2の問題1．(b) の条件を満足している．そして (6.2) の G_n は (6.7) の一次函数であり，(6.3) の F_n も亦一次函数として存在している．若し Schmidt の方法で ξ_n を求めるとき $a_{n,n}=0$ となることがあれば，そのときは ξ_n を欠番にすれば今のことはすべて成り立つ．更にこのとき正規過程であるために生ずる特徴的な事実は，$\mathfrak{M}_n(X)$ を X_ν, $\nu\leq n$ の張る $L^2(\Omega)$ の部分空間とするとき，(6.7)から

(6.8) $$E(X_n/\mathcal{B}_m(X))=X_n \text{ の } \mathfrak{M}_m(X) \text{ への射影}=\sum_{\nu=1}^{m}a_{n,\nu}\xi_\nu,\quad m\leq n$$

が成り立つことである．これから X_n は $\mathfrak{M}_m(X)$ の要素とそれと独立（直交）なものとの和：

(6.9) $$X_n=E(X_n/\mathcal{B}_m(X))+\sum_{\nu=m+1}^{n}a_{n,\nu}\xi_\nu$$

と表わすことが出来る．しかも右辺第1項は X_ν, $\nu\leq m$ の一次函数である．

これまで述べたことは X_n を独立変数列 ξ_n を用いて表現する1つの方法であるが，§6.2の問題2のような意味での表現をも考えることは自然である．正規過程を扱う範囲内ではそこでの g が線型であるとしてよい．今 X_n を与えられた正規過程とし，別に何れも標準正規分布に従う独立な確率変数列 ξ_n（それらは X_n とは違った確率空間で定義されていてもよい）があって，

(6.10) $$X_n\sim\tilde{X}_n=\sum_{\nu=1}^{n}a_{n,\nu}\xi_\nu \quad (\sim\text{は同じ確率過程であることを示す})$$

となっているとき，X_n は表現されたということにする．このときはもはや一般

---

1) 正規型確率変数 $X(\omega)$ を $L^2(\Omega)$ の要素と考える場合には，故意に ω を省略して単に X とかく．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

には X_n を $\tilde{X}_n$ にかえても(6.8)，(6.9)は成り立たず唯(6.7)すなわち(6.2)とかくことだけの目的に添うものである．換言すれば(6.3)の成立が一般には期待出来ないということである．勿論このような表現の中には Schmidt の直交化の方法で作られたものと同等なものが存在するし，またそれのみが特に(6.1)の型に注目する立場から重要なものになっている(以上［82］§4参照．又例について(飛田［1］§1.1参照)．

これまで調べてきた方法を parameter が連続な場合へ自然な形で拡張することが考えられる．それを主として［82］に従って述べることにする．parameter の空間 T は $[0, \infty)$ とする($T=(-\infty, \infty)$ 又は $T=[a, b]$ の場合もわずかの注意で同様に扱える)．正規過程 $X(t)$, $t \in T$ について，こゝでも $EX(t) \equiv 0$ を仮定する．この $X(t)$ について(6.1)の型の形を(6.9)に示唆されて大胆に推測すれば

$$dX(t) = \int_0^t G(t, dt, u) X(u) du + \sigma(t, dt) \xi_t \qquad (dt > 0)$$

といった形式的な式が考えられる([82]§4)．右辺の二項は互に独立で ξ_t は $\mathcal{B}_t(X)$ (§6.2と同じく $X(\tau)$, $\tau \leq t$ を可測にする最小の Borel field) と独立な標準正規分布に従う確率変数である．同じく(6.7)の拡張を考えるならば(6.2)の G_n の拡張にあたる G_t ともいうべきものは ξ_t の線型な函数となる筈である．ここで ξ_t は各瞬間毎に独立な確率変数であるので，そのようなものは Brown 運動 $B(t)$ の微分と考えられ，従って我々は G_t は Wiener 積分であろうことに気がつく．Lévy はこの事実を彼独特の記号 "$\xi_t \sqrt{dt}$" を用いて直観的に明快な表現を得ている．例えば Brown 運動なら

$$B(t) = \int_0^t \xi_u \sqrt{du}$$

とかいている．従って今問題にしている(6.2)の拡張は

$$X(t) = \int_0^t F(t, u) \xi_u \sqrt{du}$$

と書くことになる．このように書いてみれば各瞬間に増加していく $X(t)$ の情報は ξ_t で表わされ，そのような ξ_u, $u \leq t$ を組合せて $X(t)$ を構成する方法が $F(t, u)$ によって知られるとするのが Lévy の考え方で，これで $X(t)$ が表現されたとしている．

我々は前述のようにこの積分を Wiener 積分

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$(6.11) \qquad X(t)=\int_0^t F(t,u)\,dB(u)$$

と理解することが出来る．そこで Lévy の考え方（[82] 及び [87] 2章）に従って表現の定義をしよう．Brown 運動から導かれる Wiener 測度を一般にして正規加法過程から導かれる測度（random measure）も $dB(t)$ とかくことにする（本節のみの約束）．$dB(t)$ による (6.11) のような形の積分も Wiener 積分と同様に定義することができる．

<u>定義 6.2.</u>　$X(t),\ t\in T$ を与えられた正規過程とする．それに対し $dB(t)$（$E\,dB(t)=0$，$E(dB(t))^2=dv(t)$ とする）と各 t に対し u の函数として $L^2(v)$ 1) に属し，かつ $u>t$ では 0 になるような函数 $F(t,u)$ が存在して

$$(6.12) \qquad X(t)\sim\tilde{X}(t)=\int_0^t F(t,u)\,dB(u)$$ （〜は同じ確率過程であることを示す）

となるとき（$dB(t)$，$\mathfrak{M}_t$，$F(t,u)$）又は単に（$dB(t)$，$F(t,u)$）を $X(t)$ の<u>表現</u>といい $F(t,u)$ をその表現の<u>核</u>という．こゝに $\mathfrak{M}_t(=\mathfrak{M}_t(X))$ は $X(\tau)$，$\tau\le t$ の張る $L^2(\Omega)$ の部分空間である．

定義からも明らかなように $X(t)$ の表現は無数に存在する．そこでまず本質的に同じとみなしてよいようなものを [87] に従ってクラスにまとめることにする．

<u>定義 6.3</u>　二つの表現（$dB^{(i)}(t)$，$F^{(i)}(t,u)$）$i=1,2$ は任意の $t\in T$ と任意の Borel 集合 M に対して

$$(6.13) \qquad \int_M F^{(1)}(t,u)^2\,dv^{(1)}(u)=\int_M F^{(2)}(t,u)^2\,dv^{(2)}(u)$$

が成り立つとき<u>同値</u>であるという．（以後同値なものは同一視する）

これによって $X(t)$ の表現をクラス分けしてもまだ表現は一意的にきまらない．Lévy はこのような事情――表現は一般に幾種類もあり，それらの果す確率論的な役割の相違など――を多次元 parameter の Brown 運動から導かれる $M(t)$ 過程の研究において発見している（[88]）．我々もこの例についてそれをみることにしよう．

<u>定義 6.4</u>　$X(A,\omega)$，$A\in R^d$（d 次元ユークリッド空間），が次の条件を

---

1) $L^2(v)=\{f;\ \int_0^\infty f^2(u)\,dv(u)<\infty\}$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

みたすとき parameter 空間が R^d の Brown 運動という．

i) $\{X(A)\}$ は $EX(A)=0$ の正規型確率変数系である，

ii) $E(X(A)-X(B))^2=r(A,B)$ （$r(A,B)$ は二点 A, B の距離），

iii) $X(O)=0$ （O は R^d の原点）．

このような $X(A)$, $A\in R^d$ が存在すること及び殆んどすべての ω について A の連続函数となることなどは §7に譲る．

<u>定義 6.5</u> $S_d(t)$ を原点を中心とする半径 t の球面，σ_t を $S_d(t)$ 上の一様な測度で $\sigma_t(S_d(t))=1$ なるものとする．このとき $M_d(t)$ を

$$M_d(t,\omega)=\int_{S_d(t)}X(A,\omega)\,d\sigma_t(A)$$

で定義し <u>$M_d(t)$ 過程</u>又は単に <u>$M(t)$ 過程</u>という．

$X(A,\omega)$ の連続性から $M(t)$ は定義可能であり，従って正規過程になる．d が奇数の場合にはその共分散（従って分布）が具体的に求められている（[82] §2）．例えば $d=5$ の場合を例にとってみれば共分散 $\Gamma_5(t,s)$ は $s<t$ のとき

$$\Gamma_5(t,s)=\frac{s}{2}-\frac{s^2}{5t}+\frac{s^4}{70t^3}$$

である．これから $M_5(t)$ は2回（$L^2(\Omega)$ ノルムの意味で）微分可能なことがわかる．今 $Y_5(t)=\frac{d^2}{dt^2}t^3M_5(t)$ とすれば $EY_5(t)\equiv 0$ に注意して共分散 $E(Y_5(t)Y_5(s))=36s^2t-8s^3$ $(s<t)$ が知られる．これから $Y_5(t)$ を (6.11) の形に表わすとき $F(t,u)$ は $\lambda t+\mu u$ の形のものが考えられるが，実際簡単な計算で λ, μ として二組の可能な値が求まって，次式で表わされる $Y_{5,1}(t)$, $Y_{5,2}(t)$ は共に $Y_5(t)$ と同じ正規過程になる．

$$(6.14)\quad \begin{cases} Y_{5,1}(t)=\displaystyle\int_0^t\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{u}{t}+\frac{u^3}{3t^3}\right)dB_1(u) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad E(dB_i(u))^2=du,\ i=1,2. \\ Y_{5,2}(t)=\displaystyle\int_0^t\sqrt{3}\left(-1+4\frac{u}{t}-5\frac{u^2}{t^2}+2\frac{u^3}{t^3}\right)dB_2(u), \end{cases}$$

すなわち $Y_5(t)$ の二つの表現が存在することがわかった．そして両者は同値な表現でないことも容易に確かめられる．ところで Lévy は両者の本質的な違いを予報の問題において発見している（[88] §§1.7−8）が [82] の §3に従ってこの事情を簡単に言えば $Y_5(u)$ が $[0,t]$ で知られたとき $B_1(u)$ も亦 $[0,t]$ で知られる（すなわち $\mathcal{B}_t(Y_{5,1})=\mathcal{B}_t(B_1)\equiv\mathcal{B}(B_1(u),u\le t)$）．し

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

かし $B_2(u)$ が $[0,t]$ で知られたときは $B_1(u)$ が $[0,t]$ で知られたときよりも多くの情報を与える(前と併せて $\mathcal{B}_t(Y_{5,2} \subsetneqq \mathcal{B}_t(B_2))$ ことが証明される。このような具体例についての考察の下に Lévy は標準表現の概念を得た([82] §4)。

定義 6.6　$X(t)$ の表現 $(dB(t),\ F(t,u))$ は，任意の t と任意の $s(<t)$ に対して

$$(6.15)\qquad E(\tilde{X}(t)/\mathcal{B}_s(\tilde{X})) = \int_0^s F(t,u)\,dB(u) \qquad (\text{記号は}(6.12)\text{と同じ})$$

が成り立つとき，標準表現(canonical representation)という[1]。

例 6.1　(6.14) の $Y_{5,1}(t)$ に対する注意から $\left(dB_1(t),\ \sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{u}{t}+\frac{u^3}{3t^3}\right)\right)$ は $M_5(t)$ の標準表現である。

$X(t)$ が標準表現を用いて (6.11) のようにかけているときは任意の t, $s(<t)$ に対し

$$(6.16)\qquad X(t) = \int_0^s F(t,u)\,dB(u) + \int_s^t F(t,u)\,dB(u)$$

とかけば，第1項は $E(X(t)/\mathcal{B}_s(X))$ であり，従って第2項は $\mathcal{B}_s(X)$ と独立である。それは (6.9) の拡張に他ならない。

定理 6.2　$X(t)$ の標準表現は二つ以上は存在しない。
証明は定義 6.3 及び 6.6 から明らか([82] §4)。

標準表現が唯一つといっても核 $F(t,u)$ や $dB(t)$ が唯一つきまるわけではない。しかし形式的に言って $F(t,u)\,dB(u)=0$, $t>u$ ならば $dB(u)=0$ とすることによって

$$(6.17)\qquad \mathfrak{M}_t(X) = \mathfrak{M}_t(B) \qquad (\text{従って } \mathcal{B}_t(X) = \mathcal{B}_t(B))$$

が成り立つようにすることは可能である。(飛田[1]定理 I.2)。Lévyはこの性質をもつ表現を真の(propre)標準表現と呼んでいる。標準表現若しくは真の標準表現は，これまで見てきたように正規過程を構成するという点からだけでな

---

1) 表現，表現の同値及び標準表現等の概念は適当な言いかえでそのまゝ parameter が離散的な場合にも定義される。定理についても同様なことがいえる。

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

く，多重 Markov 性とか予測の問題の研究において重要な役割を演ずる．これらを含めて Lévy が研究の主題としたと考えられるものを列挙すれば，一般の正規過程の表現について

(a) 標準表現の存在するクラスの決定，

(b) 与えられた表現が標準表現であるか否かの判定法，

(c) Markov 性の表現への反映，

(d) 予測の問題との関連，

(e) その他

等が考えられる．各項目についての要約を述べよう．

(a) については Lévy は [82] §4 で，$X(t)$ が標準表現をもつためには $X(t)$ が次のような条件を充すことが必要十分であるとしている．すなわち $X(u)$，$u \leq t$ が知られたとき $X(t+dt)$ は

$$X(t+dt) = E(X(t+dt)/\mathcal{B}_t(X)) + O(t, dt)\xi_t, \quad dt > 0$$

とかける．そのとき条件というのは，$X(u)$，$u \in (t, t+dt)$ の行動について ξ_t が十分な情報をもち他の情報を必要としないということだと述べている．これは非常に大まかな言い方であるが，若し $X(t)$ が標準表現をもつならば (6.16) において t, s を夫々 $t+dt$, t にかえれば上式の $O(t, dt)\xi_t$ は $F(t+dt, t)\,dB(t)$ と殆んど同じものを指しておると考えられるので我々も Lévy の主張を大まかに (6.17) が成り立つような 1 つの加法過程が存在することゝ理解してよかろう．この解釈に従い我々は Hilbert 空間論の言葉を借りてこのような考え方を整理し，標準表現が存在するための条件を求めることができる．

若し $X(t)$ の標準表現が存在するならば，Wiener 積分で表わされている（或はそれと同じ確率過程である）ことから $\mathfrak{M}_t(X)$，$t \in T$，は次の条件

(M. 1) $\mathfrak{M}(X) = \bigcup_{t \in T} \mathfrak{M}_t(X)$ が可分である，

(M. 2) $\bigcap_{t \in T} \mathfrak{M}_t(X) = \{0\}$

をみたす．さらに $\mathfrak{M}(X) = \bigcup_{t \in T} \mathfrak{M}_t$，$\mathfrak{M}_t^*(X) = \bigcap_{n>0} \mathfrak{M}_{t+\frac{1}{n}}(X)$ とおけば Hilbert 空間 $\mathfrak{M}(X)$ において $\mathfrak{M}_t^*(X)$ と射影 $E(t)$ とが対応するが (M. 2) により $\{E(t),\ t \in T\}$ は単位の分解になっている．そして標準表現の存在することから

(M. 3) $E(t)$ のスペクトルの重複度 (multiplicity) $= 1$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

が出る．逆に $\mathfrak{M}_t(X)$ がこれら3条件を満足するような正規過程ならば $\mathfrak{M}(X)$ に Hellinger-Hahn の定理を適用することにより正規加法過程 $B(t)$ が存在して $X(t)$ は (6.11) のように表わされしかも $\tilde{X}$ を X にかえて (6.15) が成り立つ，すなわち

<u>定理6.3</u>　$X(t)$ が標準表現をもつための必要且つ十分な条件は，$\mathfrak{M}_t(X)$ について3条件 (M.1), (M.2), (M.3) が成立することである．

この定理によって (a) は完全に解決された．

(b) Lévy は [82] では標準表現の意味を $X(t)$ から $dB(t)$ が構成出来る場合であるとしてとらえ，(6.11) を変形して

$$(6.11')\qquad X(t)=F(t,t)B(t)-\int_0^t\frac{\partial}{\partial u}F(t,u)\cdot B(u)\,du$$

を得て Volterra 形の積分方程式の解法と類似の考え方で $F(t,u)$ が標準表現の核であるための十分条件を出している．それは特殊な場合ではあるが，path に注目した方法であるので正規型でない場合にも適用出来るという点に特徴がある．1956年頃になって彼はこの考え方を発展させ「$F(t,u)$ が真の標準表現の核であるための必要十分条件は，任意に固定した T に対し

$$(6.18)\qquad \int_0^t F(t,u)\,dx(u)\equiv 0\qquad t\in[0,T]$$

が $\displaystyle\int_0^T\frac{[dx(u)]^2}{dv(u)}<\infty$ (Hellinger 積分) なる non-trivial な解をもたないことである」ことを示した ([77])．ここで $x(u)$ に課された制限は $\mathfrak{M}_T(B)$ に属するある確率変数 Z があることで $x(u)$ はその Z と $B(u)$ との共分散になり，従って (6.18) は Z と $X(t)$ とが直交する条件である (詳しくは [77] 及び飛田 [1] §I.6 参照)．

この判定条件も (6.17) に注意すれば次のように述べることが出来る．

<u>定理6.4</u>　$(dB(t),F(t,u))$ が真の標準表現であるための必要かつ十分な条件は，任意に固定された T に対して

$$(6.18')\qquad \int_0^t F(t,u)f(u)\,dv(u)\equiv 0,\qquad t\leq T$$

なる $f\in L^2(v)$ は dv 測度0の集合を除いて $[0,T]$ で $f(u)=0$ となることである．

例6.1の主張はこの定理を用いて直ちに証明される．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

（c）正規過程の多重 Markov 性については特に $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, が定常性を持つ場合に J. L. Doob［ 2 ］によって定義され，その性質も相当詳しく知られている．そこでは，$X(t)$ が単純 Markov の場合には所謂 Langevin 方程式としてよく知られた

$$a_0 dX(t)+a_1X(t)=dB(t), \quad B(t) \text{は Brown 運動}, \ a_0, a_1 \text{ は定数}$$

を満足するが，これを一般化した高階微分を含む方程式を用いて多重 Markov 過程を定義している．すなわち $X(t)$ が $N-1$ 回微分可能（$L^2(\Omega)$ ノルムの意味で）で

$$(6.19) \qquad L_tX(t) \equiv \sum_{j=0}^{N} a_j X^{(j)}(t) = B'(t), \quad X^{(j)}(t)=\frac{d^j}{dt^j}X(t),$$

$$a_j,\ j=0,1,\cdots,N \quad \text{は定数,}$$

なる形式的（$X^{(N)}(t)$ 及び $B'(t)$ は形式的にのみ存在する）な微分方程式を満足するとき，$X(t)$ を N 重 Markov 正規過程と呼んだ．更に Doob［ 2 ］は (6.19) を通常の微分方程式をとくのと同様の形式でといて

$$(6.20) \qquad X(t)=\int_{-\infty}^{t} F(t-u)\,dB(u)$$

と表わされることを示した．それはそのまゝ定常過程の移動平均表現でもあり，又 Lévy の意味で真の標準表現にもなっている．そして $X(t)$ のスペクトル測度の密度函数は (6.19) の $\{a_j\}$ を用いて $c\left|\sum_{j=0}^{N} a_j(i\lambda)^j\right|^{-2}$（$c$ は定数）となっている．

その後 Dolph-Woodbury［ 1 ］は非定常の正規過程 $X(t)$, $t\in T=[0,\infty)$, について上の Doob の結果の或意味での拡張と考えられる研究を発表している．そこでは Lévy の意味での表現を求めることを直接の目的としてはいないようだが

$$(6.21) \qquad L_tX(t)=\sum_{j=0}^{N} a_j(t)X^{(j)}(t)=B'(t)$$

をみたすものが，L_t に対応する Riemann の函数を $R(t,u)$ とするとき

$$(6.22) \qquad X(t)=\int_0^t R(t,u)\,dB(u)$$

と表わされることが示されている．この場合も $(dB(t),\ R(t,u))$ は $X(t)$ の真の標準表現となってい[illegible]証明される．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

Lévy が狭義N重 markov 過程と呼んでいるのは上の(6.21)を満足するものと本質的に同じであるが，Lévyのは表現と関連して，$X(t)$ を定める(6.1)の型に着目して markov 性を考えようとしているのが特徴であり，この考え方は非正規型確率過程の markov 性の研究に1つの指針を与えている．[82]に従って述べると[1)]

定義6.7. 正規過程 $X(t)$ が次の二条件をみたすとき狭義N重 markov 過程という．

i) $N-1$ 回まで微分可能でN回は微分不可能

ii) 任意のsに対し $X(s)\,X'(s),\cdots, X^{(N-1)}(s)$ が知られたとき $X(t)$, $t>s$ は $\mathcal{B}_s(X)$ と独立になる．

上の定義で第二の条件は条件つき平均値 $E(X(t)/\mathcal{B}_s(X))$ が $X(s), X'(s)\cdots X^{(N-1)}(s)$ の函数で

$$X(t)-E(X(t)/\mathcal{B}_s(X)) \text{ が } \mathcal{B}_s(X) \text{ と独立}$$

と言ってもよい．

今 $X(t)$ が真の標準表現 $(dB(t), F(t,u))$ をもち $F(t,u)$ がtについて C^N に属する場合を考えると $F(t,u)$ は

$$F(t,u)=\sum_{i=1}^{N} f_i(t)\,g_i(u)$$

と表わされこれを$N-1$項で表わすことは出来ない．$F(t,u)$は所謂 Goursat 核になる．そして，N階微分作用素 L_t を

$$L_t\, f_i(t)=0\,,\qquad i=1,2,\cdots,N$$

によって定めると，$X(t)$ が $N-1$ 回微分可能なことから出る性質 $F(t,t)=F_1(t,t)=\cdots=F_{N-2}(t,t)=0$ $\left(F_i=\frac{\partial^i}{\partial t^i}F\right)$ と併せて，$F(t,u)$がちょうど L_t に対応する Riemann の函数になっていることが知られる．よって(6.21)が成り立ち Dolph-Woodbury の扱ったものと同じになる(飛田[1] II章参照)．

尚定常過程 $\hat{X}(t)$ の場合は parameter が $(-\infty,\infty)$ であるが，

---

1) [82]には広義N重 markov 過程の定義も述べられているが，これ以後も殆んど結果が出ていないので省略する．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$(6.23) \qquad \sqrt{t}\,\tilde{X}\left(\frac{\log t}{2}\right) = X(t)$$

なる変換により $X(t)$, $t\in(0,\infty)$ に移り，しかも微分可能性や従属性特に Markov 性を不変にしているので定常過程もこの体系の中で扱える．その意味では Doob [2] の結果は定常過程としての固有の性質を除いてこゝに含まれるので，Lévy の結果は Doob [2] の拡張ともいえる．

（d）正規過程について予測の問題はその標準表現が求まれば解決するといってよい．何故なら，$X(u)$, $u\leq S$ を知って $X(t)$, $(t>S)$ の最良予測を求める，すなわち $B_S(X)$ 可測な Z で $E(X(t)-Z)^2$ を最小にする Z を捜すには $X(t)$ が正規型だから Z は $\mathfrak{M}_S(X)$ から求めたらよい．それは $X(t)$ の $\mathfrak{M}_S(X)$ への射影であるが再び正規型ということから $Z=E(X(t)/\mathcal{B}_S(X))$ としてよいことがわかる．標準表現はそれが explicit に表わされる表現であった．

Lévy は未来を知って過去を推測する問題と或種の非標準表現との関係も $M(t)$ 過程を変形したものを例にとって研究している（[82] §5 及び [88]）．しかし [88] のように表現の核が t, u の同次多項式のような場合についてのみ過去を推測する問題（continuation to the left）を扱うときには（6.23）の逆の変換によりそれを定常過程に移せばスペクトル測度の密度函数は表現の核の Fourier 変換が $\frac{Q(i\lambda)}{P(i\lambda)}$（$P$, Q は多項式）だから有理函数 $\left|\frac{Q(i\lambda)}{P(i\lambda)}\right|^2$ になり，定常過程の線型予測の場合と同様に問題をスペクトル測度の話に直して議論することが出来る．そこでの Lévy の結果を簡単に言えば $X(t)$ が (6.11) のように書けているとき非標準表現の中に

$$(6.24) \qquad \mathfrak{M}^t(X) \supseteq \mathfrak{M}^t(B)$$

$\mathfrak{M}^t(X)$ は $X(\tau)$, $\tau\geq t$ の張る $L^2(\Omega)$ の部分空間．$\mathfrak{M}^t(B)$ も同様

をみたすものが存在し，標準表現とは対象的な性質をもっている．特殊な例については具体的にその関係が求まること等である．$F(t,u)$ が t, u の同次多項式の場合は定常過程に変換するとき前述の多項式 Q の零点がすべて下半平面にあるとき（6.24）が成り立つ（標準表現の場合は Q の零点はすべて上半平面にある）．

（e）この他にも正規過程の表現に関して注意のみで終ったり或は項目としてあげる程にはまとまっていないもの等，述べ得なかった事も沢山ある．例えば Brown 運動の表現 $(dB(t), F(t,u))$ で $B(t)$ がまた Brown 運動，$F(t,u)$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

が $\frac{u}{t}$ の多項式であるようなもの（勿論非標準表現）が無数に存在し得ることの証明（[87]），標準表現によって表わされる正規過程の和についての研究（[93]）或は（M.3）の条件を満足しない正規過程の例（[77]）等々興味深いものが多い．このようにこれまでに紹介し得なかった事も決して重要でないと判断したわけではないことをお断りしたい．

6.4.

これまで述べてきた正規過程の最も大きな特徴の一つは（6.1）の型が線型であるということである．他にも型が線型になるような確率過程の重要なクラスが考えられるだろうという疑問が当然起るわけであるが，既に Lévy はその著書［43］において安定過程の時間の尺度を変えた強定常過程を考えていて型が線型ということに着目した記述が見られる．このような考え方による研究は1957年に到り fonction aléatoires à corrélation linéaire と呼ばれるクラスの研究にまで発展し一応その方向づけが出来たように思われる．この結果は［87］の第3章にまとめられているのでそれに従って述べよう．

このクラスは当然正規過程を含んでいるわけであるが，大まかにいえば正規過程の表現での $dB(t)$ を一般の加法過程 $Z(t)$ から導かれる測度 $dZ(t)$ に代えて得られるようなものの典型的なクラスである．$Z(t,\omega)$，$t \geqq 0$ を加法過程とすれば次のように表わされる．

$$(6.25) \qquad Z(t,\omega) = f(t) + B(t,\omega) + Y(t,\omega) + S(t,\omega)$$

こゝに $B(t)$ は平均0の正規加法過程，$Y(t,\omega)$ は可動不連続点におけるとびの和又はその補正和，$S(t,\omega)$ は固定不連続点におけるとびの和を表わすものとする．この $Z(t)$ を用いて

$$(6.26) \quad X(t,\omega) = \varphi(t) + \int_0^t [F(t,u)dB(u,\omega) + G(t,u)dY(u,\omega) + H(t,u)dS(u,\omega)]$$

と表わされるような $X(t)$ の全体を C とし，特にその中で $\varphi(t) \equiv 0$ となるものゝ全体を C_0 で表わす．C_0 に属する $X(t)$ について正規過程の場合と同じように表現に関係した研究，更には path の性質まで調べようとするのが［87］第3章の目標である．

先ず（6.26）の右辺の積分は dY 及び dS に関する項はまだ厳密な定義はされていないことに注意しよう．そのため［87］の §III.6 及び §III.7 には各積

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

分に関する説明があるが何れもω毎に定義する方法をとっている．$Y(t)$, $S(t)$について分散の存在は期待出来ないのでそれは当然であるが Wiener 積分と理解される $dB(t)$ による積分とは異質のものであって§6.3におけるように Hilbert 空間の理論はこゝでは使えない．特別な場合として F, G が u のみの函数で $Z(t)$ が時間的に一様な場合なら K. Itô [3] §§7-9 の方法でω毎に定義されるし，又それを用いて，F, G が Goursat 核の場合，或は F, G が $t-u$ の函数で積分範囲が $(-\infty, t]$ の場合等には厳密な定義が可能である．

続いて問題になるのは表現の標準性の定義である．Lévy は我々の記号でいえば，任意の t に対し

$$\mathbb{B}_t(X) = \mathbb{B}_t(Z)$$

が成立つとき標準表現と呼んでいる．

次に線型過程（fonctions à corrélation linéaire）と呼ばれるクラス K を次のように定義している．任意の t と $t'(\geq t)$ に対し $X(u,\omega)$, $u \leq t$ の線型汎函数 $U(t,t',\omega)$ と $\mathbb{B}_t(X)$ と独立な $V(t,t',\omega)$ が存在して

$$X(t,\omega) = U(t,t',\omega) + V(t,t',\omega) \tag{6.27}$$

と表わされるような $X(t)$ の全体を K とする．このとき C に属する $X(t)$ が標準表現をもつためには K に属することが必要であること，及びそれは十分条件ではないことが例をあげて示されている ([87] §III.8. 尚飛田 [1] 付録参照）．

更に Lévy は $dY(t)$ のみによって表現される $X(t)$ について，核 $G(t,u)$ が連続で $G(t,t) \neq 0$ なら表現は標準的であること等を証明しているが正規過程の場合と本質的に違った性質として興味深い．この方向の研究にはまだ厳密にすべき所や残されている問題が多く，まだ問題提起と基礎づけの段階にあるといってもよかろう．

6.5.

年代的には少し溯ることになるが，本節の内容と同じ立場から述べられていると考えられる [43] §24 の確定常過程のいくつかの例をみよう．同じ立場といったのは (6.1) の型というよりはむしろ $\mathbb{B}_t(X)$ が t の増加に従ってどのように増加していくかに着目した点で型を考えるときの類似がみられるのでそう言

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

ったのである.

先ず例1ではBrown運動 $B(t)$ に(6.23)の逆の変換を施して Ornstein-Uhlenbeck のBrown運動 $X_1(t)$ を作る. $X_1(t)$ は Langevin方程式の解として得られるものと(定数を適当にとると)同じ確率過程になり, 従って $X_1(t)$ は各瞬間毎に現われる独立な量を積分して得られると考えられることから $\mathcal{B}_t(X)$ は真に増加している. Lévyはこのように各瞬間に偶然が現われるものを normal と呼んでいる.

次には2次までのモーメントがBrown運動と同じである $U(t)$ をとり, 上の例のように $e^{-t}U(e^{2t})=X_2(t)$ とすると $X_2(t)$ は相関函数 $R(h)=e^{-|h|}$ をもつ弱定常過程である. これは Langevin方程式の代りに次の定差方程式を満足する連続な $X(t)$ と2次のモーメントまで一致する.

$$X(t+h)=R(h)X(t)+U, \quad U \text{ は } \mathfrak{M}_t(X) \text{ と直交}; \ R(0)=1.$$

例3としては $U(t)$ として $\beta(>\frac{1}{2})$ 次の安定過程をとり, $X_3(t)=e^{-\beta t}U(e^t)$ と定義すれば $X_3(t)$ は強定常過程になる. これが $X_1(t)$ と異る点は2次のモーメントが存在しないし, 又 path $X_1(t,\omega)$ は殆んど確実に可動不連続点をもっていることである. しかし例2と同じく

$$X_3(t+h)=cX_3(t)+V \quad (h>0,\ c=e^{-h}) \quad V \text{ は } X(t) \text{ と独立}$$

と表わすことが出来る. c は一般の相関係数と考えてよかろう.

又例4としては, 例2の $U(t)$ をとり, $X_4(t)=U(t+1)-U(t)$ と定義する. $0<h<1$ ならば $U(t+1)-U(t+h)=V$ とおくとき

$$X_4(t)=V+V_1, \quad X_4(t+h)=V+V_2$$

で V_1, V_2, V はどの2つも互に直交する確率変数である.

これら4例は何れも normal な(強又は弱)定常過程の例であることは容易に知られる. これに反し

$$X_6(t)=\Sigma a_n e^{i(\lambda_n t+\Phi_n)} \qquad \{\Phi_n\} \text{ は独立な確率変数の系}$$

を考えると強定常であるが a_n が非常に早く0に収束する場合は normal にならない. 何故ならそのときは殆んどすべての ω に対し $X_6(t,\omega)$ が解析的になってしまうから $\mathcal{B}_t(X_6)$ は増加しない. 同じことが

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$X_8(t) = \sum U_n e^{i\lambda_n t}$, U_n は複素数値確率変数で $E\{U_n\} = 0$,
$E\{|U_n|^2\} = a_n^2$, $\sum a_n^2 < \infty$, $E(U_n \overline{U}_p) = 0$
$(n \neq p)$

についても a_n が急激に 0 に収束する場合にいえる．normal でないもっと明かな例として次の $X_{11}(t)$ がある．

$$X_{11}(t) = e^{i(tY+\Phi)}, \quad Y, \Phi \text{ は確率変数．}$$

Lévy は一般の $X(t)$ について normal か否かを判定するためには，任意の θ に対して $[0, \theta]$ で $X(t,\omega) = f(t)$ という条件の下で θ 以後の $X(t,\omega)$ の条件つき確率をみることが必要であるとしている．しかし $[0, \theta]$ で $X(t,\omega) = f(t)$ となる確率は 0 であるので条件つき確率を定めるための詳しい注意が述べられている。

この他 $X_5(t)$, $X_7(t)$, $X_9(t)$, $X_{12}(t)$ 等定常過程の例があって，こゝに述べた事の他に，弱定常過程のスペクトル分解を自然に理解出来るような形で説明がなされている．

6.6

最近になって Lévy は Φ が線型でないような確率過程の研究を開始した．彼自身も，これは最近の最も重要な研究であると言っているので，大いに今後の成果が期待される．我々は Lévy の結果からこの方向の研究に対する見通しについて適切な紹介が出来ないのが遺憾であるが，非線形表現を考えるための基礎的な準備と思われる論文 [101] についてその概要を述べることにする．

確率変数の非線形な演算の中で最も単純なものは積である．そこでまず実数値をとる確率変数 $X(\omega)$ が，互に独立な実数値をとる確率変数 $U(\omega)$, $V(\omega)$ の積として表わされている場合：

$$(6.28) \qquad X(\omega) = U(\omega) \cdot V(\omega)$$

において三者の分布函数や，若し存在すればそれらのモーメントの間の関係及び対称性を表わす量等について準備した後次のような問題を提出している．

問題 A. $X(\omega)$ と $U(\omega)$ の法則が与えられたとき $X(\omega)$ は (6.28) のように表わされるか否かをみること，そして表わされる場合には $V(\omega)$ の法則又は

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$V(\omega)$ の可能な法則の集合を決定せよ．

問題B． $X(\omega)$ の法則のみが与えられた場合，$X(\omega)$ は（6.28）のように分解出来るか否かを知ること．但し各因数は定数でないとする．

問題C． $X(\omega)$ の法則が対称であるために $U(\omega)$ と $V(\omega)$ の法則のみたすべき条件を求めよ．

問題D． 積の意味で無限分解可能な法則（*lois indéfiniment divisibles de l'arithmétique multiplicative.* *i. d. m.* と略す）を決定せよ．ここに X の法則が *i. d. m.* であるとは，任意の正の ε と ε' について，独立な確率変数の列 U_ν が存在して

$$X = \prod U_\nu, \qquad P(|U_\nu - 1| > \varepsilon) < \varepsilon'$$

となることである．

先ず問題 A，B についてみれば，若し X, U, V がすべて正である確率が 1 である場合には対数をとることにより（6.28）は

$$\text{(6.28}'\text{)} \qquad \log X(\omega) = \log U(\omega) + \log V(\omega)$$

となり独立変数の和の問題になる．複素数の範囲まで考えることを許せば $P(X(\omega)=0)=0$ になる場合なら同じく（6.28′）とかけるので一般の場合はこれに帰着させることを考える．今 $P(X=0)=\alpha<1$ としよう．そのときは 0 と 1 のみをとる確率変数 $\eta(\omega)$ とそれとは独立な確率変数 $X'(\omega)$ が存在して $P(X'(\omega)=0)=0$ で

$$\text{(6.29)} \qquad X(\omega) = X'(\omega)\,\eta(\omega)$$

とすることが出来る．$P(\eta=0)=P(X=0)$ は当然だから η と X' は一意に定まる．$U(\omega)$ $V(\omega)$ についても同様な分解：$U(\omega)=U'(\omega)\eta_1(\omega)$，$V(\omega)=V'(\omega)\eta_2(\omega)$ を考えて（6.28）は

$$\eta = \eta_1\eta_2, \qquad X' = U'V'$$

を考えればよいことになる．

η に関する問題 A の解は自明．問題 B は無数の解を持っている．実際 η の法則は *i. d. m.* であることが証明出来る．

次に X' に関しては（6.28′）のようにして解くが簡単のため先ず $P(X'(\omega)>$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$o) = 1$ として考えよう．$U'(\omega)$, $V'(\omega)$ も殆んどすべての ω に対して正としてよいから $\log X'$, $\log U'$, $\log V'$ の特性函数をそれぞれ $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ とすれば

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)$$

を考えればよい．問題 A は $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$ が与えられたら $\varphi_2(t)$ が求まり，それが特性函数になっているかということである．このとき $\varphi_2(t)$ が求まらない場合があることは注意を要する．[101] p. 65. には $\varphi_2(t)$ が求まらないような Khintchine の例があげられている．尚このような問題も含めて特性函数の問題を論じたものとして [102] がある．尚 X' について問題 B をとくことはよく知られた古典的な問題である．

問題 D も $P(X(\omega) > o) = 1$ のときはよく知られた無限分解可能な分布の問題に帰着される．

次に $X(\omega)$ が正負の符号をとるときを考える．先ずニつめ正の値をとる確率変数 $X'(\omega)$, $X''(\omega)$ をとり，$X(\omega)$ を次式が成り立つようにきめる．

$$P(X(\omega) = X'(\omega)) = \alpha_1, \quad P(X(\omega) = -X''(\omega)) = \alpha_2 = 1 - \alpha_1$$
$$(o < \alpha_1 < 1).$$

こゝで $U(\omega) > o$ と仮定しよう．そうすれば $V(\omega)$ は $X(\omega)$ の符号に一致し $X(\omega)$ が $X'(\omega)$ であるか，又は $-X''(\omega)$ であるかに応じて $V(\omega)$ が $V'(\omega)$ であるか，又は $-V''(\omega)$ であるような V', V'' がきまり (6.28) を

$$X' \sim UV', \quad X'' \sim UV'' \quad \text{（〜は法則が同じであることを示す）}$$

と考えることにより既に考えた場合に帰着させうる．

$X(\omega)$ が最も一般な場合には問題 A, B の解法は非常に複雑なものになるが，これまでの事を組合せ若干の注意をつけ加えることによって考察することができる．又複素数値をとる場合もこのような方法で研究されている．

問題 A, B の別解法として，与えられた確率変数がすべての次数のモーメントをもつ場合に解析的な解法が考えられる．主な結果として「X の特性函数が解析的であり定数でないならば，V についても同様である．故に若し問題 A の解があればその法則はモーメントのみによって定る」，又，X の n 次のモーメントを E_n で表わすとき「若し

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$\sum_p \frac{1}{2p\sqrt{E_{2p}}} = \infty$$

ならば X の法則はモーメントのみによって定まる．$P(X(\omega)=0)=1$ の場合でなく，又 X が $X\sim UV$ なる表現をもつときは U 及び V の法則はモーメントのみで定まる」等が証明されている．そこでこれに関連して次のような問題が提出されている．

問題E　X の法則がモーメントによってきまり，X が (6.28) のようにかけるならば各因数の法則もモーメントによってきまるか？

問題F　X が E_n によってきまる，或は $|X|$ が $\bar{E}_n$（絶対モーメント）によってきまる，或は X，$|X|$ が E_{2n} によってきまるということは同じことか？

問題G　X'^2 のモーメントが V^2 のモーメントを majorate し，X'^2 がモーメントによりきまるならば V^2 もそうか？

続いてこれらの問題や問題Cについての幾らかの結果が述べられているが，我々にとって興味のあるのは問題Dに関する項である([101] §8)．$P(X(\omega)=0)=0$ としてよいことは，前の注意で $X(\omega)$ を (6.29) で表わしたとき η の法則が i.d.m. であるからである．そこで，$\log X(\omega)=\xi(\omega)+i\eta(\omega)$ が無限分解可能な法則に従うとして X の法則を決定すればよい．Lévy はそこで加法過程 $\xi(t)+i\eta(t)$ なる加法過程を考え，その単位時間の増分として $\xi+i\eta$ をとらえている．こゝで我々は無限分解可能な法則を加法過程と関連させて考えた彼の過去の研究法を思い出す．それと同時に (6.1) の型が非線型なもの＞基本として $\exp\{\xi(t)+i\eta(t)\}$ といったものを考えているのではなかろうかと想像される(?)．

X を実数値のみをとるとするとき η は mod 2π で 0 又は π をとる（複素数値をとるとしても mod. 2π で考えることは同じである）ので $\xi+i\eta$ の法則を考える場合は $\psi(z,n)=\log E\{e^{i(z\xi+n\eta)}\}$ をみればよい．$\xi+i\eta$ が無限分解可能な法則に従うことから（§2 参照）

$$(6.30)\quad \psi(z,n)=\mu iz-\sigma^2\frac{z^2}{2}+\left[\int_{-\infty}^{-0}+\int_{0}^{\infty}\right]\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)dN_0(u)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu+ni\pi}-1)\,dN_1(u)$$

こゝに $N_1(u)$ は有界非減少で $(-\infty,\infty)$ での全変分は $\eta(t)$ の $[0,1]$ でのとびの平均を表わす．又 $N_0(u)$ は $(-\infty,0)$ と $(0,\infty)$ でそれぞれ非減少で

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right) \frac{u^2}{1+u^2} dN_0(u) < \infty$$

をみたすものである.

［101］の最後にはこゝで論じられた問題と Wintner の問題「Uが標準正規分布に従い $V \geqq 0$ がUと独立な確率変数とする. いかなる場合に $X=UX$ の法則は無限分解可能か？」との関連が述べられている.

この項は新しい研究方向であり示唆に富むものであると思われたので冗長も嫌わずに述べたが，§6を通じてこれまでのことをふり返ってみるとき，今紹介した方向は極めて自然な流れの方向と言わざるを得ない.

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

§7 多次元parameter Brown運動

7.1

この節ではBrown運動$B(t)$の拡張として多次元parameterをもつBrown運動を中心にして考えるが，$B(t)$が正規過程，或は一般のMarkov過程の中で中心的な位置を占めていただけに，それは多次元parameterの確率過程（過程という言葉は不適当かも知れないが仮りにこう呼ぶ）の典型として扱われるものでなければならない．Lévyの研究もこの立場からなされているように感じられるので，Brown運動以外のものの研究まで含めた形でこゝに紹介する．しかしまた系統的にまとめられてはいないので，例が中心になるが，それらはそれ自身としても興味あるものであり，この方向の研究への示唆に富んでいると思う．［43］8章の冒頭に述べられているように，気象学などにおいて現れる諸現象を考えるとき，時間以外にも位置のparameterを考慮した偶然現象を研究する必要が生じてくる．当時までにLévy以外にもこういった偶然に支配されて変化する現象を取扱った多くの科学者はいたが数学の体系の中で，研究されてはいなかったようである．

それではparameterの空間としてd次元ユークリッド空間R^dをとったときどのようなものが基本的なものとなるであろうか？　LévyはまずR^dをparameter空間とするBrown運動$X(A,\omega)$，$A\in R^d$をとりあげている．これの定義は§6で述べた通りであるが，その存在を証明するためには，共分散$E(X(A)X(B))=\frac{1}{2}(r(0,A)+r(0,B)-r(A,B))$が正の定符号函数であることを示せばよい．それは

「μを$\int|\mu(dV_A)|$，$\int r(0,A)|\mu(dV_A)|$，$\iint r(A,B)|\mu(dV_B)|\cdot|\mu(dV_B)|$がすべて有限であるような任意の測度とするとき

$$\iint[r(0,A)+r(0,B)-r(A,B)]\,\mu(dV_A)\mu(dV_B)\geqq 0$$

が成り立つ」

というSchönberg-Schwartzの定理から導かれる（［43］§58参照）．

parameterが実数である通常の確率過程のpathにあたるべき$X(A,\omega)$を殆んどすべてのωに対して決めるには，§1その他で説明してきたこれまでの方法と同様で，R^dの格子点の上で$X(A,\omega)$を定め，格子点を順次細かくして

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

いって，それら格子点の全体（それは R^d の稠密な可附番部分集合）で $X(A,\omega)$ が殆んどすべての ω について一様連続にできることを示した後，これは R^d 全体に拡張して連続な $X(A,\omega)$ を得ている．

このような Brown 運動は多次元 parameter をもつ確率過程の中で，特に正規型のもの丶中では最も典型的なものであり，又1次元 parameter の Brown 運動 $B(t)$ のもつ主要な性質 Markov 性を考慮に入れても尚かつ $B(t)$ の拡張として自然なものであって $X(A)$ が Brown 運動と呼ばれるにふさわしいものとして定義されたか否かを認識しておく必要があろう．Lévy の研究の中には，これらの事実の裏付けと考えられる若干の研究（例えば［44］，［45］或は［47］の§28参照）がある．Lévy のもっている多次元 parameter の確率過程について，Markov 性に対する考え方や Brown 運動の位置づけの仕方などをみるために，まずその背景となった研究を概観しよう．

7.2.

1次元 parameter の確率過程は，直観的にいって各瞬間での切線として加法過程乃至は Markov 過程をとって構成されるという考え方が基礎になっていた．その意味で加法過程や Markov 過程が基本的であったが，d次元 parameter の場合もやはり，そのような考え方から Markov 性の研究から出発している．簡単のため $d=2$ の場合としよう．Markov 性を定義するのに，こゝではもはや過去とか未来といった概念はあり得ない．そこで $X(u,v)$，$(u,v)\in R^2$ について次のような定義を与える．すなわち

「平面を2つの部分 R_1，R_2 にわけるような任意の閉曲線 $\mathcal{L}$ に対して，$X(u,v)$ が $\mathcal{L}$ 上の各点で知られたとき R_1 での $X(u,v)$ と R_2 での $X(u,v)$ の条件付法則が独立になるとき $X(u,v)$ は（単純）Markov であるという」

こゝで Lévy のあげた単純 Markov 性をもつ例のいくつかをみてみよう．

例 7.1. R^2 で (pa_n, qa_n)，$p,q=0,\pm1,\pm2,\cdots$ を格子点とする正方格子を Q_n であらわす．$a_n(>0)$ は 0 に収束する任意の数列とする．各 n について確率変数の系 $U_n(u,v)$ は次の条件を満足するものとする：

i) (u,v) が Q_n の辺上にあるとき，すべての ω について $U(u,v,\omega)=0$，

ii) (u,v) が Q_n のある正方形の中を動くとき U_n は常に $P(U_n(u,v,\omega)$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$=1)=P(U_n(u,v,\omega)=-1)=\frac{1}{2}$ なる確率変数

iii) (u,v) と (u',v') が Q_n の同じ正方形に含まれないとき $U_n(u,v,\omega)$ と $U_n(u',v',\omega)$ とは独立. iv) $\{U_n\}\ n=1,2,\cdots$ は独立.

$0<q<\frac{1}{2}$ なる任意の q をとり $X(u\ v,\omega)$ を

$$(7.1)\qquad X(u,v,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty} q^n U_n(u,v,\omega)$$

で定義するとこれは単純 Markov である. 実際, R^2 を R_1 と R_2 に分けるような曲線 L 上の各点で $X(u,v)$ が知られたとき $\sum_i \varepsilon_i q^i$, $\varepsilon_i=+1$ 又は -1, と表わされる数は, その表現が一意的だから (7.1) よりすべての n に対して $U_n(u,v)$ がきまる. 従って L が通過するような Q_n の各正方形において $U_n(u,v)$ が確定する. そして L が通過しないような R_1 と R_2 の各正方形における $X(u,v)$ は互に独立である. 以上のことに注意して $X(u,v)$ の Markov 性が証明される.

例7.2　上の例では殆んどすべての ω に対して $X(u,v,\omega)$ は (u,v) の不連続な函数である. これを修正して $X(u,v,\omega)$ が連続でしかも確率論的な特徴を失わないような例を考える. Q_n 及び $U_n(u,v,\omega)$ は上例と同じとする. $\varphi_n(u,v)$, $(u,v)\in R^2$ は無限回微分可能で Q_n の辺上では 0 になり, 辺以外では $0<\varphi_n\leqq 1$ となる函数とする. これを用いて $X(u,v,\omega)$ を

$$(7.2)\qquad X(u,v,\omega)=\sum_n q^n U_n(u,v,\omega)\varphi_1(u,v)\varphi_2(u,v)\cdots\varphi_n(u,v)$$

で定義する. (7.2) の右辺は u,v に関して一様収束だから殆んどすべての ω について $X(u,v,\omega)$ は (u,v) について連続でしかも無限回微分可能である. しかし Markov 性に関する議論は例1と全く同じで, これは単純 Markov になる例である.

これらの例から我々は, こゝで言う所の Markov 性は, X の分布の型を指定しないで一般的にいえば, ω を固定したとき $X(u,v,\omega)$ の連続性とは直接の関係がつけられないことを知るであろう. 更に我々は別な観点から従属性に注目した Lévy の例として次のようなものを考えてみよう.

例7.3　正の整数全体を, 無限個の無限集合 S_n, $n=1,2,\cdots$ の直和に分解する. E_n は $[0,1]$ に属する数で無限小数に展開したとき S_n に属さない番号の位の数字がすべて 0 であるようなもの全体を表わすとする. そして $U_n(t,\omega)$ は, E_n の値をとる定常過程で, $\{U_n(t)\}$ は独立で, 何れも個定不連続点

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

をもたない確率過程の系になっているとしよう．このような系の存在は一応認めるとして，$(0,\pi)$ で稠密な数列 $\{\theta_n\}$ をとり $X(u,v,\omega)$ を次式で定義する．

$$(7.3)\qquad X(u,v,\omega)=\sum_n U_n(u\cos\theta_n+v\sin\theta_n,\omega).$$

ある点 (u,v) で X の値を知れば，$\{E_n\}$ は互に素な集合で，実数を E_n の数の和として表わす．表わす方法は一意だから，(7.3)より各 U_n の値が定まる．故に R^2 を2つの部分に分ける曲線 $\mathcal{L}$ の各点で X の値が知られたとき，そこですべての U_n の値が知られたことになる．従って，各 n について，U_n の帯 $D_n=\{(u,v);\ \alpha_n<u\cos\theta_n+v\cos\theta_n<\beta_n\}$ での値がきまる．こゝに

$$\alpha_n=\min_{(s,t)\in\mathcal{L}}\{s\cos\theta_n+t\cos\theta_n\},\qquad \beta_n=\max_{(s,t)\in\mathcal{L}}\{s\cos\theta_n+t\cos\theta_n\}$$

である．すなわち X は $\bigcap_n D_n$ (＝$\mathcal{L}$ を含む最小の凸集合)＝$D(\mathcal{L})$ で値が決定されてしまい，それ以外では不確定である．$D(\mathcal{L})$ 以外の (u,v) に対しては $X(u,v,\omega)$ は知られている一部の U_n と，それらとは独立な残りの U_n との和になる．故に $X(u,v)$ は Markov である．

この例と前の例1，例2とは従属性の上で大きな差異がある．直観点ではあるが相異点を説明する．その第1は，前の2例では，曲線がどんなに小さな領域を囲むものであっても曲線上で X を知ったとき，尚内部の点でそれらと独立な量が存在するが，例3では常に周上の値で内部の値が決定される．この観点から Lévy は例3のようなものを <u>partiallement dégénéré</u> といっている．第2には，一点 (u,v) が平面上を動くとき，例3ではすべての $U_n(t)$ が固定不連続点をもたないから各瞬間に独立な量が現われ X に対する固定不連続点のようなものは存在しない．しかし例1や例2では動点 (u,v) が移動するとき各瞬間において偶然に支配されるのではなく Q_n の線分を横切る場合においてのみ独立な量が現われる．その意味で<u>固定不連続点</u>をもつという([45] 参照)．

partiallement dégénéré や固定不連続点といった概念を厳密にすることは困難であるが，少くとも Brown 運動はそういった性質をもつことは許されないことは知られよう．

<u>7.3.</u>

こゝで再び Brown 運動を定義する最初の問題に立ち返ってみよう．Brown 運動は前述の意味での Markov 性をもち，時間的に一様で，しかも<u>正規型</u>

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

であることが望ましい．正規型という要請についてみれば，例えば(7.3)で定義されるXを若干修正して，その分布が一様分布であるようにすることは可能であるので，それをさらに正規分布であるようにすることは容易であるが，任意にn個の点をとって，その同時分布までn次元正規分布（退化しない）にすることはできない．すなわち正規過程は作れない．Lévy は，trivial なものか，又は以下に現れる例のように退化したもの以外には，正規型で Markov 過程になる例を知らないと述べて居り，［45］では「R^2 を parameter とする正規型の Markov 過程で退化していないものが存在するか？ 或は partiallement dégénéré を許したら存在するか？」という問題を提出している．しかし Lévy はこの問題の否定的な解決を予想していると思われる．この証明ではないが，関連した研究として［44］がある．そこでは parameter を離散型にし，Markov 性の他に正規型という仮定をおいてどのようなものが考えられるかを調べている．R^2 で $A_{p,q}=(p\tau, q\tau)$, $\tau>0$, $p, q=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ を頂点とする格子を考え，この格子の頂点で定義される $X(A_{p,q}, \omega)=X_{pq}(\omega)$ を考える．連続型 parameter の場合と同じく「格子の線分からなり平面を2つの部分 R_1, R_2 に分けるような任意の折線lに対して，l上の各頂点でX_{pq}が知られたときR_1での$X_{p,q}$とR_2でのX_{pq}の条件付法則が互に独立になるときX_{pq}は（単純）Markov である」と定義する．一般に $X(u,v)$ が Markov 過程でもこれから導かれる $X_{pq}=X(A_{pq})$ は Markov とは限らないが Markov chain $X_{p,q}$ から出発して近い2点の相関を大きくしながら $\tau\to 0$ として Markov 過程が得られる場合がある．1次元 parameter の正規過程では例えば Ornstein-Uhlenbeck の Brown 運動のようにそれが可能な例が多い．これを伏線として正規型で時間的に一様な $X_{p,q}$ を考える．$E(X_{pq})=0$, $E(X_{hk}X_{h',k'})=E_{p,q}$, $(h+p=h',\ k+q=k')$とする．$\{X_{p,q}\}$ が正規型であることから，その Markov 性を仮定して $E_{p,q}$ のみたすべき条件をみよう．この場合も唯見通しをつけるための議論であるから大まかな筋道だけを述べておく．仮定から $E_{p,q}$ は定数$\alpha, \beta, \gamma, \delta$が存在して，次のようにかける：

$$(7.4)\qquad E_{pq}=\alpha(E_{p-1,q}+E_{p+1,q})+\beta(E_{p,q-1}+E_{p,q+1})+\gamma(E_{p-1,q-1}+E_{p+1,q+1})+\delta(E_{p-1,q+1}+E_{p+1,q-1})+\theta_{pq}$$

但し，$\theta_{00}>0$；$(p,q)\neq(0,0)$ なら $\theta_{p,q}=0$ である．そこで

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$f(x,y) = \sum E_{p,q}\, e^{i(px+qy)}$$

とおくと（この級数の収束は仮定しておく）（7.4）から

$$(7.5)\quad f(x,y) = \frac{c}{\{1-2[\alpha\cos x+\beta\cos y+\gamma\cos(x+y)+\delta\cos(x-y)]\}}$$

$$(7.6)\quad E_{p,q} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\, e^{-i(px+qy)}\,dx\,dy$$

となるが，$E_{p,q}$ が正の定符号であることから $f(x,y) \geqq 0$ でなければならない．もし $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が負でないときは

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta < \frac{1}{2}$$

ならよい．そしてそのときは $E_{p,q}$ に対応する正規過程 $X_{p,q}$ は確かに Markov になる．こゝで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を特殊な値にして，parameter が離散型の各種の正規 Markov chain の興味ある例を得るが本節の目的には直接関係がないので省略する．

$X_{p,q}$ から格子を十分細かくした（すなわち $\tau \to 0$ とした）極限として得られる正規過程 $X(u,v)$ はどのようなものがあるかをみよう．(7.4)，(7.5) における定数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 及び c は勿論 τ に依存するから (7.6) で $p\tau \to u$, $q\tau \to v$ となるようにして $\tau \to 0$, $p, q \to \infty$ とする方法はいろいろ考えられる．

i) $\gamma = \delta = 0$, $\alpha = \beta$, $1-4\alpha = \frac{\tau^2}{4}$, c は一定という関係を保ちながら $\tau \to 0$, $p\tau \to u$, $q\tau \to v$ とするとき，(7.6) より E_{pq} はある函数 $\gamma(u, v)$ に収束するが

$$\Delta\gamma(u,v) = \lambda\gamma(u,v), \quad (u,v) \neq (0,0), \quad \lambda \text{は定数}$$
$$\gamma(0,0) = \infty$$

となって $X_{p,q}$ の極限とみなされるべき $X(u,v)$ は分散 ∞ ということになり不都合である．

ii) そこで i) において $E_{0,0} = 1$ を保つようにして $c \to 0$ にしてみれば

$$\gamma(u,v) = 0 \qquad (u,v) \neq (0,0)$$

となり $X(u,v)$ は各点に独立な確率変数が対応しているようなものになってしまう．

iii) γ が原点以外で 0 という事態をさけることも出来るが，そのような場合も

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

やはり

$$X(u,v)=X_0\cos\theta+X_1(u,v)\sin\theta,$$

X_1 は ii) で得られるもの，X_0 は X_1 と独立な確率変数，といった trivial な Markov 過程が得られる．

iv) $\beta=\gamma=\delta=0$，$1-2\alpha=\tau^2$ として $\tau\to 0$ とすれば，v を固定したとき u について Ornstein Uhlenbeck の Brown 運動が得られるが，$v_1\neq v_2$ のとき $X(u,v_1)$ と $X(u,v_2)$ は互に独立になり，退化した正規過程を得るに過ぎない．

以上の考察から，正規 Markov 過程 $X(u,v)$ の重要なクラスを $X_{p,q}$ から構成する方法は断念せざるを得ないことが推測される．こゝにおいて§7.2で述べたことゝ併せて考えるとき，本節で定義した意味での Markov 性に固執するときは R^2 を parameter 空間にもつ正規過程の典型は得られないであろうということに気がつく．Lévy は以上の様な考察が R^d を parameter 空間とする Brown 運動の定式化の背景となっていると述べている．そこで始めて§6において $X(A)$ の定義に Markov 性がないことの妥当性が納得される．正規型の他に parameter に関する一様性を $X(A)$ に課すことは自然である．以上の配慮の下に定義された Brown 運動ではあるが，尚これまで知られている種々の性質をみるとき $B(t)$ の拡張としてふさわしいものであることが知られる．

7.4.

すでに§7.1で述べたように path[1] $X(A,\omega)$ を構成する場合，同時に一様連続性も導かれたが，それより詳しく白尾［1］で次のような結果が得られている．U を R^d の単位立方体とし，$\varphi(t)$，$t>0$ を非負の連続かつ単調増加函数とする．

定義 7.1. i) $f(A)$ を R^d のある領域で定義された函数とする．もし $\varepsilon>0$ が存在して $r=r(A,B)\leq\varepsilon$ ならば $|f(A)-f(B)|\leqq\varphi(r)$，となるとき $f(A)$ は $\varphi(t)$ に関する Lipschitz の条件をみたすという．

ii) $\psi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{t}$ とし，殆んどすべての ω に対して $X(A,\omega)$，$A\in U$ が

---

1) "path" という言葉はこの場合不適当のようにも思われるが t を parameter とする場合にならって仮りにこう呼ぶ．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$\psi(t)$ に関する Lipschitz の条件をみたす（みたさない）とき $\varphi(t)$ は $\{X(A),\ A\in U\}$ の一様連続性について上級（下級）に属するといい，$\varphi\in \mathcal{U}_d^u$ ($\mathcal{L}_d^u$) とかく．

定理 7.1. $\varphi(t)$ は次の積分が収束（発散）すれば $\mathcal{U}_d^u$ ($\mathcal{L}_d^u$) に属する：

$$(7.7)\qquad \int^{\infty} t^{d-1}\,\varphi^{4d-1}(t)\,e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}\,dt$$

この定理は §4 で述べた $d=1$ のとき，すなわち $B(t,\omega)$ の一様連続性についての結果の拡張であり，$B(t,\omega)$ の場合と同じく最終的な結果である（詳しくは白尾 [1] の §2 参照）．又局所連続性についての評価も [1] により最終的な結果にまで精密化されている．すなわち

定義 7.2 $r=r(0,A)$ として，集合 $\{A;\ X(A,\omega)>\sqrt{r}\,\varphi(\frac{1}{r})\}$ が殆んどすべての ω に対して 0 と離れている（離れていない）とき $\varphi(t)$ は $\{X(A),\ A\in R^d\}$ について 0 で上級（下級）に属するといい $\varphi\in\mathcal{U}_d^0$ ($\mathcal{L}_d^0$) とかく．

定理 7.2 $\varphi(t)$ は次の積分が収束（発散）すれば $\mathcal{U}_N^0$ ($\mathcal{L}_N^0$) に属する．

$$(7.8)\qquad \int^{\infty} \frac{1}{t}\,\varphi^{2N-1}(t)\,e^{-\frac{1}{2}\varphi^2(t)}\,dt$$

これも $B(t,\omega)$ の場合の拡張である．さらに Brown 運動の射影不変性を用いて，定理 7.2 から $r(0,A)\to\infty$ のときの $X(A,\omega)$ の行動も詳しく知られている（白尾 §3）．

$\{X(A);\ A\in R^d\}$ は正規型だから各 $X(A)$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ の要素と考えられるので $L^2(\Omega)$ の用語を用いて，$X(A)$ の性質をより直観的に把握出来る場合がある（$L^2(\Omega)$ での直交は独立におきかえられることに注意）．R^d の点 A に $X(A)$ を，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ に $X(B)-X(A)$ を対応させれば

$$|\overrightarrow{AB}| = r(A,B) = E|X(B)-X(a)|^2 = \|X(B)-X(A)\|^2$$

に注意して R^d の図形と $L^2(\Omega)$ への像との幾何学的対応がつく．例えば A_n が R^d の定直線上を一方に向つて移動するとき，$X(A_n)$ は $L^2(\Omega)$ において，どの線分も他のすべてと直交するような折線を描く．又一点が R^d の多角形の辺上を連続的に動く場合等が考えられているが，特に奇異に感ぜられる事実として「$X(B)-X(A)$ と $X(M')-X(M)$ が直交するための必要且つ十分な条件は，M と M' が A と B を焦点とする回転双曲面の同じ分枝の上にあることである」が証明される．その他，線分 AB と MM' の一方が他に対して或は AM，（或は

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

BM, AM', BM') に比較して十分小さいときは $X(B)-X(A)$ と $X(M')-X(M)$ は殆んど直交すること等が知られている([43] 8章).

Lévy による Brown 運動の研究の中でも重要なものは，X が R^d のある集合 D で知られたという条件の下での $X(A)$, $A\in D^c$, の法則を知ることである．それは一旦は放棄した Markov 性に関する性質を知り，又他方で例えば §6 の $M(t)$ のように重要な正規過程の例を提供するからである．[43] の §§62, 63 には D として直線及び球面の場合がとりあげられている．X が D で知られたとき，$X(A)$, $A\in D^c$ は

$$(7.9)\qquad X(A,\omega)=\mu(\omega)+\sigma\cdot\xi(\omega)$$

と表わすことが出来る．こゝに μ は $X(M)$, $M\in D$ の函数（しかも線型）で ξ は $\{X(M)\}$ と独立な正規型確率変数である．もう少し詳しくいえば

i) D が直線のとき，A と D との距離を h とすれば (7.9) の σ は $\frac{\sqrt{\pi h}}{2}$ になる．又 A と A' が D の互に反対側にあるときは，X が D で知られたときの $X(A,\omega)$ と $X(A',\omega)$ は負の相関をもつことがわかり，独立にはならない．従って Brown 運動は Markov でないといえる．

ii) D が A を中心とする球面のとき，$X(A)$ を (7.9) のように表わせば $\mu(\omega)$ は球面上の X の平均（すなわち D 上の D の測度が 1 になるような測度についての積分）になっている．§6 で扱った $M(t)$ 過程の起源はこゝにあったのである．

iii) Lévy はこの他，D が円筒の場合に，軸上の 1 点 A における条件つき平均値，すなわち (7.9) における $\mu(\omega)$ がどのように表わされるかを研究することが重要であると言っている．恐らくそれは（単純）Markov ではないが，何等かの意味での $X(A)$ の Markov 性を研究する手掛りとして重要視しているのであろう．

尚 Markov 性については，その後 [99] §5 において，$d=2p+1$ のとき $M_\alpha(t)$ が $p+1$ 重 Markov であることに示唆されて次の問題を提出している：「S を R^d を2つの部分 R_1, R_2 に分けるような曲面とし，1 点 A と S との距離を δ とする．若し $X(A)$ が S の近傍で誤差 $o(\delta^p)$ を除いて（S 上の値及び法線方向の微分等により）与えられるならば R_1 及び R_2 における continuation（すなわち $X(A)-X(B)$, $\overrightarrow{AB}$ は S の法線方向，$B\in S$ で A は R_1 又は R_2 の点）は独立になるか？」 若しこれが肯定的にとかれたら，その性質は新しい意味での Markov 性であると述べている．さらに Lévy は [100] に

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

おいて parameter 空間が Riemann 空間である場合の Brown 運動 $X(A)$ を定義し特殊な場合，例えば R^d の球面とか，円周といった場合には $X(A)$ を White noise による積分で表わしたり，Fourier 式展開を考えたりしている．parameter 空間が R^d の場合に，Markov 性とか，White noise による積分を考えるという方向はすでに H. P. McKean により研究されていて最近新しい結果（未発表）が得られた（田中洋氏からの私信による）．今関係ある部分のみ簡単に述べれば $R^d=[0,\infty)\times S^{d-1}$（$S^{d-1}$ は R^d の単位球面）で正規型の random measure $B(dt\times d\underline{o},\omega)$, $t\geqq 0$, $\underline{o}\in S^{d-1}$ が存在して $E(B(dt\times d\underline{o}))=0$, $E(B(dt\times d\underline{o})^2)=dt\times do$（$do$ は S^{d-1} 上の一様分布）で

$$(7.10)\qquad X(A)=C(d)\int_{E_A}B(dt\times d\underline{o}),$$ E_A は OA を直径とする球，$C(d)$ は定数

と表わされる．これを用いて $p_{n,\ell}(\underline{o})$ を n 次球面調和函数とするとき，$X(A)$ は

$$(7.11)\qquad X(A)=\sum_n\sum_\ell X_{n,\ell}(t)\,p_{n,\ell}(\underline{o}),\qquad A=(t,\underline{o})$$

と展開される．こゝに

$$X_{n,\ell}(t)=\int_{S^{d-1}}X(A)\,p_{n,\ell}(\underline{o})\,do$$

である．(7.11) の第1項がちょうど Lévy の $M(t)$ 過程になっていることは興味深い．又，$d=2p+1$ の場合には $X(A)$ の法線方向の k 回微分 $X^{(k)}(A)$ を適当に定義するとき「D を ∂D が滑らかな有界領域とすれば $X, X', \cdots, X^{(p)}$ が ∂D 上で知られたとき，∂D の内部と外部の X は独立になる」こと及び「$D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_{p+1}$ をやはり境界が滑らかな領域とし $\overline{D}_k\subset D_{k+1}$ とする．X が ∂D_k, $k=1,2,\cdots,p+1$ で知られたとき D_1 と D_{p+1} の外部の X は独立になる」
が得られている．これら McKean の結果は多次元 parameter の Brown 運動の研究に大きな進歩をもたらしたものといえよう．

この他 [82] の§6や [99] 等で parameter が無限次元空間 R^ω（＝Hilbert 空間 ℓ^2）の場合の Brown 運動の研究がなされている．$M(t)$ 過程が定義されることなど，これまでのものと類似した点もあるが，著しい差異は

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$X(A,\omega)$, $A \in R^{\omega}$ がある種の "deterministic" な性質をもつことである。そしてそれは Laplace 方程式に対する Dirichlet 問題や Hilbert 空間における Plateau 問題（[49] 才3部5章参照）と深い関係があるが，我々が理解出来ない点もあるので，こゝでは唯そのような研究がなされているという注意のみに止めたい．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

§8 結び

これまで§1の大別に従って各節で Lévy の業績についてその内容を述べてきたが，それらのどこでも述べ得なかったものがある．我々がふれ得た文献の数を，100を超える彼の全著作と比較すればそのことは明らかである．このノートでふれなかったものの中には各種のものがあり，中にはこれまで述べてきたことの全体にかゝわるようなものもある．例えば［95］は題名も示すように強 Markov 性等に関する論文である．彼がこれまで強 Markov 性その他確率過程の path に関する性質で充分基礎づけられていないことを多く使って事実の直観的方法に富んだ証明を与えたことは我々がしばしば見てきた通りであるが［95］ではこれらの基礎に関する考察を与えている．そこでは与えられた確率測度の系に対してどのような path がとれるか，又そのとり方によってはどのような特異なことが起るかを具体的な例を示しながら述べてある．それに関し，path について separability 等の特性の重要な定義を与えると共に，一般理論から確率過程を定義するだけでなく，具体的構成の重要性が強調してあるが，こゝで具体的に述べる程には充分理解出来ない点があるので省略する．この［95］の例でも解るように，§7までに述べなかったもの中にはこのような事情から述べなかったものがあり，それらは，これまで述べたものと比較して我々が重要性を認めなかったせいではないのである．

Lévy の研究の特徴は既に§1でのべ，その個々の問題での現われ方については各々の節で述べて来たが，こゝでは先ずそれらをもう一度全体的観点から整理してみよう．

通常の力学的運動は，運動方程式とその初期条件で定まるが，random な要素が関係する運動においても，それと類似の構造が存在する場合がある．それは運動を規定するようないくつかのかくれたパラメーター（paramètres cachés）—— 力学的運動における初期条件と運動方程式が立てられるための諸条件のようなもの —— を知ることが出来れば将来の状態が知れるわけであるが，通常はこのようなパラメーターをすべて把握することは出来ない．しかし，この運動の過去の状態を知ることが”かくれたパラメーター“を知ることの代用となり，未来の状態を定めうるような場合がある．それは波動論における Huyghens の原理であり，遺伝の問題にも類似の事情が現われるが，確率過程においては Mar-

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

kov性として捉えられている．

このような考え方に従って彼は拡散過程を確率微分方程式で定めるという§3での研究や§6の確率過程の線型表現の問題を追求して来ている．しかも，その変動のあり方で最も基本的なものは”独立“という概念であるという観点から，彼の研究は独立なものゝ精細な研究（§4）とその汎函数としての一般なものゝ研究（§6）という形をとっている．

しかも§1でのべたように測度の系としての確率過程の性質は，それに対応する path functions に関する量で表現して研究して行くやり方で一貫されている．このことは§3の加法過程では特性函数の標準表現に対応する random な version であるLévy-Ito の表現の問題となっている．又§4のBrown運動の問題では熱方程式に関するKelvinの法則が first passage time relation としてとらえられている．更に反射壁，吸収壁という問題も，いずれも first passage time $T(x)$，maximum function $M(t)$ や $Y(t)=M(t)-X(t)$ なる量，或いは，pathの零点の性質との関連で論じられることに現われている．

このように確率過程を決める測度の性質を，path functions を通して種々の断面からとらえるやり方が，ポテンシャル論の Markov 過程を用いた研究への道を開くことは最近の研究から知られるだろう（§4）．このようなBrown運動での研究方法は Markov chain でも適用されている．

ところで，このような把握に要する現代数学的形式は，Lévyが研究した各々の時代には未だ確立されていない点が多かった．そこで彼はすべてをそれらの形式をとゝのえて問題を進めて行く形をとっていない．従って彼の結果の多くは形式上の完全性——即ち公理系よりの演繹する論理の体系——を必っていない．例えば§6でのべたように $dB(t,\omega)=B'(t,\omega)\sqrt{dt}$ という形で考えている．ところがBrown運動の pathsは殆んどすべて到るところ微分不可能なわけであるから（§4を参照），この式は特別の意味づけを要するわけであるが，彼は直観的説明だけでしばしばこれを用いて成功している．このような状態にあるため，彼の論文は通常難解だと云われている．そうして，彼を天才的とする方向と，彼を全く敬遠してさけてゆく二つの方向が確率論研究者の間に見られる．

しかし，よく考えれば，このような彼のやり方の中にも一つの原理みたいなものがあるように思われる．それは (a) 確率変数の独立性——測度の直積性——の現象形態の直観的把握と (b) 古典解析学の基本的事実に合うような形で計算が進

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

められているように思える．(a)についてはすでに述べたが，(b)の意味は，例えば，§4のBrown運動での *first passage time relation* は前にも述べたように，Kelvinの法則若しくはHuyghensの原理を念頭にいれてあるように思える．そうして Markov chain の研究もその性質——現代流に云えば強Markov性——を基礎にすることにより成功しているわけである．また拡散の研究では，(a)は接線としての加法過程を”微分的“なものというとらえ方で(b)として通常の微分方程式の性質の類推が多く意識されている．更にこのような立場は微分，一階の微分方程式，更に高階の微分方程式や微積分方程式にまで押し進めて定常過程の研究でも意識されて居るように思える．

さらに彼が研究している題目等については其の当時もしくはそれより以前に研究されていたことの影響が大きい点がしばしば見られる．例えば Markov chain についての Doob や Feller の研究が彼の51年の論文にいちじるしく反映されている．このような意味では一部で言われているように彼だけが孤立して先端を行ったのでなく，重要なことはそれらの素材から何をとり上げたかということだとも言えるかもしれない．

こゝで注目すべきことは，これらLévyの結果に現代数学的定式化が与えられた時，いずれもそれ自体の証明以上に関連した問題が設定されるという形で確率論の豊富化が得られていることである．中でも彼が一貫して用いている基本的アイディアをそれ自体の形で定式化した時は，その事実は一層顕著である．例えば最も著しいのは強Markov性[1)]の考え方であろう．

ところで，我が国における確率論の発展の歴史をみるとき直接或は間接に強くLévyの影響をうけている．これまで日本においては物理学や工学の応用の中から問題をとり出して定式化するか，又はそのようなイメージを基礎にして数学内部から原理的な問題をみつけて発展させるという伝統は弱く，数学の対象になった問題から出発し，それらを発展させ一般的な法則を得るという傾向が強かったように思われるが，Lévyの仕事の中にもそのような対象となった事柄が多い．特に1945年頃からは Lévy の業績の幾多が我が国の学者によって理解され発展させられている．その中ですぐ思いつくものをあげても

---

1) 強Markov 性の概念は J.L.Doob[1][3] に早く用いられているが，LévyはBrown運動の研究で早くから用いている．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

1. A. 加法過程の確率論的な分解に関する現代的な構成
   B. 分布の濃度函数に関する研究
2. 確率微分方程式の現代的な取扱い
3. Brown 運動の局所的および一様連続性に関する最終結果
4. 正規過程の表現の研究

等々がある．この他，日本だけでなく外国の学者によって理解され，更に我が国において深く研究されていることも多い．例えば markov chain の研究等である．

このように Lévy の仕事を理解し発展させて来た点では，日本の水準は相当高いように思われる．というのは，彼の仕事のうちいくつかは我が国で研究され進んだ成果を得ているし，外国では殆んど手をつけていないような事でも盛んに研究されていることがある．このような傾向は，如何なる時も，如何なる国においても研究の有効な手段であるとは言えないが，日本における過去の発展段階を考えるとき，きわめて有効な方法であったと思う．

いうまでもなく，Lévyの結果全体に現代数学的証明をつけるということより，そこに流れる概念や方法のいくつかに現代的な形式上も満足出来る定式化を与え，そのことにより他の Lévy の直観的演算に保証を与えることが好ましいわけである．しかしこのような観点からの問題がどれほどあるかということを先ず示して行くことが困難であることは容易に了解されるであろう．したがって，こゝではそのようなことを正面から考えずに，Lévyの仕事に関連して未解決なことの中，解決を得ることが好ましいと思われるものを次に述べる．

1°) 加法過程．すでに§3でのべたように加法過程の研究は相当詳細に行われているけれども，その性質の内 markov 過程としての特性はどんなものかまだ充分には解明されていない．例えば Lévy - Ito の分解についても現在の証明は非常に複雑で，その内，強 markov 過程の path の性質がどれだけ使われているか明らかでない．このことが研究されれば，一般の強 markov 過程の path を拡散の部分と jump で変化する二つの部分に分け；しかも相互は独立であるように出来るかという問題の解決方針も得られるだろう．例えば生成作用素の定義域の中に C^2 を dense に含み，しかも任意の $u \in C^2$ に対して

$$\frac{1}{2} b(x) \frac{d^2}{dx^2} + a(x) \frac{d}{dx} + \int_{-\infty}^{\infty} \{u(x') - u(x) - u'(x)(x - x')\} n(dx'; x)$$

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

となるような場合には係数に適当な正則性を仮定すれば，この問題に肯定的な解答が期待されるだろう．

またLévy則度やLévy-Itoの分解がその加法過程に対応するポテンシャル論においてどのような役割を果たすかとか，convolution型のkernelに対応するポテンシャル論と加法過程との関係も当然問題になるだろう．

2°) Brown運動．Lévy [43] の第6章及び第7章を現在得られている強Markov過程に関する方法で書き直すことは，例えば伊藤 [5]，Ito-McKean [1]，Ito [6] 等で行われているが，特に第7章やそれに関連して其の后発表された [66] [75] には，それを一括整理するとまだ未解決の部分もあるように思える．また time reverse の問題は G. Hunt [1]，[2] 等で取扱われているが，Lévy [43] 第6章は単に first passage time relation だけでなく，Brown運動が time reverse に関して不変であることをしばしば用いている．ところが現在のところこの問題について一般に適用出来る形での定式化はない．

またLévyのBrown運動で示した反射壁のpathの構成法のいくつかはstable processにも適用可能なこと，またそれの境界でのlocal timeがBrown運動の場合と密接な関連があること等がS. Watanabe [1] で示されているが，これらの方法の限界を明らかにすることも一つの問題である．

また反射壁のBrown運動については§4で零点の集合とexcursion過程 $e_n(t)$, $t \geqq 0$, $n=1,2,\cdots$ をお互に独立に与えてそれを構成して行くLévyの結果を，K. Ito - H. P. McKean に従ってのべたが，これは上野によって解析的に与えられたα次の境界上の過程のGreen作用素 K_α と吸収壁の過程のGreen作用素 G_α° を使って反射壁のGreen作用素を $h_\alpha K_\alpha(\frac{\partial}{\partial n} G_\alpha^\circ f)$ と与える式に大きな関連があると思われる．反射壁の一次元Brown運動では境界上の過程は零点の集合だけで定まり，excursion過程は吸収壁の過程の最小到達時間の分布とその遷移確率の密度 $p^\circ(t,x,y)$ の境界のところでのxに関する微分とだけできまる．このことは§4の記号を用いれば

$$P_0\{x(t)\in dx \,/\, T_n^{(1)} \leqq t < T_n^{(2)},\ T_n^{(1)}=u,\ T_n^{(2)}=v\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y} p^\circ(t-u,y,x)\Big|_{y=0}\left(\frac{\partial}{\partial y}P_y\{\sigma_0\in ds\}\right)^{-1} P_x\{\sigma_0\in d_v(v-t)\}$$

なることから解る．しかも上式で $u=0$, $v=s$ とおいた式は

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

$$\lim_{y\downarrow 0} P_y\{x(t)\in dx/\sigma_0(W)=s\}$$

に等しい．これらの事情を基礎に上野の方法の確率論的な考察に進むことは有益のように思える．

3°) 拡散過程．確率積分方程式を用いて拡散方程式を研究する Lévy の方法は §3 でのべたように K. Ito 其の他で整理発展されたが，最近ソビエトでは境界条件を含む場合や係数が一般の場合等も研究されている．

4°) 多次元パラメーターの Brown 運動．最近 H. P. McKean は多次元パラメーターの Brown 運動を一次元パラメーターの確率過程で展開することを考えているが，これらを含め，この過程については未解決のことが多いように思える．例えば，それから導かれる random measure の Fourier 変換として得られる多次元パラメーターの確率過程の性質等の研究がある．

5°) Markov chain．Lévy [56] の現代数学的な立場からの厳密な形の整理は K. L. Chung [4] によっても成されているが，未だ整理されていない部分も多い．すでに §5 で述べた様に Ray の compact 化の理論は Lévy の研究の整理発展に一つの有力な手がかりを与えるのではないかと思われる．この様な立場から考えられる問題点を列記すれば

a) state が stable のとき，Ray の compact 化により新たに得られた fictitious state がいわゆる境界点の働きをすることは第二の型の Markov chain では解っているが，第三，第四の型の Markov chain に対しても fictitious state の境界点としての性質を調べ境界条件を求める．当然のことながら Feller 境界や Martin 境界及びそれらを用いた境界条件との対比も一つの問題である．

b) Markov chain の第三，第四の型の分類は path の不連続点の数によってなされたが，解析的にはどのような形で反影するか，又境界条件に相違が表われるかどうか，例えば第4型については出生死滅過程等において拡散の類推として相当にこまかな事情が解ると思われるが，境界点附近の詳細な事情はまだ充分には解っていない．

c) Ray の compact 化をすれば，すべての点が instantaneous であるような第五の型の Markov chain は state が非可算の一般な Markov 過程としての特徴を多くもっている（例えば Feller-McKean の例は Ray の compact 化をすれば，一次元拡散過程そのものである）けれども，他に一般の

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

Markov 過程と異った特徴をもっているか.

d) 第六の型の chain が第五までの型の chain と第六の型の特殊なものとの結合により構成されたのであるが, 第七の型の chain もそれと類似に第六までの型の chain と特殊な第七の型の chain を用いて構成することが出来るかどうか.

6°) Semi Markov 過程. この過程の内で特徴的なクラスをみつけ出し, そのクラスに属する過程について P. Lévy の立場からくわしく調べる.

7°) 正規過程の多重 Markov 性. $X(t)$ が狭義の N 重 Markov 正規過程であるとは, 直観的に言えば, $\{X(\tau);\ \tau \le t\}$ が知られたとき $X(t+dt)$, ($dt>0$) が $X(t), X'(t), \cdots, X^{(N-1)}(t)$ 及び t 以前の $X(\tau)$ とは独立な $dB(t)$ によって定まるということであった. すなわち §6.3 における L_t が N 階微分作用素になっていることである. この立場から $N+\alpha$ 重 Markov 正規過程 ($0<\alpha<1$) を如何に定義したらよいかが推測される. 簡単のため定常過程の場合について言えば, α 階の積分作用素 I_α:

$$(I_\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}(t-u)^{\alpha-1}e^{-(t-u)}f(u)\,du$$

の逆作用素を L_α とするとき, $L_N L_\alpha X(t) = B'(t)$ (L_N は N 階微分作用素) となるものは狭義 $N+\alpha$ 重 Markov の典型といえよう. このようなものゝスペクトル測度の密度函数は $|P_N(i\lambda)\cdot(c+i\lambda)^\alpha|^{-2}$ といった形をしている. こゝに P_N は N 次多項式である. Lévy は [63] の §3.4 において, 本質的にはこれと同様な正規過程 (非定常) について論じている. 又 Lévy の $M_N(t)$ 過程を定常過程に変換した $X_N(t)$ は N が奇数 ($N=2p+1$ とする) のとき $p+1$ 重 Markov 過程の典型であったが, $X_2(t)$ は上の意味での $1+\frac{1}{2}$ 重 Markov になっていない. $X_2(t)$ が $1+\frac{1}{2}$ 重 Markov 過程となるような Markov 性の定義が与えられることが望ましいことは, 多次元 parameter の Brown 運動について §7 で述べたことから知られよう. 実際 $X_2(t)$ のスペクトル測度では, $|\Gamma(c+i\lambda)/\Gamma(c+\frac{1}{2}+i\lambda)|^2$ が密度函数になっている[1]. そこでスペクトル測度が $|\Gamma(c+i\lambda)/\Gamma(c+N+\alpha+i\lambda)|^2$ となるものも $N+\alpha$ 重 Markov と呼びたい. その場合の L に当るものも定めることが出来る.

以上2つの典型をあげたが, 何れもスペクトル測度の $|\lambda|\to\infty$ のときの漸近

1) H. P. McKean (§7.4 の註参照).

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

的性質は一致し，従って path の連続性についても同じ滑らかさであることが知られ，しかもそのとき path の Hölder 連続性の評価式は N 重 Markov 過程と比較して丁度 N を $N+\alpha$ に代えたものになっている．しかし上の2例は共に対応する作用素 L は，局所作用素にはなっていない．このような差異を考慮して $N+\alpha$ 重 Markov 正規過程を論ずることは興味ある問題であろう．

8°）線型過程．(1.2)の Φ が線型であるような確率過程については§6で述べたように表現を扱う場合には，正規過程と同様な扱いが出来る場合が多い．こゝでも簡単のため強定常の場合を考えることにすれば，次のような問題が考えられる．

(a) 特性汎函数が考えられる場合には，その特徴をみる．

(b) 正規過程の表現の拡張として，線型過程の表現の現代的定義を与える．

(c) (b)の意味での表現が存在するための条件を求める．

(d) 表現の核の性質を通して path の連続性を調べる．

(e) path の性質と分布との関係をみる．

これらの問題について若干の見通しも含めた説明をしよう．

(a) Bartlett は $Y(t)$ が時間的に一様な加法過程で2次のモーメントをもつとき

$$X(t,\omega)=\int_{-\infty}^{t} g(t-u)\,dY(u,\omega) \tag{8.1}$$

とかけるものを線型過程とよび，その特性汎函数を $C_X(\Phi)$ とするとき $\log C_X(\Phi)$ は

$$\log C_X(\Phi)=\int_{-\infty}^{\infty} K_Y\left\{ i\int_0^{\infty} g(v)\,d\Phi(u+v)\right\} du \tag{8.2}$$

とかけることを示した（M.S. Bartlett [1] §5.2）．但し $K_Y(i\phi)=\log E\{\exp[i\phi\int_0^1 dY(u)]\}$ （$Y(1)-Y(0)$ の fonction-ψ）とする．(8.1)は $Y(t)$ が2次のモーメントを持つことを仮定しなくても定義され，特性汎函数も(8.2)と同じ型になる（厳密な証明を必要とする．尚 [87] §III.6. には非定常の場合に(8.1)の形の積分が述べられている）．このような確率過程は線型過程の典型と考えられ，しかも $C_X(\Phi)$ は特徴のある汎函数である．そこで特性汎函数を知って線型過程であることが知られたら重要な発見といえよう．しかも若し $C_X(\Phi)$ の形がきまれば，K_Y により表現の random measure が g により核がそれぞれ決定されることになり表現をも知ることになる．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

(b), (c) 既に表現という語を用いたがその現代的定義を§6で述べた思想に従って与えることは勿論重要なことである．表現の存在は定義に附随した問題と思われる．この場合，表現を考えるには確率過程を構成的にとらえ，従って予測の問題にまで解決を与えるといった形で定義されなければならない．

(d) [87] §III.8. には，$Y(t)$ は (8.1) と同じとして

$$X(t,\omega)=\int_0^t G(t,u)\,dY(u,\omega)$$

と表わされる線型過程について，$u\uparrow t$ のとき $G(t,u)$ が 0 に収束する速さがわかったとき，表現の標準性を論じているが，それは path $X(t,\omega)$ の連続性に関係することである．又，(8.1) のように表わされるもので特に $g(t-u)$ が N 次 Goursat 核であるときには，g の 0 の近くでの行動が path の連続性を決めることが知られている (T. Hida and N. Ikeda [1])． これらの議論を参考にして，核の形から特に弱定常の場合はスペクトル測度から path の連続性が或る程度定まることが予想される．

(e) は (d) と逆の問題で (8.1) の $Y(t)$ が Lévy-Ito の表現により正規過程の部分と，可動不連続点をもつ部分に分解され，それに応じて，$X(t,\omega)$ も2種類（しかも両者は独立）のものゝ和になるが，或る種の線型過程については両者の path の行動は非常な特徴をもっている．その特徴をとらえて $X(t)$ の分布に関する性質（例えば正規過程とか Poisson 過程から作られたものとか）を知ることが出来れば，仮令それが特殊なクラスのものであるにもせよ，重要な認識を得ることになる．

9°) 非線型表現　§6の冒頭に述べた N. Wiener や Lévy の考え方をみれば，非線型表現を求めるという共通の目的から発生した問題であることに気がつく．線型表現を考える場合には基礎となるものは，加法過程であって，その組合せ方が従属性その他に関連して重要な着眼点であった．この加法過程と対応している無限分解可能な法則の代りに非線型表現の場合には積の意味で無限分解可能な (i.d.m.) 分布が登場する．この分布に対応する確率過程の例としては $e^{Y(t)}$，($Y(t)$ は加法過程) が典型的である．このようなもの（それは単純 Markov 過程である）の性質を詳細に調べあげておくことも非線型表現を研究する第一段階といえよう．

10°) 最後に稍小さい問題であるが，正規過程で重複度が2以上のものの研究である．Lévy [77] でもそのような例をあげているが，単なる表現の存在しな

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

ない例としてみるわけにはいかないと思う．重複度が1のものは表現を扱う立場からは定常過程と類似の取扱いが出来ることが多い．定常性とは全くかけ離れた重複度2以上のものを無視すべきでないと考えられるので敢えて付言したい．

これまで我々がLévyの著書や論文について理解し得た事を紙数の許す限り述べてきたが，概観での主張をくり返すまでもなく，彼の業蹟はその殆んどが現在でも尚重要とされる事柄であるという感を深くした次才である．最後に，我々のもった所感，さらには残された問題点についてここで提起出来るものを，認識の足らない所のあることを怖れつつも可能な限り列挙した．勿論これをもって終りとするわけではないしLévyの確率論における研究内容や思想を理解しえたとするものでもないが，一先ずここでペンを擱くことにしたい．

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

文　　献

[A] P. Lévy 文献集

[1911]

[1] Sur les équations intégro-differentielles definissant des fonctions de lignes (Thése).

[1922]

[2]* Leçons d'analyse fonotionelle. (Gauthier-Villars, Paris)

[3] Sur la détermination des lois de probabilité par leurs fonctions caractéristiques. (C. R. Acad. Sci. t. 165 854-856)

[1924]

[4] Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles. (Bull. Soc. Math. France t. 52. 49-85).

[1925]

[5]* Analyse fonctionelle. (Gauthier-Villars, Paris)

[6]* Calcul des probabilités (Gauthier-Villars, Paris)

[7] Les lois de probabilité dans les ensembles abstraits (Revue de métaphysique et de Morale. t32. 149-174)

[1928]

[8]* Cours de mécanique. (Gauthier-Villars, Paris)

[1929]

[9] Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue. (Bull. Soc. Math. France t57 178-194)

[1930]

[10]* Cours d'analyse. Tome I (Gauthier-Villars, Paris)

[1931]

---

*) [A]は Lévy の文献を知り得た限りのせた. [B]は解説の際引用した関連文献である.

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

[11] * Cours d'analyse. Tome II (Gauthier-Villars, Paris)

[12] Sur un théoreme de M. Khintchine. (Bull. des. Sci. Math. t55 145-160)

[13] Sur les series dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes (Studia. Math. III 119-155)

[14] Sur quelques questions de calcul des probabilités. (Prace Math. Fizyczne, Varsovie, 19-28)

[1934]

[15] Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) t3, 337-366, et t4 217-218)

[1935]

[16] Sur la sommabilité des séries aléatoires divergentes (Bull. Soc. Math. 63, 1-35)

[17] Observation sur un précédent mémoire de l'auteur (Ann, Scuola Norm. Sup. Pisa 4, 217-218)

[18] Propriétés asymptotiquesdes sommes de variables aléatoires indépendantes au enchaînées. (J. Math. pures Appl. Ser 8, 14 347-402)

[20] Propriétés asymptotiques de sommes de variables aléatoires enchaînées. (Bull. Sci. Math. (2) 59 84-96, 109-128)

[21] Sull'applicazione della geometria dells spazio di Hilbert allo studis delle successioni di variabili casuali (Giorn d. Ist ital. d. Attuari. 6. 13-28)

[1936]

[22] Sur la notion de probabilité conditionelle. (Bull. des Sci. Math. 60, 66-71)

[23] Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard. (Compositio Math 3. 286-303)

[24] La loi forte des grands nombres pour les variables enchaînées (J. de Math. 15, 11-24)

[1937]

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

[25]* Distance des deux variables aléatoires et distances de deux lois de probabilité (Gauthier-Villars, Paris)

[26]* Théorie de l'addition des variables aléatoires (Gauthier-Villars, Paris)

[27] Complément à un théorème sur la loi de Gauss (Bull. Sci. Math. t.61 115-128)

[28] Sur les exponentielles de polynomes et sur l'arithmétique des produits de lois de Poisson. (Ann. Ecole norm. Sup. s.3 t.54 231-292)

[1938]

[29] Distance de deux variables aléatoires et distance de deux lois de probabilité (Note final dans M. Fréchet; Généralités sur les probabilités; et Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles)

[30] L'arithmetique des lois de probabilité (J. de Math. t.103 17-40)

[1939]

[31] L'addition des variables aléatoirs definies sur une circonférence (Bull. Soc. Math. France t.67 1-41)

[32] Sur certains processus stochastiques homogènes (Compositio Math. t.7 283-339)

[33] Sur une loi de probabilité analogue à celle de Poisson et sur un sous-groupe important de groupe des lois indéfiniment divisibles (Bull. Sci. Math. t.63 247-268)

[1940]

[34] Le mouvement Brownien Plan (Amer. J. of Math. vol 62 487-550)

[1941]

[35] Intégrales stochastiques (Ann. Univ. de Lyon s.3. Sci. sect A. fasc. 4. 67-74)

[1943]

[36] Un théorème d'invariance projective relativ au mouvement

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

(1942)

brownien (Commentarii math. helvetici t. 16 242-248)

[37] Une propriété d'invariance projective dans le mouvement brownien (pli cacheté déposé à l'Académie des Sciences le 16 juin 1943, ouvert le 23 octobre 1944; C.R Acad Sc. t219 376-378)

[1944]

[38] Dérivation et intégration aléatoires et équations différentielles stochastiques (C.R. Acad. Sc. t219 602-603)

[1945]

[39] Le mouvement brownien dépendant de plusieurs paramètres (C.R. Acad Sc. t220 420-422)

[1946]

[40] Processus fortement continus et loi de Laplace (C.R. Acad. Sc. t222 839-841)

[1947]

[41] Trois théorèmes sur le mouvement brownien (Congrès de l'Assoc franç. pour avanc des sciences, Paris. octobre 1945. et Intermédiaire d Recherches math. Supplément au fasc. 9 janvier 1947. 124-126)

[42] L'analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnairds (Collague d'analyse harmonique, Nancy) 111-120.

[1948]

[43] * Processus stochastiques et mouvement brownien (Gauthcer-Villars, Paris)

[44] Chaînes doubles de Markov et fonctions aléatoires de deux variables (C.R. Acad. Sc. t226 53-55)

[45] Exemples de processus doubles de Markov (C.R. Acad Sc. t226 307-308)

[1949]

[46] Fonction aléatoires Laplaciennes. (C.R. Acad. Sc. t229 1057-1058)

[47] Nouvelles généralisations de l'integrale de Stieltjes (C.R. Acad. Sc. t229 644-646)

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

[48] Examples de processus pseud markoviens (C.R. Acad. Sc. t. 228 2004-2006)

[1950]

[49]* Problèmes concrets d'analyse fonctionelle. (Gauthier-Villars, Paris)

[50] Sur l'aire comprise entre un arc de la courbe du mouvement Brownien plan et sa corde. (C.R. Acad. Sc. t230 432-434)

[51] 同上訂正 p. 689

[52] Propriétés des lois dont les fonctions caractéristques sont $1/ch z$, $z/sh z$, $1/ch^2 z$, (C.R. Acad Sc. t230 815-817]

[53] Éléments de la théorie des processus à la fois stationaires et du markoff, dans le cas d'un système ayant une infinité dénombrable d'états possibles (C.R. Acad. Sc. t 232, 467-468)

[54] Deux nouveaux exemples de processus stochastiques (C. R. Acad. Sc. t232, 1208-1210)

[1951]

[55] La mesure de Hausdorff de la courbe de mouvement brownien à n dimensions (C.R. Acad. Sc. t233 600-602)

[56] Systèmes markoviens et stationaires. cas dénombrable (Ann. Sci. Ecole. Norn. Sup. 68 40-381; 69, 203-212)

[57] Wiener's random function and other Laplacian random functions (Pro. 2nd Berkeley Symp. 171-187)

[58] Fractions continues aléatoires. (Rendiconti del Circolo del. Mat. Palermo. Ser II t. 1 1-39)

[59] Intégrales de Stieltjes généralisés (Ann. Soc. Polonaise de Math. t25)

[60] Sur une classe de lois de probabilités indécomposable (C. R. acad. Sc. t235 489-491)

[61] Loi faible et loi forte des grands nombres (C. R. acad. Sc. t235 1186-1188)

[1953]

[62] Processus markoviens et stationaires du cinquième type infinité dénombrable d'états possible, Paramètre continue (C.R. Acad. Sc. t236 1630-1632)

[63] * Random functions; General theory with special reference to Laplacion random functions. (Univ. of Calif pub in Statisties. vol. 1. No. 12 331-390)

[64] Rectification au texte d'une Note anterieur. (C.R. Acad. Sc. t 237 964)

[65] Premiers éléments de l'arithemetique des substitutions aléatoires. (C.R. Acad. Sc. t237. 1488-1489)

[66] Le measure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien. (Giorn. Ist. Ital. Attuari 16 1-37)

[1954]

[67] Le mouvement brownien a $n=2p+1$ paramètres I, II. (C.R. Acad. Sc. t239 1181-1183, 1584-1585)

[68] * Le mouvement brownien (Memorial des Sci Math fasc 129)

[69] Processus semi-markoviens. (Pro of International Congress of Math. vol. III 416-426)

[70] Rectification à un théoreme sur le mouvement brownien à p paramètres (C.R. Acad. Sc. t238 2140-2141)

[71] Trois théorème de calcul des probabilités (C.R. Acad. Sc. t238. 2283-2286)

[1955]

[72] Le mouvement brownien à $n=2p+1$ paramètres III (C.R. Acad. Sc. t240. 1043-1044)

[73] Propriété asymptotiques de la courbe du mouvement brownien à N dimension. (C.R. Acad. Sc. t241. 689-690)

[74] Sur une classe de fonctions aléatoires gaussiennes. (C.R. Acad. Sc. t240. 1308-1309)

[75] Le caractère universel de la courbe du mouvement brownien et la du logarithme itéré (Rendiconti del Circalo Mat. di Palermo ser. II t4. 337-366)

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

[1956]

[76] Le caractère universel de la courbe du mouvement brownien et la loi du logarithme itéré. (Rend. Circ. mat. palermo (2) 4. 337-366.)

[77] Sur une classe de courbes de l'espace de Hilbert et sur une équation intégrale non linéauè. (Ann. École Norm Sup. t73 121-156)

[78] Intégration d'une équation intégrale non linéauè (C.R. Acad. Sc. t242, 1252-1255)

[79] Une nouvelle classe de fonctions symboliques les σ-fonctions (Bull. Sci. Math. (2) t80 1-14)

[80] Fonction aléatoires à corrélation linéaire (C.R. Acad. Sc. t242 1575-1578)

[81] Fonction aléatoires à corrélation linéaire (C.R. Acad. Sc. t. 242, 2095-2097)

[82] A Special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions. (Proc. 3rd Berkeley Symp vol 2 133-175)

[83] Intégration d'une equation intégrale non linéaire. (C.R. Acad. Sc. t.242, 1252-1255)

[84] Propriété asymptotique de la courbe de mouvement brownien a n dimensions (C.R. Acad. Sc. t241 689-690)

[85] Le dernier manuscrit indédit de W. Doeblin. (Bull. Sci. Math. (2) t80 61-64.)

[1957]

[86] Sur quelques problèmes de la théorie des liaisons stochastiques. (C.R. Acad. Sc. t244 1313-1316)

[87] Fonction aléatoires à corrélation linéaire. (Ill. J. of Math. vol. 1 No. 2, 217-258)

[88] Brownian motion depending on n parameters; the particular case n=5 (Proc. Symp. in Applied Math vol. 7, 1-20)

[89] Fonctions linéairement markoviennes d'ordre n. (Math.

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

Japonicae vol. 4, No. 6, 116-121)
[90] Remarques sur le processus du W. Feller. et H.P. McKean (C.R. Acad. Sc. t245, 1772-1774)
[1958]
[91] Processus markoviennes et stationaires. Cas denombrable. (Ann. Inst. H. Poincaré. t.16 7-25)
[92] Processus strictement markoviens. (C.R. Acad. Sc. t.246 1490-1492)
[1959]
[93] Sur quelques classes de fonctions aléatoires. (Journal de Math. pures et Appl. tom 38, 1-23)
[94] Un paradoxe de la théorie des ensembles aléatoires. (C.R. Acad. Sc. t. 248 181-184)
[95] Processus strictement ou presque strictement markoviens, (Compositio math. vol 14, (2) 172-196)
[96] Construction du processus du W. Feller et H.P. McKean en partant du mouvement brownien. (Probability and statistics. The H. Cramér volume Ed. by U. Grenander. Wiley New York)
[97] Symétrie et dissymétrie des produits de variables aléatoires (C.R. Acad. Sci. t.248 1920-1922)
[1960]
[98] Remarques sur certains ensembles aléatoires (Journal de Math pure et appl. tom 39 Fasc 2 13-118)
追加
[99] Random functions: A Laplacian random function depending on a point of Hilbert space (Univ. of Calif. Pub in statistics, vol. 2, No. 10 (1956), pp. 195-206)
[100] Le mouvement brownien fonction d'un point de la sphère de Riemann. (Rendiconti del Circolo Math. di Palermo, Ser. II. tom VIII (1959), pp. 1-14)
[101] Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires. (Ann. l'Ecole Norm. Sup. tom 76 (1959), pp. 59-

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

82)
[102] Quelques problèmes non résolus de la théorie des fonctions caractéristiques. (Annali di Math. pura ed applicata (IV), tom LIII (1961), 315-331).

[B] 関連文献

L. Bachelier, [1], Théorie de la speculation, Ann, École Norm. Sup. 17, 21-86 (1900).

——— [2], Théorie mathématique du jeu, Ann. École norm. Sup. 18, 143-210 (1901).

——— [3], Calcul des probabilités, Paris, Gauthier-Villars, 516 p., notament Chap. XVI, 323-338 (1912).

——— [4], Les probabilités cinematiques et dynamiques, Ann. École norm. Sup. 30, 77-119 (1913).

——— [5], Les lois des grands nombres du calcul des probabilites, Paris, Gauthier-Villars, 1937, 36.

M.S. Bartlett [1], An introduction to stochastic process (1956).

D. Blackwell [1], Another countable Markov process with only instantaneous states, Ann. Math. Statist. 29, 313-316 (1958).

S. Bochner [1], Harmonic analysis and the theory of probability, Berkley and Los Angeles (1955).

K.L. Chung [1], An ergodic theorem for stationary Markov chains with a countable number of states, Proc. Inter. Congr. Math. Cambridge, Mass vol. 1 (1950).

——— [2], Foundations of the theory of continuous parameter Markov chains, Proc. third Berkeley symp. vol II, 29-40.

——— [3], On a basic property of Markov chains, Ann. Math. 68, 126-149 (1958).

——— [4], Markov chains with stationary transition probabilities, Springer-Verlag (1960).

Sem. on Probab.
Vol.9 1961年
P1-150

K. L. Chung - P. Erdös - T. Sirao [1], On the Lipschitz's condition for Brownian motion, J. Math. Soc. Japan 11, 263-274 (1959).

I. Dobrusin [1], An example of a countable homogeneous Markov process all states of which are instantaneous (Russian), Teor Veroyastonst i. Primenen 1, 481-485 (1956).

J. L. Doob [1], Topics in the theory of Markoff chains, Trans. Amer. Math. Soc. 52, 37-64 (1942).

———— [2], The elementary Gaussian processes. Ann. Math. Stat. 15, 229-282 (1944).

———— [3], Markoff chains-denumerable case, Trans. Amer. Math. Soc. 58, 455-473 (1945).

———— [4], Stochastic processes, Wiley (1952).

———— [5], A probabilitic approach to the heat equation, Trans. Amer. Math. Soc. 80, 216-280 (1955).

C. L. Dolph and M. A. Woodbury, On the relation between Greens functions and covariance of certain stochastic processes and its application to unbiased linear prediction, Trans. Amer. Math. Soc. 72, 519-550 (1952).

A. Dvoretsky - P. Erdös - S. Kakutani [1], Double points of paths of Brownian motion in n-space, Acta Scientiarum mathematicarum, Szged, 12, 75-81 (1950).

W. Feller [1], On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc. 48, 488-575 (1940).

———— [2], An introduction to probability theory and its application, 1, 2nd ed., New York (1953).

———— [3], On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, Ann. Math. 65, 527-570 (1957).

W. Feller - H. P. McKean [1], A diffusion equivalent to a countable Markov chain, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42, 351-354 (1956).

B. V. Gnedenko - A. N. Kolmogorov [1], Limit distributions for sums of independent random variables, Moscow-Leningrad (1949)

(English translation by K. L. Chung, Cambridge, Mass. (1954)).
飛田武幸 [1], Gaussian processの表現とその応用, Sem. on Prob. 7 (1961).
T. Hida - N. Ikeda [1], Note on linear processes, J. Math. Kyoto Univ. I-1, 75-86 (1961).
G. Hunt [1], Some theorems concering Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc. 81, 294-319 (1956).
——— [2], Markoff chains and Martin boundary, Illinois J. Math. 4, 313-340 (1960).
池田 - 上野 - 田中 - 佐藤 [1], 多次元拡散過程の境界問題(下), Sem. on Prob. 6 (1961).
K. Ito [1], On stochastic processes (I), Jap. J. Math., 18, 261-301 (1942).
——— [2], 確率論の基礎, 岩波現代数学叢書 (1944).
——— [3], On stochastic differential equations, Memoirs of Amer. Math. Soc., No. 4 (1951).
——— [4], 確率論, 岩波現代数学 (1953).
——— [5], 確率過程 I, II. 岩波講座現代応用数学 (1957).
——— [6], Stochastic processes, Iota Note.
伊藤 - 福島 - 渡辺(信), 拡散過程 [1], Sem. on Prob. 3 (1960).
K. Ito - H. P. McKean [1], Diffusion, to appear.
Kolmogorov [1], Über die analyschen Methoden in der Wohrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. 104, 415-458 (1931).
——— [2], On the differentiability of the transition probabilities in stationary Markov processes with a denumerable number of states (Russian), Učenye Zapiski MGY 148 Math 4, 53-59 (1951).
国沢清典 [1], 確率論に於ける極限定理, 中文館 (1950).
H. Kunita [1], 可附番空間の上の Markov 過程 (修士論文)
——— [2], Application of Martin boundaries to instantaneous return Markov process over a denumerable states, to appear in J. Math. Soc. Jap.
Yu. V. Linnik [1], On factorizing the composition of a Gaussian and a Poissonian law, Theory Prob. Appl. 2, 34-59 (1957).
——— [2], General theorems on the factorization of infinite by

divisible laws, Theory Prob. Appl. I, 3, 3-40 (1958), II, 4, 55-85 (1959), III, 4, 150-171 (1959).

———— [3], The factorization of probability laws (Russian), Leningrad, 1960.

H.P. McKean [1], Elementary solution for certain parabolic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 519-548 (1956).

丸山儀四郎 [1], 確率論, 共立現代数学講座 (1957).

G. Maruyama - H. Tanaka [1], Ergodic property of N-dimensional recurrent Markov processes, Memoirs of the Faculty of Sci., Kyushu Univ. Ser. A, XIII, No. 2, 157-172 (1959).

I. Petrovsky [1], Ueber der Irrfahrt problem, Math. Ann. 109, 425-434, (1933~1944).

M. Nisio [1], Remarks on the canonical representation of strictly stationary processes, J. Math. Kyoto Univ., 1-1, 129-146 (1960).

D. Ray [1], Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, Ann. Math. 70, 43-72 (1959).

M. Rosenblatt [1], Stationary processes as shifts of functions of independent random variables, J. Math. Mech. 8, 665-681 (1959).

T. Sirao [1], On the continuity of Brownian motion with a multidimensional parameter, Nagoya Math. J. 16, 135-156 (1960).

白尾恒吉 [2], 確率論における強法則の精密化の一般論, Semi. on Prob. 2 (1960)

S. Watanabe [1], On stable processes with boundary conditions, to appear in J. Math. Soc. Jap.

T. Watanabe [1]. 可附番空間の上の Markov 過程から導びかれる Martin 境界とその応用, Semi. on Prob. 1 (1959).

———— [2], On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov processes, Memoires of the Collage of Sci. Univ. of Kyoto Ser. A XXXIII, Math. 1 (1960).

N. Wiener [1], Differential space, J. Math. Phys. 2, 131-174 (1922).

———— [2], Nonlinear problems in random theory, Tech. Press. of M.I.T. and Wiley New York (1958).