Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 12

FLOW の理論（上）

池 田 信 行.　飛 田 武 幸
吉 沢 尚 明

1 9 6 2

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

序　　文

本書の目的は、*flow* の一般論と、それの確率過程と古典力学系の理論への応用を解説することである。この上巻では一般論と確率過程における最も基本的な例とを考察する。確率過程のより一般的な場合と、力学系の問題は下巻でとり扱う予定である。なるべく必要な予備知識を少なくし、大学学部の数学科で普通講義されることの知識だけで読める様に努めた。各章の間の論理的関係を目次のあとに表で示してある。

緒論で理論全体についての解説を試みたが、そこで用いた用語は、第1～4章で説明されている。

本書は、1961年7月に京都大学において、伊藤清教授と著者の一人吉沢が行なったゼミナールを出発点として、著者達の共同によって作成した。

田中俊一、山田俊雄、渡辺信三の諸氏には、本書の作成に当り、多大の助力をして頂いた。特に田中氏には、附録の一部の原稿を作成願った。ここに厚く謝意を表する。

著　者

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

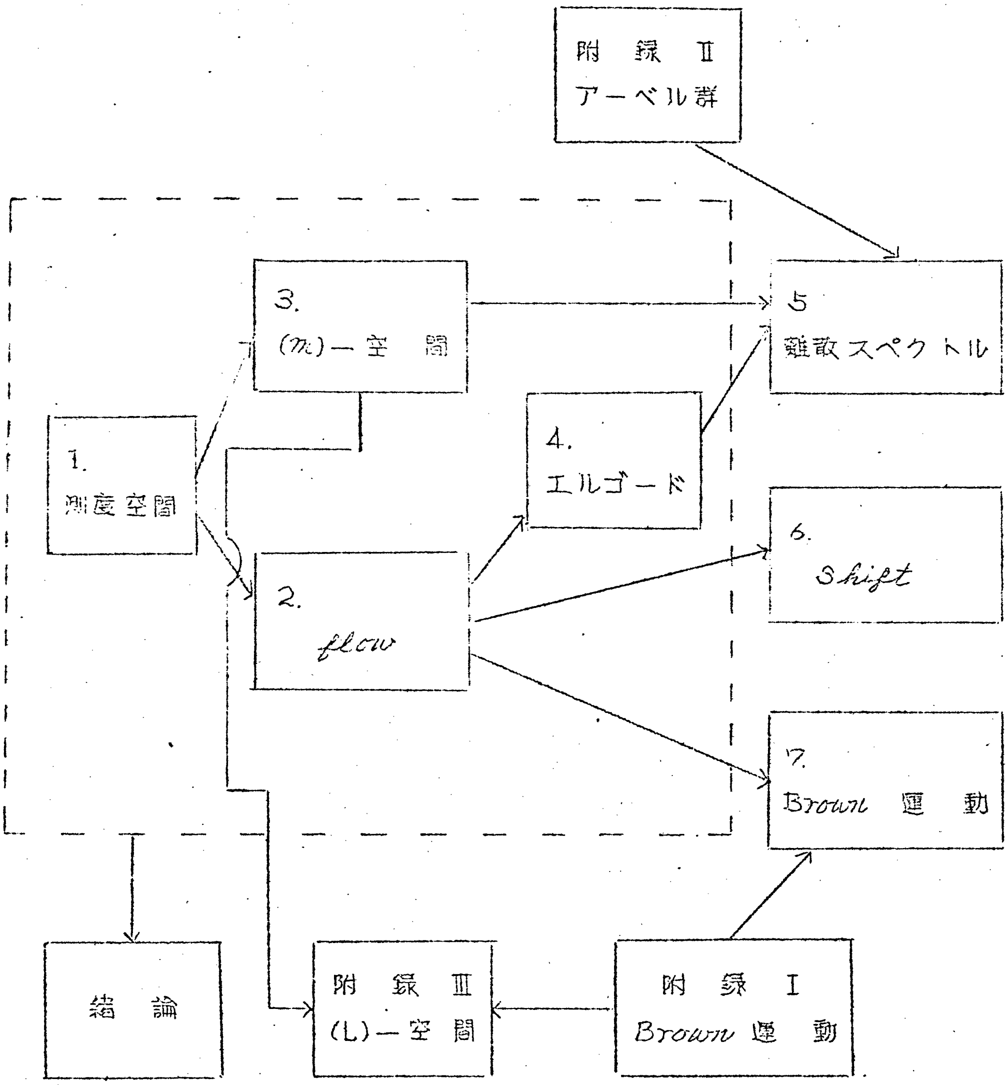
目　次

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

附 録

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

各章の論理的関係



注意

1) ⟶は、上巻の各章と、附録の各項の内容の論理的な従属性を意味する。

2) 点線で囲んだ4つの章が基本的な部分と考えられる。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

緒　　　論

本書の目的は、序文に述べた様に確率過程に1つの重点をおいて *flow* の理論を解説することである。

この緒論では、我々の立場から *flow* の理論の概要と主要な問題を解説する。下巻において再び理論全体を概観する予定である。

なお、この緒論の§2以下は本文第4章までの内容を多少前提としている

§1. 歴　史

flow の最も直観的な素朴な例の1つは、容器の中の流体の動きの記述である。勿論、流体とその運動を"数学的"に記述するのであるが、その際、幾つかの基本的な条件を設定する。例えば運動は、$-\infty < t < \infty$ なるすべての時刻 t で観察され、容器の形は変らないとする。したがって、次の様に記述することが出来る：1つの"空間" Ω があり、その点 ω が時刻 t にある位置を ω_t とする。

$$T_t \quad : \quad \omega \longrightarrow \omega_t$$

なる対応は Ω を Ω の上へ1対1に写し、かつ

$$T_t \; T_s = T_{t+s}$$

$$T_0 = 1 = \text{恒等写像}$$

なる条件を満足している。

flow の理論で取り扱う問題の中で、最も基本的なものの1つはこの様な運動の $t \longrightarrow \infty$ の時の状態である。最も直観的な例として、容器の中の水を何時までもかきまぜることにする。今、この水の中へ赤インクを一点落すとかきまぜている中にインクはだんだんと混合して終には、水全体が一様に薄赤く見えて来る。　この現象を"数学的に"述べると、どうなるであろうか？　例えば：Ω（すなわち水）の1つの部分集合B（すなわち赤インク）の T_t による像は、$t \longrightarrow \infty$ の極限に於いて Ω の中に一様に分布する。この言い方は2つの点で正確でない。第1に"一様"ということの意味を明確にしていない。例えば、Ω の中で稠密であるという様なことだけでは、インクが全体に拡散したことにはなっても、水が全体に"一様に"赤いということを言い表わしてはいないであろう。この様な量的の"一様性"を表わすには、

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

必要，したがって体積（測度）の概念を必要とする。第2に一様に拡散した“極限の状態”に“漸近”するということを記述する概念が必要である。いわゆる“エルゴード定理”はこの様な問題に関する命題である

flow の問題は、古典的な（Hamilton の）力学系や統計力学ですでに前世紀末から物理学者の間で議論されていたが、1930年頃に Koopman, von Neumann, Birkhoff 等によって数学的に定式化された。この理論は、古典的な問題にとって（それを完全に解いたわけではないが）、その意味を明確にしたことと、数学的な手段を与えたこととで重要な意義をもっている。

flow の理論やエルゴード定理は、その後、種々の方向へ一般化された。Wiener, Kolmogorov, Khintchine 等は確率過程の研究に flow の概念を応用して1つの新しい分野を開いた。

flow は次の様に定義される；$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする。（本書では $\mu(\Omega)=1$ の場合のみとり扱う）．T_t を保測変換，すなわち、$\Omega \ni \omega \longrightarrow \omega' \subset \Omega$ なる1対1変換で $\mu(B)=\mu(T(B))=\mu(T^{-1}(B))$，なるものとする。これが $T_t T_s = T_{t+s}$ $(-\infty<s, t<\infty)$ なるとき flow という。

また，$\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2$，$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$，$\mu(\Omega_i) \neq 0, \neq 1$ で，かつすべての T_t が Ω_i を Ω_i にうつすとき，flow $\{T_t\}$ は 分解可能と言い，そうでない時に エルゴード的という。

flow の基本的な例を3つあげる。

例 1　　トーラスの上の flow．トーラスは正方形

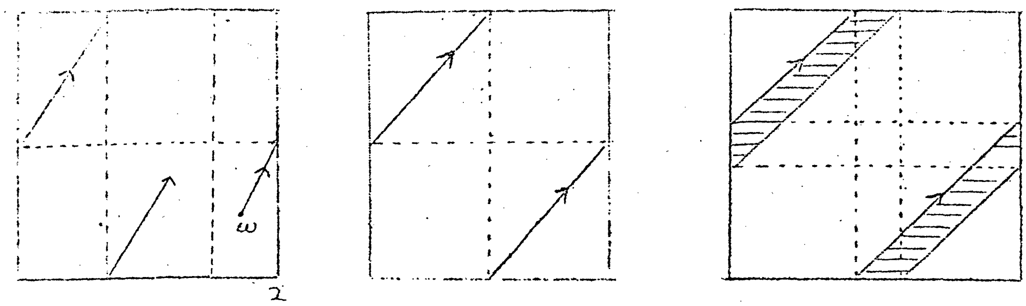
$$Q : 0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

の上下の辺（$y=0$，$y=1$）と左右の辺（$x=0$，$x=1$）をそれぞれくっつけたものと考えることが出来る．すなわちトーラスの点を (x, y) で表わすとしたがって、この上の flow を正方形 Q の上で表わすことが出来る。いま、α, β を $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ なる実数とし、

$$T_t : \omega=(x, y) \longrightarrow (x+t\alpha, \; y+t\beta)$$

なる flow を考える。1つの点 ω の動く道は、図(A) のように表わせる。

Sem. on Probab.
Vol.12　1962年
P1-83



(A)　　(B)　　(C)

この道は2種類の形が可能である。すなわち，(1) α/β が有理数のときと，(2) α/β が無理数のときとで、全く異なった形となる．(1)の場合はどの点から出た道も、図(B) のようにトーラスを有限回廻ってもとに戻り、閉じた道となる．(2)の場合は、この道は何時までも、元へもどらず、トーラスの中の周密な影を作る。この場合はエルゴード的である。(1)の場合はエルゴード的でない。例えば、図C の様にΩは斜線の部分と、その残りとに分割される。

例 2　　古典的力学系の flow．$H(q_1, \cdots q_K, p_1, \cdots p_K)$ の（2K次元の）空間（“相空間”）とすれば、Hに対応する Hamilton の方程式系は、$\tilde{\Omega}$の中に1つの flow

$$T_t \;:\; \omega \longrightarrow \omega_t$$

を定義する．（$\tilde{\Omega}$には適当な測度が定義出来る）　Ωを$\tilde{\Omega}$の中でエネルギーが一定の点の集合とすれば，Ωは2K－1次元の超曲面でT_t はΩの中でまた1つの flow を定義する。或いは一般にK個の積分 $I_1, \cdots I_s$ が存在するとすれば、

$$I_1 = c_1, \cdots\cdots, I_s = c_s$$

という条件によって、$\tilde{\Omega}$の中の2K-S次元の集合が定義される。この上でもT_t は1つの flow を与える。

古典力学系の問題では、この flow がエルゴード的か、どうかが、最も根本的な問題なのであるが、これは非常にむつかしくて、現実的な場合には殆ど解けていない。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

例 3. Brown 運動の flow. Ω を Brown 運動の空間とする。すなわち、$\mathfrak{J}$ をすべての有限の区間 I の集合とし、$\omega = \omega(I)$ を $\mathfrak{J}$ で定義され、実数値をとる函数とする。Ω を ω 全体の集合、すなわち"Wiener 空間"とする。Ω には"Wiener 測度"μ が定義される。ここで

$$T_t \;:\; \omega \longrightarrow \omega', \quad \omega'(I) = \omega(I+t)$$

(ただし、$I+t$ は I を t だけずらした区間を意味するとする)と、すれば T_t は Ω の上の flow である。(すなわち、Wiener 測度 μ は T_t で不変である。)

§2. 一般的問題

一般的に先づ、次の問題が考えられる

A. エルゴード性に関する問題、

(1) $\{\Omega, T_t\}$ がエルゴード的でなければ、例2の様に Ω を"分割"して各部分の上では、T_t がエルゴード的になる様に出来るか? これは von Neumann によって肯定的に解決された。したがって、任意の flow はエルゴード的なものから"合成"される。このことから、多くの場合、エルゴード的な flow の研究に限っても、十分であることがわかる。

(2) エルゴード定理の一般化. エルゴード定理は或意味で極限の状態を記述する手段として重要な意味をもっている。これを数学の種々の問題に応用するために、一般的に研究することは興味のある問題であって、多くの研究がなされている([7, 21]を参照)

(3) 具体的に与えられた flow がエルゴード的か否かを判定する問題、特に、古典的力学系の場合は重要であるが、上述の様に困難な問題である。

B flow の分類に関する問題

次の問題は理論的に先づ与えられるもので、最も基本的であろう。或る1つの理論に表われる flow (例えば、古典系の flow, 或いは確率過程の flow)は、どれだけあるか? 或いはそもそも一般に flow にはどれ位の種類があるか? この問題を明確にするには、2つの flow をどの様な立場から同一視するかをきめなければならない。現在、基本的なものは、次の2つの立場である。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

(1) 計量的同型 : Ωの上にT_t, Ω'の上にT_t' という２つの*flow* が与えられたとする。ΩからΩ'への１対１の保測変換Sが存在して,

$$T_t = S^{-1} T_t' S$$

となる時, T_t と T_t' が計量的同型 (*metrically isomorphic*) 又は、単に同型という。我々はいま *flow* を測度空間Ωの変換として定義しているのだから、この定義は自然である。

(2) スペクトル同型 : *flow* の研究にはそのスペクトルが重要な手段である。したがって同じスペクトル測度をもつ *flow* を同一視することは、このスペクトルの理論にとっては都合が良い。

この様に定義すれば、計量的同型ならば、スペクトル同型であることは明らかである。逆は一般には成立しない。(特に離散スペクトルの場合は、才３章に述べる様に、逆が成立する。) すなわち、同じスペクトルをもつ *flow* でも同型でないものが存在する。したがって、スペクトル同型の *flow* を更に分類する手段が問題となる。その１つとして、Kolmogorov は(1958年) *flow* の"エントロピー"というもの定義し、これを用いて例えば同じスペクトルをもつ *shift* (才６章参照) の中に、連続無限個の異なった型のものがあることを証明した。

エントロピーが(同じスペクトルをもつ範囲の) *flow* を完全に分類できるか否かはまだ不明である。

同じ系統の問題として、*flow* のスペクトルを特徴づける問題がある。すなわち、ユニタリ作用素の１パラメータ群の中で、どんなスペクトルをもつものが *flow* から導かれるかは、(離散スペクトルの場合以外は) わかっていない。具体的に与えられた *flow* のスペクトルを計算する方法を与えることは重要な問題であるが、一般には未解決である。しかし、確率過程の *flow* に対しては、かなりよくわかっている。

分類の問題と同様に、*flow* の定義そのものを上に述べたものよりも精密にすることが考えられる。例えば、古典的 *flow* は、抽象的な測度空間ではなくて、微分可能な多様体の上に、微分方程式によって定義されるのであるから、もっと解析的な概念を用いた定義の方が妥当かも知れない。その様なものに対しては、同型の定義も、より精密でなければならない。

同じことは確率過程の *flow* についてもいえる。この場合の同型は *Borel*

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

系に対する特殊な条件を満足するものであることが必要である。

§3. 主要な問題

現在研究されている主要な理論には、力学系の flow と定常過程の flow がある。この2種類の flow の理論の各々について、問題とその意味を概説する。

(1) 定常過程の flow

Brown 運動から導かれた flow を例3に掲げたが、一般の強定常過程から同様にして flow を定義することが出来る。これは、むしろ定常過程を flow として見るということ、すなわち、確率過程の flow であるという性質を抽象することである。この思想は確率過程の研究に1つの重要な見地とそれに伴う手段を与える。定常過程は予測の理論に応用されるが、この点においても、flow は重要な意味をもつ。

確率過程を flow としてみることによって、先づ確率過程を分類する立脚点が明確になる。すなわち、そのスペクトルによって分類するか、更に（計量的）同型の概念で分類することができる。そうすれば、その同型類の中に特定の性質をもつ代表（例えば Brown 運動或いは Markov 過程）を選び、他のものをその代表のもので"表現"するという問題に明確な基礎を与えることができる。この方法は予報量の構成に応用される。

確率過程の従来の研究は、定常過程の極く一般な理論と Markov 過程に対する特殊な研究とが、その主な内容であった。一般論は2次のモーメントまでを用いて、確率過程の非常に粗い分類を行うものである。これは線型予測への応用には十分であったが、この方面の問題は既に略々完了している。一方 Markov 過程に対しては、ポテンシャル論と関係する理論の様な、計量不変的でない（すなわち、flow 的でない）問題が研究されてきた。flow を基礎とする上述の問題は、この両者の中間に在るものとして、今後、確率過程に対して、基本的な重要性をもつであろう。

要約すれば、研究せんとする問題に応じて確率過程の分類を明確にすべきである。すなわち、確率過程のどの性質に属する問題であるかを明らかにすることが重要である。Brown 運動の flow としての問題を組織的に研究することは、Wiener の仕事の1つであった。〔16, 17〕 一般の定常過程に対して flow の理論はこの様な研究（例えばスペクトルなど）の基礎を与える。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

古典力学系の flow

§1に述べた様に、相空間$\tilde{\Omega}$の中に積分$I_1, ----, I_k$によって$2S-k$次元の曲面Ωが定義され、このΩの上に flow の理論が適用される。特に、$I_1, ----, I_k$以外に第1種積分が存在しないか、又は古典的方法で、それを見出すことが出来ない場合には、Ωの上の flow がエルゴード的であるか否かを調べることが重要となる。そしてエルゴード的ならば、そのスペクトルを計算し、エルゴード的で無ければ、エルゴード的な部分へ分解することが先づ問題である。

現在までにこの様に問題が解けている場合は、2つしかない。1つは到る所、負の曲率をもった曲面の場合(E. Hopf),　　他の1つは楕円面の上の運動(Kolmogorov [8])である。これらの場合については、下巻で述べる予定であるが、一般の力学系に対して上に述べた様な方針で理論を構成することは残された重要な問題である。

こゝで述べた2つの問題は、それぞれ数学の他の多くの分野と関連し、広く数学全体の中で重要な意義をもっている。確率過程の flow の研究は(確率過程や予測自身は、勿論であるが)一般に種々の函数空間の構造や、その中の　測度の様な函数解析の問題と本質的なつながりを持っている。古典力学系の flow は、かつて、微分方程式、変分法、微分幾何学、解析函数、変換群などの諸理論の交叉する所であったし、現在もこれらの他、更に函数解析の新しい諸理論と深い関係をも持っている。この意味からこゝに述べた様な flow の理論は数学全体の進歩にとって(かってそうであった様に)今後、重要な役を果すであろう。一般に言って数学の進歩のためには、異った種々の分野の有機的な結合が極めて重要であると共に、困難な問題が中心となって、この様な結合が促されるのが常だからである。

§4. 本書の各章についての説明

ここで本書の各章の内容や目的について概略の説明をする。第1章から第4章までは flow の一般的な基礎理論の解説である。現在の flow の理論の理解のために必要と思われる最小限の一般的事項をこの部分に要約することを試みた。測度空間と flow についての定義や、基本的な結果と共に、応用上最も都合が良いと思われる完備距離空間の上の測度論を説明した。これに対応する抽象的な測度の理論は、本文では用いなかったので、附録Ⅲとして収めてある。

第5章は、flow の中で最も簡単な離散スペクトルをもったものの理論で

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

ある。この場合 flow は、そのスペクトルから型がきまると共に、コンパクトAbel群を用いて"標準形"を作ることができる。flow の内部な理論(すなわち具体的問題への応用ではなくて、flow という概念そのものの研究)の典型として、また、あとで述べる具体的な問題の理解の一助として、この理論を紹介する。こゝで必要なAbel群の理論については、附録IIで説明しておいた。

第6章では、いわゆるShiftの，第7章ではBrown運動のflow（実はWhite noise の flow）のスペクトルを計算し、何れもσ-Lebesqueであることを示す。本書の主要目的の1つである定常過程のflowの中で、Brown運動のそれは次の意味から重要で、かつ基本的である。すなわち、定常過程をBrown運動によって表わすという問題があるが、そのために、Brown運動のflowをよく調べておくことが必要である。また、技術的には加法過程であるということによって、スペクトルの計算が容易である。我々は第7章ではflowの一般論を適用することによって、スペクトルを計算するが、同じ結果が以前に角谷教授と伊藤教授とによって（重複Wiener積分を用いて）得られている。第6章でShiftを考察するのも同じ理由である。Shiftは本来の意味のflowではなく、時間のパラメータが離散であるものであるが，独立確率変数によって表わされるという構造をもち、そのために取扱いが容易である。（Brown運動はShiftの連続的な拡張と考えることができる。）すなわち、定常過程の最も簡単な典型という意味で、一般論への入門として興味があるであろう。それだけでなくて，Shiftのスペクトルを調べることは（確率変数の構成というWiener の問題〔19〕の様な具体的問題に対する手がかりをも与える。

以上が本書（上巻）の内容の大要である。flowの理論に含めるべき問題であって、本書（上,下両巻）において詳しく取扱うことの出来ないものが沢山あるが、それらについては、下巻で触れることにする。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

第I章 測度空間と保測変換

§1 測度空間

測度空間は本書に述べる理論全体の基礎である

定義1・1 測度空間(measure space) $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$: Ωを抽象集合, $\mathcal{B}$をその部分集合のつくるBorel族, μを測度とする. 特にことわらぬ限り$\mu(\Omega)=1$とし, かつ完備(complete)とする. 即ち$N\in\mathcal{B}$, $\mu(N)=0$, $N'\subset N$ ならば $N'\in\mathcal{B}$。

Ωの部分集合の族$\{A\}$から生成されるBorel族を$\mathcal{B}\{A\}$と書くことにする

定義1・2 測度空間$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$が可分(separable)とは, 可算個の元よりなる$\mathcal{B}$の部分集合$\{A\}$が存在して, 任意の$B\in\mathcal{B}$に対し, $B'\in\mathcal{B}\{A\}$が存在して $\mu=(B\ominus B')=\mu(B\cup B'-B\cap B')=0$ となることをいう.

定義1・3 $\mathcal{B}$のatom(或いはatomic element)とは$\mathcal{B}$の元Bで, $\mu(B)>0$であり, かつ任意の$A\subset B$に対し $\mu(A)=\mu(B)$又は$\mu(A)=0$となるものをいう.

測度空間の最も基本的な例は区間$\Omega=[0,1]$における普通のLebesgue測度である. これを以下Lebesgue空間(或いは"具体的なLebesgue空間")と呼ぶことにする. これはよく知られている様に可分であり, atomをもたない.

区間$[0,1]$の両端をつないで円にしたもの, 即ちmod.1で考えた実数の集合を$\mathbb{T}$又は$\mathbb{T}^1$("1次元トーラス")と書く. これのn個の直積$\mathbb{T}^n$("n次元トーラス")も可分な測度空間である.

以下我々は原則として可分な測度空間のみを考察する. 可分でない測度空間の例としては, 上のLebesgue空間の非可算無限個の直積空間などがある.

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

§2. 可測変換

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を§1の意味の測度空間とする

定義2・1 準同型（homomorphism） $T:(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ と $(\Omega', \mathcal{B}', \mu')$ を二つの測度空間とし，T を Ω' の上への写像とする．$E' \in \mathcal{B}'$ ならば $T^{-1}(E') \in \mathcal{B}$，（これを T が"可測"であるという）又 $E \in \mathcal{B}$ ならば $T(E) \in \mathcal{B}'$ かつ $E' \in \mathcal{B}'$ に対して $\mu'(E') = \mu(T^{-1}(E'))$ なるとき T を準同型という．

定義2・2 同型（isomorphism）：T を Ω から Ω' への準同型とする．T^{-1} が存在して（即ち T が1対1であって）かつそれが Ω' から Ω への準同型であるとき T を同型という．またこのとき Ω と Ω' は同型（isomorphic）という．

注意 同型 T に関しては明らかに任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $\mu(B) = \mu'(T(B))$ が成立する．このことを T が保測的（measure preserving）であるという

定義2・3 特に $(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = (\Omega', \mathcal{B}', \mu')$ のとき準同型 T を自己準同型（endomorphism），同型を自己同型（automorphism）という．

例1. α を1つの実数とし，測度空間 $\mathbb{T}^1$ に於いて $T: \omega \to \omega + \alpha$ とすれば T は $\mathbb{T}^1$ の自己同型である．一般に実数の組 $(\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n)$ に対して

$$T: \mathbb{T}^n \ni \omega = (\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n)$$

$$\to \omega + \alpha = (\omega_1 + \alpha_1, \cdots\cdots\cdots, \omega_n + \alpha_n)$$

は $\mathbb{T}^n$ の自己同型を与える．

例2 Ω を Lebesgue 空間の直積，即ち単位正方形，Ω' を Lebesgue 空間とする．$\Omega \ni \omega = (x, y) \longrightarrow x \in \Omega'$ なる対応 T は Ω から Ω' への準同型である．

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

定義2・4　TをΩの自己同型，T'をΩ'の自己同型とする．いまΩからΩ'への同型Sが存在して$T'=STS^{-1}$ならばTとT'は同値(equivalent)であるという．

§3. 測度空間の分割

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$を1つの測度空間とする

定義3・1　$\Omega=\bigcup_{\alpha} C_\alpha$，$C_\alpha\in\mathcal{B}$，$C_\alpha\cap C_{\alpha'}=\phi\ (\alpha\neq\alpha')$のとき$\{C_\alpha\}$のことを$\Omega$の分割(partition)といい，$\zeta=\{C_\alpha\}$と書く．

定義3・2　Ωの分割$\zeta=\{C_\alpha\}$が与えられたとき　$X=\bigcup C_\alpha$の形の集合($\bigcup$はindex αの部分集合についての和集合)が$\mathcal{B}$に属するときこれをζ-set又はsaturated setと呼ぶ．

このときつぎの主張が成立つことは明らかである．

Prop. 3・1　Tを$\Omega\to\Omega'$の準同型とし，又Ω'の各点が可測($\mathcal{B}'$)ならば$C'\in\Omega'$に対して$T^{-1}C=X_C$とおけば，$\zeta=\{X_C\}$はΩの分割である．

定義3・3　Ωをある1つの測度空間として，$\zeta=\{C_\alpha\}$をΩの分割とする．またΩ/ζをC_αを元とする空間とし$\mathcal{B}_\zeta$，μ_ζをつぎの形で定義する．：$X\subset\Omega/\zeta$に対して$Z=\bigcup_{C_\alpha\in X} C_\alpha\in\mathcal{B}$なるとき，かつそのときのみ$X\in\mathcal{B}_\zeta$とし，その$X$に対しては$\mu_\zeta(X)=\mu(Z)$．このとき$(\Omega/\zeta, \mathcal{B}_\zeta, \mu_\zeta)$を測度空間$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$の$\zeta$による商空間(factor space)という

Prop. 3・2　ζをΩの分割，Ω/ζをそれによる商空間とすると，準同型$T:\Omega\to\Omega/\zeta$が存在して$Z=\bigcup_{C_\alpha\in X} C_\alpha$に対して$T(Z)=X$となっている．

次にΩ上の測度μの"分解"を考える
以下$\zeta=\{C\}$の元CをΩ/ζの元として用いるときは$\overline{C}$という記号を用い，Ωの集合として用いるときは単にCと書くことにする．

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

定義3・4　ζをΩの分割とする．ζによるμの分解$\{\mu_{\bar{C}}\}$とは次の条件をみたす測度の族をいう．

1) $\forall \bar{C}$に対し$\mu_{\bar{C}}$はC上の測度

2) $\forall A \in \mathcal{B}$に対し

a) $A \cap C$は可測$(\mu_{\bar{C}})$

b) $\mu_{\bar{C}}(A \cap C)$はほとんどすべての(μ_ζ) $\bar{C}$に対して$\bar{C}$の可測函数

c) $\mu(A) = \int_{\Omega/\zeta} \mu_{\bar{C}}(A \cap C)\, d\mu_\zeta$

注意　$\{\mu_{\bar{C}}\}$は$\zeta = \{C\}$から一意的に定まる．

証明　$\{\mu_{\bar{C}}\}$，$\{\mu'_{\bar{C}}\}$をμの分解とする．いま，$X \subset \Omega/\zeta$　$T^{-1}(X) = Z$とすれば

$$\int_X \mu_{\bar{C}}(A \cap C)\, d\mu_\zeta = \int_{\Omega/\zeta} \mu_{\bar{C}}(A \cap Z \cap C)\, d\mu_\zeta$$

$$= \mu(A \cap Z) = \int_X \mu'_{\bar{C}}(A \cap C)\, d\mu_\zeta$$

故に $\int_X \mu_{\bar{C}}(A \cap C)\, d\mu_\zeta = \int_X \mu'_{\bar{C}}(A \cap C)\, d\mu_\zeta$

$\mu_{\bar{C}} = \mu'_{\bar{C}}$　　（証終）

§4 mod 0について

応用上は，以上の同型や同値の概念を少し一般化しておくと便利である．

定義4・1　測度空間ΩとΩ'が mod 0で同型（isomorphic mod 0）とは次のことがなりたつことである．；
$\mu(N) = 0$．　$\mu'(N') = 0$なる$N \in \mathcal{B}$，$N' \in \mathcal{B}'$が存在して$\Omega - N$と$\Omega' - N'$とが同型（isomorphic）である．

このとき，この$\Omega - N$から$\Omega' - N'$への対応をΩからΩ'への mod 0 の同型（isomorphism mod 0）という

定義4・2　T_1，T_2を共にΩからΩ'へ mod 0 の同型とする
$\mu(N) = 0$，$N(\subset \Omega)$が存在して　$\Omega - N$の上でT_1とT_2とが等しいとき：T_1

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

ことは mod 0で等しいという

<u>定義4・3</u>　Tが測度空間Ωの<u>mod 0の自己同型</u>であるとは，$\mu(N)=0$なる集合$N\in\mathcal{B}$が存在して，Tは$\Omega-N$に於ける自己同型であることをいう。

<u>注意</u>　Tが定義4・1の意味でΩをΩの上へ写すmod 0の同型であれば，適当なNを構成することによってTは定義4・3の意味でのmod 0の自己同型となる。（証明は読者に任せる）

<u>定義4.4</u>　T，T'がそれぞれ測度空間Ω，Ω'の上のmod 0の自己同型であるとする。T，T'が<u>mod 0で同値</u>（equivalent mod 0）とは，$\mu(N)=0$，$\mu'(N')=0$なる$N\in\mathcal{B}$と$N'\in\mathcal{B}'$および$\Omega-N$から$\Omega'-N'$への同型Sが存在して，次の条件がみたされていることをいう。

1) T, T'は夫々$\Omega-N$，$\Omega'-N'$の自己同型
2) $T=S^{-1}T'S$

<u>§5 測度代数</u>

測度空間（Ω，$\mathcal{B}$，μ）が与えられたとき，問題によっては$\mathcal{B}$をΩの部分集合の族と考えるよりも単に抽象的な"σ－代数"（σ－algebra）と考えた方が都合のよいことがある。

<u>定義5・1</u>　σ－完備Bool代数$\mathcal{B}$を<u>σ－代数</u>ということにする。即ち集合$\mathcal{B}$には束（lattice）演算$\vee$，$\wedge$が定義され更にその元B，B'……の間につぎの関係が成立するとする。

1) $\forall B\in\mathcal{B}$，$1\vee B=1$　なる$1\in\mathcal{B}$が唯一つ存在する
2) $\forall B\in\mathcal{B}$，$0\wedge B=0$　なる$0\in\mathcal{B}$が唯一つ存在する
3) $\forall B\in\mathcal{B}$，$\exists A$（一意）：$A\vee B=1$　$A\wedge B=0$
4) $\forall\{B_n\}\subset\mathcal{B}$，$\exists B=\bigvee_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathcal{B}$

これは勿論測度空間のBorel族のみたす条件を抽象的に定式化しただけのものである。即ち$\mu(B\ominus B')=0$なる二つのBorel集合B，$B'(\in\mathcal{B})$を同一視してσ－代数$\mathcal{B}$を定義する必要あればこうして作ったσ－代数を$\widehat{\mathcal{B}}$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

と書くことにする．σ－代数$\mathcal{B}$の各元Bには$\mu(B)$を対応させる．このとき$\widehat{\mathcal{B}}$を測度代数（measure algebra）と呼ぶこともある

§1で定義した測度空間Ωの可分性やatomはいずれもσ－代数における概念と考えると自然である．

定義5・2　σ－代数$\mathcal{B}_1$から$\mathcal{B}_2$への同型とは次の条件をみたす写像τのことをいう．

1) τは$\mathcal{B}_1$を$\mathcal{B}_2$の上へ1対1に写す

2) $\tau(\vee_{n=1}^{\infty} B_n)=\vee_{n=1}^{\infty}\tau(B_n)$

3) $\tau(\wedge_{n=1}^{\infty} B_n)=\wedge_{n=1}^{\infty}\tau(B_n)$

4) $\mu(\tau(B))=\mu(B)$

特に$\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2$なるとき自己同型という

定義5・3　τ，τ'をそれぞれσ－代数$\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$の自己同型とするとき，τ，τ'が同値であるとは，$\mathcal{B}_1$から$\mathcal{B}_2$への同型σが存在して，$\tau=\sigma^{-1}\tau'\sigma$となることをいう．

測度空間の間の同型や自己同型とこれらの定義との関係は次の様に示される．

Prop. 5・1　測度空間$(\Omega\cdot\mathcal{B}\cdot\mu)$から測度空間$(\Omega'\cdot\mathcal{B}'\mu')$への同型mod 0 Tが与えられたとき，σ－代数$\widehat{\mathcal{B}}$から$\widehat{\mathcal{B}'}$への同型τが導かれる．

このときmod 0で等しいT_1，T_2は同じτ_1，τ_2を導く．

Prop. 5.2　T，T'がそれぞれ測度空間$(\Omega,\mathcal{B},\mu)$，$(\Omega',\mathcal{B}',\mu')$のmod 0の自己同型であれば，これからσ－代数$\widehat{\mathcal{B}}$，$\widehat{\mathcal{B}'}$の上の自己同型$\tau$，$\tau'$が導かれる．$T$と$T'$がmod 0で同値であれば$\tau$，$\tau'$は同値である．

注意1　一般の測度空間Ωの場合はProp 5・1，prop 5・2の逆は一般には成立しない．即ちσ－代数としての同型τが与えられたとき，τは必ずしも測度空間のmodの同型から導かれるとは限らない．ここでは反例

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

ではないが，この現象は［ 2 ］で完全に分析されている．Ωが適当な条件をみたす場合（例えば"(m)-空間"の場合）には，第三章で prop 5・1 の逆を証明する．

注意 2　測度代数（$\mathcal{B}$, μ）が可分で atom をもたないならば Lebesgue 空間（即ち区間［0, 1］）の測度代数と同型である．（逆は勿論正しい）附録IIIでこの証明を述べる（これも［ 2 ］にある）このように Lebesgue 空間は測度代数としては簡単に特徴づけられる．しかし可分で atom をもたぬすべての測度空間が Lebesgue 空間と（測度空間として）同値なのではない．（第3章参照）

§ 6.　Hilbert 空間

測度空間（Ω, $\mathcal{B}$, μ）が与えられたとき，その上の Hilbert 空間を考察することによって保測変換の問題を作用素の問題として取り扱うことができる．

定義 6・1　空間Ωの上の $\mathcal{B}$－可測函数の集合に，μによって内積を定義した Hilbert 空間を $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 又は略して $L^2(\Omega)$，(L^2) などと書き，これを測度空間Ωの上の Hilbert 空間と呼ぶ．

測度空間Ωの性質は $L^2(\Omega)$ に反映する．例えば次の命題はよく知られている．

Prop. 6・1　測度空間（Ω, $\mathcal{B}$, μ）が可分であるときかつそのときに限り $L^2(\Omega)$ は可分である．

注意　Hilbert 空間の定義からわかる様に $L^2(\Omega)$ は（（Ω, $\mathcal{B}$, μ）よりはむしろ）測度代数 $(\hat{\mathcal{B}}, \mu)$ によってきまる．従って (L^2) を用いて知られることは，$(\hat{\mathcal{B}}, \mu)$ に関すること．（例えば自己同型 T ではなくて，$\hat{T}$ に関すること）であると言うことができる．以下に述べる命題も，その様に解釈することができる．

Prop. 6・2　T を測度空間（Ω, $\mathcal{B}$, μ）の mod 0 の自己同型とする．

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

いま $L^2(\Omega)$ の元 f に対して

$$V : f(\omega) \longrightarrow f(T\omega)$$

と定義すれば、 Vは(矛盾なく定義されて) (L^2) のユニタリ作用素である。(即ちVは(L^2)をその上へノルム $\|f\|$ を変えないで写す線型作用素となる。)

証明は明らかであろう。 $f(\omega)$ を(L^2) の元とすれば、 $f'(\omega)=f(T\omega)$ は殆ど至る所確定の値をとる。また

$$\|f'\| = \|f\|$$

なることは、Tが保測的であることから容易にわかる。(証終)

この証明を少し修正すれば$(\hat{B}, \mu)$ の自己同型τから(L^2) のユニタリ作用素Vがきまることがわかる。(任意の$f(\omega)$を階段函数で近似すればよい。)
しかし逆に任意のユニタリ作用素は或るτから導かれるとは限らない。
これについては次の命題が成立する。

Prop. 6・3 上のProp. 6・2で定義されたVは次の性質をもつ:
(L^2) の元$f(\omega)$, $g(\omega)$が有界であれば

$$V\,(f(\omega)\cdot g(\omega)) = (Vf(\omega))\,(Vg(\omega))$$

逆にVがこの性質(これをVが "multiplicative" であると言うことにする。)をもてば、或る自己同型τから Prop. 6・2の方法で導かれる。

証明 命題の前半は明らかであるから後半を証明する。
$f(\omega)=\chi_E(\omega)$ $(E\in B)$ とすれば

$$f^2(\omega) = f(\omega)$$

故に $(Vf)^2 = V(f^2) = Vf$
従って $Vf(\omega)=0$又は1, 即ちVf はある集合$F\in B$ の特性函数となる。
いまτを$E\to F$なる対応とすればτはBからBへの写像であることが容易にわかるが、τは自己同型である。
まず $\mu(E)=\|f\|^2=\|Vf\|^2=\mu(\tau E)$, 即ち$\tau$は保測的である。また、

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

$\tau(E \cup F) = \tau E \cup \tau F$　　何となれば

$$\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$$
$$\xrightarrow{V} = \chi_E + \chi_F - \chi_E \cdot \chi_F$$
$$\chi_{\tau E} + \chi_{\tau F} - \chi_{\tau E} \cdot \chi_{\tau F} = \chi_{\tau E \cup \tau F}$$

更にVの連続性により

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau E_n$$

即ちτは$\mathcal{B}$から$\mathcal{B}$への（代数としての）自己同型である．このτからもとのVが導かれることは容易に確かめられる．　　（証終）

定義 6・2　Hilbert空間$L^2(\Omega)$，$L^2(\Omega')$の上のユニタリ作用素V，V'は$L^2(\Omega)$から$L^2(\Omega')$へのあるユニタリ作用素Wによって

$$V = W^{-1} V' W$$

となるとき，ユニタリ同値であるという．

Prop 6・4　τ，τ'が夫々測度代数$\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$の自己同型で，同値であったとすれば，対応するユニタリ作用素V，V'はユニタリ同値である．

証明は容易である．この命題の逆は成立しない．

§7．スペクトル

前節において測度空間Ωの自己同型Tから Hilbert 空間$L^2(\Omega)$のユニタリ作用素Vを定義したが，このVのスペクトルを考察することによって，Tの構造をある程度調べることができる．

最も簡単な事実をこゝで説明する．（詳細は次章以下に順次述べる）いま$\mathfrak{H}$を抽象的な可分 Hilbert 空間，Vをその上のユニタリ作用素とするとき，Vのスペクトル分解に関する次の Hellinger-Hahn の定理は最も基本的である．

定理　（Hellinger-Hahn）　可分 Hilbert 空間$\mathfrak{H}$の上にユニタリ

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

作用素Vが与えられたとき，円周$\mathbb{T}^1$の上の測度の系$\{\rho_n : n=1, 2\cdots\cdots\}$が存在して次の条件を満す．

1) ρ_{n+1}はρ_nに関して絶対連続
2) $\mathfrak{H}$は$L^2(\mathbb{T}^1, \rho_n)$の直積と同型：
$\mathfrak{H} \ni f \leftrightarrow \hat{f}=(f_1, f_2, \cdots\cdots\cdots)$，こゝに$f_n(\lambda) \in L^2(\mathbb{T}^1, \rho_n)$
3) Vは次の様に表わされる：

$$Vf \longleftrightarrow (e^{2\pi i \lambda} f_n(\lambda))_{n=1}^{\infty}.$$

$\{\rho_n\}$，$\{\rho'_n\}$がこの条件を満足すれば，ρ_nとρ'_nは互に絶対連続である．

定義 7・1　上の定理における$\{\rho_n\}$を作用素Vのスペクトル測度，ρ_1（即ち"最大"の測度）のcarrierをVのスペクトルと云う．スペクトルに属するλに対し，Carrierがλを含む様なρ_nの個数を，λの重複度と云う．

定義 7・2　上の定理において$\rho_n(n=1,\cdots\cdots, m)$がLebesgue測度と同値（即ち互に絶対連続）であって，かつ$\rho_n=0\ (n=m+1, \cdots)$なるとき，$V$のスペクトル測度は$m$重Lebesgueであるという．$\rho_n$がすべてLebesgue測度と同値の時，$\sigma$-Lebesgueと云う

次の命題は上のHellinger-Hahnの定理から直ちに導かれる．

Prop. 7・1　ユニタリ作用素V，V'がユニタリ同値であるとき，かつその時に限りそれらのスペクトル測度は夫々互に絶対連続である．即ちユニタリ作用素の同値類とスペクトル測度の同値類とは1対1に対応している．（この意味で$\{\rho_n\}$をVの"invariant"と言う）

以上の結果によって，抽象的なユニタリ作用素は，そのスペクトル測度によって完全に記述される．ユニタリ同値な作用素は（抽象的Hilbert空間の理論では）同じ構造をもっていると考えるのであるから，ユニタリ作用素の構造や分類に関する問題はこれで解けたわけである．しかし，測度代数や測度空間の自己同型については，以下に述べるように，それから導かれるユニタリ作用素のみによって，完全には記述されない．

定義 7・3　Tを測度代数$\mathcal{B}$の自己同型とする．Tから定義されたユニ

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

タリ作用素のスペクトル測度をτのスペクトル測度と略称する

定義 7.4　τ, τ′ を測度代数 $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ の自己同型とするとき, 対応するユニタリ作用素 V, V' がユニタリ同値ならば, τ, τ′ はスペクトル同値であると云う.

この様な定義を用いて, 自己同型の研究をする場合, まず2つの問題が生じる. 第1は自己同型τから導かれたユニタリ作用素 V は一般のものではなく, Prop. 6.3 の条件を満しているから, そのスペクトル測度も何らかの制限を受ける筈である. この問題, 即ちかゝる V のスペクトル測度を特徴づけることは未解決である. 従ってスペクトル測度を用いて, 自己同型を記述することはまだ完全には出来ていない. 第2には次の例が示す様に, 自己同型はスペクトル同値でも, (自己同型としては) 同値でない場合がある. 従ってスペクトルによる分類は自己同型の本来の分類 (これを特に "metrically equivalent" 分類と云う) より粗い結果しか与えない. 然しながらスペクトルの理論は種々の問題に於て有力であって, 自己同型の研究の多くはこの方法によって行なわれてきた.

例　Ω_α $(0<\alpha<1)$ を $\mathbb{T}^1$ を2つ並べた測度空間とし, 1つの $\mathbb{T}^1$ の全測度を α, 他を $1-\alpha$ とする. 自己同型 T は各々の円周の回転とする. (§2, 例1) そうすると α が異なれば T は同型でない. しかし任意の α に対して, T のスペクトルは同じである.

注意　自己同型を考察する際には, それをどの意味での自己同型と考えているかをまず明確にしなければならない. このことを要約すると次の様になる.

今まで3つの立場から自己同型を考察してきた. 即ち
1) 測度空間 Ω の自己同型 T ; (2) 測度代数 $\hat{\mathcal{B}}$ の自己同型 τ ; (3) Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ のユニタリ作用素 V. 一般にこれらの写像の全体を $\{T\}$, $\{\tau\}$, $\{V\}$ と書けば,

$$\{T\} \subset \{\tau\} \subset \{V\}$$

なる関係がある. (T からτが導かれ, τから V が導かれるから.) 第3章に述べるように (m)-空間では $\{T\}=\{\tau\}$ である. また multiplicative

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

なVの全体は$\{T\}$と一致する。（しかし上述した様にこの両者の関係を、スペクトル測度のみによって、記述することは未解決である）

また写像Tを単なる測度空間の自己同型として考察するよりも更に精密な定義を与えることも重要であると思われる。例えばΩを微分可能な多様体、Tを微分方程式によって定義されるある種の写像とすれば、この様な写像を単に測度空間の自己同型として分類するのは必ずしも当を得ていないであろう。（第2章§2、例3を参照）この様な事情は第5章§3においてその最も簡単な場合の例がみられるが、更に確率過程の flow の場合にも現われる。これは下巻において考察する。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

第2章 Flow

§1 定義

$(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$を測定空間とする.

<u>定義1.1</u> T_t $(-\infty<t<\infty)$がΩの自己同型で, 次の条件を満たすとき, $\{T_t\}$を <u>flow</u> という:

$$T_t T_s = T_{t+s}$$

$$T_0 = I = \text{恒等写像}$$

即ち flow とは, 実数をパラメータとする自己同型の群(1-パラメータ群)である. 本書では保測変換の作る flow のみを考察する.

<u>定義1.2</u> Ω, Ω' における flow $\{T_t\}$と$\{T_t'\}$は, 1つの同型Sによって

$$T_t = S^{-1} T_t' S \qquad (-\infty<t<\infty)$$

となるとき, <u>同値</u>(equivalent)であると云う.

<u>定義1.3</u> flow $\{T_t\}$は写像

$$\Omega \times \mathbb{R} \ni (\omega, t) \longrightarrow T_t\omega \in \Omega$$

($\mathbb{R}$は実数の集合)が可測なとき, <u>可測</u>と云う.

flow $\{T_t\}$が与えられたとき, $L^2(\Omega)$の上に, 各T_tからユニタリ作用素V_tが定義される. このとき明らかに次の命題が成立する.

<u>Prop. 1.1</u> $f \in L^2(\Omega)$に対して

$$V_t : f(\omega) \longrightarrow f'(\omega) = f(T_t\omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

とすると $\{V_t\}$ は1-パラメータ群をなす. 即ち

$$V_t V_s = V_{t+s}$$

<u>Prop. 1・2</u> $\{T_t\}$ が可測 ……

⇒ $\{V_t\}$が弱可測. 即ち$\langle V_t f, g\rangle$が可測

⇔ $\{V_t\}$が強連続. 即ち $V_t f$ が (L^2) で連続

<u>証明</u> $\{T_t\}$が可測ならば(定義により) $V_t f(\omega)$ は $t\times\omega$ で可測. 従って $V_t f(\omega)\cdot\overline{g(\omega)}$ は可測, 故に任意のgに対して

内積 $\langle V_t f, g\rangle = \int V_t f(\omega)\overline{g(\omega)}\,d\omega$

はもて可測である. (Fubini の定理) また$\langle V_t f, g\rangle$ が可測なことと $V_t f$が(L^2) で連続なこととは同値であることが知られている. (例えば [13]) (証終)

<u>注意. 1</u> flow $\{T_t\}$が次の条件を満たすとき<u>連続</u>であるという:
$t\to t_0$ のとき $d(T_t, T_{t_0})\to 0$, 但し

$$d(T_t, T_s) = \mu(T_t \ominus T_s)$$ とおく.

この条件は$\{V_t\}$の強連続性と同等で, 一般には, $\{T_t\}$ の可測性よりも弱い条件である. この条件は本書では使わない.

<u>注意 2</u> TをΩの自己同型とするとき
$T_n = T^n$ $(n=0, \pm 1, \cdots\cdots)$とおけば$\{T_n\}$は整数をパラメータとする自己同型の群である. これを離散なパラメータをもつ flow と呼ぶことがある. 定義1.1の連続な時間tの代りに離散な時間を用いると考えればよい. これは第1章のように, 単独の自己同型を考察することと同等である. 更に一般のパラメータ(例えばn次元ベクトル空間のような多パラメータや正の実数の様な半群)をもった flow を考えることもできる. 以下では実数と整数の場合のみを取り扱う.

<u>§2. 例</u>

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

flow の最も基本的な例を３つあげる．何れもあとで詳しく調べる．これら以外にも重要な flow があるが別の所で定義することとする．

例．1　２次元トーラス $\mathbb{T}^2$ を Ω とする．
α，β を実数（$\neq 0$）として，

$$T_t : \Omega \ni \omega = (x, y) \to \omega' = (x+\alpha t, y+\beta t)$$

と定義すれば，$\{T_t\}$ は可測な flow である．
集合 $\{T_t\omega ; -\infty < t < \infty\}$ を点 ω の trajectory と呼ぶ．比 α/β が有理数ならば，trajectory は閉じた曲線となる．α/β が無理数のときは，trajectory は Ω の中で稠密である．（このことは第４章で述べるエルゴード性と関係している．）

例．2　X を有限個の点からなる測度空間とする：　$X = \{x_1, \cdots, x_m\}$
点 x_k の mass を $p_k \neq 0$ とする：$\sum p_k = 1$．
このとき $\Omega = X^{\aleph_0}$ とする．即ち

$$\omega = (x(n) : -\infty < n < \infty), \quad x(n) \in X$$

なる列の全体を Ω とし，弱位相を定義する．Ω はコンパクト可分距離空間である．X の測度の積を μ とする．さて Ω の中で

$$T : (x(n)) \longrightarrow (x'(n)),$$
$$x'(n) = x(n-1)$$

とすれば，T は自己同型である．従って§１の注意２の方法で離散な時間をもつ flow $\{T_n\}$ が得られる．これを "shift" と呼ぶ．詳細については第６章で述べる．

例．3　"classical flow"
flow の理論のもととなった古典的な力学系は次の様に定義される．（詳細は下巻で論じる予定で，ここでは極く概略の説明に止める．）Ω を微分可能な多様体とする．これが所謂相空間であって，この上で

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

なる微分方程式を考える．これを $t=0$ における初期条件　$x_i = x^0$ の下に

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

解いて得られる解 $\{x_i(t)\}$ は Ω の中の flow を定義する.

この所謂 classical flow の研究（例えばエルゴード性やスペクトル）は非常に困難であって、まだ極く不完全な結果しか得られてはいない.

§3 flowのスペクトル

第1章§7におけると同様に flow を Hilbert 空間論的方法によって調べることができる. まず一般的な Stone の定理が以下の理論の基礎になる.

定理 1 (Hellinger-Hahn-Stone) Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ にユニタリ作用素の1-パラメータ群 $\{V_t\}$ が与えられたとき, 実数 R の上に次の条件を満たす測度 $\{\rho_n : n=1,2,\cdots\cdots\}$ が存在する ;

1) ρ_{n+1} は ρ_n に関して絶対連続

2) $\mathfrak{H} \cong \sum_{n=1}^{\infty} \oplus L^2(R, \rho_n)$

$\mathfrak{H} \ni f \longleftrightarrow \tilde{f} = \{f_n(\lambda)\}, \quad f_n(\lambda) \in L^2(R, \rho_n)$;

3) $V_t f \longleftrightarrow \{e^{2\pi i t\lambda} f_n(\lambda)\}$

この定理は次の様に云い換えることができる.

定理 2 同様の仮定のもとに, 次の様な $\{\Lambda_n\}$ と ρ が存在する ;

$$\begin{cases} R \supset \Lambda_n \supset \Lambda_{n+1} \\ \rho \text{ は } \Lambda_1 \text{ の上の測度} \end{cases}$$

これによって

$$\mathfrak{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus L^2(\Lambda_n, \rho) ;$$

V_t は定理1と同様に表現される.

いま, $m(\lambda)$ を $\lambda \in \Lambda_n$ なる Λ_n の個数として定義し, これを λ の重複度と呼ぶ. $(0 \leq m(\lambda) \leq \infty)$

定理2によれば $\mathfrak{H}$ の上の1-パラメータ群 $\{V_t\}$ のユニタリ同値類は測

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

ヒρと重複度$m(\lambda)$の組と1対1に対応する．即ち$\{V_t\}$は$\{\rho, m(\lambda)\}$で完全分類される．$\{\rho, m(\lambda)\}$を$\{V_t\}$のスペクトル測度と呼ぶことにする．

注意　単独のユニタリ作用素Vのときスペクトルは$\mathbb{T}^1$に含まれ，$\{V_t\}$の場合はRに含まれる．これは$\{V^n\}$と$\{V_t\}$のパラメータである整数群と実数群の指標群が夫々$\mathbb{T}^1$，Rであることによる．（附録Ⅱを参照.）
この結果をflowに応用するために，まず次のことに注意する．

Prop. 3・1　flow $\{T_t\}$から定義された$\{V_t\}$は常に$\lambda=0$を固有値とし，$f(\omega)$＝定数はそれに対応する固有函数である．

証明　定義によって　$V_t f(\omega) = f(T_t\omega)$　だから$V_t 1 = 1$は明らか．即ち$\lambda=0$は固有値である　　（証終）

定義 3・1　$\{T_t\}$をflowとし，それから作られたユニタリ作用素を$\{V_t\}$とする．$L^2(\Omega)$の中の定数と直交する部分空間を$\mathfrak{H}'$とする．（このときV_tは$\mathfrak{H}'$をその上に写す.）$\{V_t\}$の$\mathfrak{H}'$におけるスペクトル測度をflow $\{T_t\}$のスペクトル測度と略称する．

定義 3・2　flow $\{T_t\}$，$\{T_t'\}$のスペクトル測度が等しい時，これらはスペクトル同値であると云う．

同値なflowは同じスペクトル測度をもつ．この逆は一般には成立しない．特別な場合については第5章で述べる．

定義 3.3　flow $\{T_t\}$のスペクトル測度ρがLebesgue測度と同値のとき，$\{T_t\}$はLebesgueスペクトルをもつという．更にすべての$\lambda\in R$に対して$m(\lambda)=\infty$なるときσ-Lebesgueであると云う．

定義 3・4　ρが純粋に不連続な場合，$\{T_t\}$は離散スペクトルをもつという．

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

第3章 距離空間における測度

第1章で考察した測度空間は一般すぎて時には'pathological'な現象が起ることがある．そのため我々は或程度制限された測度空間を考察することにする．この章では、最も手近かで実用的な制限として完備な距離空間の場合をとり扱う．具体的な問題はこのような空間に関係していることが多い．附録IIで位相を考えない別の立場について述べる．

§1 定義

定義1・1　測度空間$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$が次の3条件を満足するとき，(m)-空間と呼ぶ

1) Ωは完備可分距離空間；
2) $\mathcal{B}$はΩのすべての開集合を含むBorel族．
そして，すべての可測集合（すなわち$\mathcal{B}$の元）Bに対して
$\mu(B)=\inf \mu(G)$，（Gは開集合で$G \supset B$）；
3) μはΩの開集合に対しては$\neq 0$

注意　条件3)は以下では使わないことが多い．

我々は測度空間として本書では以下（附録を除いて）主としてこの(m)-空間を考察する

最も簡単で基本的なのは"Lebesgue空間"（第1章§1）である．すなわち区間$[0, 1]$又は$[0, 1)$における普通のLebesgue測度である．この他応用上重要なものとしてはBrown運動の空間（§3）や次の例の空間がある．

例　$M_n(n=1, 2, \cdots\cdots)$を(m)-空間で更にコンパクトであるものとする．$M_n$の"積空間"

$$\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$$

は(m)-空間になる．すなわちΩは弱位相を入れればコンパクト集合だから

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

定義1·1の条件(1)を満足し，完備化した積測度$\prod \mu_n$は条件(2)，(3)を満す．特にすべてのM_nとして同一の有限集合をとり，各点の測度を正としたときこれから作られた積空間は第6章で考察の対象とする．

次の命題は明らかである．

<u>*Prop.* 1·1</u>　(m)－空間は(測度空間として)可分である．

<u>§2　同型定理</u>

(m)－空間の場合はその間の同型について，第1章で述べた一般論以上に精密なことが証明できる．特に測度代数の間の同型が常に測度空間としての同型から導かれる．〔22〕本節ではこの"同型定理"を証明するが，そのために次の*Lemma*を証明する．

<u>*Lemma*</u>　Ωを(m)－空間とする．任意の$\varepsilon > 0$に対してΩは次のように分割できる：

$$\Omega = N \cup F_1 \cup F_2 \cup \cdots\cdots\cdots ;$$

こゝに右辺の集合はすべて互に交わらず．$\mu(N) = 0$．F_nは閉集合でその直径は$\leqq \varepsilon$，かつ$\mu(F_n) > 0$（集合の"直径"とはその集合に属する2点間の距離の上限）

<u>証明</u>　(1°)．まずΩを直径が$\leqq \varepsilon$なる$\mathcal{B}$－集合の和に分割する．そのために，（Ωは可分だから）稠密な可算集合$\{\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots\}$をとり各$\omega_n$を中心とする半径$\varepsilon/2$の閉じた球を$K_n$とする．そして

$$M_1 = K_1 \quad ;$$

$$M_n = K_n - \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} K_k\right) \cap K_n$$

とすれば

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n .$$

$$M_n \cap M_m = \phi \quad (n \neq m),$$

M_nの直径$\leqq \varepsilon$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

(2°) Ωの代りに上に作ったM_nに対して$Lemma$の結論を証明されば充分である．（この場合には集合の直径に関する条件は考えなくてすむ）何となれば

$$M_n = N_n \cup F_1^n \cup F_2^n \cup \cdots\cdots$$

で $\mu(N_n)=0$，F_k^n が閉集合であれば

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$$

とおき $\{F_k^n : n, k=1, 2\cdots\cdots\}$ を $\{F_n\}$ とすればよい．

(3°) $M \in \mathcal{B}$，$\mu(M)>0$ とし，これに対して（2°）を証明する．測度μが正則だから（定義1.1の条件(2)），任意の$\varepsilon_1>0$に対して閉集合F_1が存在して．

$$F_1 \subset M,$$

$$\mu(F_1) > \mu(M) - \varepsilon_1$$

とできる．ゆえに

$$M_1 = M - F_1$$

とおけば　$\mu(M_1) < \varepsilon_1$

M_1 に対して同様に（$\varepsilon_2>0$に対して）

$$F_2 \subset M_1,$$

$$\mu(F_2) > \mu(M_1) - \varepsilon_2$$

なる閉集合F_2をとる．$\varepsilon_n>0$，$\varepsilon_n \to 0$としてこの操作をつづければ閉集合F_n（$n=1, 2\cdots\cdots$）が得られ

$$F_n \subset M$$

$$F_n \cap F_m = \phi$$

$$\mu(M - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = 0 \qquad \text{(証終)}$$

<u>定理</u>（同型定理）Ω，Ω′を(m)－空間とし，$\widehat{\mathcal{B}}$から$\widehat{\mathcal{B}'}$への同型τが与えられたとする．このときΩからΩ′への mod. 0の同型Tが存在して，τはTから導かれる．証明は初等的で容易であるが，やゝ長くなるので準矣だ

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

けを記す.

(1°) まず Lemma によって $\varepsilon=1$ として Ω を分割する;

$$(F1) \quad \Omega = N \cup F_1 \cup \cdots\cdots ;$$

こゝに $\mu(N)=0$, F_n は閉集合, 直径 $\leqq 1$, $\mu(F_n)>0$.
右辺の集合は互に交わらない.

与えられた同型 τ による像を

$$N' = \tau(N),$$
$$B'_n = \tau(F_n)$$

とすれば $\mu'(N')=0$, $\mu'(B'_n \cap B'_m)=0$, $(n \neq m)$
ゆえに (F_n は $\widehat{\mathcal{B}'}$ の元だから) はじめから $B'_n \cap B'_m = \phi$
とすることができる. たゞし $B'_n \in \mathcal{B}'$. 明確のために

$$(B'1) \quad B_n = \alpha(F_n)$$

とおく.

(2°) Lemma を $\varepsilon=1$ として B'_n に適用して

$$(F'2) \quad B'_n = N'_n \cup F'_{n1} \cup \cdots\cdots \cup F'_{np} \cup \cdots\cdots$$

とする. こゝに $\mu(N'_n)=0$, F'_{np} は閉集合で, 直径 $\leqq 1$.
相交わらない.
、次に τ による逆像を考える;

$$N_n = \tau^{-1}(N'_n),$$
$$B_{np} = \tau^{-1}(F'_{np})$$

こゝでこの $B_{np} \in \mathcal{B}$ を

$$B_{np} \cap B_{np'} = \phi \quad (p \neq p')$$

なるようにきめ

$$(B2) \quad B_{np} = \alpha'(F'_{np})$$

とする.

(3°) 上に作った B_{np} に対して (1°) と同様のことをする. すなわち

$\varepsilon=\frac{1}{2}$ として lemma を適用する：

(F3) $B_{n,o}=N_{np}\cup F_{np1}\cup F_{np2}\cup\cdots\cdots$,

こゝに F_{npq} は閉集合で直径は $\leqq\frac{1}{2}$

(B′3) $B'_{npq}=\alpha(F_{npq})$

を互に交わらぬようにする．次に B'_{npq} に対して(2°)と同様の
すなわち　$\varepsilon=\frac{1}{2}$ として

(F′4) $B'_{npq}=N'_{npq}\cup F'_{npq1}\cup\cdots\cdots\cdots\cdots$;

(B4) $B_{npqr}=\alpha'(F'_{npqr})$

とする．

(4°) 以上の操作をくりかえすことによって(記号をかえて)
関係が得られる．

(F, 2m−1) $B(n_1,\ldots\ldots,n_{2m-2})=\bigcup_{n_{2m-1}}F(n_1,\ldots\ldots,n_{2m},\ n_{2m-1},$

(B′ 2m−1) $B'(n_1,\ldots\ldots,n_{2m-1})=\alpha\, F(n_1,\ldots\ldots,n_{2m-1})$;

(F′ 2m) $B'(n_1,\ldots\ldots,n_{2m-1})=\bigcup_{n_{2m}}F'(n_1,\ldots\ldots,n_{2m-1},\ n_{2m})$,

(B, 2m) $B(n_1,\ldots\ldots,n_{2m})=\alpha'F'(n_1,\ldots\ldots,n_{2m})$.

と仮定することができる．

(5°) いま，簡単のために $F(n_1,\ldots,n_\nu)$ を $F[\nu]$, $B(n_1,\cdots$
などと略記することにする．

上の構成からわかるようにΩの沿どすべての点は，それぞれを
$(m=2,3,\ldots\ldots)$ の共通部分として表わせる．逆に単調に減少する
集合列は(Ωが完備だから) 1点ωを表わす．の$F[2m-1]=k$
とおけばこれは単調に減少する．かつ

$$B'[2m-1]\supset F'[2m]\supset B'[2m+1]$$

だから，$\{B'[2m-1];\ m=2,3,\ldots\ldots\}$ は 1点ω′を共有する．

$$\omega'=T(\omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

によってTを定義する.

(6°) このTは殆どすべてのΩの点(この集合をΩ_0とおく)を殆どすべてのΩ'の点(この集合をΩ'_0とおく)に1対1に写す). 明らかに

$$T(F[2m-1])=B'[2m-1], \quad mod.0$$

またΩ_0の中では任意の開集合GはF型の集合の和になるから

$$T(G\cap\Omega_0)=TG \quad mod.0$$

このことから, 任意の$B\in\mathcal{B}$に対して,

$$T(B\cap\Omega_0)=TB, \quad mod.0$$

がいえる. したがってTはΩ_0からΩ'_0への同型, すなわちΩからΩ'へのmod.0の同型であり, かつてを導く. (証終)

注意1 この定理を用いて, 任意の(m)−空間が測度空間としてLebesgue空間と同型であることが証明できる. (附録Ⅱを参照)

注意2 この定理は(m)−空間の測度空間としての最も重要な性質の1つであるが, 位相を用いずにこの定理の成立するような測度空間の類をきめることができる. "抽象的Lebesgue空間" 或いは "normal な" 測度空間[2]と呼ばれるものがそうである. これについては附録Ⅱに述べる.

§3. Brown運動の空間

Brown運動から導かれるflowについては第7章で論じるが, ここでBrown運動の空間が(適当に定義すれば)定義1・1の意味の(m)−空間になることを示す. このことは, あとで種々の論議に応用される.

先ずBrown運動を次のように定義する.

定義3・1

1) $W=W(t)$を$t\in(0,+\infty)$の実数値連続函数とし, Wの全体を$\mathcal{W}$と書く. $\mathcal{W}$に以下の様に測度を定義して測度空間とし, これをBrown運動の空間またはWiener空間と呼ぶ

2) Borel族$\mathcal{B}$を次の様に定義する.

先ず, $\mathcal{A}$を$\mathcal{W}$のシリンダー集合の全体とする. すなわち,

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n < +\infty$$

とし，一方 B^n を n 次元 Borel 集合とする．このとき

$$A = \{ w ; (w_{t_1}, \cdots\cdots w_{t_n}) \in B^n \}$$

なる形の集合をシリンダー集合と呼ぶ．これは

$$\pi_{t_1, \cdots\cdots, t_n} : W \ni w \longrightarrow (w_{t_1}, \cdots\cdots, w_{t_n}) \in R^n$$

なる"射影"を用いて

$$A = \pi^{-1}_{t_1, \cdots\cdots, t_n} (B^n)$$

と書ける．

$\mathcal{B} = \mathcal{B}\{A\}$ とする．（A から生成された Borel 族）

(3) A の上に"elementary"な確率測度 $P(A)$ を次の様に定義する：

$A = \pi^{-1}_{t_1, \cdots\cdots, t_n} (B^n)$ に対して

$$P(A) = P_{t_1, \cdots, t_n} (B^n)$$

$$= \int \cdots\cdots \int_{B^n} g(t_1, 0, x_1)\, g(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots g(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_1 \cdots\cdots dx_n .$$

但し $g(t, x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$ とする．

この $P(A)$ は Kolomogorov-Prohorov の定理（附録 I）により $\mathcal{B}$ 上の測度に拡張される．これを $P(\mathcal{B})$ と書く．

このようにして得られた測度空間 $(W, \mathcal{B}, P)$ を Wiener 空間という．この測度 P を Wiener 測度という．

なお，w の t での値を w_t，$x(t, w)$ 或いは $x_t(w)$ と書く．$\{x(t, w)\ 0 \leq t < \infty,\ w \in W\}$ を（原点から出発した）Brown 運動又は Wiener 過程という，各々の w を Wiener 過程の path という

注意　次の定義は定義 3.1 と同じ過程を与える．W を $(0, \infty)$ 上のすべての実数値函数，すなわち

$$W = R^{(0, \infty)}$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

とし．1次元のBorel集合$E_1, \cdots\cdots, E_n$を指定して

$$P(W_{t_1} \in E_1 \quad W_{t_n} \in E_n)$$

を定義3-1と同様に定義する．

しかし Wを連続函数に制限することによって直接精密な議論ができる．

Wiener空間$(W, \mathcal{B}, P)$は(m)－空間と考えることができる．そのために先ずWに適当な距離を入れる．

<u>Prop. 3・1</u>　$\omega \in W$に対して

$$\|W\|_n = \sup_{0 \leq t \leq n} |W(t)|$$

とおき，更に，

$$d_n(W, W') = \|W - W'\|_n,$$

$$d(W, W') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(W, W')}{1 + d_n(W, W')}$$

とおけば，$d(W, W')$はWにおける距離になる．これによってWは完備可分空間になる．またこの距離は$W(t)$の広義の一様収束（各有限区間における一様収束）を与える．なお，dによる近傍系は，d_n $(n = 1, 2 \cdots\cdots)$による近傍から生成された（すなわち，有限個の共通部分で作られる）近傍系と同等である．

<u>Prop. 3.2.</u>　Wにおいて Prop. 3・1の距離による開集合から生成された）位相Borel族を$\mathcal{B}_1$とすると，

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$$

<u>証明</u>　$(1°)$ $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$なること：このためには，$0 \leq t$と$-\infty < a < \infty$をきめたとき，シリンダー集合$A_t = \{W ; W(t) < a\}$が$\mathcal{B}_1$に入ることをいえば十分である．とくに$A_t$が開集合であることがいえればよい．

任意の$W_0 \in A_t$に対して，$\varepsilon = \frac{a - W_0(t)}{2}$　とおき

$$U_\varepsilon(W_0) = \{W ; \sup_{0 \leq t \leq n} |W_0(t) - W(t)| < \varepsilon\}$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

とすれば，（$n \geq \tau$とする），

$$\overline{U}_\varepsilon(W_0) \subset A_\tau.$$

何となれば．$W \in \overline{U}_\varepsilon(W_0)$ ならば

$$W(\tau) < W_0(\tau) + \varepsilon = \frac{a + W_0(\tau)}{2} < a.$$

すなわち，　$W \in A_\tau$.
ゆえに　A_τは開集合である．

（2°）　$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$　なること：それには任意のW_0 の任意の近傍が$\mathcal{B}$に属することをいえば十分である．そのためには（Prop. 3・1 の最后の注意によって）d_n による近傍が$\mathcal{B}$に属すればよい．

更に　d_nによる閉じた球　$\overline{U}_n = \overline{U}_n(W_0 : \varepsilon)$　のみを考察すれば十分である．

いま$\{t_m\}$　を$[0, \infty)$　の稠密な点集合とすれば

$$\overline{U}_n = \overline{U}_n(W_0 ; \varepsilon) = \{w : d_n(W, W_0) \leqq \varepsilon\}$$

は次の様に表わされる；

$$\overline{U}_n = \cap \{W ; |W(t_m) - W_0(t_m)| \leqq \varepsilon\}, \text{ たゞし } 0 \leqq t_m \leqq n.$$

右辺の各集合はシリンダー集合だから$\mathcal{B}$に属する．ゆえに

$$\overline{U}_n \in \mathcal{B} \qquad \text{（証終）}$$

<u>Prop. 3・3</u>　　Wの開集合の測度は>0である．したがってWiener空間は(m)－空間である．

証明は．ある時間の間（$t_0 < t < t_1$），$W(t)$がある開区間の中にあるようなWの全体の測度が．>0であることを示せば十分である．

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

第4章 エルゴード性

§1 定義

$\{T_t\}$ を測度空間 Ω の上の flow とする

定義 1・1　$\lambda=0$ が単純な固有値であるとき $\{T_t\}$ をエルゴード的 (ergodic) であると言う. 即ち (第2章 Prop. 3・1 によって定数は常に $\lambda=0$ に対応する固有函数であるから) 定数のみが不変な函数である場合である.

定義 1・2　すべての t に対して $\mu(T_t B \ominus B)=0$ であれば $B=\Omega$ 又は ϕ (mod 0) であるとき, Ω は ($\{T_t\}$ に関して) indecomposabl (又は irreducible) という

Prop. 1・1　$\{T_t\}$ がエルゴード的なる時かつその時に限って Ω は indecomposable である.

証明　$\Omega=\Omega_0 \cup \Omega_1$, $T_t(\Omega_k) \subset \Omega_k$, $\mu(\Omega_k)>0$ ($k=0,1$) なる分解が可能であれば, $f(\omega)=1$ on Ω_1, $=0$ on Ω_0 とすれば, $f(\omega)$ は T_t で不変である. 即ち $\{T_t\}$ はエルゴード的でない.

逆に $\{T_t\}$ がエルゴード的でなければ, 定数でない不変函数 $f(\omega)$ が存在する. 然らば適当な α を用いて

$$\Omega_+=\{\omega\ ;\ f(\omega)\geqq\alpha\}$$

$$\Omega_-=\{\omega\ ;\ f(\omega)<\alpha\}$$

とすれば $\mu(\Omega_+)>0$, $\mu(\Omega_-)>0$ となり, しかも Ω_+, Ω_- は T_t で不変である. 即ち Ω は indecomposable でない. (証終)

注意 1　任意の flow $\{T_t\}$ が ((m)-空間 Ω の上に) 与えられたとき Ω をエルゴード的な部分に "分解" することができる. 即ち, 次の事実が成

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

立する：

Ωの分解 $\zeta=\{C\}$（第1章§3）が存在して，T_t は殆んどすべてのCを不変にし，（即ち $T_t(C)\subset C$）かつその上でエルゴード的になる．

これによって任意の flow の構造をエルゴード的な flow のそれに帰着させることができる．詳細は下巻で述べる予定である．

注意2　$\{T_t\}$ がエルゴード的ならば，次のエルゴード定理が任意の$f\in(L^2)$に対して成立する．

$T-S \longrightarrow +\infty$なるとき

$$\frac{1}{T-S}\int_S^T V_t f(\omega)\,dt \longrightarrow \langle f, 1\rangle \qquad （強収束）$$

この有名な定理についても下巻で述べることにする．

§2. Mixing

flow $\{T_t\}$に対し，エルゴード性より更に強く次の定義をする

定義2・1　任意の$f, g\in(L^2)$に対して次の式が成立するとき，$\{T_t\}$を，強 mixing という：

$$\langle V_t f, g\rangle \longrightarrow \langle f, 1\rangle\cdot\langle g\cdot 1\rangle, \qquad (t\to\infty)$$

定義2・2　任意の$f, g\in(L^2)$に対して次の式が成立するとき，$\{T_t\}$を（弱）mixing という：

$$\frac{1}{T-S}\int_S^T \left|\langle V_t f. g\rangle - \langle f. 1\rangle\langle \overline{g. 1}\rangle\right|^2 dt \longrightarrow 0, \ (T-S\to\infty)$$

注意　定義2.1，2・2はいずれもΩの集合に関する條件で述べることができる．例えば定義2.1は次の条件と同等である：

任意の$A, B\in\mathcal{B}$に対して

$$\mu(T_t(A)\cap B)\longrightarrow \mu(A)\,\mu(B).$$

弱 mixing の方が flow のスペクトルとより深い関係がある．

Prop. 2・1　$\{T_t\}$が弱 mixing であるときかつその時に限り，$\lambda=0$は

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

単純固有値であり，またこれが唯一の固有値である。

証明　$\{T_t\}$が弱 *mixing* とし，かつ

$$V_t f = e^{i\lambda t} f$$

が成立したとする。もし$\lambda \neq 0$ならば定義から $\langle f, 1 \rangle = 0$ でなければならない。然らば再び定義の式から，$g=f$ として

$$\frac{1}{T-S}\int_S^T \left| e^{i\lambda t}\langle f, f\rangle \right|^2 dt \longrightarrow 0$$

だから $f=0$。即ち $\lambda \neq 0$は固有値でない。

$\lambda = 0$ならば

$$\langle f, g\rangle = \langle f, 1\rangle \overline{\langle g, 1\rangle}$$

これから $f=$定数でなければならない。

逆を証明するために，函数のスペクトル分解に関する次の *Lemma* を用いる。

Lemma　α_λ を函数$f(t)$の点スペクトルとすれば，$B-A \to \infty$のとき

$$\frac{1}{B-A}\int_A^B \left| f(t) - \sum \alpha_\lambda e^{i\lambda t} \right|^2 dt \longrightarrow 0$$

この *Lemma* の証明は例えば［ 3 ］を参照。

これから

$$\frac{1}{T-S}\int_S^T \left| \langle V_t f, g\rangle - \sum \langle (E_{\lambda+0} - E_\lambda) f, g\rangle e^{i\lambda t} \right|^2 dt \to 0$$

故に $\lambda \neq 0$ なる点スペクトルが無く，かつ $\lambda=0$に対応する固有函数が定数のみであれば

$$\frac{1}{T-S}\int_S^T \left| \langle V_t f, g\rangle - \langle \text{定数}, g\rangle \right|^2 dt \longrightarrow 0$$

これから弱 *mixing* が出る　（証終）

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

系 1 弱 mixing ならばエルゴード的である.

系 2 $\{T_t\}$ は連続なスペクトル測度を持つ時, またその時に限って弱 mixing である.

§3. 例

2章§2 の例について, そのエルゴード性と mixing とを調べる.

例 1 トーラス $\mathbb{T}'$ の上に flow を

$$T_t : \omega \longrightarrow \omega + t$$

と定義すると, これは離散スペクトルをもつエルゴード的な flow である. これは Fourier 級数を用いて容易に示される. 即ち完全正規直交系 $\{e_n = e^{2\pi i n\omega}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を用いて,

$$V_t\ e_n = e^{2\pi i n t}\ e_n$$

となる. 故に

$$V_t : f = \sum a_n e_n \longrightarrow f' = \sum a_n e^{2\pi i n t}\ e_n .$$

V_t の固有値は整数 $\{n = 0, \pm 1, \cdots\cdots\}$ で何れも単純である. Fourier 級数を用いて, 定数以外に不変な函数の無いことが容易に証明されるからエルゴード的であることもわかる.

例 2. トーラス $\mathbb{T}^2$ の上の flow は α/β が有理数ならば, エルゴード的でないことは容易にわかる. (B を Ω の開集合とするとき, $A = \bigcup_{-\infty<t<\infty} T_t B$ は不変集合である. 特に B を十分小さくとれば $A \neq \Omega$ にできる)

α/β が無理数であればエルゴード的である. そのために, $e_{m,n} = e^{2\pi i(n x + m y)}$ $(n, m = 0, \pm 1, \cdots\cdots\cdots)$ とすればスペクトルは $\{n\alpha + m\beta\}$ で単純であることがわかる. エルゴード的であることも例 1 と同様である. スペクトルが離散だから勿論 mixing でない.

例 3 shift (2章例2) は多くの場合, mixing である. 実は更に強くそのスペクトルが Lebesgue であることが証明できる. (第6章)

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

最后に classical flow（第2章の例3）については，現在極く特別の場合のみ，エルゴード的であることが証明されている．（これは下巻で取扱う）

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

第5章 離散スペクトルをもつ flow

flowの一般的なクラスの中で，離散スペクトルをもつものは最も簡単で完全な分類ができている．

§1 固有値と固有函数

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ を(m)-空間，$\{T_t\}$ をその上の flow とする．$\{T_t\}$ の固有値 λ は何れも実数である．

Prop. 1・1 λ に対応する固有函数を f_λ と書けば $|f_\lambda| =$ 定数．

証明 $V_t f_\lambda(\omega) = f_\lambda(T_t \omega) = e^{it\lambda} f_\lambda(\omega)$．

しからば $|V_t f_\lambda(\omega)| = |f_\lambda(\omega)|$．

ゆえに $|f_\lambda|$ は V_t-不変．したがって（エルゴード的だから）$|f_\lambda| =$ 定数

ところが $\{f_t\}$ は正規完全直交系であるので $|f_\lambda| = 1$ （証終）

Prop. 1・2 固有値は何れも単純であり，その全体は加法によって群を作る．

証明 λ に対し f_λ，g_λ が固有函数とすると，

$$V_t\left(\frac{f_\lambda}{g_\lambda}\right) = \frac{\lambda f_\lambda}{\lambda g_\lambda} = \frac{f_\lambda}{g_\lambda}$$

$$\therefore \left|f_\lambda / g_\lambda\right| = \text{定数} = 1 \quad [\text{Prop. 11 により}]$$

すなわち λ は単純である．λ の全体が群を作ることは容易にわかる．何となれば，

$$\begin{aligned} V_t f_\lambda \overline{f_\mu} &= V_t f_\lambda \cdot \overline{V_t f_\mu} \\ &= e^{it\lambda} e^{-it\mu} f_\lambda \overline{f_\mu}. \end{aligned}$$

すなわち $f_\lambda \overline{f_\mu}$ は $\lambda - \mu$ に対応する固有函数である．（証終）

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

<u>Prop. 1・3</u>　固有函数の全体 $\{f_\lambda\}$ は適当に定数をかければ（乗法に関して）λをパラメータとする群を作る.

<u>証明</u>　（1°）Prop. 1・2 の証明から

$$V_t f_\lambda f_\mu = (\lambda+\mu) f_\lambda f_\mu$$

だから　$f_\lambda f_\mu = \gamma(\lambda, \mu) f_{\lambda+\mu}$.
こゝで　$|\gamma(\lambda, \mu)| = 1$
（2°）ρ を絶対値 1 の（複素数値）函数の全体の作る乗法群を $\mathbb{T}'$ に写す群の）準同型とし，かつ次の条件を満足しているとする.：

$$\text{定函数 } f(\omega) = a \longrightarrow a \in \mathbb{T}^1$$

このような ρ の存在は次の Lemma による〔20．第6章．P.94 ー〕.

<u>Lemma</u>　(1)　G：位相群
(2)　g：部分群．G/g：離散
(3)　G'：アーベル群．$\forall u \in G'$．$\forall n$ に対し，$\exists\, v \in G'$；$v^n = u$
(4)　$f(x)$：g の表現，$g \longrightarrow G'$
とすれば，$^\exists\rho(x)$：G の G' における表現，g 上で $\rho(x) = f(x)$

（この Lemma を用いないで初等的に証明することも出来る.〔12〕.
この証明のあとでそれを述べる.）

（3°）$\mathbb{T} \ni S_\lambda = \rho(f_\lambda)$ と書くと.

$$\rho(f_\lambda f_\mu)\begin{cases} = S_\lambda S_\mu \\ = \gamma(\lambda, \mu)\rho(f_{\lambda+\mu}) = \gamma(\lambda, \mu) S_{\lambda+\mu}. \end{cases}$$

ゆえに　$S_\lambda S_\mu = \gamma(\lambda, \mu) S_{\lambda+\mu}$.
$\widetilde{f}_\lambda = \bar{S}_\lambda f_\lambda$ とおけば $\lambda \longrightarrow \widetilde{f}_\lambda$ は準同型.
$\widetilde{f}$ は λ に対応する固有函数で

$$\widetilde{f}_\lambda \widetilde{f}_\mu = \bar{S}_\lambda \bar{S}_\mu f_\lambda f_\mu = \bar{S}_\lambda \bar{S}_\mu \gamma(\lambda, \mu) f_{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\bar{S}_\lambda \bar{S}_\mu \gamma(\lambda, \mu)}{\bar{S}_{\lambda+\mu}} \widetilde{f}_{\lambda+\mu} = \widetilde{f}_{\lambda+\mu}.$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

ゆえに $\hat{f_\lambda}\hat{f_\mu}=\hat{f}_{\lambda+\mu}$.

したがって $\hat{f_\lambda}$ を改めて f_λ とかく．そうすると T_t に対して $f_\lambda f_\mu=f_{\lambda+\mu}$ となっていると考えてよい　（証終）

<u>別証明</u>　上の証明の(2')以下を初等的に（群論を用いないで）証明する．

(2')　次の条件を満すように γ_n ($|\gamma_n|=1$) をえらべばよい．
$\varphi_n=\gamma_n f_{\lambda_n}$ とおけば

$$k_1\lambda_1+\cdots\cdots+k_m\lambda_m=0\quad(k_1,\cdots\cdots,k_n \text{ は整数})$$

ならば　$\varphi_1^{k_1}\cdots\cdots\varphi_n^{k_n}=1$　（たゞし $\lambda_1,\cdots\cdots$ は固有値）

もしこれが満足されていれば

$$\lambda_j+\lambda_k=\lambda_e \text{ または } \lambda_j=-\lambda_k \text{ なる場合}$$

$$\lambda_j+\lambda_k-\lambda_e=0 \text{ または } \lambda_j+\lambda_k=0$$

だから，それぞれ

$$\varphi_j\varphi_k\varphi_e^{-1}=1 \quad\text{または}\quad \varphi_j\varphi_k^{-1}=1$$

となって，$\{\varphi_n\}$ は $\{\lambda_n\}$ をパラメータとして群をなす．

(3')　上の γ_n の存在を帰納法で証明する．
まず $\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_n$ が定まり，$\varphi_k=\gamma_k f_{\lambda_k}$ ($k=1,2,\cdots\cdots,n$) とおくと，$k_1\lambda_1+\cdots\cdots+k_n\lambda_n=0$ から $\varphi_1^{k_1}\cdots\cdots\varphi_n^{k_n}=1$ がでるように出来たとする．このとき更に γ_{n+1} が選べることを示す．いま

$$G=\{(k_1,\cdots\cdots k_{n+1}):\ k_1\lambda_1+\cdots\cdots+k_n\lambda_n+k_{n+1}\lambda_{n+1}=0\}$$

とおく．目的は G のすべての要素に対して

$$(1)\quad \varphi_1^{k_1}\cdots\cdots\varphi_n^{k_n}(\gamma_{n+1}f_{\lambda_{n+1}})^{k_{n+1}}=1$$

になるように γ_{n+1} を選ぶことである．

もし G のすべての要素 $(k_1,\cdots\cdots,k_{n+1})$ において $k_{n+1}=0$ であれば，式(1)は自動的に満足されている．したがってこの場合は γ_{n+1} は何でもよい．（たとえば $\gamma_{n+1}=1$ とおけばよい）

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

(4°) $k_{n+1} \neq 0$ なるGの要素が存在する場合：このとき．

$$Z=\{k_{n+1} ; (k_1, \cdots\cdots, k_{n+1}) \in G\}$$

とおく．Zは整数の集合で，仮定によって

$$Z \neq \{0\} ;$$

かくZは群をなす．すなわち $k,\ l \in Z$ ならば $k+l$ と $k-l$ は，共に $\in Z$（明らか）．したがってZはその正の最小の元 k' で生成される；

$$Z=\{kk' : k=0,\ \pm 1, \cdots\}.$$

この k' を含むGの要素を $(k_1',\ \ k_n',\ k')$ とする．すなわち，

$$k_1'\lambda_1+\cdots\cdots+k_n'\lambda_n+k'\lambda_{n+1}=0.$$

(5°) まずこの式に対し，γ_{n+1} を

(2) $\varphi_1^{k_1'}\cdots\cdots\varphi_n^{k_n'}(\gamma_{n+1} f_{\lambda_{n+1}})^{k'}=1$

となるように定めることができる．何となれば；

(3) $\varphi_1^{k_1'}\cdots\cdots\varphi_n^{k_n'}=\beta f_{k_1'\lambda_1+\cdots\cdots+k_n'\lambda_n}=\beta f_{-k'\lambda_{n+1}}$

（βは$|\beta|=1$なるある複素数）である．（これは(1°)で証明したこと：$f_\lambda f_\mu=\gamma(\lambda,\mu) f_{\lambda+\mu}$ による．）

同様に

(4) $(f_{\lambda_{n+1}})^{-k'}=\beta' f_{-k'\lambda_{n+1}}$, $(|\beta'|=1)$.

ゆえに(3)と(4)より

$$\varphi_1^{k_1'}\cdots\cdots\varphi_n^{k_n'}(f_{\lambda_{n+1}})^{k'}=\frac{\beta}{\beta'}.$$

ゆえに γ_{n+1} を

$$\gamma_{n+1}^{k'}=\frac{\beta'}{\beta}$$

なるように選べば，(2)が成立する．

(6°) 条件(2)が満足されていれば，$\varphi_{n+1}=\gamma_{n+1} f_{\lambda_{n+1}}$ とおくことによ

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

り (1) が成立する．何となれば，もし

$$k_1\lambda_1 + \cdots + k_n\lambda_n + k_{n+1}\lambda_{n+1} = 0$$

であれば，先ず あるhに対して $k_{n+1} = hk'$．ゆえに

$$hk_1'\lambda_1 + \cdots + hk_n'\lambda_n + hk'\lambda_{n+1} = 0$$

を用いて

$$(k_1 - hk_1')\lambda_1 + \cdots + (k_n - hk_n')\lambda_n = 0$$

を得る．しからば，帰納法の仮定により，

$$\varphi_1^{k_1 - hk_1'} \cdots\cdots \varphi^{k_n - hk_n'} = 1. \tag{5}$$

しかるに (2) から

$$\varphi_1^{hk_1'} \cdots\cdots \varphi_n^{hk_n'} \varphi_{n+1}^{hk'} = 1$$

だから，これと (5) を合わせて (1) を得る．　　（証終）

§2. 同値定理

定理 2・1　$\{T_t\}$，$\{T_t'\}$をそれぞれΩ，Ω'の上のエルゴード的 flow とし，離散スペクトルをもち，スペクトル同値とする．しからば $\{T_t\}$ と $\{T_t'\}$ とは同値である．

証明　(1°)　Prop. 1・3によって T_t，T_t' の固有函数をえらび f_λ，g_λ とする．そしてすべてのλに対して対応Wを$Wg_\lambda = f_\lambda$とする．f_λ g_λ は基であるのでWは空間全体に拡張できる．すなわち有限和$\sum C_\lambda g_\lambda$に対して

$$W(\sum C_\lambda g_\lambda) = \sum C_\lambda W g_\lambda = \sum C_\lambda f_\lambda$$

とおけばよい．

(2°)　$Wg_\lambda g_\mu = Wg_{\lambda+\mu} = f_{\lambda+\mu} = f_\lambda f_\mu = Wg_\lambda Wg_\mu$.

ゆえに，有限和　$g = \sum C_\lambda g_\lambda$，　$h = \sum d_\mu g_\mu$に対して

$$Wgh = W(\sum C_\lambda d_\mu g_\lambda g_\mu) = \sum C_\lambda d_\mu W g_\lambda g_\mu$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

$$= \sum C_\lambda d_\mu f_\lambda f_\mu = Wg\,Wh.$$

$$\therefore\ Wgh = Wg\,Wh$$

つぎに,

h : 有界 ;

g_n : 有限和 :

g : 有界. $g_n \longrightarrow g\,(L^2)$

とする. しからば

$$W(hg_n) = Wg_n\,Wh.$$

$$W(g_n h) \longrightarrow Wgh \ (in\,(L^2)).$$

したがって $\exists\{n_k\}$: n の部分列.

$$Wg_{n_k}h \longrightarrow Wgh,\quad a.e.$$

$\exists\{n_k''\}$: $\{n_k\}$ の部分列

$$Wg_{n_k''}\,Wh \longrightarrow Wg\,Wh.\ a.e.$$

ゆえに $\exists n_k''$: $Wg_{n_k''}h = Wg_{n_k''}\,Wh.$

こゝで左辺 $\longrightarrow Wgh$. a.e. ; 右辺 $\longrightarrow Wg\,Wh$. a.e.

$\therefore\ Wgh = Wg\,Wh$

したがって W は有界なものに対して上の関係式が成り立つ。

(3°) $W^{-1}V_t\,Wg_\lambda = W^{-1}V_t f_\lambda = e^{it\lambda}W^{-1}f_\lambda = e^{it\lambda}g_\lambda$

$$\therefore\ W^{-1}V_t W = V_t'$$

(4°) W は測度代数 $\widehat{\mathcal{B}}$. $\widehat{\mathcal{B}}'$ の間の同型で から導かれたものであることは (2°) と第1章 Prop. 6・3 からわかる.

(5°) したがって (m)-空間の定理 (第3章) から. W は Ω と Ω' の間の同型から導かれる. (証終)

<u>注意</u> 定理 2・1 はスペクトル同値から可測的な同値が結論されることを示す. これは離散スペクトルの場合の極めて著しい事実である.

一般の(連続スペクトルをもつ) flow に対しては、このようなことは成立しない. これについて

Sem. on Probab.
Vol.12　1962年
P1-83

は下巻で述べる。

§3 標準形

(m)-空間の上の離散スペクトルをもったエルゴード的 *flow* に関して、その固有値の集合 Λ が可算加法群を作ることを§2で証明した。すなわちこのような *flow* は Λ によって同値な範囲で決定される。本節では次の2つの結果を証明する。(1)任意の可算加法群 Λ に対してそれを固有値の全体とするエルゴード的 *flow* が存在する。したがって Λ と離散スペクトルのエルゴード的 *flow* の類とは完全に対応するわけである。(2)このような *flow* の類の代表（すなわち1つの"標準形"）をある特殊な(m)-空間（コンパクト可分アーベル群）の上に構成する。こゝでこの *flow* をこの場だけ仮りに"G-*flow*"と呼ぶことにする。（群の上に構成されるから）。我々の目標は任意の Λ に対して1つのG-*flow*を構成することである。

実際には(1)と(2)とを同時に証明する。そのために位相群の理論（アーベル群の双対定理）を用いる。（附録IIを参照）

定義3.1　G-*flow*：Ω をコンパクト可分アーベル群、$\mathcal{B}$ をその開集合から作られる *Borel* 族、μ を *Haar* 測度で $\mu(\Omega)=1$ とする。この測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ に次のようにして定義された *flow* を G-*flow* と呼ぶ：$\{\alpha_t\}$ を Ω の1-パラメータ部分群（すなわち、実数群 R から G の中への連続な群準同型）とし、

$$T_t : \omega \longrightarrow \alpha_t \omega$$

とする。

このとき容易に次のことがわかる。

Prop. 3.1　G-*flow* は可測な *flow* である。

Prop. 3.2　G-*flow* $\{T_t\}$ がエルゴード的であるための必要かつ十分条件は、$H=\{\alpha_t ; -\infty<t<\infty\}$ が Ω で稠密なことである。

証明　H が稠密でなければ適当な開集合と H との積は Ω と異なる不変

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

集合となってTtはエルゴード的でない。逆にHが稠密ならば，Ttで不変な函数$f(\omega)$は定数のみである。これを示すために，$f(\omega)$をΩの指標$\{\chi_n : n=0, 1, 2, \cdots\cdots\}$でFourier式に展開する。（便宜上"単位指標"すなわち恒等的に1なるものをχ_0とする。指標については附録Ⅱを参照）；

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(\omega).$$

$f(\omega)$はT_tで不変だから

$$f(\alpha_t \omega) = \sum C_n \chi_n(\alpha_t)\chi_n(\omega)$$
$$= f(\omega), \qquad (-\infty < t < \infty)$$

ゆえに，$C_n \chi_n(\alpha_t) = C_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots; -\infty < t < \infty)$.

したがって$C_n \neq 0$ならば$\chi_n(\alpha_t) = 1$.

しかるに$\{\alpha_t : -\infty < t < \infty\}$はΩで稠密だから$n \neq 0$ならば（このとき$\chi_n(\omega) \neq 1$だから）$\chi_n(\alpha_t) \neq 1$なる$t$がある。（指標の連続性）。ゆえに系数$C_n = 0$ $(n \neq 0)$。すなわち

$$f(\omega) = C_0 = \text{定数} \qquad \text{（証終）}$$

さてG-flowの構成を考える。

<u>定理</u>　Λを実数の可算部分集とすれば，Λを単純スペクトルにもつようなエルゴード的なG-flowが存在する。

<u>証明</u>　(1°) まずΛを単純スペクトルにもつユニタリ作用素の1-パラメータ群$\{W_t\}$を作る。これは（ユニタリ同値の範囲内で）一意的にきまる（Hellinger-Hahnの定理）すなわち，$d\rho$をΛの各点に測度1を与える離散な測度とし，

$$\mathfrak{H} = L^2(\Lambda, \rho)$$

とする。（すなわち$\mathfrak{H}$は数列の作るHilbert-空間である）。この上で

$$W_t : \varphi(\lambda) \longrightarrow e^{2\pi i \lambda t}\varphi(\lambda)$$

(2°)　上に作った$\mathfrak{H}$上の$\{W_t\}$をエルゴード的なflowで実現すること

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

が同型である．そのためにアーベル群の双対定理を用いる．

Λは離散アーベル群だからその指標群は可分コンパクトアーベル群である．これをΩとし，ΩのHaar測度をμとする．（たゞし$\mu(\Omega)=1$としておく．）そうすると$L^2(\Omega, \mu)$は$\mathfrak{H}$と（Hilbert 空間として）同型である．すなわちΩ上のFourier 級数によって

$$L^2(\Omega) \ni f(\omega) \qquad \hat{f} = \varphi = (\varphi_\lambda) \in L^2(\Lambda, \rho).$$

かつこの対応（Fourier 展開）は両方のHilbert 空間の間の同型を与える（Parsevalの等式）

さて，V_t を定義する函数$e^{2\pi i t\lambda}$はΛの指標である．これを$\varphi_t(\lambda)$ とおく．双対定理によって$\varphi_t(\lambda)$ はΩの元で表わされる．

すなわち

$$\exists\ \alpha_t \in \Omega \quad : \varphi_t(\lambda) = (\alpha_t, \lambda).$$

（$\lambda(\alpha_t)$ を (α_t, λ) とかくことにする．） このα_t を用いて，Fourier 変換によってW_tに変換される$L^2(\Omega)$の作用素 V_t を表わすことができる．すなわち

$$W_t \ : \ \varphi(\lambda) \longrightarrow \varphi_t(\lambda)\varphi(\lambda), \qquad \varphi \in L^2(\Lambda) \ ;$$

$$V_t \ : f(\omega) \longrightarrow f(\alpha_t \omega), \qquad f \in L^2(\Omega).$$

実際．$f(\alpha_t \omega)$ のFourier 係数は

$$\int_\Omega f(\alpha_t \omega)\overline{\chi_\lambda(\omega)}\, d\omega = \langle \alpha_t, \lambda \rangle \cdot \hat{f}(\lambda)$$

によって．$f(\omega)$ のFourier 係数に $(\alpha_t, \lambda) = e^{2\pi i \lambda t}$ をかけたものとなっている．要約すれば群Ωの上に G-flow

$$T_t \ : \ \omega \longrightarrow \alpha_t\, \omega$$

が構成され，これがΛを単純固有値としてもっている．

(3°) この$\{T_t\}$がエルゴード的であることを確かめる．その1つの方法として，Prop. 5·1を直接使うことができる．すなわち，もし $H=\{\alpha_t\}$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

がΩの中で稠密でないとする．そうすると，Hの元によって定義されるΛの指標$\varphi_t(\lambda)$がすべて1となるΛの元は，Λの単位元（すなわち0）以外にも存在することになる．（双対定理の帰結）．しかるに$\varphi_t(\lambda)=e^{2\pi i\lambda t}$だから，これがすべての$t$に対して$1$となる$\lambda$は$0$以外には存在し得ない．だから$H$は$\Omega$の中で稠密でなければならない．

(4°) 上のようにしないで直接T_tがエルゴード的なことを言うには，Prop. 5・1の証明と同じ考えをくり返せばよい．すなわち，$f(\omega)\in L^2(G)$が$\{T_t\}$で不変だとすれば，そのFourier係数は単位指標（今の場合$\lambda=0$によって定義される指標）以外では0となる．このことは$\varphi_t(\lambda)$がすべてのtに対して1となるのは$\lambda=0$のみであることから言える．

これでこの節のはじめに述べた問題は全部解けたわけであるが，最後に1つ未解決の問題をあげておく．離散スペクトルの場合は，上のようにflowのスペクトル（すなわち固有値）が（可算）アーベル群になるが，これに相当することが一般の（離散でないスペクトルをもつ）flowの場合にも，なんらかの形で成立しているかどうかが問題である．すなわち，一般に，flowのスペクトルの集合またはスペクトル測度は，何か群に類似した構造をもっているのではないかと予想されている．例えばこの種の性質の中で最も簡単なものとして，スペクトル測度の“対称性”がある．スペクトル測度$\rho\,(\rho_1)$が$\lambda\longrightarrow-\lambda$なる変数変換によってそれ自身と互に絶対連続なものになることが証明される．

離散スペクトルの場合，すなわち可算群Λの場合は，この意味の対称性は逆元（λに対して$-\lambda$）によって明らかに満たされている．対称性以外に群の演算に相当するものも特殊な場合には（例えば確率過程のflow），或程度考察されているが，この章で述べたのと類似の結果を一般のflowに対して定式化することは，重要で興味ある問題と思われる．

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

第6章 Shift

§1 Shiftのスペクトル

$(X, \mathbb{B}, \mu)$を測度空間とし、これから第2章, 例2で考察したshiftを作る.

即ち、

$$\Omega = \{ \omega ; \omega = (\omega_n)_{-\infty}^{+\infty}, \quad \omega_n \in X \} \equiv X^{\mathbb{Z}}。$$

P : μの直積

$\mathbb{B}^{\infty}$: $\mathbb{B}$の直積

とし、

$T\omega = \omega'$, $(\omega')_n = \omega_{n-1}$ なる自己同型 Tをshift（又はBernoulliの自己同型）という。

時間のパラメータが、離散型である強定常過程の重要なクラスにはそれから導かれる自己同型がshiftと考えられることが多い。
ここではそのようような shift の中、特殊な場合にスペクトルをしらべる。

例　$(\Omega, \mathbb{B}^{\infty}, P)$の上の強定常過程を$\{x_n(\omega)\}$とする.
　　$(\xi_n, n= \cdots\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots)$は互に独立でnon-trivialであるとし、$\xi_n$を可測にするBorel族が$\mathbb{B}$とする.
しかも、$E(\xi_n) = 0$, $\xi_n(T\omega) = \xi_{n+1}(\omega)$とする。
このようなξ_nを用いて

$$x_n(\omega) = \varphi(\xi_n(\omega), \xi_{n-1}(\omega), \cdots\cdots)$$

$$\xi_n(\omega) = \psi(x_n(\omega), x_{n-1}(\omega), \cdots\cdots)$$

と書けているとする。そのとき、

$$\mathbb{B}_n(x) = \mathbb{B}\{x_\nu(\omega), \nu \leq n\}$$

$$\mathbb{B}_n(\xi) = \mathbb{B}\{\xi_\nu(\omega), \nu \leq n\}$$

としたとき、$\vee \mathbb{B}_n(x) = \mathbb{B}^{\infty}$でかつ、$\mathbb{B}_n(x) = \mathbb{B}_n(\xi)$が任意の$n$に対して成立つ. そのような性質をみたすものとしては、例えば

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

ま、 $x_n(\omega) = \sum_{\nu} c^{n-\nu} \xi_{\nu}(\omega)$, $|c|<1$

が考えられる（このとき $\{x_n(\omega)\}$ は Markov 系列になっている）

$$H = L^2(\Omega, \mathbb{B}^{\infty}, P).$$

Uを

$$(Uf)(\omega) = f(T\omega)$$

て定義すれば、それはHの上のユニタリ作用素になり

$$U\xi_n = \xi_{n+1}, \quad Ux_n = x_{n+1}$$

である。ユニタリ作用素のスペクトル分解を用いて

$$U^n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, dE(\lambda) \qquad \{E(\lambda)\} : \text{単位の分解}$$

とかける。

1°) $f(\omega)$ として、つぎの性質をみたすものをとる。

$$H \ni f(\omega) = f(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \cdots\cdots, \xi_n(\omega)) \quad \int f(\omega)\, dP(\omega) = 0,$$

$$\Rightarrow U^k f = f(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \quad, \xi_{k+n})$$

$\Rightarrow \forall k > n$ に対して

$$(f(\xi_1, \xi_2, \quad, \xi_n),\ U^k f(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n))$$

$$= \int f(\xi_1(\omega), \quad, \xi_n(\omega))\, dP(\omega) \cdot \int f(\xi_{k+1}(\omega), \cdots, \xi_{k+n}(\omega))\, P(d\omega)$$

故に、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} (dE(\lambda)f, f) = 0 \ ; \ k > n.$$

である。 $k < -n+1$ としても、上式は0になる。

従って $(dE(\lambda)f, f) = \|dE(\lambda)f\|^2$ は絶対連続で、その密度函数は殆ど到る処 >0になっている。すなわち、Lebesgue スペクトルをもつ。

ここにHの中の任意のfに対しては、（但し $\int f(\omega)\, dP(\omega) = 0$）

f_n : 有限個のξ_νの函数（すなわち tame function of ξ_ν）が存在して

$f_n \longrightarrow f$ （強収束）

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

となる。このとき、

$$(dE(\lambda)f_n, f_n) \longrightarrow (dE(\lambda)f, f)$$

ここで $(dE(\lambda)f_n, f_n)$ は、Lebesgue 測度と同等である。故に Δ の Lebesgue 測度 0 ならば

$$0 = (E(\Delta)f_n, f_n) \longrightarrow (E(\Delta)f, f)$$

となり $(E(\Delta)f, f) = 0$ に注意すれば、$(dE(\lambda)f, f)$ は、Lebesgue 測度に関し、絶対連続であることが知られた。

2°) 次に重複度が $+\infty$ であることを示す。

$$L_1 = \{U^n \xi_0,\ n = 0, \pm 1, \cdots\} \text{ の張る部分空間、}$$

とする。

これのスペクトルは上の推論の特殊の場合として、Lebesgue スペクトルである。

また

$$L_2 = \{U^n(\xi_0 \xi_1)\ ;\ n=0, \pm 1, \cdots\} \text{ の張る部分空間}$$

とすれば、この場合もまた Lebesgue スペクトルをもつ、さらに任意の n, m に対して、

$$(\xi_n, \xi_m \xi_{m+1}) = 0$$

なることが、$\{\xi_n\}$ の独立性からでる。 従って L_1 と L_2 とは互に直交する、H の部分空間である。一般に、

$$L_m = \{U^n(\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_{m-1})\ :\ n=0, \pm 1, \cdots\} \text{ の張る部分空間、}$$

とすれば、Lebesgue スペクトルをもち、かつ、$L_1, L_2, \cdots, L_{m-1}$ と、直交していることが、前と同様に証明される。かくして、

$$H \supset L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots\cdots \oplus L_n \oplus \cdots\cdots \equiv L_\infty.$$

となる、各 L_m はスペクトルの重複度が 1 であることに注意すれば、H は σ-Lebesgue スペクトルをもつ部分空間 L_∞ を含むことがわかる。

さらに、2°) から $H \ominus L_\infty$ の 1 と直交する元はすべて Lebesgue 測度に関し絶対連続なスペクトルをもち、H の可分性から重複度は高々可算であるこ

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

とができる。

注意　後の一般論（§3）から、実は$H \ominus L_\infty$も重複度が高々可算のLebesgueスペクトルをもつことが証明される。

§2. Kolmogorov 自己同型

（Ω, $\mathbb{B}$, μ）を測度空間とする。

定義2.1　つぎのような$\mathbb{B}$の部分Borel族$\mathbb{B}_0$が存在するとき、Tを Kolmogorov 自己同型という：

$\mathbb{B}_n = T^n\mathbb{B}_0$とおくとき　(mod. 0で)、

(i)　$n<n'$ ならば、$\mathbb{B}_n \subset \mathbb{B}_{n'}$,

(ii)　$\vee \mathbb{B}_n = \mathbb{B}$

(iii)　$\bigcap_n \mathbb{B}_n = \{\phi, M\}$.

このとき　$\mathbb{B}_0$ を generator とよぶ。

以下、$\mathbb{B}_0$ は non-trivial すなわち$\{\phi, \Omega\}$ではないとする。このときもし、$\mathbb{B}_m = \mathbb{B}_{m+1}$ (mod. 0)なるnが存在したとすれば、任意のkに対して、

$$(T^k\mathbb{B}_m =)\ \mathbb{B}_{m+k} = \mathbb{B}_{m+k+1}\ (= T^k\mathbb{B}_{m+1})$$

となり、

$$\bigcap_n \mathbb{B}_n = \mathbb{B}_m.$$

(iii) から　$\mathbb{B}_m$が従って$\mathbb{B}_0$ が trivial になる。故にすべてのnに対し、

$$\mathbb{B}_n \subsetneqq \mathbb{B}_{n+1}$$

となっている。

Prop. 2.1.　Shift は Kolmogorov 自己同型である。

証　明.　Tを（Ω, $\mathbb{B}^\infty$, P）の上のshiftとする

$$\mathbb{B}_0 = \mathbb{B}\{\{\omega\,;\omega_k \in B\}\,;\,B \in \mathbb{B},\ k \leq 0\}$$

とする、そのとき、

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

$$\mathbb{B}_n = T^n \mathbb{B}_0 = \{ T^n A ; A \in \mathbb{B}_0 \}$$

$$= \mathbb{B}\{\{\omega ; \omega_{k-n} \in A\} ; A \in \mathbb{B}_0 \quad k \leq 0\}$$

$$= \mathbb{B}\{\{\omega ; \omega_k \in B\} ; \quad B \in \mathcal{B}, \; k \leq n\}$$

となるから、(i)がでる。(ii)は$\mathbb{B}^\infty$の定義から明らか。

次に(iii)を示す。

(1) $\quad \bigcap_n \mathbb{B}_n \ni A$

とする。一般に$\mathcal{B}^\infty$の元Aに対しては、次のことが容易にわかる：
任意の$\varepsilon > 0$に対して、$k_1 < k_2 < \cdots\cdots < k_n$ 座標によって定まるA'、すなわち

$$A' = \{\omega ; \omega_{k_1} \in B_1, \; \omega_{k_2} \in B_2, \cdots\cdots, \omega_{k_n} \in B_n , \; B_i \in \mathcal{B}, \; i = 1, 2, \cdots\cdots, n\}$$

なるA'が存在して、

(2) $\quad P(A \ominus A') < \varepsilon \quad , \quad A \ominus A' = A \cup A' - A \wedge A',$

とできる。また(1)から $\quad A \in \mathbb{B}_{k_1}$ でもあるから

$$A'' = \{\omega ; \omega_{k_1 - m} \in B_m , \; \omega_{k_1 - m+1} \in B_{m-1}, \cdots\cdots, \omega_{k_1 - 1} \in B_1 , \; B_j \in \mathbb{B} \quad j = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, m.\}$$

が存在して

(3) $\quad P(A \ominus A'') < \varepsilon$

とできる。従って、

(4) $\quad P(A' \ominus A'') < 2\varepsilon.$

ところが Pは直積の測度であったから、

$$P(A' \cap A'') = P(A') \, P(A'')$$

ところが、

$$P(A') - P(A' \cap A'') \leq P(A' \ominus A'') < 2\varepsilon$$

だから、

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

(5) $0 \leq P(A') - P(A')\,P(A'') < 2\varepsilon$.

また、

$$|P(A') - P(A)| \leqq P(A' \ominus A) < \varepsilon$$

$$|P(A'') - P(A)| \leqq P(A'' \ominus A) < \varepsilon.$$

εは任意であったから (5) より.

$$0 \leq P(A) - P(A)^2 \leq 0 \qquad \text{すなわち}.\ P(A) = 0 \quad \text{又は}\ P(A) = 1$$

でなければならない。よって(iii)が示された。　　（証明終）

<u>注　意</u>　上の Prop で(iii)に関することは、*Kolmogorov* の 0−1−法則に他ならない。

§3. *Kolmogorov* 自己同型のスペクトル

Tは$\mathbb{B}_0$を *generator* にもつ *Kolmogorov* 自己同型とし、

$$H_n = \left\{ f(\omega)\ ;\ f\text{は}\ \mathbb{B}_n\text{-可測},\ \int |f(\omega)|^2 dP(\omega) < \infty,\ \int f(\omega)\,dP(\omega) = 0 \right\}$$

$$H = \left\{ f(\omega)\ ;\ f\text{は}\ \mathbb{B}\text{-可測},\ \int |f(\omega)|^2 dP(\omega) < \infty,\ \int f(\omega)\,dP(\omega) = 0 \right\}$$

とすると、

$$H = \bigvee_n H_n \quad (\vee\text{は } \textit{lattice sum})$$

$$\bigwedge_n H_n = \{0\}.$$

となっている。また、$f \in H$に対して、

(1)　$(Uf)(\omega) = f(T\omega)$.

とするとき、§1 の例と同じく　Uはユニタリ作用素になり、

$$U^n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, dE(\lambda)$$

と表わせる。このUのスペクトルタイプを調べることが、本§の目的である。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

定理　Tが *Kolmogorov* 自己同型ならば(1)で定義されるUはHにおいて、σ－*Lebesgue* スペクトルをもつ.

証明に入る前に若干の *Lemma* を準備する.

Lemma 3.1　任意のnに対し、$\mathbb{B}_n$には *mod* 0 で　T－不変な集合は、Ω, φ以外には存在しない。

証明　$\mathbb{B}_n$ に$TE=E$, *mod* 0.　$0<P(E)<1$なるEがあったとすると、

$$E=T^{-1}E\in\mathbb{B}_{n-1}\quad \text{および}\quad E=TE\in\mathbb{B}_{n+1}.$$

一般に任意のkに対し、

$$E\in\mathbb{B}_{n-k}\quad \text{故に}\quad E\in\bigcap_n\mathbb{B}_n$$

これは(iii)と矛盾する.　　　　　　　　　　(証明終)

系　任意のnに対し、また、任意のNに対し、$\mathbb{B}_n$にはT^N－不変な集合は Ω, φ以外には存在しない(*mod*. 0で).

$\mathbb{B}_0$として、*trivial* でないもののみを扱っているから、$\mathbb{B}_1$に属するが$\mathbb{B}_0$には属しないような集合Eで　$0<P(E)<1$なるものが、少くとも1つは存在する、　このEに対して、

Lemma 3.2　Eは必ず　その真部分集合E′で　$P(E)>P(E')>0$ あり、$\mathbb{B}_0$に属しない($\mathbb{B}_1$に属する)ものを含む。しかも、そのときF∈$\mathbb{B}_0$が存在して　$E'=E\cap F$.

証明
$P(\Omega)=1<\infty$ だから　$T^{-n}E$, $n=0,1,2,\cdots\cdots$はすべてが *disjoint* にはならない。
故にn_0と、Nが存在して$T^{-n_0}E\cap T^{-n_0-N}E\neq\phi$. (*mod* 0)
すなわち

$$E\cap T^{-N}E\neq\phi,\ mod\ 0.$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

このときは上の式から $P(T^{-N}E\cap E)$ は $P(E)$ より真に小さい。$T^{-N}E\cap E\notin\mathbb{B}_0$ か、又は $(T^{-N}E)^c\cap E\notin\mathbb{B}_0$ の何れかである（何となれば共に $\in\mathbb{B}_0$ なら、$E\in\mathbb{B}_0$ となり矛盾）

$T^{-N}E\in\mathbb{B}_{-N+1}\subset\mathbb{B}_0$ だから、それを F とすればよい。　（証明終）

定理の証明

1°) $\mathbb{B}_1$ に属し、$\mathbb{B}_0$ に属しない E, $0<P(E)<1$ に対して、上の Lemma 2から、

$E_1=E$,　$E_2=E_1$の含む $\mathbb{B}_0$ 可測でない集合
　　　　$E_3=E_2$　　〃　　　〃

系として 減少列

$$E_1\supset E_2\supset\cdots\cdots\supset E_n\supset\cdots\cdots,\quad P_n=P(E_n)>0$$

ができる。

$\{E_n-E_{n+1}\}$ はすべて、$\mathbb{B}_0$-可測になることはない。$\mathbb{B}_0$-可測でないものの1つを $F_1=E_{n_1}-E_{n_1+1}$ とする。E_{n_1+1} を E_1 と考えて、上と同じ操作で F_2 を得る。逐次この操作をくり返して、$\mathbb{B}_0$-可測でない集合の互に素な可算系 $\{F_n\}$ を得る。しかも、このとき $P(F_n)\to 0$ となっていることは構成方法から明らか。

2°) 上の $\mathbb{B}_0$-可測でなくて、$\mathbb{B}_1$-可測な集合列を用いて、$H_1\ominus H_0$ が無限次元であることを示す。それには任意の N に対し、H_1 の元 $f_1, f_2,\cdots, f_N$ が存在して、$P_{H_0}f_k$ を f_k の H_0 への射影とするとき、$\tilde{f}_k=f_k-P_{H_0}f_k$, $k=1,\cdots,N$ が、一次独立であることを言えば十分である，そのような函数列を具体的に構成する。　$\{F_n\}$ の中から

F_{10}, F_{11}, F_{12}, $\cdots\cdots$, F_{1N}

F_{20}, F_{21}, F_{22} $\cdots\cdots$, F_{2N}

F_{N0}, F_{N1}, $\cdots\cdots$, F_{NN}

なる $N(N+1)$ 個をとる。

$$(2)\quad f_k(\omega)=\begin{cases}a_{kj}\ (>0) & \omega\in F_{kj}\\ b_k\ (<0) & \omega\in F_{k0}.\\ 0 & \omega\notin\bigcup_{j=0}^{N}F_{kj}\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots\cdots,N$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

但し、$\sum a_{kj} P(F_{kj}) + b_k P(F_{k,0}) = 0$ とする。

ここに $a_{kj}/a_{k0} = b_k$), $k, \ell = 0, 1, \cdots, N$, $j, m = 1, 2, \cdots, N$ は すべて異るように定められているものとする。 このように定義された f_k, $k = 1, 2, \cdots, N$ について $\tilde{f}_k$ が若し、一次従属であったとすれば、次のような $\lambda_1 \cdots \lambda_N$ が存在する：

$\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_N$ はことごとくは0でなく、かつ

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \tilde{f}_k = 0$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k f_k = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_{H_0} f_k$$

右辺は $\mathbb{B}_0$ 可測だから $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k f_k$ も、$\mathbb{B}_0$-可測でなければならない。

$\{ a_{kj}/a_{\ell m} ; (\ell, m) \neq (j, k) \} = A_{jk}$ が $\{ \lambda_j/\lambda_i \}$ を全然含まないような (j, k) が少くとも1つあるから、$\lambda_j a_{jk}$ はいかなる $\lambda_\ell a_{\ell m}$, $(\ell, m) \neq (j, k)$ とも異る。$F_{jk} \notin \mathbb{B}_0$ だから矛盾。よって $H_1 \ominus H_0$ は無限次元である

3°) そこで $\{ \varphi_n \}_0^\infty$ なる $H_1 \ominus H_0$ の完全正規直交系を考える。

L_k を $\{ U^n \varphi_k ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots \}$ の張る部分空間とする。

このとき、$k \neq k'$ ならば、L_k と $L_{k'}$ は直交する。

何故なら

$n = m$ のときは明らかに $(U^n \varphi_k, U^m \varphi_{k'}) = 0$

それのみならず、$n \neq m$ のときも、

(3) $(U^n \varphi_k, U^m \varphi_{k'}) = (U^{n-m} \varphi_k, \varphi_{k'}) = 0$

それは、$U^{n-m} \varphi_k \in H_{n-m+1} \ominus H_{n-m}$ だからである。

故に

$$H = \sum_k \oplus L_k$$

となる。というのは、

$$H \supset \sum_k \oplus L_k$$

は明らか。逆は

$$H = \sum_n \oplus (H_n \ominus H_{n-1})$$

Sem. on Probab.
Vol.12　1962年
P1-83

で $H_{n+1} \ominus H_n$ は $\{U^n \varphi_k,\ k=0,1,2,\cdots\}$ で張られることからそれ
が）張局に各し、は直積 *Lebesgue* スペクトルをもつことを示す。それは

$$U^n \varphi_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, dE(\lambda)\varphi_k$$

だから (3) より

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} (dE(\lambda)\varphi_k, \varphi_k) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

がわかり、$(dE(\lambda)\varphi_k, \varphi_k)$ は、*Lebesgue* 測度であることが知られる。

（証明終）

注　意　このようにしてすべての *Kolmogorov* 自己同型は σ-*Lebesg.* スペクトルを持ち互にユニタリ同値になってしまう。しかし、その自己同型の"エントロピー"というものを考えると、これは一般に同じでない。それのみならず、*Kolmogorov* [9] は任意の h に対し、エントロピーが、丁度 h であるような自己同型の存在を示した。従って、スペクトルは同じ型であっても（*metrically* に）同値でない自己同型が、$\aleph$ 個だけ存在することがわかる。エントロピーについては、下巻で述べる。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

第7章 Brown運動のFlow

§1 定義

Brown運動 $x(t,\omega)$, $-\infty<t<\infty$, $\omega\in\Omega=\mathbb{C}(-\infty,\infty)$,（定義など附録I参照）の"増分"

$$x(I,\omega)=x(t_2,\omega)-x(t_1,\omega) \quad , I=(t_1,t_2]$$

を考えると、$x(I)$は次の条件をみたす。

$$(1)\quad \begin{cases} E\ (x(I,\omega))=0 \\ E\ \{x(I,\omega)^2\}=|I| \quad (|I|\text{はIのLebesgue測度}) \\ E\ \{x(I,\omega)\,x(J,\omega)\}=|I\cap J| \end{cases}$$

注意 (1)をみたす正規型確率変数系が存在することを証明してから、本章の議論を進めることもできる。

さて、

$$T_t:\ x(s,T_t\omega)=x(s-t,\omega)$$

により、ΩからΩの上への1対1の変換が定義され、

しかも

$$T_tT_s=T_{t+s},\quad T_0=I$$

$$T_t^{-1}=T_{-t}$$

をみたす。以下に示す様に$\{T_t\}$はflowである。

Borel集合族 $\mathbb{B}$ としては$\{x(I)\,;\,I\subset(-\infty,\infty)\}$を可測にする最小のものとする。

Prop 1.1 T_tは保測変換である。

証明 $T_tE=F$のとき、Fがシリンダー集合ならばEもシリンダーになることより T_tは可測変換になる。

$P(T_tE)=P(E)$は定義より出る。

何故ならば、

$$(x(I_1),\cdots,x(I_n))\xrightarrow{T_t}(x(I_1+t),\cdots,x(I_n+t))$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

であるが、Gaussian system は共分散のみにより定まるので、上の両辺の分布は同じである。従って、$P(T_t E) = P(E)$ （証明終）

定 義 1.1. 上の$\{T_t\}$を Brown 運動から導かれた flow という。

§2. スペクトル

定 義 2.1. $\Omega(\mathbb{B}, P)$における flow $\{T_t\}$ が Kolmogorov flow であるとは、次の条件をみたす$\mathbb{B}_0$ $\mathbb{B}$が存在することである：

$T_t \mathbb{B}_0 = \mathbb{B}_t$ とするとき

(i) $t < t'$ ならば $\mathbb{B}_t \subset \mathbb{B}_{t'}$

(ii) $\bigcap_t \mathbb{B}_t = \{\phi, \Omega\}$

(iii) $\bigvee_t \mathbb{B}_t = \mathbb{B}$

（上の関係はいづれも mod 0）

注 意 (ii) (iii) とあわせると、(i)は$\mathbb{B}$が trivial でないときは、$t < t'$ ならば $\mathbb{B}_t \subsetneqq \mathbb{B}_{t'}$ となる。

Prop 2.1 Brown 運動から導かれる flow は Kolmogorov flow である。

証 明

$\mathbb{B}_0 = \{x(I, \omega),\ I \subset (-\infty, 0]\}$ を可測にする最小の Borel 族とすれば

$$T_t \mathbb{B}_0 = \{x(I+t, \omega)\ ;\ I \subset (-\infty, 0]\}$$

$$= \{x(J, \omega)\ ;\ J \subset (-\infty, t]\}$$

よって (i) は明らか。

$\bigcap_t \mathbb{B}_t \ni E$ をとって来れば、$x(I)$の加法性により 0－1 法則が成立ち

$$P(E) = 0 \text{ 又は } 1$$

となる。これから (ii) がでる。

(iii) は明らか。

（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

次に、

$$H(x)=\left\{f(\omega)\,;\ f\text{は}\mathbb{B}-\text{可測}.\ \int|f(\omega)|^2\,P(d\omega)<\infty\right\}$$

とし、

$U_t f(\omega)=f(T_t(\omega))$ とする。

<u>定　理 2.1</u>　$\{U_t\}$は、$H(x)\ominus\{1\}$ において$\sigma-$*Lebesgue* スペクトルを持つ。

<u>証　明</u>

(1°)　Prop. 2.1と同じく．

$\mathbb{B}_0=\{x(I)\,;\ I\subset(-\infty,0)\}$を可測にする最小の*Borel*族

$T_t\mathbb{B}_0=\mathbb{B}_t$ とする。また

$$H_t(x)=\left\{f(\omega),\ f\text{は}\mathbb{B}_t-\text{可測}.\ \int|f(\omega)|^2\,P(d\omega)<\infty\right\}$$

とするとき

$$t<t'\Longrightarrow H_t(x)\subset H_{t'}(x)$$

(1)　$\bigvee_t H_t(x)=H(x)$

$\bigwedge_t H_t(x)=\{1\}$

U_t はtについて連続だから，

(2)　$U_t=\int e^{it\lambda}\,dE(\Lambda)$

とスペクトル分解出来る．このdEのスペクトルをみる。

$$H=H_1(x)\ominus H_0(x)$$

とする。

Hの任意の元φに対して，$y(t)=U_t\varphi$とおけば

$L(\varphi)=\{y(t)\,;\ -\infty<t<\infty\}$の張る部分空間において，$dE$ は単純*Lebesgue* スペクトルを持つ。

何故ならば，$U_t\varphi\in U_tH=H_{t+1}\ominus H_t$ だから

$|h|>1$ ならば

$$\gamma(h)=(U_{t+h}\varphi,\ U_t\varphi)=(U_h\varphi,\varphi)=0$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

すなわち、

$$\gamma(n)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{in\lambda}\,(dE(\lambda)\varphi,\varphi)=0 \qquad |n|>1.$$

従って、$dF(\lambda)=\|dE(\lambda)\varphi\|^2$ は絶対連続で、その密度函数 $F'(\lambda)$ は殆ど到るところ 0 でない。すなわち、$dF(\lambda)$ は Lebesgue 測度と同等である。

（注 意　上の $\xi(t)$ は純非決定的な定常過程になっている。）

(2°)　（Wiener の直交化）

Hから任意に φ_1 をとり、単純 Lebesgue スペクトルを持つ $L(\varphi_1)$ を作る。Hの元 φ_2 で $L(\varphi_1)$ に直交するものをとり、$L(\varphi_2)$ を 1°) のようにして構成すれば、

(3)　$L(\varphi_1) \perp L(\varphi_2)$

である。

何故ならば、任意の $\xi_1(t)=U_t\varphi_1$ と任意の $\xi_2(s)=U_s\varphi_2$ に対し、

$$(\xi_1(t),\ \xi_2(s))=(U_{t-s}\varphi_1,\ \varphi_2)=0$$

であるからである。

$L(\varphi_1),\cdots,L(\varphi_{n-1})$ が構成されたとき、それらと直交するHの元 φ_n をとり、$L(\varphi_n)$ を作れば $L(\varphi_1),\ ,L(\varphi_n)$ は、互に直交する $H(x)$ の部分空間である。

このような操作は高々可附番個で終る。

従って、

(4)　$\sum_n \oplus\ L(\varphi_n) \supset H$

(3°)　(2°)から

(5)　$H(x)=\sum_n \oplus\ L(\varphi_n) \oplus \{1\}$

何故ならば、各 $L(\varphi_n)$ は、U_t-不変な部分空間であり、また

$$U_t H_s(x) = H_{s+t}(x)$$

より、

$$H(x)=\{1\}\oplus\ U_{t-1}H\oplus\ U_{t-2}H\oplus\ \cdots\cdots$$

だから、(4)より

$$\{1\}\oplus\sum_n\oplus L(y_n)\supset H_t(\alpha)$$

"$\supset$"は両辺の$\bigvee_t$をとっても不変であるが、左辺は$H(\alpha)$の部分空間だから

$$\{1\}\oplus\sum_n\oplus L(y_n)\supset\bigvee_t H_t(\alpha)=H(\alpha)$$

故に(5)がなり立つ。

4°) 最后に(5)の$L(\varphi_n)$が無限個あらわれることを示す。

今例えば、$\alpha(I)$, $I\subset(0,1]$, のHermite多項式$\{P_n(\alpha(I))\}$をとると、それらは(5)の$\{\varphi_n\}$の一部とすることができる。そのことを証明するには、

$m\neq n$のとき、任意のt, とsに対し$(U_tP_m, U_sP_n)=(U_{t-s}P_m, P_n)=0$

をいえば十分である。さらに$U_tP_n(\alpha(I))=P_n(\alpha(I+t))$に注意すれば任意の$J\subset(-\infty,\infty)$と任意の$k\lneqq n$に対して、

$$\left(\alpha(J)^k,\ P_n(\alpha(I))\right)=0$$

をいえばよい。ところが、$\alpha(J)=\alpha\cdot\alpha(I)+\beta\cdot\xi$

（ξは標準正規分布に従う、ξと$\alpha(I)$は独立）

とかけるから、

(6) $\left(\alpha(J)^k;P_n(\alpha(I))\right)=\left((\alpha\alpha(I)+\beta\cdot\xi)^k, P_n(\alpha(I))\right)$

これは、次のような項の和になる。

$$E\left(\alpha(I)^j\cdot\xi^{k-j}\cdot P_n(\alpha(I))\right)=E(\xi^{k-j})\,E\left(\alpha(I)^j\cdot P_n(\alpha(I))\right)$$

右辺の第二因数は、$j<n$だから0になる。よって、(6)が0になり、$m\neq n$ならば$\{U_tP_n\}$の張る部分空間と$\{U_tP_m\}$のそれとは、直交することがわかる。$\{P_n\}$は、無限個あるから、それらを(5)の$\{\varphi_n\}$の一部としてよい。（実際$\{P_n\}$以外にも、つけ加えられる元が存在する）

なお、(5)が成立つような部分空間$L(y_n)$の個数は$\{y_n\}$のとり方に依存しないから（Hellinger-Hahnの定理）常に$\{\varphi_n\}$は無限個あらわれる。

（証明終）

（註）Poisson過程の場合

$P(t)$が、加法過程、即ち、任意の$t>s$に対し、$P(t)-P(s)$が$P(\tau)$,

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

であるsと独立で，かつ

$$P(P(t)-P(s)=k)=\frac{\lambda^k(t-s)^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

であるとき Poisson process と呼ばれる。これは Brown 運動と共に…法過程の中の代表的なものである。いま、そのような Poisson process をとり，Brown 運動の場合と同様に，$I=(a,b]$ ならば，$P(I)=P(b)-P(a)$ とする

$$p(I)=P(I)-E(P(I))$$

とすれば、独立加法測度になる。flow $\{T_t\}$ についても Brown 運動の場合と同様に

$$(p(I_1),\cdots,p(I_n)) \xrightarrow{T_t} (p(I_1+t),\cdots,p(I_n+t))$$

により定義され、それは Kolmogorov flow になる（証明は prop.2.1.における x を p にかえて、そのまま成立する） 同じく T から導かれる U_t をとれば、U_t は Hilbert 空間 $H(P)\ominus\{1\}$ において σ-Lebesgue スペクトルをもつことが証明される．証明は、定理1と略々同様である，すなわ、(1°)(2°),(3°) の部分は、x を P にかえれば、そのまま通用する議論である (4°)部分のみは、直交多項式による議論が容易でないので、次のような論法にかえる。

(5′) $$H(P)=\sum_n \oplus L(\varphi_n)\oplus\{1\}$$

で、$L(\varphi_n)$ が 有限個しかあらわれなかったとする。例えば m 個であったとする $H=H_1(P)\ominus H_0(P)$ において、次のような $m+1$ 個の元を考える $[0,1]$ を $2m+1$ 等分して、左から順次 $I_0, I_1,\cdots, I_{2m}$ とする

$$Z_k=\prod_{i=0}^{2k}P(I_i)-E\left(\prod_{i=0}^{2k}P(I_i)\right) \qquad k=0,1,\cdots,m$$

これら Z_k はすべて H に属することは明らか、$\{U_t Z_k;-\infty<t<\infty\}$ の張る部分空間を $L(Z_k)$ とするとき、それらは互に直交する．
$(k=0,1,\cdots,m)$、何故なら $k\lneqq l$ のとき

$$(U_t Z_k, U_s Z_l)=(U_{t-s}Z_k, Z_l)$$
$$=E\left(\prod_{i=0}^{2k}P(I_i+t-s)\times\prod_{j=0}^{2l}P(I_j)\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

であるが、I_j , $j=1,2,\cdots\cdots,2k$, の中には少くとも一つ すべての I_i+t-s と素であるようなものが存在する．それを I^* とすれば 上式は

$$= E(P(I^*))\ E\Big(\prod_{i=0}^{2k} P(I_i+t-s) : \prod_{I_j \neq I^*} P(I_j)\Big) = 0$$

$$\big(\because E(P(I^*)) = 0\big)$$

かくして．$n+1$ 個の $\{L(Z_k)\}$ が得られた。それは．(5′) の $L(\varphi_n)$ が n 個しかないとしたことに矛盾する．

以上から U_t が $H(P)$ で σ-Lebesgue スペクトルをもつことが、証明された．

なお、上の証明方法は．すべての加法過程の場合にいつでも通用する方法であることは容易に知られよう。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

附　　録

I. Brown 運動の定義について

第3章§3.で（原点から出発した）Brown 運動の定義を与えたが、それに関連する flow を考える時には、その定義のままでは充分でないので，以下§1.でそれを少し修正した1つの定義を与える。§2.でそれに必要な技術的手段を証明する。

§1. Brown運動の定義

Brown運動を次の様に定義する。

1) $W = w(t)$ を $t \in (-\infty, +\infty)$ の実数値連続函数とし、その全体を W とする。

2) $\mathbb{A}$ を W のシリンダー集合の全体とする。即ち

$$-\infty < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n < +\infty$$

とし、一方 B^n を n 次元 Borel集合とする。このとき

$$A = \{ w ; (w_{t_1}, \cdots\cdots, w_{t_n}) \in B^n \}$$

なる形の集合をシリンダー集合と呼ぶ。

$\mathbb{B}$ を $\mathbb{A}$ より生成されるBorel族とする。

3) $P(\cdot)$ は $\mathbb{B}$ の上の正の測度で、次の条件をみたすとする。

いま、任意の正整数 n と、任意の $-\infty < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < +\infty$ に対して、射影 π を

$$\pi_{t_1, \cdots, t_n} : W \ni w \longrightarrow (w_{t_1}, \cdots, w_{t_n}) \in \mathbb{R}^n$$

とする。任意の n 次元集合 B^n に対して

$$(1)\quad P(\pi^{-1}_{t_1, \cdots, t_n}(B^n)) = \int \cdots \int_{B^n} P(w_{t_1} \in dx_1)\, g(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots g(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n$$

但し、$g(t, x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

とする。

このとき、測度空間 $(W, \mathbb{B}, P)$ を Wiener 空間といい、このPを、Wiener測度 という。w の t での値を w_t, $x(t,w)$, あるいは $x_t(w)$ と書き、

$$\{x(t,w); -\infty<t<\infty,\ w\in W\}$$

を、Brown 運動という。

このようなものの存在とその一意性が、第3章と同じように問題になるが、そのことは前と同様な考えで証明できる。

なお、第3章の形は、Markov 過程として取扱うとき、しばしば用いられているが、それは Markov 性という概念は、ある時間で値を知った時の前後の時間の関係として考えるので、そのような特性の研究には時間が 0 から始まっているもので、多くの場合充分である。

ところで 今の場合は、

$$T_t:\quad x(s,w)\longrightarrow x(s+t,w)$$

とするとき、$\{w; (x(t_n,w)-x(t_{n-1},w), \cdots\cdots, x(t_2,w)-x(t_1,w))\in B^n\}$ の測度が T_t, $-\infty<t<+\infty$ に関して不変であることから導かれる性質を研究しようとするので、現在のような定義が便利である。

なお、この測度空間が通常の1次元 Brown 粒子の行動の模型になっていることは、つぎの事柄による。任意の $t_1<t_2<\cdots<t_n$ に対して

$$\text{(2)}\quad P\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\{w; x(t_k,w)-x(t_{k-1},w)\in E_k\}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(\{w; x(t_k,w)-x(t_{k-1},w)\in E_k\})$$

が成立つので、粒子の位置の変化は互いに交わらない時間区間では独立になっていることが反映されている。しかも、(2) と軌跡の連続性より、その測度は

$$P(x(t,w)-x(s,w)\in E)=\int_E g(t-s,0,y)\,dy$$

をみたさねばならないので、（このことは有名な中心極限定理と本質的に同じ）、(1) を仮定するのが自然な要求になる。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

なお，n次元 Brown 運動は簡単に言えば、1次元の Wiener 空間のn個の直積として定義する。このことは、3次元空間の Brown 粒子の行動において、各方向毎の成分の運動は全く無関係であるとことの反映である。

§2. Kolmogorov－Prokorov の定理

前§や、第3章§3の Wiener 測度の定義においては、それが連続函数の空間の測度として考えられているために，良く知られている所謂 Kolmogorov の定理では不充分である。このことのためには、最近は充分一般な結果が知られているが、こゝでは当面の目的に必要な程度に制限した場合にそのことを示す。

いま $w=w(t)$ を $t\in[0,+\infty)$ の実数値連続函数とし、w の全体を W と書く。

$\mathbb{A}$ を前と同様 W のシリンダー集合の全体，$\mathbb{B}$ は $\mathbb{A}$ から生成される Borel 族とする。このときつぎのような定理が成立つことを〔4〕に従ってのべる。

定　理（Kolmogorov－Prokorov）。$\mathbb{A}$ の上に定義された集合函数 $P(\cdot)$ で，つぎの条件をみたすものが存在するとする：

1) $P(W)=1$

2) 任意に固定した $0\leq t_1<\cdots\cdots<t_n<+\infty$ と，任意の n 次元 Borel 集合 $\mathbb{B}^n$ に対して，

$$P_{t_1,\cdots\cdots,t_n}(\mathbb{B}^n)=P(\pi^{-1}_{t_1,\cdots\cdots,t_n}(\mathbb{B}^n))$$

とおけば、$P_{t_1,\cdots\cdots,t_n}(\cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ における確率測度である。

更に，つぎの関係式をみたす定数 $a>0$，$b>1$，$C>0$ が存在するとする：

$$\int_W |w(s)-w(t)|^a \quad P(dw)\leq C\,|s-t|^b$$

そのとき、P は $\mathbb{B}$ 上の確率測度に拡張出来る。

注　意　上の積分は，$\mathbb{R}^2$ の積分に帰着されるから 定理の仮定から意味がある。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

証明 いま、つぎの条件をみたす $\{A_n, n=1,2,---\}$ を考える：

(1) $A_n \supset A_{n+1} \supset ------,$

(2) $A_n \in \mathcal{A}, \ n=1,2,---,$

(3) 任意のnに対して $\mathbb{P}(A_n) > \varepsilon > 0$

このとき、

$$\bigcap_n A_n \neq \phi$$

なることを示せば、定理の証明のためには充分であることは良く知られている。従って、つぎにそのことを示す。

(2)より、正の整数 r_n と $B_n \in \mathcal{B}^{r_n}$ に対して、

$$A_n = \{w ; w \in W, \ (w(t_1^{(n)}), ----, w(t_{r_n}^{(n)})) \in B_n\}$$

となる。但し、今后 k次元 Borel集合族を $\mathcal{B}^k$ と書くことにする。

そのようなnに対しては、つぎの関係をみたす正整数 g_n が存在する：

a) $t_i^{(n)} \leq g_n$

b) $t_i^{(n)} \in \left[\frac{k-1}{2^{g_n}}, \frac{k}{2^{g_n}}\right], \ k=1,2,\cdots, g_n \cdot 2^{g_n},$

なる $t_i^{(n)}$ が必ず存在する。

必要ならば suffix を増すことにより、

$$k \cdot 2^{-g_n}, \quad k=0,1,----, g_n 2^{g_n}$$

は、$\{t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, ----, t_{r_n}^{(n)}\}$ の中に含まれるように出来る。しかも、各開区間

$$((k-1)2^{-g_n}, k2^{-g_n})$$

には $\{t_1^{(n)}; t_2^{(n)}, ..., t_{r_n}^{(n)}\}$ の丁度1個だけが入っているように出来る。従って、

$$r_n = g_n \cdot 2^{g_n+1}, \quad t_{2k}^{(n)} = k2^{-g_n}$$

と考えてよい。最后に必要ならば、点列 $\{t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, ----, t_{r_n}^{(n)}\}$ を増すことにより、

$$g_n = n$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

と考えてもよい。以上の操作をすべて行った後は

$$A_n = \{ w ; w \in W. \ (w(t_1^{(n)}), \cdots, w(t_{n\cdot 2^{n+1}}^{(n)})) \in B_n \}$$

$$t_{2k}^{(n)} = k2^{-n}, \qquad (t_1^{(n)}, \cdots, t_{n2^{n+1}}^{(n)}) \subset (t_1^{(n+1)}, \cdots, t_{(n+1)2^{n+2}}^{(n+1)})$$

となっていると考えてよい。

定理 の仮定 より B_n は $R^{n\cdot 2^{n+1}}$ の閉有界部分集合のとき考えると充分である。

$\delta > 0$ を $\lambda = b - a\delta - 1 > 0$ なるようにえらんでおけば、定理の仮定より、

$$P\{w ; |w(t_i^{(n)}) - w(t_{i-1}^{(n)})| \geqq |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|^{\delta}\} \leqq C\cdot 2^{-2(1+\lambda)}$$

が成立つ。故に

$$P\Big[\bigcup_{i=2}^{n\cdot 2^{n+1}} \{w ; |w(t_i^{(n)}) - w(t_{i-1}^{(n)})| \geqq |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|^{\delta}\}\Big] \leqq 2\cdot C\cdot n\cdot 2^{-\lambda n}$$

が成立つ。ところが $\sum n\cdot 2^{-\lambda n}$ が収束するので

$$2C \sum_{n=m_0}^{+\infty} n 2^{-n\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるような m_0 が存在する。その m_0 を固定すると、任意の $\ell \geqq m_0$ に対して、

$$P\Big[\bigcup_{n=m_0}^{\ell} \bigcup_{i=2}^{n\cdot 2^{n+1}} \{w ; |w(t_i^{(n)}) - w(t_{i-1}^{(n)})| \geqq |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|^{\delta}\}\Big] < \frac{\varepsilon}{2}$$

故に $\ell \geqq m_0$ に対し

$$P\Big[\bigcap_{n=m_0}^{\ell} \bigcap_{i=2}^{n\cdot 2^{n+1}} \{w ; |w(t_i^{(n)}) - w(t_{i-1}^{(n)})| < |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|^{\delta}\}\Big] > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

従って

$$P\Big[A_\ell \cap \bigcap_{n=m_0}^{\ell} \bigcap_{i=2}^{n\cdot 2^{n+1}} \{w ; |w(t_i^{(n)}) - w(t_{i-1}^{(n)})| < |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|^{\delta}\}\Big] > \frac{\varepsilon}{2}.$$

故に $[\cdots\cdots]$ の中の集合を B_ℓ' とおくと、

$$B_\ell' = \phi, \quad B_\ell' \supset B_{\ell+1}' \quad \text{かつ} \quad A_\ell \supset B_\ell'$$

となる。つぎに

$$\cap B_\ell' \neq \phi$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

なることを示す。このことが言えれば 証明は終る。

W_ℓ を $W_\ell \in B'_\ell$ で $[t_{i-1}^{(\ell)}, t_i^{(\ell)}]$ の上では直線になっているものをとって来る。このようなものの存在は上の W_ℓ は $(W(t_1^{(\ell)}), \cdots\cdots, W(t_{\ell\cdot 2^{\ell+1}}^{(\ell)}))$ で定まることに注意すれば、明らかである。

また、一般性を失うことなく、

$$W(t_1^{(\ell)}) = 0, \qquad W \in B'_\ell$$

としておいてよい。

任意の $\ell \geq m_0$ に対し、

$$|W_\ell(t_i^{(n)}) - W_\ell(t_{i-1}^{(n)})| < |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}| \leq 2^{-n\delta}, \; n = m_0, \cdots, \ell \;, i = 1, \cdots \cdots, n2^{n+1},$$

故に

$$|W_\ell(\tfrac{k}{2^n}) - W_\ell(\tfrac{k-1}{2^n})| \leq 2 \cdot 2^{-n\delta}, \; 1 \leq k \leq n \cdot 2^{n+1}, \; m_0 \leq n \leq \ell.$$

k, k' として $k' < k$, $\quad k2^{-\ell} - k'2^{-\ell} < 2^{-m_0}$ となるものをとって来る

そのときは、つぎのような g が存在する：

$$g < \ell .$$

$$2^{-g} \leq k2^{-\ell} - k'2^{-\ell} < 2^{-g+1}。$$

そのときは $j2^{-g}, (j+1)2^{-g} \in [k'2^{-\ell}, k2^{-\ell}]$ なる形の点が少くとも2点存在するので、$W_\ell \in B'_g$ に注意すれば

$$|W_\ell(j2^{-g}) - W_\ell((j+1)2^{-g})| < 2 \cdot 2^{-g\delta}。$$

同じような議論を繰返して、つぎの関係をみたす定数 μ が存在する：

$$|W_\ell(k2^{-\ell}) - W_\ell(k'2^{-\ell})| \leq 4(1-2^{-\delta})^{-1} 2^{-g\delta} \leq \mu |k2^{-\ell} - k'2^{-\ell}|^\delta。$$

故にある定数 $\tilde{\mu}$ に対して、若し $|t_i^{(\ell)} - t_j^{(\ell)}| \leq 2^{-m}$ ならば

$$|W_\ell(t_i^{(\ell)}) - W_\ell(t_j^{(\ell)})| < \tilde{\mu} |t_i^{(\ell)} - t_j^{(\ell)}|$$

となる。W_ℓ が折線で結んであることに注意すれば、$t_i^{(\ell)} \leq t \leq s \leq t_j^{(\ell)}$ なる t, s に対し

$$|W_\ell(t) - W_\ell(s)| \leq 4\tilde{\mu} |t_i^{(\ell)} - t_j^{(\ell)}|^\delta。$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

そこで、$W_{\ell+p}\in A_\ell$ であるので，任意の $p\geqq 0$ に対し

$$(W_{\ell+p}(t_i^{(\ell)}),\cdots\cdots,\ W_{\ell+p}(t_{\ell 2^{\ell+1}}^{(\ell)}))\in B_\ell\text{。}$$

しかも、B_ℓ はコンパクトであるから，$p\longrightarrow\infty$ のとき、極限は B_ℓ の中に入っている。対角線論法を用いると、ある部分列 $\{W_n\}$ に対し、$\{W_n(t_i^{(\ell)})\}$ はすべての i と ℓ に対し収束する。

t_0 と $\eta>0$ を与える

充分大きな n_0 に対し $t_i^{(n_0)}\leqq t_0<t_{i+1}^{(n_0)}$ ，$t_i^{(n_0)}-t_{i+1}^{(n_0)}<2^{-n_0}<\dfrac{\eta}{2}$ と出来る。

若し、ℓ と m が充分大きれば

$$t_i^{(n_0)}\leqq t_j^{(\ell)}\leqq t_0\leqq t_{j+1}^{(\ell)}\leqq t_{i+1}^{(n_0)}$$

$$t_i^{(n_0)}\leqq t_k^{(m)}\leqq t_0\leqq t_{k+1}^{(m)}\leqq t_{i+1}^{(n_0)}$$

となる。

これまで評価して来たことより、

$$\begin{aligned}|W_\ell(t_0)-W_m(t_0)|&\leqq|W_\ell(t_0)-W_\ell(t_j^{(\ell)})|+|W_\ell(t_j^{(\ell)})-W_\ell(t_i^{(n_0)})|\\&\quad+|W_\ell(t_i^{(n_0)})-W_m(t_i^{(n_0)})|+|W_m(t_i^{(n_0)})-W_m(t_k^{(m)})|\\&\quad+|W_m(t_k^{(m)})-W_m(t_0)|\\&\leqq|t_0-t_j^{(\ell)}|^\delta+\tilde{\mu}|t_j^{(\ell)}-t_i^{(n_0)}|^\delta+\frac{\eta}{2}+|t_i^{(n_0)}-t_k^{(m)}|^\delta\tilde{\mu}\\&\quad+|t_k^{(m)}-t_0|^\delta\\&<A\cdot\frac{\eta}{2}.\qquad A\text{はある定数}\end{aligned}$$

これは任意の $t\in[t_i^{(n_0)},t_{i+1}^{(n_0)}]$ に対して成立つ。

これは任意の点に関して極限が存在することを示している。しかも、

$$|W_\ell(t)-W_\ell(s)|<|t_i^{(\ell)}-t_j^{(\ell)}|^\delta 4\tilde{\mu}$$

を用いると、極限函数 W^* は連続である。そこで任意の ℓ に対し

$(W^*(t_i^{(\ell)}),\cdots,\ W^*(t_{\ell\cdot 2^{\ell+1}}^{(\ell)}))\in B_\ell$ に注意すれば

$\bigcap_{\ell\geqq m_0}B'_\ell\neq\phi$ を意味する。 （証明終）

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

II. 位相アーベル群の双対定理

この附録では、アーベル群の双対定理を第５章に必要な範囲で要点だけを解説する。証明の多くは略すが、詳細は例えば［ 23 ］を参照されたい。

§1. 位相アーベル群

こゝで考察するアーベル群は位相群であって、特に局所コンパクト（各点の近傍として閉包がコンパクトなものがとれること、かつ、可分なものである。以下Gはこの様な群を表わす。

例 n次元トーラス（第1章）$\mathbb{T}^n$ はコンパクトなアーベル群と考えることができる。

$\mathbb{T}^n$ の点 $x=(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ の座標は実数と mod. 1 で考えたものだから、加法群をなす.

n 次元ベクトル空間$\mathbb{R}^n$ 自身は勿論アーベル群で局所コンパクトである。更に、任意のアーベル群は位相を考えないで（すなわち離散とみて）局所コンパクトであることは勿論であるが、これは可算のときに限って可分となる。第３章で対象となったのは、実数の群$\mathbb{R}$の部分群で可算のものであった。

任意の局所コンパクト群Gには、いわゆるHaar測度が存在する。
Gの位相Borel族（開集合を含むもの）を$\mathbb{B}$とし、その上の測度μで$B\in\mathbb{B}$, $a\in G$に対して、

$$\mu(B)=\mu(Ba)$$

となるものをHaar測度という。（Baは群の積を用いて定義した集合）.
このμはコンパクト集合に対して有限，開集合に対して正の値をとる。

Haar測度は常数倍を除いて一意である。特にGがコンパクトならば、$\mu(G)<\infty$ である。以下では

$$\mu(G)=1$$

と規約しておく。 したがって可分コンパクトAbel群Gの場合は$(G,\mathbb{B},\mu)$は $(\mathfrak{m})$－空間である。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

§2. 指標群

以下Gはすべて局所コンパクト可分Abel群とする。

定　義2.1　Gの指標（character）とは、次の条件をみたす複素数値の函数$\chi(g)$のことをいう；

(1)　G上で連続　；
(2)　$|\chi(g)|=1$ ；
(3)　$\chi(gk)=\chi(g)\ \chi(k)$

定　義2.2　恒等的に$\chi(g)=1$なるものは勿論定義2.1の意味の指標であるが、これを単位指標と呼ぶ。

容易に次のことがわかる。

Prop. 2.1　χ_1, χ_2をGの指標とすれば

$$\chi(g)=\chi_1(g)\ \chi_2(g)$$

および

$$\chi^{-1}(g)=\overline{\chi(g)}$$

もまたGの指標である。

定　義2.3.　Gの指標の全体を$\hat{G}=\{\chi\}$とし、これに次の様に乗法と位相を定義する。

(1)　χ_1, χ_2の積および逆はprop.2.1のように定義する　；
(2)　$\chi_n(g)$がGのコンパクト集合の上で一様に$\chi(g)$に収束するとき、

$$\chi_n \longrightarrow \chi$$

とする。

この様に積と位相を定義された$\hat{G}$をGの指標群（character group）と呼ぶ。

指標群に対して、次の命題がまず証明される。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

Prop. 2.2 $\hat{G}$は定義2.3によってまた局所コンパクト可分アーベル群をなす。

証明はAscoli-Arzelaの定理を使って、初等的に出来るが省略する。

Prop. 2.3 とくにGがコンパクトならば $\hat{G}$は離散，Gが離散ならば，$\hat{G}$はコンパクトになる。

例1. $G=\mathbb{T}^1$とすると、その指標$\chi(g)$は指数函数で表わされる：すなわち、ある整数nによって

(1) $\chi(g)=e^{2\pi i n g}$

（ただし、gはそのまゝ $mod.\ 1$ の実数と考える）

したがって、このときはχ_n, $n=0$. ± 1, ----- と番号をつければ便利である：

$$\hat{G}=\{\chi_n\ ;\ n=0,\ \pm 1,\ \cdots\cdots\}$$

$\hat{G}$の中で乗法は、

$$\chi_n\,\chi_m=\chi_{n+m}$$

となる．χ_n とχ_mは$n \neq m$ なるときは、Gの上でLebesgue測度（これがGのHaar測度となる）に関して直交する。ゆえに$\hat{G}$は離散である。

例2. Γを整数全体の作る離散群とする：$\Gamma=\{0,\ \pm 1,\ \cdots\cdots\}$
Γの指標はある実数λによって

(2) $\chi(n)=e^{2\pi i \lambda n}$ $(n\in\Gamma)$

と表わされることが証明される。

式(2)の右辺の函数は差が整数に等しい２つのλに対しては，同じであるから，$\hat{\Gamma}$は実は$\mathbb{T}^1$と同じものになる。従って，コンパクトである。

以上のようにGに対して、$\hat{G}$を対応させる操作は、コンパクトなGと離散なGを入れかえることがわかった。次にこの操作を２回つづけて行なった時のことを考える、これについて先ず次のことは、指標の定義から容易にわか

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

<u>Prop. 2.4</u>　Gの元は$\hat{G}$の指標を定義する。すなわち $g\in G$をとめておいて、χを$\hat{G}$の中を動かせば

$$g(\chi)=\chi(g)$$

は、$\hat{G}$の指標である。

このことからGの元は、$\hat{\hat{G}}$（すなわち$\hat{G}$の指標群）の元と考えることが出来る。すなわち、

<u>Prop. 2.5</u>　Prop. 2.4によって、Gは$\hat{\hat{G}}$に埋めこむことが出来る。すなわち、

(3)　$G\subset\hat{\hat{G}}$

と考えることができる、このとき、Gのもとの位相と$\hat{\hat{G}}$の中で考えた位相とは一致する。すなわち (3) は位相群として含まれていると解することができる。

実は (3) は、$G=\hat{\hat{G}}$であることが証明される。それが次の双対定理であって、アーベル群に関する主要定理の1つである。

<u>定　理</u>（Abel群の双対定理）　Prop. 2.4に述べた意味でGの元を$\hat{\hat{G}}$の元に対応させると、この対応でGと$\hat{\hat{G}}$とは（位相群として同型になる。すなわち、任意の局所コンパクト可分Abel群の2回目の指標群$\hat{\hat{G}}$はG自身と同じものと考えることが出来る。

<u>例</u>　上にあげた例1と2の式 (1),(2)によって、

$$G=\mathbb{T}^1,\qquad \hat{G}=\Gamma=\text{整数の群}$$
$$\hat{\hat{G}}=\mathbb{T}^1.$$

これは、Γから出発しても同様で

$$\hat{\Gamma}=\mathbb{T}^1,\qquad \hat{\hat{\Gamma}}=\Gamma$$

<u>注　意</u>　双対定理によって、$g\in G$と$\chi\in\hat{G}$とは対等の役をすることがわかったから、

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

$$\chi(g) = (g, \chi)$$

というように書くことがある。

§3 コンパクト群の上のFourier変換

以後、Gをコンパクトとする。$L^2(G, \mu)$において、一般のFourier級数を考える、次の命題はコンパクト群の表現の理論の中心的な定理の1つである。

Prop. 3.1. Gの指標χは$L^2(G)$に属し、相異なる指標は直交する。

Prop. 3.2. したがってGの指標は高々可算個である。

これは、$L^2(G)$が可分なことから直ちにわかる。

したがって、便宜上、Gの指標に$\chi_0, \chi_1, \cdots\cdots$というように番号をつけて表わす。ここで$\chi_0$は単位指標としておく。すなわち

$$\chi_0(g) \equiv 1$$

定理 Gの指標の全体$\{\chi_n\}$は、$L^2(G)$の完全正規直交系をなす。したがって、$f \in L^2(G)$のFourier係数を

$$C_n = \int_G f(g)\,\overline{\chi(g)}\,\mu(dg)$$

と定義すれば、

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \qquad \text{(Parseval の等式)}$$

また、

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \chi_n$$

が(L^2)の強収束の意味で成立する。

例 $G = \mathbb{T}^1$とすれば上の定理は、普通のFourier級数の定理そのものになる。すなわち、上の定理によって、任意のコンパクト群に対してFourier

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

級数の理論（の一般論）が拡張される。

Prop. 3.3 局所コンパクト群 G の上の $L^2(G)$ の中で $f \in (L^2)$ に対して、

$$U_{g_0} : f(g) \longrightarrow f(g g_0)$$

とすれば、U_{g_0} はユニタリ作用素である。

Prop. 3.4 G をコンパクト群とし、$L^2(G)$ を定理によって $\hat{G}$ 上の函数（Fourier 級数）に展開したとする：

$$L^2(G) \ni f \longleftrightarrow c = \{c_n\} \in L^2(\hat{G})$$

このとき、Prop. 3.3 で定義した作用素 U_g は $L^2(\hat{G})$ の上では、次の様に表わされる： $f' = U_g f$ とすれば、f' の Fourier 係数は

$$c_n' = (g, \chi_n)\, c_n$$

すなわち、作用素 U_g の Fourier 変換は $\hat{G}$ の上で (g, χ_n) を乗じることである。

証明 は容易である．f' の Fourier 係数は

$$\begin{aligned} c_n' &= \int_G f(g g_0)\, \overline{\chi(g)}\, \mu(dg) \\ &= \int f(g)\, \overline{\chi(g g_0^{-1})}\, \mu(dg) \\ &= \chi(g_0) \int f(g)\, \overline{\chi(g)}\, \mu(dg) \\ &= \chi(g_0)\, c_n \end{aligned}$$

注 意 こゝではコンパクト群に対して、Fourier 展開を述べたが、一般の局所コンパクト Abel 群の場合も、Fourier 変換の理論が出来ている。これは実変数の Fourier 積分の拡張とみなすことが出来る。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

Ⅲ. 抽象的 *Lebesgue* 空間

本文第3章で述べた様に可分完備距離空間は、測度を考察するのに適した空間である。このことは、かかる空間における $\mathbb{B}$ と μ とが適当な条件を満足していることを示すものである。この附録では、この条件、すなわち、3章の“同型定理”が成立するような測度空間を位相の概念を用いずに規定することを考える。この目的のために、“抽象的 *Lebesgue* 空間”（略して(L)-空間）という概念を導入する。結果において、これは区間 $[0, 1]$ の作る普通の *Lebesgue* 空間と(測度空間として）同型になる測度空間の特徴付けをすることである。§3.で *Brown* 運動の空間が(L)－空間であることを証明する。(M)－空間は(L)－空間であることが証明されるから、このことは、それからも導かれるが、(L)－空間の概念を説明するために、直接このことを証明することとする。ここに述べる一般的なことは主として[14]による。

§1. 定義

抽象的 *Lebesgue* 空間を一般に定義するために、若干準備をする。

定義 1.1 測度空間 $(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$ が真に可分（*Properly separable*）とは、次の性質をみたす $\mathbb{B}$ の可算部分集合 Γ が存在することである：

(1) すべての $B \in \mathbb{B}$ に対して、$A \in \mathbb{B}\{\Gamma\}$ が存在して、$B \supset A$ かつ $B = A$, *mod.* 0.

(2) すべての $x, y \in \Omega$ に対して、$G \in \Gamma$ が存在して $G \ni x$, $\not\ni y$ または $G \ni y$, $G \not\ni x$.

このような Γ のことを Ω の基底（*base*）という。

定義 1.2 Ω を真に可分な測度空間とする。Ω が完全（*complete*）であるとは、次のような $\Gamma = \{B_\beta\}$ なる Ω の基底が存在することである：各 β に対して A_β を B_β 又は CB_β の何れかとするとき、

$$\bigcap_{\beta} A_\beta \neq \phi$$

Prop 1.1 Ω が完全ならば、定義1.2の A_β をどのようにとっても、$\cap A_\beta$ は1点である。逆に Ω の任意の点 ω に対し $\{A_\beta\}$ が存在して $\bigcap_\beta A_\beta = \{\omega\}$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

証明は定義 1.1, 1.2 より容易である。

定義 1.3　Ωが更に可分でそれと mod. 0 で同型な完全なΩ'が存在するとき、Ωを抽象的 Lebesgue 空間 (又は (L) - 空間)、μを抽象的 Lebesgue 測度 (又は (L) - 測度) という

なお、以上とは違った形の条件が、同じ目的のために [2] で考察されている。そこでは、"normal" な測度空間と呼ばれている。

§2. Lebesgue 空間との関係

(L) - 空間の特徴は、それが普通の Lebesgue 空間 (オ1章§1) と同型であることである。先づ後者が (L) - 空間であることを示す。

Prop. 2.1.　$(\mathrm{I}, \mathbb{L}, m)$ を Lebesgue 空間 (即ち、$\mathrm{I} = [0, 1)$ $\mathbb{L}$をIの Lebesgue 可測集合の全体、mを Lebesgue 測度) とすれば、これは (L) - 空間である。

証明.　先づ base Γを構成する。
$\omega \in \Omega$を2進法で展開したとき、その小数オn位を$\varepsilon_n(\omega)$で表わす。ここで、2通りに展開されるようなωの測度は0であるから 始めから そのようなものは除いておいて差支ない、或は、ある番号n_0以后ε_nがすべて1であるものは、$\varepsilon_{n_0-1} = 1$　$\varepsilon_n = 0,\ n > n_0$ と展開されるものと約束してもよい、今、後者をとることにする。さて、

$$B_n = \{\omega\ ;\ \varepsilon_n(\omega) = 1\}$$

とする。このとき、B_nは、長さ$\frac{1}{2^n}$の右半開区間の2^{n-1}個よりなる集合であり、任意の区間$[\frac{k}{2^n}, \frac{l}{2^n})$, $0 \leq k < l \leq 2^n$ は $B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$ から生成される集合体に属していること は容易に確かめられる。
このことから $\mathbb{B} = \mathbb{B}\{B_n\ ;\ n = 1, 2, \cdots\cdots\}$ とするとき、
任意の開区間は$\mathbb{B}$, に属することがわかる。故に 任意の$A \in \mathbb{L}$に対して、$B \in \mathbb{B}$ が存在して

$$(1)\quad m(A) = m(B)$$

となる。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

次に、任意の $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ をとるとき $\omega_1 \neq \omega_2$ ならば2進法展開したとき、ある n が存在して、$\varepsilon_n(\omega_1) \neq \varepsilon_n(\omega_2)$ となる，そのとき，$B_n \in \Gamma$ をとれば、ω_1 又は ω_2 の一方のみが B_n に属する。従って (1) と併せて真に可分なることが証明された．

完全性については、A_n を B_n 又は CB_n の何れかとするとき $\omega \in A_n$ は、$\varepsilon_n(\omega)$ が 0 又は 1 の何れか一方に決定されることであり

$$\bigcap_{n=1}^{N} A_n \ni \omega$$

ということは ω の2進法展開のすべての $\varepsilon_n(\omega)$ $(n \leq N)$ が決定されたことになる．

故に $\bigcap_n A_n \neq \varphi$，かつ唯1つの ω になる

よって、$(\mathrm{I}, \mathbb{L}, m)$ は (L)-空間であることが知られた。（証明終）

逆に次の定理が成立する。

<u>定　理 1.</u>　Ω を (L)- 空間で *atom* をもたないとすれば、*Lebesgue* 空間 $(\mathrm{I}, \mathbb{L}, m)$ と *mod.* 0 で同型である。

この定理の証明はあとにして、先に *atom* をもつ一般の (L)- 空間について、次の命題を証明する。

<u>Prop. 2.2</u>　Ω を (L)-空間とすれば、Ω の *atom* は *mod.* 0 で1点から成る.（B が *atom* とはすべての $A \subset B$ に対し，$\mu(A) = \mu(B)$ 又は 0.）

<u>証　明</u>　B が *atom*，$\mu(B) > 0$ とする。定義より Ω と *mod* 0 で、同型な完全な Ω' が存在する，Ω' の完全性を定義する基底を Γ とする。定義 1.1 の B_β，A_β に示し．

$$\mu(A_\beta \cap B) = \mu(B),$$

$$\bigcap(A_\beta \cap B) = \{P\}, \quad \text{（1点の集合）}$$

$$\mu(\{P\}) = \mu(B)$$

（証明終）

上の定理 1 と prop. 2.2 から直ちに次のことがいえる．

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

Prop. 2.3. Ωを(L)－空間とする。$\mu(p)>0$ なる点 $p\in\Omega$ は高々可算であるから、それらを $\{p_n\}$とし、$C=\Sigma\mu(p_n)$ とする。そうすると、$\Omega-\{p_n\}$ は Lebesgue 空間（$[0,1-C]$, $\mathbb{L}$, m）と mod 0 で同型である。

さて、定理1の証明は2つに分け、はじめに可分で atom を持たぬ一般の測度空間は Lebesgue 空間と測度代数として同型であることを証明する。その次に、その同型が測度空間としての同型から導かれることを示す。そのために若干の準備をする。

先づ、記号を2,3導入する。

$B_1,\cdots\cdots B_n\in\mathcal{B}$, $B_i\cap B_j=\phi$ で，$B\in\mathcal{B}$ が $B=\bigcup_i B_i$ とあらわされるとき、$\{B_1,\cdots\cdots,B_n\}$ を B の分割と言い．これを ζ とかく．ζ の"ノルム"を $\|\zeta\|=\max_i \mu(B_i)$ とする。任意の $B'\in\mathcal{B}$ に対して $\{B_1\cap B',\cdots\cdots B_n\cap B'\}$ も B' の分割であるが、それを $\zeta\cap B'$ と書く．また ζ_1 のすべての元が ζ_2 の元に含まれるとき．$\zeta_1\leq\zeta_2$ と書く

Prop. 2.4 Ω は atom を持たないとする．ζ_n として $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，ただし．$A_i=B_i$ 又は $M-B_i$ （定義1.2），なる Ω の分割をとる，このとき，$\|\zeta_n\|\to 0\ (n\to\infty)$．

証明 可分性から $\mathbb{B}=\mathcal{B}\{B_n\}$ であるが、これは任意の $B\in\mathcal{B}$ と、$\varepsilon>0$ に対し．N が存在して ζ_N の部分系の和集合と B の対称差の測度を $<\varepsilon$ に出来ることを意味する．$\|\zeta_n\|$ は．減少列であるが、若し．$\|\zeta_n\|\geqq\delta>0$ だとすると，$F_n\in\zeta_n$，$F_n>F_{n+1}$ $\mu(F_n)\geqq\delta$ なる $\{F_n\}$ がとれる。

$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ とおくと $\mu(F)\geq\delta$．Ω は atom をもたないから F が存在して $\mu(F)>\mu(F_0)>0$．F は $\{\zeta_n\}$ のすべての要素と disjoint であるか

含まれているかの何れかである．$\varepsilon<0$，$\mu(F_0)\wedge(\mu(F)-\mu(F_0))$ とすると F_0 は $\{\zeta_n\}$ の元の和で ε 以下に近似出来ない．これは上の事実に反する

（証明終）

Prop. 2.5. （Ω，$\mathcal{B}$，μ）を可分な測度空間で atom をもたないとすると．これは Lebesgue 空間（I, $\mathbb{L}$, m）と測度代数として同型である。

証明 先づ $\{B_n\}\subset\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}\{B_n\}=\mathcal{B}$ なるものとする．B_n に対し I の区間 $I_A=[0,\mu(B_n)]$ を対応させる．$\{B_n\}$ から $\{\zeta_n\}$ を作ったのと

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

同様にして $\{I_n\}$ から $\{\eta_n\}$ を作る、そして $\tilde{\mathbb{B}}$ と $\tilde{\mathbb{I}}$ の対応 τ を次の様に定義する。

$$\tau : \bigcap_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} J_i \text{ , ただし } \quad A_i = B_i \text{ ならば } J_i = I_i ,$$
$$A_i = CB_i \text{ ならば } J_i = CI_i .$$

τ は測度を変えないから $\|\eta_n\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$. ゆえに $\mathbb{B}\{\eta_n\} = \mathbb{L}$.
何となれば $\forall \varepsilon \ \exists n_0 \ \|\eta_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$;
I の任意の部分区間は η_{n_0} の部分系の和集合で ε 以下に近似出来る

(証明終)

Prop. 2.6. Prop. 2.5 で構成した (L)-空間 Ω から T への(測度代数としての)同型 τ は、(測度空間としての)同型 T から導かれる。

証 明 対応 τ によって、Ω の完全性から、

$$\Omega \ni \omega \longleftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

である。(Prop 1.1)。これに $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ (J_n の作り方は Prop. 2.4.) を対応させればよいのだが、これは空集合になることがあるので、ω に $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{J_n}$ を対応させる。

I の元で x 座標が $\mu(B_n)$ に等しい点には、Ω の2点が対応するから、その1方を除いて、残りを Ω_0 とする。こうして、Ω_0 から I への対応 T が作られる。T は1対1で、同型であり、τ がこれから導かれることは容易に示される。

(証明終)

Prop. 2.5, 2.6. から定理1が出る。また定理1を使って、次の同型定理を得る。

定 理 2. (同型定理) Ω, Ω' を (L)-空間とすると、Ω から Ω' への(測度代数としての) 同型 τ は、(測度空間としての)同型から導かれる。

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

証明　定理1によって，ΩとΩ'は共に Lebesgue 空間 I と同型である故に，τによって I の自己同型σが引きおこされるが，これは（I が(m)-空間であるから）点変換 S から導かれる（才3章§2）．従ってΩとΩ'との間の対応でも，点変換から導かれる。

（証明終）

最後に次のことを証明する。

Prop 2.7　(m)-空間 Ω は(L)-空間である。

証明は第3章§2, Lemma で作った閉集合の系を用いて，Ωの基底（定義1.2）を作ればよい。§1の Lebesgue 空間の時と本質的には同様である。
詳細は略す。

§3. Brown運動について

Brown 運動：$x(t,\omega)$. $0 \leq t \leq 1$　$\omega \in \Omega$　を$\Omega = C[0,1]$，$\mathbb{B}$は位相ボレル族とする．
（第3章および附録 I を参照）　ここでは（Ω, $\mathcal{B}$, P）が§1の意味の(L)-空間であることを示す．証明の前に2つの準備をする．

Lemma 1　直線上の部分集合の系$\{\widehat{B}_n\}$で、次の条件をみたすものを構成する：ただし. $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}\{\widehat{B}_n\}$とし、また$-\infty$を$\mathbb{R}$につけ加えて、コンパクト化して考える。

(i)　直線 $\mathbb{R}$ 上の任意の Borel 集合は、$\widehat{\mathcal{B}}_1$ に含まれる

(ii)　$\widetilde{A}_n = \widehat{B}_n$ 又は $C\widehat{B}_n$ とするとき，

$$\bigcap \widetilde{A}_n \text{ は1点}$$

証明　(0.1)を　$(-\infty,\infty)$に移す　次の1対1連続写像を考える

$$\pi:\ y = \tan \pi\left(x - \frac{1}{2}\right),\quad \left(x \in (0,1),\ y \in (-\infty,\infty)\right).$$

Prop. 2.1. において構成したB_nをπで$\mathbb{R}$に移したものを$\widehat{B}_n$とおけば，$\mathbb{R}$の Borel 集合は、π^{-1}により　(0.1)の Borel 集合に移る、それ

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

は U_n の生成する Borel族 $\mathcal{B}_1$ に属するから、$\pi\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1$ に注意すれば (i) は明らか

(ii) についても (0.1) での議論を π によって R に移せばよいが、注意すべきことは (0.1) での 0 に対応する $\cap A_n$ を π で移したとき $\cap \tilde{A}_n$ のみは ϕ になる。これを $-\infty$ と考えて、R に含めれば (iii) は恒になりたつ　　　　　　　　　　　　(証明終)

次に、Brown 運動の一様連続性について述べる。
すべての ω に対して、$x(t,\omega)$ は t の連続函数であるが、さらに詳しく [0,1] で一様連続の程度が知られている。こゝでは後に必要な程度のあらい評価をしておく。((10) による)

<u>Lemma. 2</u>

C は 1 より大なる任意の数とすると、殆どすべての ω に対し、$\delta=\delta(\omega)>0$ が存在し

$$|t-t'|<\delta \Rightarrow |x(t',\omega)-x(t,\omega)| \le c\sqrt{2|t'-t|\log\frac{1}{|t'-t|}}$$

<u>証　明</u>　$h=\Delta t=\frac{1}{n}$ とおくと $\Delta x(t)=x(t+\Delta)-x(t)$ は平均 0. 分散 Δ の正規分布に従う。故に n が大きいとき、

$$\alpha_n = P\left(|\Delta x(t)|>c\sqrt{2h\log n}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{c\sqrt{2\log n}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \sim \frac{1}{c\sqrt{\pi\log n}}\frac{1}{n^{c^2}}$$

$\Delta x(t)$ として、n 個の増分 $x\left(\frac{k+1}{n}\right)-x\left(\frac{k}{n}\right)$, $k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1$, を考え、それらのうち少くとも一つが

$$|\Delta x(t)|>c\sqrt{2h\log n}$$

となる確率は、$n\cdot\alpha_n$ 以下である。そこで $C>1$ のとき $n=2^P$ とすれば

$$\sum_P 2^P \alpha_{2^P} = O(1)\sum_P \frac{2^P}{c\sqrt{\pi P\log 2}}\times\frac{1}{2^{Pc^2}} = O(1)\sum \frac{1}{c\sqrt{\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{P\log 2}}\frac{1}{2^{P(c^2-1)}}<+\infty$$

故に、Borel-Cantelli の定理によって、殆んどすべての ω に対し、$P_0=P_0(\omega)$ が存在して $P>P_0$ ならば

(1)　$$\left|x\left(\frac{q+1}{2^P}\right)-x\left(\frac{q}{2^P}\right)\right| \le c\sqrt{2h\log\frac{1}{h}}\qquad \left(h=\frac{1}{2^P}\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

こなる。

これは、$\left(\frac{g}{2^p}, \frac{g+1}{2^p}\right)$といった特殊な区間についての増分に対して、定理が示されたことになる。

次に　$t=\frac{g}{2^p}$ で　$t<t'<t+\frac{1}{2^p}$　、但し $p>p_0$, のときを考える

$t'-t$ を2進法で展開して

$$t'-t=\sum_1^\infty \frac{\varepsilon_\nu}{2^{p+\nu}} \qquad \varepsilon_\nu=0 \text{ 又は } 1,$$

とすると、

$$|x(t')-x(t)| \leq c\sum_\nu \varepsilon_\nu\sqrt{\frac{2(p+\nu)\log 2}{2^{p+\nu}}}$$

$\varepsilon_\nu=1$となる最少のνをkとし、$\nu=k+\nu'-1$, とおけば
$p+\nu\leq(p+k)\nu'$

だから

$$|x(t')-x(t)| \leq c\sqrt{\frac{2(p+k)\log 2}{2^{p+k}}}\sum_1^\infty\sqrt{\frac{2\nu}{2^{\nu}}} = c\sqrt{\frac{2(p+k)\log 2}{2^{p+k}}}\times A$$

$h\log\frac{1}{h}$は $(0,e^{-1})$ で増加するから（$\frac{1}{2^{p+k}}$ から $t'-t$ でも）

$$|x(t')-x(t)| \leq c'\sqrt{2|t'-t|\log\frac{1}{|t'-t|}} \qquad c'>1$$

同様にして　$t>t'>t-\frac{1}{2^p}$ のときにも、上の評価は正しい
（但し、$t=\frac{g}{2^p}$）

さらに(1) が $\left(\frac{g}{2^p}, \frac{g+\nu}{2^p}\right)$　$0\leq\nu\leq N$ なる区間の増分についてもなりたつことが(1)を得たと同じ方法で証明されることを注意する。即ち、

$$\left|x\left(\frac{g+\nu}{2^p}\right)-x\left(\frac{g}{2^p}\right)\right| \leq c\sqrt{2h_\nu\log\frac{1}{h_\nu}}\quad, h_\nu=\frac{\nu}{2^p} \quad p>p_1(\omega)$$

最后に十分近い一般のt, t'について証明する。今$t'>t$としておこう。

$$\frac{N}{2^{p+1}}<t'-t\leq\frac{N}{2^p} \quad ; \qquad p>p_0(\omega),\ p_1(\omega)$$

とすれば

$$\frac{g}{2^p}<t\leq t_1=\frac{g+1}{2^p}<t_1'=\frac{g'}{2^p}\leq t'<\frac{g'+1}{2^p}\ \left(\frac{N}{2}-1<g'-g<N+1\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

ある ω, t_1, t_1' が存在する.

$$|x(t')-x(t)| \leq |x(t')-x(t_1')| + |x(t_1')-x(t_1)| + |x(t_1)-x(t)|$$

$C=1+2\varepsilon$, $C'=1+\varepsilon$. $N \geqq 16\dfrac{C'^2}{\varepsilon^2}$ として $P_0(\omega)$. $P_1(\omega)$ をきめておけば

(1) より $|x(t_1')-x(t_1)| < (1+\varepsilon)\sqrt{2|t'-t| \log \dfrac{1}{|t'-t|}}$ （$\because h \log \frac{1}{h}$ は単調増加）

(2) より $|x(t')-x(t_1')| + |x(t_1)-x(t)| < 2C'\sqrt{\dfrac{2}{2^p} \log 2^p} < 2C\sqrt{\dfrac{4|t'-t|}{N} \log \dfrac{N}{|t'-t|}}$

始めから $|t'-t| < \frac{1}{N}$ としてよいから上式は

$$4C\sqrt{\frac{2|t'-t|}{N} \log \frac{1}{|t'-t|}} < \varepsilon\sqrt{2|t'-t| \log \frac{1}{|t'-t|}}$$

より小さい．以上を併せて定理をうる （証明終）

以上の準備の下に，次のことを証明する．

Prop. 3.1 （Ω. $\mathbb{B}$. P）は（L）－空間である。

証明　$\mathbb{B}$はΩのシリンダー集合から生成される Borel 族としてよい Lemma 2 から、Brown 運動の場合．$\mathbb{B}$ は $\frac{1}{3}$ 次 Hölder 連続性をもつΩの部分集合のシリンダー集合から生成される Borel 族 $\mathbb{B}_1$ と mod 0 で一致する。又、J を $\left\{\frac{k}{2^n}\,;\ 0 \leq k \leq 2^n,\ n=1, 2, \cdots\cdots\right\}$
なる [0.1] で 稠密な集合とする．t 座標を J に限定したとき Ω のシリンダー集合から生成される Borel 族$\mathbb{B}_2$ は $\mathbb{B}$と一致する

(3) Lemma 1 から $\{f(\cdot)\,;\ f \in \mathbb{C},\ f(t_j) \in \widetilde{B}_n\}$, $n=1, 2, \cdots, t_j \in J$,
はΩのシリンダー集合であるが t_j を固定して nを動かせば 生成される Borel 族は、t 座標が t_j であるときのΩのシリンダー集合のすべてを尽す そして，t_jを J の中を動かすとき、生成される Borel族は$\mathbb{B}_2$ すなわち、$\mathbb{B}$に一致する (3) の形の集合（$\subset \Omega$）は．可算個あるが、それらの全体をΓとかけば、上のことは．

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}\{\Gamma\} \quad (\Gamma \text{ の生成する Borel 族})$$

を意味する．しかもΩのシリンダー集合

$$A = \{f\,;\ f(t) < a\}$$

があれば $|t_j - t| \longrightarrow 0$ で $a_j - a > 2\sqrt[3]{t_j - t}$ かつ $a_j - a \longrightarrow 0$ となるよう

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

に (t_j, α_j) がとれるので $\{f;\ f(t_j) < \alpha_j\}$ の減少列の極限として A が表わされ、極限集合と A との測度は一致する。

また、任意の $f, g \in \Omega$ が $f \neq g$ なら ある $t_j \in J$ で $f(t_j) \neq g(t_j)$ だから Γ の元によって分離されることは見易い。

以上のことは、Ω の代りに $\frac{1}{3}$ 次 *Holder* 連続な函数の中に測度が入っていると考えれば、真に可分なことが証明されたことになる。

完全性については $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^{[0,1]}$ とすれば

$$A_n = B_n \text{ 又は } CB_n \qquad (\text{但し}, \Gamma = \{B_n\} \text{ とする})$$

とするとき、

$$\bigcap A_n$$

は、ある1つの函数を表わす。($-\infty$ になるものも含めて)。

そこで $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^{[0,1]}$ で、$\mathbb{R}^{[0,1]} - \mathbb{C}$ の測度を 0 と解釈すれば、*Brown* 運動の測度空間は (L) - 空間であることが示されたことになる。

(証明終)

以上の結果については、[19] 参照

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

文　献

[1]. P. R. Halmos, Measurable transformations, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) 1015-1034.

[2]. P. R. Halmos and J. von Neumann, Operator methods in classical mechanics. II. Ann. of Math. 43 (1942) 332-350.

[3] E. Hopf, Ergodentheorie, Berlin, 1937.

[4] K. Itô, Stochastic process. Tata Institute Note (to appear)

[5] ——, Spectral type of the shift transformation of differential process with stationary increments. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956) 253-263.

[6] S. Kakutani, Determination of the spectrum of the flow of Brownian motion. Proc Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950) 319-323.

[7] ——, On ergodic theorem. Proc. of the International Congress of Math. (1950) T. 2, 128-142.

[8] A. H. Колмогоров, Общая теория динамических систем и классическая механика. Proc. International congress (195) 315-333

[9] A. H. Колмогоров, Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега Д. А. Н. 119 (1958) 861-864

[10] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[11] P. Masani and N. Wiener, Nonlinear prediction. (H. Cramér volu

[12] J. von. Neumann, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Ann. of Math. 33 (1932), 587-642

[13] J. von Neumann, Über einen Satz von Herrn M. H. Stone. Ann. of Math. 33 (1932) 567-573

Sem. on Probab.
Vol.12 1962年
P1-83

(14) В. А. Рохлин, Об основных понятиях теории меры. Мат. Сборник. 25 (1949) 107-150

(15) В. А. Рохлин, Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой. Усп. Мат. Наук. 15 (1960) 3-26

(16) Я. Г. Синай. Динамические системы и стационарные марковские процессы. Теор. Вероя. и ее прим. V (1960) 335-338

(17) N. Wiener. The homogeneous chaos.

(18) ———, generalized harmonic analysis.

(19) ———, Nonlinear problems in random theory M. I. T. 1958.

(20) A. Weil. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Actualités Sci. Ind. 1953.

(21) 吉田耕作, エルゴート諸定理 中文館

(22) J. von Neumann, über einige Sätze der messbaren Abbildungen, Ann of Math., 33 (1932).

(23) L. Pontryagin, Topological groups, Priceton;
(邦訳：連続群論)