SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 13

安　定　過　程

―― Riesz ポテンシャル.　Pathの性質 ――

竹内順治・山田俊雄
渡辺信三

1962
確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

はしがき

独立加法系列の和の極限分布の理論において，安定分布のもつ重要性が認識されてからい，この観点から安定分布ならびに安定過程について多くの研究がなされた。
それらは最近でも Toeplitz form の極限的性質の研究という形で，色々な研究がなされた。

他方1930年代に O.Frostman や M.Riesz によつて研究されたα次のポテンシャルと安定過程の関係，又それと関連することであるが Riemann-Liouville 積分などいわゆる fractional calculus と安定過程との関係などがわかつてくるにつれて安定過程の研究も新しい側面を加えるようになつた。確率論における Brown 運動の重要性は今さらいうまでもないが， Brown 運動を含めた安定過程という class をながめることによつて一そう豊富な例が得られる。

本報告は，まず第1章で安定過程と安定分布の基本的性質，第2章では安定過程とポテンシャル論との関係をのべた。第2章は安定過程にかぎらず広い classの Markov 過程についてなりたつもので，近藤〔1〕で論ぜられなかつた点ではその補いになるように努めた。

第3章以後は各著者の研究を中心としてまとめたものでしたがつて各章はそれぞれ独立した内容をもつている。その内容は目次に見られるとおりであり，又各章の始めにその概説がのべられているのでここではふれない。

本書は安定過程の研究をすべてもうらしたものではなく，特に独立加法系列の極限に関連した事項にはほとんどふれていない。
これらは確率論の手引「加法過程」でそのいくらかを補う予定である。最後に校正などに色々お骨折りいただいた関西確率論セミナーの方々に深く感謝する。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

目　次

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

第1章　安定分布と安定過程

この章では安定分布及び安定過程の定義と基本的な性質及び後の章で用いる性質をのべる。

§1・1　安定分布と安定過程（I）

安定分布の性質，その特性函数を調べる際，無限分解可能な分布に対する Lévy の標準形を用いるのが便利なのでまず無限分解可能な分布について議論する。

定義　（無限分解可能）　分布Φが$\forall\varepsilon>0$に対し，$\Phi=\Phi_1*\Phi_2*\cdots*\Phi_n$　ここに
$\int_{|\xi|>\varepsilon}\Phi_i\,(d\xi)<\varepsilon$
$*$はconvolution；$\Phi'=\Phi_1*\Phi_2$は$\Phi'(E)=\int\Phi_1(E-\xi)\,\Phi_2(d\xi)$という分解ができるとき$\Phi$を無限分解可能な分布という。

例　正規分布　$N(\cdot\, m.v)=N_1*\cdots*N_n$ ；$N_i=N(\cdot\frac{m}{n},\frac{v}{n})$

単位分布　$\delta(\cdot\, O)$

Poisson 分布　$P(\cdot\,;\lambda)=P_1*\cdots*P_n$　$P_1=P_2=\cdots=P_n=P(\cdot\,\frac{\lambda}{n})$

無限分解可能な分布Φに対し，確率連続，右連続な加法過程x_tを適当にきめて$x_1\ (=x_1-x_0)$の分布をΦにひとしくすることができる。ここに確率連続とは，$\forall\varepsilon>0$に対して，$P\{\omega:|x_t-x_s|>\varepsilon\}\to 0\ (t\to s)$がすべての時点でなりたつことである。$x_t$が加法過程であるとは，$x_0(\omega)\equiv 0$，$0\leq t_0\leqq t_1<\cdots<t_n<\infty$に対し$x_{t_i}-x_{t_{i-1}}$
$i=1,\cdots,n$が互いに独立であること

定義　（Lévy過程）　右連続，確率連続な加法過程をLévy過程という。
Lévy過程は次のLévy－Itoの表現によって，Wiener過程とPathのJumpを寄せ集めた部分に分解できる。

定理1・1　$x_t:t\in[0\cdot a)$をLévy－過程とすると，次の様なLévy－Itoの分解ができる。

$$(1\cdot 1)\quad x_t=y_t+\lim_{n\to+\infty}\int_{|u|>\frac{1}{n}}\int_{\tau=0}^{t}\left[uN(d\tau,du)-\frac{u}{1+u^2}n(d\tau.du)\right]$$

ここにy_tはWiener過程，；$\{N(E)\}$，$E\in B([0\cdot a)\times(-\infty\cdot\infty))$は
Poisson加法系［すなわち$N(E)$の分布はPoisson分布　$E_1,E_2,\cdots,E_n$：
disjointなら$N(E_1),\cdots N(E_n)$は独立，$E=\sum E_n$ならば$N(E)=\sum_i N(E_i)$］
$n(E)$は$N(E)$の平均：$\{N(E)\}$とy_tは独立

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$\text{且つ} \int_{u=-1}^{1} \int_{0}^{a} u^2 n(dt, du) < \infty$$

である。

次にこれを用いて無限分解可能な分布Φの特性函数を求めよう。（Lévyの標準形）

Φに対応する Lévy過程をx_t ： $0 \leq t < \infty$とする

x_t は Lévy － Ito の分解ができる。$E(y_t) = m(t)$ $v(y_t) = v(t)$ とおくと，

$$E(e^{izx_t}) = exp\left\{ im(t) - \frac{v(t)}{2} z^2 \right.$$

$$\left. + \lim_{n \to \infty} \int_{|u| > \frac{1}{n}} \int_{\tau=0}^{t} \left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right) n(d\tau\ du) \right\}$$

$$n_t = \int_{\tau=0}^{t} n(d\tau\ du) \text{とおくと}$$

$$E(e^{izx_t}) = exp\left\{ im(t) - \frac{v(t)}{2} z^2 + \lim_{n \to \infty} \int_{|u| > \frac{1}{n}} \left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right) n_t(du) \right.$$

ここで$t=1$とおくとΦの特性函数φとなる。$m(1) = m$ $v(1) = v$ $n_1(E - \{0\})$ $= n(E)$ とおいて

$$(1 \cdot 2) \quad \varphi(z) = \int_{R^1} e^{iz\xi} \Phi(d\xi) = exp \quad imz - \frac{v}{2} z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2} \right)$$

$$n(du) \qquad \text{(Lévy の標準形)}$$

ここに m : real. $v \geq 0$. n : measure $n\{(0)\} = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{1+u^2} n(du) < \infty$$

逆にこの最後の条件をみたち $m \cdot v \cdot n(du)$ に対して$\varphi(z)$ を定義すると，これはある無限分解可能な分布の特性函数になつている。； Lévy の標準形を用いると無限分解可能な分布に対して，時間的に一様な Lévy 過程を対応させ得ることがわかる。

Lévy の標準形は，特殊な場合にはもつと別の形に書き変えることができる。ここでは安定

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

過程の研究に必要な形をあげておく。

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{1+|u|} n(du) < +\infty$ のとき

$$(1\cdot3)\quad \varphi(z) = exp\{imz - \frac{v}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izu} - 1 - izu) n(du)\}$$

(Kolmogorov)

ここでmはLévyの形のmとは異る。 v, $n(du)$ は同じ$\int_{-1}^{1} |u| n(du) < \infty$のとき

$$(1\cdot4)\quad \varphi(z) = exp\ \{imz - \frac{v}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izu} - 1) n(du)\}$$

この場合もmはLévyの形のmとは異り，v, $n(du)$ は同じ。

以上の事実の証明は伊藤〔1〕〔3〕にある。

次に安定分布の定義をのべよう。

<u>定義</u>　(安定分布)　分布Φに於てその分布函数を$F(z)$とするとき任意のλ_1, $\lambda_2 > 0$に対してλが存在し，$F(\lambda_1 z) * F(\lambda_2 z) = F(\lambda z)$ がなりたつときΦは安定 (stable)という。Φの特性函数φを用いてこの性質を記述すると，$\varphi(\lambda z) = \varphi(\lambda_1 z)\varphi(\lambda_2 z)$ のことである。

<u>定理1・3</u>　安定分布は無限分解可能であり，その特性函数φは次の形になる。

$$\varphi(z) = e^{\psi(z)}$$

$$(1\cdot5)\quad \psi(z) = (-c_0 + i\frac{z}{|z|}c_1)|z|^{\alpha} \qquad c_0 \geq 0,\quad -\infty < c_1 < \infty$$

証明は伊藤〔3〕 p ～

ここで指数αは，次に見るように$0 < \alpha \leq 2$であり，$\alpha = 2$のときは正規分布である。

安定分布に対応する安定過程を定義する。

<u>定義</u>　(安定過程)　安定分布Φに対応する時間的に一様なLévy過程 x_t; $0 \leq t < \infty$を安定過程という。Φの特性函数を$\varphi(z) = e^{\phi(z)}$とすると

$$\varphi$$

$$\varphi_{ts}(z) = E(e^{iz(x_s - x_t)}) = exp\{(s-t)\phi(z)\}\ である。$$

$\varphi(z)$ を Lévy の標準形 (1・2) であらわされているとする。〔0, t〕に於るx_t の

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

jump で高さがduに属するものの数の平均は$t\cdot n(du)$である。$a>0$に対し，

$y_t = ax_t$ を考えるとこれもLévy 過程 その特性函数をφ'_{ts}とすると

$\varphi'_{ts}=E(e^{iza(x_s-x_t)})=exp\{(s-t)\psi(az)\}=exp\{(s-t)a^{\alpha}\psi(z)\}$

従って$(0\cdot t)$でy_tの jumpの高さがduに属するものの平均数は$ta^{\alpha}n(du)$とな

る。一方$y_t = ax_t$より，これは又，x_tの$(0\cdot t)$に於る jumpの数で高さdu/a

に属するものの平均数$tn(du/a)$にひとしい。

$$\therefore \quad n(du/a) = a^{\alpha} n(du)$$

$$n_t(x)=\int_x^{\infty} n(du)=\int_1^{\infty} n(x\cdot du)=\int_1^{\infty} x^{-\alpha}n(du)=x^{-\alpha}n_+(1)$$

$$\therefore \quad n(du)=\mathrm{Const}\cdot u^{-\alpha-1}du \qquad (u>0)$$

(一) 側も同様 $\therefore$ (1.6) $n(du)=\begin{cases} c_+ u^{-\alpha-1}du & (u>0) \\ c_- u^{-\alpha-1}du & (u<0) \\ c_+,\ c_- \geq 0 & \end{cases}$

と書ける $\int_{-1}^{1} u^2\, n(du)<\infty$ をみたさねばならぬことより$c_+=c_-=0$(この場合Φは正規分布) 又は$0<\alpha<2$である。

安定過程の性質を $0<\alpha<1$，$1<\alpha<2$，$\alpha=1$ の三つの場合に分けて論じる。

(A) $0<\alpha<1$

$$\int_{-1}^{1} |u|\,n(du)=c_+\int_0^1 \frac{du}{u^{\alpha}} + c_-\int_0^1 \frac{du}{u^{\alpha}} < \infty$$

よつて (1.4) の形に書けるから $\varphi(z)=e^{\psi(z)}$ として

$$\psi(z)=imz-\frac{v}{2}z^2+c_+\int_0^{\infty}(e^{izu}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+c_-\int_{-\infty}^{0}(e^{izu}-1)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}$$

又，$\varphi(z)=o(|z|^{\alpha})$なることが (1.5) よりわかるから$z\to+\infty$として，

$$m=v=0 \quad \therefore \ (1.7)\ \psi(z)=c_+\int_0^{\infty}(e^{izu}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+c_-\int_{-\infty}^{0}(e^{izu}-1)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}$$

となる。これに対応する安定過程は，確率1をもつてjumpだけで増加するprocess．jumpの数は$c_+=c_-=0$以外のとき確率1をもつて無限大である。

($c_+=c_-=0$のとき，Φは単位分布になる)

対応する安定過程は

$$x_t = \lim_{n \to \infty} \int_{|u| \geq \frac{1}{n}} uN([0 \cdot t) \times du) \tag{1・8}$$

と書ける。この場合 $c_+ \neq 0$, $c_- = 0$; 又は$c_+ = 0$, $c_- \neq 0$ という片側のみのprocessが定義できる。(one-sided Stable process)

(B) $1 < \alpha < 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{1+|u|} \frac{du}{|u|^{\alpha+1}} < +\infty$$

(1・3) より$\varphi(z) = imz - \frac{u}{2} z^2 + c_+ \int_0^{\infty} (e^{izu} - 1 - izu) \frac{du}{u^{\alpha+1}}$

$$+ c_- \int_{-\infty}^{0} (e^{izu} - 1 - izu) \frac{du}{|u|^{\alpha+1}}$$

先と同じくorderを調べて $m = v = 0$

$$\psi(z) = c_+ \int_0^{\infty} (e^{izu} - 1 - izu) \frac{du}{u^{\alpha+1}} + c_- \int_{-\infty}^{0} (e^{izu} - 1 - izu) \frac{du}{|u|^{\alpha+1}} \tag{1・9}$$

この場合対応する安定過程のjumpの数及びjumpの高さの絶対値の和は確率1で無限大である。

ただし $\sum_{0<\tau<t} |x_\tau - x_{\tau-0}|^\beta$ は$\alpha < \beta$のとき確率1で有限。

(C) $\alpha = 1$ (Cauchy 過程)

$$\psi(z) = ic_1 z - c_0 |z|$$

今 $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{izu} - 1 - i \frac{zu}{1+u^2}) \frac{du}{u^2} = 2 \int_0^{\infty} (\cos zu - 1) \frac{dz}{u^2} = -\pi |z|$

であるから

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$\psi(z)=ic_1 z-\frac{c_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-i\frac{zu}{1+u^2}\right)\frac{dz}{u^2}$$

と書ける。

これに対応する分布はCauchy 分布である。

Cauchy 分布の確率密度函数は（上の$\psi(z)$ に対応するものは）

(1・10) $\dfrac{c_0}{\pi}\cdot\dfrac{1}{c_0^2+(x-c_1)^2}$ で与えられる。

注意　定理 1・3 の（1・5）式に於けるαが，$\alpha>2$になり得ない事の直接的証明

（河田〔1〕）

ここでは，$e^{-c|z|^\alpha}$ $\alpha>2$ c ; real が特性函数になり得ない事を示そう。まず，$\varphi(z)$ がΦの特性函数であるとき次の不等式がなりたつ。

(1・11) $R\{1-\varphi(2z)\}\leq 4R\{1-\varphi(z)\}$

$(\because)$ $1-Cos2\xi Z=2(1-Cos^2\xi Z)\leq 4(1-Cos\xi Z)$

より $R\{1-\varphi(2z)\}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(1-Cos2\xi Z)\,\Phi(d\xi)$

$$\leq 4\int_{-\infty}^{\infty}(1-Cos\xi Z)\,\Phi(d\xi)=4R\{1-\varphi(z)\}$$

さて $e^{-c|z|^\alpha}=1-\dfrac{c|z|^\alpha}{1!}+\dfrac{c^2|z|^{2\alpha}}{2!}\cdots\cdots$

より $1-e^{-c|2z|^\alpha}=\dfrac{c|2z|^\alpha}{1!}-\dfrac{c^2|2z|^{2\alpha}}{2!}+\cdots\cdots$

$$4(1-e^{-c|z|^\alpha})=4\left(\frac{c|z|^\alpha}{1!}-\frac{c^2|z|^{2\alpha}}{2!}+\cdots\cdots\right)$$

ここで，$\alpha>2$としてzの+分0に近いところを考えると

$$1-e^{-c|2z|^\alpha}>4(1-e^{-c|z|^\alpha})$$

で，(1・11) が成立しない。故 $\varphi(z)$ は特性函数でない $C=-C_0+i\dfrac{z}{|z|}C_1$ の

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

時も（1・11）を用いて$\alpha > 2$でないことがわかる。

§1・2 安定分布と安定過程（II）

この§では，後に用いる安定分布，安定過程の諸性質を列挙する。議論するのは，特性函数（1・5）に於るC_0，C_1 と（1・7），（1・9）におけるc_+, c_-との関係，時空変換，分布のLaplace 変換，準安定分布，分布の密度函数の具体的な形，N以元 安定過程等である。

(A) （1.5） $\psi(z) = (-c_0 + i\frac{z}{|z|}c_1)|z|^\alpha \left(\begin{matrix} c_0 \geq 0 & -\infty < c_1 < \infty \\ \alpha > 0 & \end{matrix} \right)$

に於る $c_0 \cdot c_1$ と（1.7）（1.9）におけるc_+, c_- との関係 $0 < \alpha < 1$に於て

$$\psi(z) = C_+\int_0^\infty (e^{izu} - 1)\frac{du}{u^{\alpha+1}} + C_-\int_{-\infty}^0 (e^{izu} - 1)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}$$

$$C_+\int_0^\infty (e^{izu} - 1)\frac{du}{u^{\alpha+1}} = C_+\Gamma(-\alpha)\left\{\cos\frac{\pi}{2}\alpha - i\sin\frac{\pi}{2}\alpha\right\}|z|^\alpha$$

$$C_-\int_{-\infty}^0 (e^{izu} - 1)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}} = C_-\Gamma(-\alpha)\left\{\cos\frac{\pi}{2}\alpha + i\sin\frac{\pi}{2}\alpha\right\}|z|^\alpha$$

$$\therefore \quad (1.12)\left\{ \begin{aligned} -C_0 &= (C_+ + C_-)\,\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\pi}{2}\alpha \\ C_1 &= (C_- - C_+)\,\Gamma(-\alpha)\sin\frac{\pi}{2}\alpha \end{aligned} \right.$$

ここで $C_1 = C_0\beta\tan\frac{\pi}{2}\alpha$ とおくと

$$\beta = \frac{(C_+) - (C_-)}{(C_+) + (C_-)} \qquad C_+,\ C_- \geq 0$$

$|\beta| \leq 1$である。　　$\beta = 1$　：　jumpは正のみ

$\beta = 0$　　対称　$C_+ = C_-$

でこのとき $\varphi(z) = e^{-c_0|z|^\alpha}$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$1<\alpha<2$ も同様

(B) 時 空 変 換

安定過程 x_t と $C^{-\frac{1}{\alpha}} x_{ct}$ とは Version である。

ここに $C>0$; α は安定過程の指数

証明

$$E\left(e^{izc^{-\frac{1}{\alpha}}x_{ct}}\right)=e^{ct\left(-c_0+i\frac{c^{-\frac{1}{\alpha}}z}{|c^{-\frac{1}{\alpha}}z|}c_1\right)|c^{-\frac{1}{\alpha}}z|^{\alpha}}$$

$$=e^{ct\left(-c_0+i\frac{z}{|z|}c_1\right)c^{-1}|z|^{\alpha}}=e^{t\left(-c_0+i\frac{z}{|z|}c_1\right)|z|^{\alpha}}$$

$$=E\left(e^{izx_t}\right) \qquad \text{(証了)}$$

次に $x_t \sim C_t\, x_1$ (ここに〜はVersionを示す)。C_t は t にのみ関係;をみたす確率過程を考える。勿論,安定過程はこの関係をみたすが $(C_t=t^{\frac{1}{\alpha}})$,逆にこの関係をみたすものは安定過程だけであることが示される。従つてこの関係で安定過程を定義しても良い。 伊藤〔2〕

(C) 分布の Laplace 変換

片側の安定過程 $(0<\alpha<1)$ $(C_-=0)$ に対応する分布の Laplace 変換を求める。このときA. によつて

$$E\left(e^{izx_t}\right)=e^{t\left(-c_0+i\,c_0\tan\frac{\pi}{2}\frac{z}{|z|}\right)|z|^{\alpha}} \quad \text{である} \ (\beta=1)$$

$E(e^{-\lambda x_t})$ を求める $\left(C_t=\dfrac{-C_0}{\Gamma(-\alpha)\,Cos\frac{\pi}{2}\alpha}\text{ である}\right)$

$x_t=\int_0^{\infty} uN\left((0\cdot t)\times du\right)$ と書けている。

$$E\left(e^{-\lambda x_t}\right)=E\left\{e^{-\int_0^{\infty}uN\left((0\cdot t)\times du\right)}\right\} \qquad (\Gamma(-\alpha))$$

$$=e^{t\int_0^{\infty}\left(e^{-\lambda u}-1\right)\frac{c+du}{u^{\alpha+1}}}=e^{t\lambda^{\alpha}c+\int_0^{\infty}(e^{-u}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}}$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$=e^{-t\frac{c_o}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}\lambda^{\alpha}} \qquad (1\cdot 13)$$

(D) 準 安 定 分 布

定義 (準安定分布) Φの分布函数を$F(z)$とする。任意のλ_1, λ_2 及び b_1, b_2 に対して$\lambda>0$, bが存在して $F(\lambda_1 z+b_1)*F(\lambda_2 z+b_2)=F(\lambda z+b)$ となるときΦを準安定という。 Kolmogorov－Gnedenko 〔1〕ではこれをstableといつている。

このΦの特性函数$\varphi(z)$は

$$(1\cdot 14) \qquad \varphi(z)=exp\left\{imz-C_o|z|^{\alpha}\left(1-i\beta\frac{z}{|z|}w(z\cdot\alpha)\right)\right\}$$

ここにmは実, $C_o\geq 0$, $0<\alpha\leq 2$ $|\beta|\leq 1$

$$w(z\cdot\alpha)=\begin{cases}\tan\frac{\pi}{2}\alpha & \alpha\neq 1\\ \frac{2}{\pi}\log|z| & \alpha=1\end{cases}$$ である。

$\alpha\neq 1$のときは単位分布と安定分布のConvolution にすぎないが, $\alpha=1$のときは $\varphi(z)=e^{-C_o\left(|z|-\frac{z}{\pi}\log|z|\right)}$ があらわれ, Cauchy 分布と異るものになる。

準安定分布は, $\{Xi\}$を同じ分布をもつ独立確率変数系とするとき,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{Bn}-An=\Phi_n$$ が適当な実数 An, Bn をえらぶ事によつて収束するべき分布のクラスとして特徴づけられる。 Kolmogorov-Gnedenko〔1〕

(E) 安定分布の密度函数 (その連続性)

特性函数 $\varphi(z)=e^{-\left(c_o+i\frac{z}{|z|}c_1\right)|z|^{\alpha}}$

の形より$\varphi(z)\in L_1$ である。$\varphi(z)\in L_1$ ならば分布函数は密度をもち, その密度函数は連続になる事が知られている。 (例えば河田〔1〕P.39, P.74)

安定分布の密度函数が具体的に計算されている例としてここでは$\alpha=\frac{1}{2}$の片側の場合を挙げておく。 (Cauchy分布については先に記した。)

$$\alpha=\frac{1}{2}:\varphi\varphi(z)=-C|z|^{\frac{1}{2}}\left(1-i\frac{z}{|z|}\tan\frac{\pi}{2}\alpha\right)$$ に対応する

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

分布の密度 $p(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2x}} x^{-\frac{3}{2}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

である。

Brown 運動 B_t ($B_0=0$) が始めて $a>0$ に達する時間を $\sigma(a)$ とすると，これは$\frac{1}{2}$次片側安定過程なることが知られている。丸山〔1〕P.97〜 Ito.McKean〔1〕参照。

(F) N次元安定過程

N次元 確率過程x_t が加法過程，右連続，確率連続であるとき，x_t をN次元 Lévy過程という。（各 component の独立性を仮定しない）

Levy－Itoの分解が同様にできて

$$x_t = y_t + \int_{R^N\times[0\,t]} \left[uN(d\tau.du) - \frac{u}{1+|u|^2}\, n(d\tau.du) \right]$$

Lévy の標準形

$$E(e^{i(z.x_t)}) = Exp\left\{ i(m(t)\cdot z) - \frac{1}{2}(v(t)z\cdot z) + \int_{[0\cdot t]\times R^N} \left(e^{i(z\cdot u)} - 1 - \frac{i(z.u)}{1+|u|^2}\right) n(d\tau.du) \right.$$

時間的に一様なN次元Lévy過程の中で $x_t \sim C_t\, x_1$ をみたすものをN次元安定過程という。

回転に関し不変な安定過程を対称安定過程という。その特性函数は適当に尺度を定めると

$$E(e^{i(z\cdot x_t)}) = e^{-t|z|^{\alpha}}$$

でこの場合も index は $0<\alpha\leqq 2$ である。

特に$\alpha=1$ (Cauchy過程) の場合そのx_1 の分布密度函数は

$$\frac{C_n}{(1+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}}}, \qquad C_n = \pi^{-(\frac{N+1}{2})}\,\Gamma(\tfrac{N+1}{2})$$

となる (Lévy〔3〕 P.192〜)

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

注意 1. Markov過程としてのLévy過程

$x_t\ (w)$; $w \in \Omega\ (B \cdot P)$ を時間的に一様なLevy過程とする。ここで $M=(R^N, W, P_a)$

w ; 右連続，第一種不連続なpathの全体

$P_a\ (B)=P\ (x_{\cdot}+a \quad B)$ $B \in B\ (W)$ とすると Mは Markov 過程となる。Mは更に強Markov性をもち，Conservative $P_a\ (\sigma_\infty=\infty)=1$である。

又推移不変 $P\tau_h a\ (\tau_h B)=Pa\ (B)$ ここに$\tau_h b=b+h$である。

注意 2. 一般にLévy過程のpathの性質として，確率1で有界なt - intervalで$X\ (\cdot, w)$ は有界となる。この事実は第4章で必要になる。

(Doob〔1〕)

(G) モーメント

α次の安定過程について

$$E\ (|x_t|^c) < +\infty \qquad 0<C<\alpha$$
$$=+\infty \qquad C \geqq \alpha$$

この証明は，密度函数についての次の性質をつかえば明らかである。(簡単のため対称な場合) x_1 の分布の密度函数は

$$p\ (1, x) \sim \alpha\ 2^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}+1} \quad \sin\frac{\alpha\pi}{2}\, \Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) |x|^{-N-\alpha}$$

$$|x| \to +\infty$$

をみたす。この事実は$N=1$のとき Polya〔1〕が得ていたものでN次元への拡張はBlumeuthal Getoor〔1〕によるが，次のように考えることも出来る。x_t の時空変換 (B) によつて

$$P\ (t \cdot x) = C^{\frac{1}{\alpha}}\ p\ (c\,t, C^{\frac{1}{\alpha}} x)$$

なることと，$\dfrac{p\ (t.x)}{t}\ (t \to 0)$ Lévy measure $n\ (dx)$ の密度。

とを合せてこの漸近公式をうる。

尚， CkoΛoxog〔1〕には，もつと精密な評価がえられており第5章でそれが用いられる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

§ Subordination とその応用

この§では伊藤〔4〕の部分的な紹介及びその応用をのべる。

S : 第二可算公理をみたす compact Hausdorff 空間

B_s : SのBorel 集合全体

このとき $t\varepsilon[0,\infty)$ と$a\varepsilon S$に関係するS上の測度の系 $p(t,a,E)$ $E\varepsilon B_s$があって，次の条件をみたすとする。

(1°) $P(t,a,S)=1$

(2°) $P(t.a.E)$は$t.E$を固定するとaについてB_s－可測

(3°) $P(t+s.a.E)=\int_S P(t.a.db)P(s.b.E)$

(4°) fがS上の連続函数ならば

$$\int_s P(t.a.db)f(b) \quad \text{が}a\text{について連続}$$

(5°) aの任意の近傍vに対し$P(t.a.v)\to 1$ $(t\downarrow 0)$

この$\{P(t.a.E)\}$を推移確率系という。この系に対してpathが高々第一種不連続且つ右連続なMarkov過程に従う $x_t(w)$; $(\Omega.B.P)$ が存在して，aから出るpathが次の法則

$$Pa(x_{t}.\varepsilon E_1,\ x_{t2}\varepsilon E_2\ \cdots,\ x_{tn}\varepsilon E_n)$$

$$=\int_{E1}\cdots\int_{En}P(t.a.da_1)P(t_2-t.a.da_2)\cdots P(t_n-t_{n-1},a_{n-1},da_n)$$

このMarkov過程には次の様にして Y^shida-Hille の Semi-Group が定義される。

S上の連続函数族を$C(S)$とし，1ルームを$\|f\|=\max_a|f(a)|$で入れる。

$T^tf(a)=\int_s P(t.a.db)f(b)$と定義すると T^tは $C(S)\to C(S)$ の作用素で

$\{T^t\}$は Yoshida-Hille の意味の Semi-Group になる。すなわち

$$\|T^t\|\leq 1,\quad T^{t+s}=T^tT^s\quad \lim_{t\downarrow 0}T^t=I$$

ここにIは恒等作用素，lim は $\lim_{t\downarrow o}\|T^tf-f\|=0$の意味である。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

これらの性質は$P(t.a.E)$の性質（1°）〜（5°）よりみちびける。

Markov 過程 x_t を Subordination するとは，roughにいうと，x_t のtの部分にあるx_tと独立な増加の加法過程をほうり込んでprocess を変換する事なのであるが，そのために非減少の加法過程についてのべる。

$\theta(t)$，$0 \leq t < \infty$を非減少のpath をもつ時間的に一様な加法過程とする（たとえば$0<\alpha<1$の片側（正の側）の安定過程）

§2にのべた方法と同様にしてこれのLaplace変換は次の様になる

$$E(e^{-z\theta(t)}) = \int_0^\infty e^{-zt}\, P(\theta(t) \in dt) = e^{-t\varphi(z)}$$

ここに $\varphi(z) = Cz + \int_0^\infty (1-e^{-zt})\, n(dt)$

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t}\, n(dt) < \infty \qquad C \geq 0$$

x_t を上の意味のMarkov過程としθ_t をこれと独立な非減少加法過程path右連続とする。

$y_t = x_{\theta(t)}$とおくと $y(t)$ のpath は高々第一種不連続点しかもたず，右連続である。そして$y(t)$ は又Markov過程でありその推移確率は

$q(t.a.E) = \int_\Omega P(\theta_t(w), a.E)\, P(dw)$ である。

実際 $q(t.a.E)$ が（1°）−（5°）をみた事は直接たしかめられるし，y_t がこれに対応するprocess であることは $P_a(y(t_1) \in E_1, y(t_2) \in E_2, \cdots, y(t_n) \in E_n)$

$$= \int_\Omega P(dw) \int_{E_1} \cdots \int_{E_n} P(\theta_{t_1}(w), a, da_1) \cdots P(\theta_{t_n}(w) - \theta_{t_{n-1}}(w), a_{n-1}, da_n) *$$

$\theta_{t_1}, \theta_{t_2} - \theta_{t_1}, \cdots, \theta_{t_n} - \theta_{t_{n-1}}$ が独であることより

$$* = \int_{E_1} \cdots \int_{E_n} \int_\Omega P(dw)\, P(\theta_{t_1}(w), a, da_1) \int_\Omega (dw)\, P(\theta_{t_2}(w) - \theta_{t_1}(w), a_1, ad_2)$$

$$\cdots \int_\Omega P(dw)\, P(\theta_{t_n}(w) - \theta_{t_{n-1}}(w), a_{n-1}, da_n)$$

$$= \int_{E_1} \cdots \int_{E_n} q(t_1, a, da_1)\, q(t_2 - t_1, a_1, da_2) \cdots q(t_n - t_{n-1}, a_{n-1}, da_n)$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

によつて証明される。

定義 y_t を x_t のθ_t による Subordination という。

定理 1・4 y_t の Semi-groupを$\widetilde{T}^t$ と書くと

$$\widetilde{T}^t f=\int_0^{\infty} T^{\tau} f\, F_t\,(d\tau) \quad \text{である。}$$

ここに $F_t\,(d\tau)=P(\theta_t(w)\in d\tau)$ 積分は Bochner 積分

∵ $q\,(t\cdot a\cdot E)$ の形から明らか

特にθ_t として$\psi(z)\equiv z^{\alpha}=\dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^{\infty}(1-e^{-\lambda u})\dfrac{du}{u^{\alpha+1}}$をとる。（これは§2でのべた片側の安定過程）（$0<\alpha<1$）

定義 上のθ_t によるSubordinationをα位のSubordinationという。

定理 1・5 x_t の Subordination をy_t とする。

x_t の Generator 及びその Domain を $\mathcal{G}$，$\mathcal{D}(\mathcal{G})$

y_t 〃 〃 $\mathcal{G}$，$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{G}})$

とすると $\mathcal{D}(\mathcal{G})\subset\mathcal{D}(\mathcal{G})$ であり $u\in\mathcal{D}(\mathcal{G})$ に対して

$$\mathcal{G}\,u=C\,\mathcal{G}\,u+\int_0^{\infty}(T^{\tau}u-u)\,n\,(d\tau)$$

となる。ここにC，$n\,(d\tau)$ は θ_t に対応する$\varphi(z)$ を構成する量

特にα位のSubordinationの場合は

$$\widetilde{\mathcal{G}}u=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}(T^t v-u)\frac{dt}{t^{\alpha+1}}$$

となる。

証明は伊藤〔4〕にある。

定理 1・6 x_t を加法過程とするとそのSubordinationも加法過程で その特性函数は $e^{-t\psi\,(\varphi(\xi))}$

ここで $e^{-t\varphi(\xi)}$ を X_t の特性函数

$e^{-\psi(\xi)}$ は subordinator の特性函数。

これより Brown 運動の α位の Subordination は2α次の対称安定過程である。

Subordination の応用

1. α次の対称安定過程の遷移確率密度を

$p(t\cdot x\cdot y)=K(t\cdot |x-y|)$ とするとき

$K(t\cdot\eta)$ $\eta\geq 0$ はηについて単調減少。

((Mckean. 〔1〕 参照)

証明 Brown運動に $\frac{\alpha}{2}$ 次のSubordinationをほどこして得られるから

$$p(t\cdot x-y)=\int_0^\infty g(t\cdot\tau)\cdot\frac{1}{(2\pi E)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{2\tau}}d\tau$$

ここに$g(t,\tau)\,dt=p(\theta_t(w)\in d\tau)$ θ_t : index$\frac{\alpha}{2}$ の片側の安定過程

$$\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}g(t,\tau)\,dt=e^{-t\lambda^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

故に

$$K(t\cdot\eta)=\int_0^\infty g(t,\tau)\frac{1}{(2\pi\tau)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{\eta^2}{2\tau}}d\tau$$

これより明らか。

2. Brown運動の境界上のProcessとしてのCauchy過程

R^N の半空間 $R_+^N=\{(x_1\cdots x_N);\ x_N\geq 0\}$ での反射壁

Brown $X_1(t)=(x_1(t),\cdots,x_N(t))$運動を考える。

その超平面 $R_0^N=\{(x_1,\cdots,x_N);\ x_N=0\}$におけるX(t)のlocal time $S(t\cdot w)$ は，1次元反射壁Brown運動$x_N(t)$のlocal time と同じである。 $S(t\cdot w)$ の逆函数を$S^{-1}(t\cdot w)$ とするとき $x_N(S^{-1}(t\cdot w))\equiv 0$に注意して$X(S^{-1}(t\cdot w))$ は $R_0^{(N)}$ 上のMarkov 過程になる。これは，$X(t)$ の境界上のprocessといわれる。

(池田，上野，田中，佐藤 〔1〕参照)

ところで，$S^{-1}(t\cdot w)$ は first passage process $m_t(w)=\inf\{\tau;\ x_N(\tau)\geq t\}$ と同じ法則で $\frac{1}{2}$ の片側安定過程になる。

したがつて，$X(S^{-1}(t\cdot w))$は R_0^N 上の$N-1$次元のCauchy過程である。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$(x_1 \cdots x_{N-1})$と x_N したがつて $x_1 \cdots x_{N-1}$ と S^{-1} とが独立あることに注意)
同様に R^N 全体の Brown運動 $x(t)=(x_1(t) \cdots x_n(t))$ を考える。
$x_N(t)$ の0における local time $S(t.w)$ の逆函数 $S^{-1}(t.w)$ によつて $x(t)$ を time - chenge すると $y(t)=x(S^{-1}(t.w))$ は超平面 $x_N=0$ 上の対称Cauchy 過程[1] になる。 $y(t)$ の図形は $x(t)$ の超平面上の図形と全く同じである。

この表現の応用として次の問題を考える。 (F.Spitger〔1〕参照)
$y(t)$を1次元Cauchy過程 $-1<x<1$
τを$y(t)$ が (-1.1) を最初にはなれる時間とし $P(y_\tau \quad [1, \quad))$をもとめること
すなわち，$x\in(-1.1)$ を出るCauchy 過程が右側で吸収される確率を求めることJ

これは上の表現から点 $(x, 0)$ を出る平面のBrown運動が
集合 $A=\{x\geqq 1, y=0\}$ を集合$B=\{x\leqq -1, y=0\}$ より先にhitする確率になる。これはよく知られるように領域 $R^2-A\cup B$ で Aで境界値1，Bで境界値0の境界函数に対するDiricblet問題の解としてあたえられる。今 $w=\cos Z$ が帯領域 $0<R_e Z<\pi$ から$R^2-A \quad B$への1対1等角写像をあたえることに注意すると，このDiricblet 問題は容易にとけて

$$u(x \cdot y)=R_e\left(1-\frac{1}{\pi}\cos^{-1} Z\right)$$

特に

$$u(x \cdot 0)=P_x(y_\tau\in[1 .\infty))=1-\frac{1}{\pi}\cos^{-1}x$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sin^{-1}x$$

Spitger〔1〕 はこのようにしてこの問題をといた後でこれがある種の微積分方程式の解になつていることに注意しているが，第3章ではこの見地から，この問題をときすべての指数αについて上の確率を計算する。

脚注 1) 反射壁の場合と時間の尺度は異なる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

第2章 Rieszポテンシャルと安定過程

通常RieszポテンシャルといわれるのはR^Nで

$$U\mu(x)=\int u(x,y)\mu(dy)$$

こゝに

$$(2.1)\quad w(x\cdot y)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha}\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}|x-y|^{\alpha-N}\qquad \alpha>0.\quad \alpha\neq N$$

$$=\frac{1}{2^{N-1}\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\log\frac{1}{|x-y|}\qquad \alpha=N$$

という形のポテンシャルでNewton ポテンシャル($\alpha=2$)の拡張としてO.Frostman,〔1〕M.Riesz〔1〕等によつて主として1930年代に研究された。こゝではこれらの古典的理論の紹介が目的ではなく,G.A.Huntによつて構成されたMarkov過程によるポテンシャル論の特別の場合としてRieszポテンシャルを考えるので,以下のべる理論に於てRieszポテンシャルは単にExample としての意味をもつにすぎないことを始めに注意する。なお以下のべる理論において一次元の片側安定過程に対応するポテンシャルもExampleとして含まれる。このポテンシャルのKernelは

$$(2.2)\quad u(x\cdot y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(y-x)^{\alpha-1}\chi_{R^+}(y-x)\quad x,y\in R^1$$

$$0<\alpha\leq 1$$

($R^+=(0,+\infty)$, χ は特性函数)

注意 $\alpha=1$の場合はuniform motionと呼ばれる。この場合,ポテンシャル論的に異常な現象があらわれる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

§1 安定過程とRieszポテンシャル

M_S を R^N の対称安定過程，即ち $E_0(e^{i\xi x_t})=e^{-t|\xi|^\alpha}$ $0<\alpha\leq 2$

$\overrightarrow{M_0}$ を右向きに進む一次元の片側安定過程，即ち

$E_0(e^{-\lambda x_t})=e^{-\lambda^\alpha t}$ $\lambda>0$ $0<\alpha\leq 1$とする。

これらについてはHunt〔2 III〕の条件〔F〕（次にのべる）がなりたつていることがわかる。

条件〔F〕 : Markov過程 M が条件〔F〕をみたすとは，あるlocally finiteなexcessive measure $\xi(dx)$ が存在して，次の性質をもつことである。

（1） $\forall\gamma$: $R^+=(0+\infty)$ 上のcompact な台をもつ連続函数に対し $P_\gamma(x,B)=\int^\infty\gamma(t)P(t,x,B)dt$ が $\xi(dx)$ に関するdensity $p_\gamma(x,y)$ をもつ:

$$P_\gamma(x,B)=\int p_\gamma(x,y)\xi(dy)$$

（2） $p_\gamma(x,y)$ は各変数について C_0[1] に属する。

（3） $P_\gamma.f(x)=\int p_\gamma(y,x)f(y)\xi(dy)$

は C_K[2] $\rightarrow C_0$ かつ $\{\gamma_n\}$ を $\int\gamma_n(t)dt=1$ かつ $S(\gamma_n)$[3] が0に近ずくようにとるとき

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_G p_{\gamma_n}(y,x)dy>1, \quad \forall x\in G=\text{開集合}$$

Prop2.1 M_s, M_0 は $\xi(dx)=dx$ (Lebesgue測度）としてHuntの条件〔F〕をみたす。

このことは実際uniform motion 以外では $P(t\cdot x\cdot B)$ が $p(t\cdot x\cdot y)dy$ というdensityをもち $R^+\times R^N\times R^N$ で連続なことから出る。

uniform motion の場合は遷移確率は dy についてdensity をもたぬが

1）$C_0=\{x\to\infty$ のとき0になる連続函数$\}$

2）$C_K=\{$台がcompact な連続函数$\}$

3）$S(\gamma)=\gamma$ の台

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

が$P_\gamma f(x)=\int_0^\infty \gamma(t)f(x+t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(t-x)f(t)dt$

$\therefore$ $P_\gamma(x.y)=\gamma(y-x)$として〔$F$〕をみたす。

一般に〔F〕をみたすMarkov過程 M があれば

$\hat{P}_\gamma f(x)=\int \gamma(t)\hat{T}_t f(x)\,dt$ で定義される半群 $T_t: C_0\to C_0$（強連続）が存在し従ってMarkov過程 M が存在する。これを M のdual processという〔近藤〔1〕p.92 以下参照〕 明らかに $\hat{M}s=Ms$ $\overrightarrow{Mo}=\overleftarrow{Mo}$ 以下 $\hat{M}$ に関する遷移確率，平均，半群等は M と区別するために"∧"をつけて示す。

次に条件〔G〕と呼ばれるものをあげる。

条件〔G〕： $\gamma_n\uparrow e^{-\lambda t}$ なる函数γ_nに対して

$g_\lambda(x.y)=\lim_{n\to\infty}P_{\gamma n}(x.y)$とおくとき （$\lambda\geq 0$）

Eがcompactならば $\int_E g_0(x.y)dy$及び$\int_E g_0(y.x)dy$がxについて有界であること。

Prop.2.2　Moについては〔G〕は常にみたされ$g_0(x.y)$は（2.2）であたえられる。

M_sについては

R^1で $0<\alpha<1$，

R^2で $0<\alpha<2$

R^Nで $0<\alpha\leq 2$ （$N\geq 3$）

のとき〔G〕がなりたち $g_0(x.y)$は（2.1）であたえられる。

証明

例えば Ms については

$$g_\lambda(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{R^N}\frac{e^{i<x-y,\xi>}}{\lambda+|\xi|^\alpha}d\xi$$

なることと，よく知られた事実：（Gelfand－Silov〔1〕p.241～）

$$F(x)=\int_{R^n}|\xi|^\sigma e^{i<\xi,x>}d\xi$$

は $-N<\sigma<0$で収束し

$$F(x)=2^{\sigma+N}\ \pi^{\frac{N}{2}}\frac{\Gamma(\frac{\sigma+N}{2})}{\Gamma(-\frac{\sigma}{2})}\,|x|^{-\sigma-N}$$ であたえられる事に注意すれば上記の場合に〔G〕が成立し $g_0(x,y)$ が(2.1)であたえられることはただちに出る。
R^1 で $1\leq\alpha<2$, R^2 で $\alpha=2$ の場合〔G〕のなりたたない事は，§5の Prop. 2.13 で示す。

以下のべる Hunt の理論は，一般の空間 S 上の Markov 過程 M について，ある $\xi(dx)$ に対して〔F〕のなりたつ場合，$\int g_\lambda(x,y)\mu(dy)$ なる形のポテンシャルに対して適用できる。そして〔G〕がなりたつ場合は $\lambda=0$ に対しても適用できる。従って Riesz-Kernel (2.1) については上の〔G〕をみたす場合 Hunt の理論によって取扱えることになる。

§2 最小到達時間と調和測度

E を解析集合とする。

$\sigma_E^* = \inf(t>0,\ x_t\in E)$

$\quad =+\infty$ 　そのような t のないとき： 　と定義する．

まず Blumenthal の 0－1 法則によって

$P_x(\sigma_E^*=0)=0$ or 1 　($\hat{P}_x(\sigma_E^*=0)=1$ or 0) がなりたつことに注意する。

<u>定義2.1</u> (regular point と irregular point)

x が E の regular point (right regular) $\Longleftrightarrow$ $P_x(\sigma_E^*=0)=1$

irregular point (right irregular) $\Longleftrightarrow$ $P_x(\sigma_E^*=0)=0$

x が E の CO-regular point (left regular) $\Longleftrightarrow$ $\hat{P}_x(\sigma_E^*=0)=1$

CO-irregular point (left irregular) $\Longleftrightarrow$ $\hat{P}_x(\sigma_E^*=0)=0$

次に記号 E^r, E^{co-r} を次にように定める。

$E^r=\{x \mid x : E$ の regular point$\}$

$E^{co-r}=\{x \mid x : E$ の co-regular point$\}$ 同様に E^{ir}, E^{co-ir} の記号ももちいる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

例1　uniform motion に於て $E=(0.1)$ ならば $E^{r}=[0.1)$

$E^{co-r}=(0.1]$ ：$E=\left\{0, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \cdots\cdots, 1\right\}$ ならば

$$E^{r}=\{0\}, \qquad E^{co-r}=\phi$$

定義2．2　Markov 過程 M 及びその dual process M' に対して

測度 $\pi_\lambda{}^{E}$ 及び $\hat{\pi}_\lambda{}^{E}$ を次のように定義する。

M ; $\pi_\lambda{}^{E}(x\cdot dy)=E_x(e^{-\lambda\sigma_E^*}: x\sigma * dy)$: $E \cup E^{r}$ 上の測度

$\hat{\tilde{M}}$: $\hat{\pi}_\lambda{}^{E}(dy\cdot x)=\hat{E}_x(e^{-\lambda\sigma_E^*}: x\sigma * dy)$: $E\cup E^{co-r}$ 上の測度

次の関係は Hcent のポテンシャル論に於て基本的である。

定理2．3

(2．3)　$\int\pi_\lambda{}^{E}(x\cdot dy)\,g_\lambda(y\cdot z)=\int g_\lambda(x\cdot y)\,\hat{\pi}_\lambda{}^{E}(dy\circ z)$

上の等式は一般には $\lambda>0$．　特に〔G〕のなりたつている場合は $\lambda=0$ でもなりたつ。

定理の証明は〔近藤〔1〕p.97〜〕に詳しくあるのでこゝでは証明の概略を示す。

dual process の定義から　$f.g$　$C_0(S)$ [1] に対して

$<G_\lambda f, g>=<f, \hat{G}_\lambda g>$ である。従つて　$u\in($　$)$　v　$($　$)$

に対して　$<\mathcal{G}u.v>=<u.\hat{\mathcal{G}}v>$ である。

今　h　$C(S)$ に対し

$u(x)=R_\lambda f(x)=E_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\int_0^t h(x_s)ds}f(x_t)dt\right)$

$v(x)=\hat{R}_\lambda f(x)=E_x($　　　〃　　　$)$ とおくと

Kac の定理により（Kac の定理については伊藤，福島，渡辺〔1〕参照）

$u\in\mathcal{D}(\mathcal{G})$．$v\in\mathcal{D}(\hat{\mathcal{G}})$ と $[\lambda-\mathcal{G}+h]\,v=f$ がわかる。このことより

$f.g$　$C_0(S)$ に対して　$<R_\lambda f.g>=<f.R_\lambda g>$ がでる。

一般に $\lambda R_\lambda hG_\lambda f=\lambda G_\lambda hR_\lambda f=G_\lambda f-R_\lambda f$

$\therefore <R_\lambda hG_\lambda f.g>=<G_\lambda hR_\lambda f.g>$

$=<f, R_\lambda hG_\lambda g>$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

こゝで今考えている Markov 過程 $M = (p_x, W)$ と独立な確率空間 $\Omega(p)$ とその上の
$p(z \in d\sigma) = e^{-\sigma} d\sigma$ なる確率変数 z を考える。

$\mathcal{P}_x = P_x \times P$ とし $T = \begin{cases} \inf\{\tau : \int_0^\tau h(x_s)ds \geq z\} \\ \infty \quad \text{そのような}\tau\text{がないとき;} \end{cases}$ ，とおく。

Mを今 $(\widetilde{P}_x \ , \ x_t(\widetilde{w}) = x_t(w), \ \widetilde{w} = (w, \omega) \ \ W \times \Omega)$ と表現して考えると

$V_T^\lambda f(x) \equiv \widetilde{E}_x(e^{-\lambda T} f(x_T)) = R_\lambda h \ f(x)$ は容易にたしかめられる。

$\therefore \ <V_T^\lambda G_\lambda f, g> \ = \ <f, \hat{V}_T^\lambda \hat{G}_\lambda g>$

今，Gを開集合とし $\begin{cases} h_n \uparrow +\infty, \ x \quad G \text{とすると} \ T \downarrow \sigma_G \\ h_n = 0 \quad x \notin G \end{cases}$

故に $<\pi_G^\lambda G_\lambda f. g> = <f. \ \pi_G^\lambda G_\lambda g>$

これより E：解析集合に対し

$<\pi_E^\lambda G_\lambda \ f. \ g> = <f. \ \hat{\pi}_G^\lambda \ \hat{G}_\lambda g>$ なること

及び次の式の両辺の函数がそれぞれ x について excessive，z について co-excessive なることに注意して

$\int \pi_E^\lambda (x \cdot dy) g_\lambda(y. z) = \int g(x. y) \hat{\pi}_E^\lambda (dy. z)$ が示される。

注意 （２．３）は例外点なしにすべての x と z についてなりたつ。

次に掃散の原理がみたされることをのべよう。

定理 ２．４

$^\forall E$：解析集合とする。

（２．４） $g_\lambda(x. y) > \int \pi_\lambda^E \ (x. dz) \ g_\lambda(z. y) \qquad \forall x. y$

且つ ＝がすべての x についてなりたつことと，$y \in E^{co-r}$ とは同値である。

証明

$^\forall f > 0$ をとる。

$G_\lambda f(x) = E_x(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t)dt)$

$= E_x(\int_0^{\sigma^*} e^{-\lambda t} f(x_t)dt) + E_x(e^{-\lambda \sigma_E^*} G_\lambda f(x_{\sigma_E^*}))$ （∵ Dynkinの公式）

$$\geq E_x(\ e^{-\lambda\sigma_E^*}G_\lambda f(x\sigma_E^*))=\pi_\lambda^E\ G_\lambda f$$

したがって(2.4)が$a.e.y$についてなりたつ。こゝで(2.4)の両辺がyについて co-excessive であることに注意してすべてのyについてなりたつ。つぎに $y\in E^{co-r}$ ならば $\hat{\pi}_\lambda^E(dz.y)=\delta(dz.y)$

従って(2.3)より $\int\pi_\lambda^E(x.dz)g_\lambda(z.y)=\int g_\lambda(x.z)\hat{\pi}_\lambda^E(dz.y)$

$=g_\lambda(x.y)$

逆に $y\ \ E^{co-ir}$ ならば $\hat{P}y(\sigma_E^*>0)=1$

$$\int f(x)g_\lambda(x,y)dx=\hat{E}_y(\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x_t)dt)$$

$$\int f(x)\int\pi_\lambda(x.dz)\ g_\lambda(z.y)$$

$$=\int f(x)\int g_\lambda(x.z)\hat{\pi}_\lambda^E(dz.y)=\hat{E}_y(\int_{\sigma_E^*}^\infty e^{-\lambda t}f(x_t)dt)$$

$\hat{P}_y(\sigma_E^*>0)=1$に注意すれば$f$として$f\geq 0$かつ$y$の近傍で$>0$なるようにとると

$$\int f(x)\int\pi_\lambda(x.dz)g_\lambda(z.y)<\int f(x)g_\lambda(x.y)dx$$

となる。これで定理の後半は証明できた。

注意　$M=\hat{M}$となるようなMarkov 過程では掃散の原理(2.4)によって調和測度$\pi_\lambda^E(x,dy)$が特徴づけられる。なぜならもし他に $\tilde{\pi}_\lambda^E(x.dy)$があって(2.4)をみたすとすると，特に $\forall x$に対し

$(*)\quad\int\pi_\lambda^E(x.dz)g_\lambda(z.y)=\int\tilde{\pi}_\lambda^E(x.dz)g_\lambda(z.y)$

が $y\ \ E^{co-r}=E^r$ でなりたつ。又 Mは §4の(H)をみたすから(§4参照)

$(*)$は$E\ \ E^r$上，容量0の集合をのぞいてなりたつ。故に最大値の原理(§4.定理2.12)

から$(*)$はすべてのyでなりたち $\pi_\lambda^E\equiv\tilde{\pi}_\lambda^E$ となる。特にM_Sでこのことがいえるわけであるが，$\alpha=1$(uniform motion)以外のM_0でもいえる。上の論法は(H)がなりたつようなprocess Mでさらに$E^r\cap E^{co-ir}$が容量0の集合ならそのままなりたつが後の条件が(H)より導けることかどうか著者にはわからない。

例2　〔G〕のなりたつとき，　E=球の外部：$\{x;|x|>1\}$

球の内部：$\{x;|x|\leq 1\}$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

の場合についてM. Riesz [I] は$\pi_0{}^E(x.dy)$をKelvin 変換を使つて計算した。R. Blumenthal—R. Getoor—, D. Ray [1] はさらにこれを [G] のなりたたない場合(§ 5参照)に拡張した。ここではEが球の外部のときの結果をかいておく。

$$\pi_0{}^E(x.dy)= \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}+1}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\sin\frac{\pi a}{2}\left(\frac{1-|x|^2}{|y|^2-1}\right)^{\frac{a}{2}}\frac{dy}{|x-y|^N}$$

$$|x|<1, \quad |y|>1$$

これはR^1では, Cauchy過程について, F. Spitzerが才I章§ 3におけるのと同じ方法で求めているし, 才3章では別の方法によつて得る。

§ 3 平衡ポテンシヤルと容量, Last exit time Wiener test.

この§では簡単のため(G)のなりたつ場合に限つて議論をおこなうが, $\lambda>0$では, λ次のprocess を考えればすべて同様であることは云うまでもない。

Kernel $g_0(x.y)$の代りに$u(x.y)$を用いる。

$U_\mu(x) = \int u(x,y)\mu(dy)$と約束する。

Fをcompact集合とし$\Phi_F(x)=P_x(\sigma_F{}^*<+\infty)$

$\{=P_x({}^\exists s>0, x_s\in F)\}$ときめる

定理2.5 Fをcompactとする。$\Phi_F(x)$に対してF上の測度$\mu_F(dy)$がuniqueに定り

$$\Phi_F(x) = \int u(x.y)\,\mu_F(dy)$$

同様にdual processに於て$\hat{\Phi}_F(x)=\hat{P}_x(\sigma_F{}^*<+\infty)$に対して$F$上の測度$\hat{\mu}_F$がuniqueに定まり

$$\hat{\Phi}_F(x) = \int u(y.x)\,\hat{\mu}_F(dy)$$

こゝで $C(F)=\overline{\mu}_F\ (=\mu_F(F))$とおくと, $\overline{\mu}_F = \overline{\hat{\mu}}_F$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

これらの事実は〔近藤〔1〕p.101〜〕にもう少し一般の形で証明が与えられているからこゝでは略す。

定義2.3　$C(F)$をFの容量という。

注意　Fのかわりに$\overline{G}$がcompactになるような開集合Gをとつても同じである。このときμ_Gは$G \cup G^{co-r}$上の分布になる。

定理2.6

(i)　$\Phi_F(x) = \sup \left\{ U\mu(x) \ ; U\mu < 1, \ S(\mu) \subset F \right\}$

(ii)　$\Phi_F(x) = \inf \left\{ U\mu(x) \ ; U\mu(x) \geq 1 \ \text{ on } F \right\}$が$F \ F^{ir}$の点をのぞいてなりたつ。

(iii)　$C(F) = \sup \left\{ \overline{\mu} \ ; \ U\mu(x) \leq 1, \ S(\mu) \subset F \right\}$

証明に先だつて次のLemmaをあげておく。

Lemma　（証明については近藤〔1〕p27の定理4.5参照）

測度$m(dx)$が$F \cap F^{ir}$にmassをもたないときには，開集合の減少列$\{G_n\}$，$G_n \supset F$が存在して

$$P_m(\sigma_{G_n} \uparrow \sigma_F^*) = 1 \qquad \left(P_m(\cdot) = \int m(dx) \ P_x(\cdot) \right)$$

定理の証明

(i)　Mでとられている基礎の測度$\xi(dx)$（M_SやM_0ではLebesgue測度であつた）について上のLemmaを適用して（$\xi(F \cap F^{ir}) = 0$ 近藤〔1〕p70 に注意）．
$\Phi_{G_n}(x) = P_x(\sigma_{G_n}^* < +\infty) \downarrow \Phi_F(x)$が $a.e(\xi(dx))$でなりたつ。

今　$U\mu(x) < 1$，$S(\mu) \subset F$とする。定理2.4より

$$\int_{G_n \ G_n^r} \pi^{G_n}(x.dy) \int_F u(y.z)\mu(dz) < \int_{G_n \cap G_n^r} \pi^{G_n}(x.dy) = \Phi_{G_n}(x)$$

今　$F \subset G_n^{co-r}$に注意すると左辺$= U\mu(x)$，　$n \to \infty$として

$U\mu(x) \leq \Phi_F(x)$ が$a.e$でなりたつが両辺がexcessiveということからすべての点でなりたつ

(ii)　F上で$U\mu(x) > 1$なら　$U\mu(x) \geq \Phi_F(x)$なることは(i)と同様定理2.4よりわかる。　$x \notin F \cap F^{ir}$なら上のLemmaからある$\{G_n\}$に対し

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$P_x\{\sigma_{Gn}\uparrow\sigma_F\}=1$ 故に $\Phi_{Gn}(x)\downarrow\Phi_F(x)$ ここで $\Phi_{Gn}(x)$ が F 上で $U\mu\geq 1$ なるポテンシャルなることに注意すればよい。

(iii) $\mu(x)\leq 1$, $S(\mu)\subset F$ とする。Choquet の定理(近藤〔1〕p.101)より $G_n\downarrow F$ でかつ $C(G_n)\downarrow C(F)$ なる開集合列が存在する。

故に $\int\hat{\mu}^{Gn}(dx)U\mu(x)=\int_F\hat{\Phi}_{Gn}(x)\mu(dx)=\overline{\mu}<\overline{\hat{\mu}}^{Gn}=C(Gn)$

ここで $n\to\infty$ として $\overline{\mu}\leq C(F)$ (証了)

定義2.4 E を解析集合とする。

E が negligible(極集合)$\Longleftrightarrow$ $\forall F\subset E$: compact に対して $C(F)=0$ $\Longleftrightarrow P_x(\sigma_E^*=+\infty)=1$ $\Longleftrightarrow \hat{P}_x(\sigma_E^*=+\infty)=1$ で定義する。

定理2.7 $U\mu$: 有界ならば μ は negligible 集合の上に mass をもたない。

(∵)もしもつとすると μ はある compact F: negligibl の上に massをもつことになる。μ の F への restriction を μ' とすると $\mu'\leq\mu$ ∴ $U\mu'$ は有界すると定理2.6(iii)によって $C(F)>0$ となる，これは矛盾である。

例3 $F=\{y\}$

この場合 $\Phi_F(x)=u(x.y)C(F)$ であるから，

F: negligible $\Longleftrightarrow$ $u(x.y)$ が bounded in x

特に M_s については $g_\lambda(x.y)=\dfrac{1}{(2\pi)^N}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i<x-y.\xi>}}{\lambda+|\xi|^a}d\xi$

より1次元の場合の $1<a\leq 2$ に限って negligible でない。又 M_0 については $a=1$ (unif. motion)に限って一点は negligible でない。

例4

$F=$単位球: $\{|x|\leq 1\}$ のとき

$$\mu_F(dy)=\frac{\sin\frac{\pi a}{2}\Gamma(\frac{N}{2})}{\pi^{\frac{N}{2}+1}}(1-|y|^2)^{-\frac{a}{2}}dy\qquad 0<a<2$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

(G. Polya—G. Szegö 〔1〕, 及びBlumenthal—Getoor—Ray〔1〕 参照。なお $N=1$については才3章§ Lemma 参照)

$\alpha=2$のときは∂F上の一様な分布になることは周知のとおりである。

F=球面：$\{|x|=1\}$は，$1<\alpha\leq 2$ではnegligibleでなく$0<\alpha<1$ではnegligibleである。

実際Fの表面積要素を$d\omega_N$とするとき($x\in F$)

$$\frac{\Gamma(\frac{N-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{\frac{N}{2}}\Gamma(\frac{N}{2})}\int_F \frac{d\omega_N}{|x-y|^{N-\alpha}} = \frac{\Gamma(\frac{N-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{\frac{N}{2}}\Gamma(\frac{N}{2})}\int_0^\pi d\theta \int d\omega_{N-1}\times$$

$$\frac{\sin^{N-2}\theta}{|2(1-\cos\theta)|^{\frac{N-2}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{N-1}{2})}{4\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma(\frac{N}{2})}\Omega_{N-1}\int_0^\pi \frac{\cos^{N-2}\frac{\theta}{2}}{\sin^{2-\alpha}\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$<+\infty \quad \Longleftrightarrow 2\geq\alpha>1$$

特に$\mu_F=C\cdot d\omega_N$はもちろんである。

<u>Last exit time の分布</u>

Fを内点をもつcompact集合とする。

$$\tau_F(\omega) = \sup\{t : x_t(\omega)\in F\}$$

$$=0\text{，もしこのような }t\text{ がないとき，}$$

を定義し，Last exit timeという。

以後M_Sの場合のみをあつかう。

<u>定理2.8</u> M_Sで〔G〕をみたすものについて

$$P_x(\tau_F(\omega)\in dt)=\int_F P(t.x.y)\,\mu_F(dy).dt$$

がなりたつ。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

証明 $P_x(\tau_F(\omega)>t)=P_x\ (\exists s>t\ ;\ x_s\in F)$

$$= E_x(P_{x_t}(\exists s>o\ ,\ x_s\in F))\qquad (\because \text{Markov 性})$$

$$=E_x\ (\Phi_F(x_t))$$

定理２．５により$\Phi_F(x_t)=\int_F u(x_t,y)\mu_F(dy)$であり

$u(x,y)=\int_o^\infty P(s,x,y)ds$ に注意して

$$P_x(\tau_F(\omega)>t)=\int_{R^N} P(t,x,y)dy\int_F u(y,z)\mu_F(dz)$$

$$=\int_F \left\{\int_{R^N} P(t,x,y)u(y,z)dy\right\}\mu_F(dz)$$

$$=\int_F \left[\int_{R^N} P(t,x,y)\left\{\int_o^\infty P(s,y,z)ds\right\}dy\right]\mu_F(dz)$$

$$=\int_F\int_t^\infty P(s,x,z)ds\ \mu_F(dz)$$

$$\therefore\ P_x(\tau_F(\omega)\in dt)=\int_F P(t,x,y)\,\mu_F(dy).dt$$

この結果計算により，Brown運動の場合について

系． $E_x(\tau_F{}^C)<+\infty \qquad C<\frac{N}{2}-1$

$\qquad = +\infty \qquad C>\frac{N}{2}-1$

Wiener test ;

Ito ― Mckean 〔1〕はNewtonポテンシャルに対するWiener test を確率論的方法で証明しているが，それはBrown運動のpath の連続性を用いた方法であるので，そのまゝの形でRieszポテンシャルに適用することはできない。こゝではBorel―CantelliのLemmaの拡張であるChung―Erdosの定理を用いて，Riesz ポテンシャルに関する

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

Wiener test を証明する。尚これはFrostman 〔2〕の結果に対応する，要するにWiener testは確率論的にみればBorel—CantelliのLemma に他ならないことを示したいわけである。こゝでも簡単のため（G）のなりたつことを仮定する。

定理2．9 （Wiener test）

BをR^Nの解析集合　　$x \notin R^N$とする。

$$B_n = \left\{ y\ ;\ \frac{1}{2^n} < |y-x| < \frac{1}{2^{n-1}} \right\} \cap B \text{とおく。}$$

（i） $\sum 2^{(N-\alpha)n} C(B_n) < +\infty$なら　$x \in B^{ir}$

$$i.e\ \ P_x(\sigma_B^* > 0) = 1$$

（ii） $\sum 2^{(N-\alpha)n} C(B_n) = +\infty$なら　$x \in B^r$

$$i.e.\ \ P_x(\sigma_B^* = 0) = 1$$

証明

1° 事象E_nを$E_n = \{ \sigma_{B_n}^* < +\infty \}$で定義する。

$P_x(E_n) = \Phi_{B_n}(x)$ ：　　　B_nと容量の定義により

$$K.2^{(n-1)(N-\alpha)} C(B_n) < \Phi_{B_n}(x) < K.2^{n(N-\alpha)} C(B_n)$$

従って$\sum 2^{(N-\alpha)n} C(B_n)$の発散収束と $\sum P_x(E_n)$の 発散収束とは同等である。

2°） まず$\sum P_x(E_n) < +\infty$とするとBorel—CantelliのLemmaによつて

$P_x(\overline{\lim}\ E_n) = 0$　これより　$P_x(\sigma_B^* > 0) = 1$である。

3°） $\sum P_x(E_n) = +\infty$とする。このとき，$P_x(\overline{\lim}\ E_n) = 1$を次のChung—Erdösの定理を用いて証明する。

Chung—Erdösの定理（白尾〔1〕参照）

事象列$\{ E_n : n = 1, 2, \cdots\cdots \}$が

i） $\sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) = +\infty$

ii） $\forall n > \forall l$に対し　$\exists C(l)$　　$\exists H(n, l)$で　$k > H(n, l)$なるかぎり

$$P(E_k / E_l^c \cap E_{l+1}^c \cdots\cdots \cap E_n^c) > c(l) P(E_k)$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

iii) $\exists\, C_1\ ,\ C_2$

α) jに対し$\{ j_i\ ;\ i=1,2,\ \cdots\cdot\ S_j \}$が定まり

$$\sum_{i=1}^{s_j} P(E_j \cap E_{j_i}) < C_1 P(E_j)$$

β) $k>j$ 且 $k=j_i$ $(i=1,2,\cdots\cdot,\ S_j)$ならば

$P(E_j \cap E_k) < C_2 P(E_j) P(E_k)$がなりたつ。

(i)(ii)(iii)がなりたつとき $P(\overline{\lim}\ En)=1$

従って今の場合我々の$\{En\}$が(i)－(iii)をみたす事を示せば良い。

i)は仮定そのものである。

ii)は $l<n<k$として

$$P_x(E_k / E_l^c \cap E_{l+1}^c \cdots \cap E_n^c) = \frac{P(E_k \cap E_l^c \cap E_{l+1}^c \cdots E_n^c)}{P(E_l^c \cap E_{l+1}^c \cdots\cdot \cap E_n^c)}$$

$$= \frac{Px(\sigma_{B_k}^* < +\infty\ ;\ \sigma_{B_l}^* = \sigma_{B_{l+1}}^* = \cdots = \sigma_{B_n}^* = \infty)}{Px(\sigma_{B_l}^* = \sigma_{B_{l+1}}^* = \cdots\cdot = \sigma_{B_n}^* = +\infty)}$$

$$= \frac{Px(\sigma_{B_k}^* < +\infty : \sigma_A^* = +\infty)}{Px(\sigma_A^* = \infty)} \qquad \text{こゝに} A = B_l \cup B_{l+1} \cup \cdots\cdot \cup B_n$$

$$= \frac{Ex(Px_{\sigma_{B_k}^*}(\sigma_A^* = +\infty) : \sigma_{B_k}^* < \sigma_A^*)}{Px(\sigma_A^* = +\infty)} \qquad (**)$$

今 $1 - Px(\sigma_A^* = +\infty) = Px(\sigma_A^* < +\infty)$がsupportが Aに含まれる測度のポテンシャル，従って$R^n - A$ で連続なることに注意すると，

$$\lim_{y \to x} Py(\sigma_A^* = +\infty) = Px(\sigma_A^* = +\infty)$$

従って n , lに対して $H_1(n, l)$がきまり$k>H_1(n, l)$なるkについて

$y \in B_k$に対し $\dfrac{Py(\sigma_A^* = +\infty)}{Px(\sigma_A^* = +\infty)} > \dfrac{1}{2}$ とできる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

故に $(**) = \frac{1}{2} Px(\sigma_{B_k}^* < \sigma_A^*)$

$$= \frac{1}{2}(Px(\sigma_{B_k}^* < +\infty) - Px(\sigma_A^* < \sigma_B^* < +\infty))$$

この第二項は第一項に比べ $k \to +\infty$ のとき無限小である。実際 $k > n$ ならば

$$\frac{Px(\sigma_A^* < \sigma_{B_k}^* < +\infty)}{Px(\sigma_{B_k}^* < +\infty)} = \frac{Ex(\Phi_{B_k}(x_{\sigma_A^*}) : \sigma_A^* < \sigma_{B_k}^*)}{\Phi_{B_k}(x)}$$

$$< \frac{K 2^{(N-\alpha)(n+1)} C(B_k)}{K 2^{(N-\alpha)(k-1)} C(B_k)} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

故に $H_2(n, l) > H_1(n, l)$ を適当にとると，$k \geq H_2(n, l)$ なるかぎり

$\frac{1}{2}(Px(\sigma_{B_k}^* < +\infty) - Px(\sigma_A^* < \sigma_B^* < +\infty)$

$> \frac{1}{3} Px(\sigma_{B_k}^* < +\infty) = \frac{1}{3} Px(E_k)$ 故に $c(l) = \frac{1}{3}$ として(ii)はなりたつ。

iii) j に対し，$\{j_i\} = \{j+1\}$ とする。

このとき α) は $C_1 > 1$ としてなりたつている。

β) $k > j$ $k \neq \{j_i\}$ すなわち $k > j+1$

$$Px(E_j \; E_k) = Px(\sigma_{B_j}^* < +\infty, \quad \sigma_{B_k}^* < +\infty)$$

$$= Px(\sigma_{B_j}^* < \sigma_{B_k}^* < +\infty) + Px(\sigma_{B_k}^* < \sigma_{B_j}^* < +\infty)$$

$$= Ex(Px_{\sigma_{B_j}^*}(\sigma_{B_k}^* < +\infty) : \sigma_{B_j}^* < \sigma_{B_k}^* < +\infty)$$

$$+ Ex(Px_{\sigma_{B_k}^*}(\sigma_{B_j}^* < +\infty) : \sigma_{B_k}^* < \sigma_{B_j}^* < +\infty)$$

$$\leq Ex(Px_{\sigma_{B_j}^*}(\sigma_{B_k}^* < +\infty) : \sigma_{B_j}^* < +\infty)$$

$$+ Ex(Px_{\sigma_{B_k}^*}(\sigma_{B_j}^* < +\infty) : \sigma_{B_k}^* < +\infty)$$

$\rho(B_j, B_k) \geq \frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2^{j+1}}$ に注意して

$$P_{x_{\sigma_{B_j}^*}}(\sigma_{B_k}^* < +\infty) \leq K2^{(j+1)(N-\alpha)}\, C(B_k)$$

$$P_{x_{\sigma_{B_k}^*}}(\sigma_{B_j}^* < +\infty) \leq K2^{(j+1)(N-\alpha)}\, C(B_j)$$

他方 $\quad P_x(E_k) = \Phi_{B_k}(x) \geq K2^{(j-1)(N-\alpha)}\, C(B_k) \qquad \because k > j+1$

$$P_x(E_j) = \Phi_{B_j}(x) \geq K2^{(j-1)(N-\alpha)}\, C(B_j)$$

これより $\quad P_{x_{\sigma_{B_j}^*}}(\sigma_{B_j}^* < +\infty) \leq 2^{(j+1)(N-\alpha)}2^{-(j-1)(N-\alpha)}P_x(E_k)$

$$= 2^{2(N-\alpha)}P_x(E_k)$$

同様に $\quad P_{x_{\sigma_{B_k}^*}}(\sigma_{B_j}^* < +\infty) \leq 2^{2(N-\alpha)}P_x(E_j)$

$$\therefore\ P_x(E_j \cap E_k) < 2^{2(N-\alpha)+1}\, P_x(E_k)P_x(E_j)$$

故に $C_2 = 2^{2(N-\alpha)+1}$ としてβ)がいえた。

4°) 故に $P_x(\overline{\lim}\ E_n) = 1$ がいえた。

これより $P_x(\sigma_B^* = 0) = 1$ がいえる。実際もし $P_x(\sigma_B^* > 0) = 1$ ならpathは正の確率でBをhit することなく $\left\{y : |x-y| > \frac{1}{2^n}\right\}$ をhit する。又これらのpathが再び $\left\{y : |x-y| < \frac{1}{2^{n+1}}\right\}$ へもどらぬ確率は正である。これは $P_x(\overline{\lim}\ E_n) = 1$ に矛盾する。これで定理は証明できた。

§4 ポテンシャルの連続性と irregular pointの negligibility

この§では，次の条件(H)及びそれに関連したいくつかの条件について論ずる。特に安定過程では uniform motion以外(H)がみたされる事をみる。

条件(H) 任意の compact 且つ容量正の集合F($C(F) > 0$)の regular pointは空ではない($F^r \neq \phi$)

<u>Lemma</u> $\quad (H) \iff \forall E$: analyticに対して$E \cap E^{ir}$ negligible

<u>証明</u> $\quad \Leftarrow\ C(F) > 0$で $F^r = \phi$ なる compact Fがあるとする。

$F \cap F^{ir} = F$ 且つ$C(F) > 0$となって矛盾。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$\Rightarrow E\cap E^{ir} \supset^{\exists} F$ (compact) $C(F)>0$とする。

$F \subset F^{ir}$ となるから $F^{r}=\phi$となり矛盾

Lemma (H) $\Rightarrow$ 任意のcompact 且つ$C(F)>0$なるFに対しては$F^{co-r}\neq\phi$

証明 次のMeyerの結果(定理2.10)より,もし$F^{co-r}=\phi$ならFはensemble semi-polaire になり,(H)のもとで$C(F)=0$となつて矛盾する。

定義 (半極集合)

E:解析集合が半極集合(ensemble semi-polaire)とは

$E=\bigcup_{n=1} B_n$ と書けること。こゝに B_n は解析集合且つ $B_n{}^{r}=\phi$

$B_n{}^{co-r}=\phi$のとき,双対半極集合という。

定理2.10 (Meyer 〔1〕)

Eが半極集合なら双対半極集合でもある。

注意 1. 前に$E^{r}\neq\phi$で $E^{co-r}=\phi$ の例をあげた。定理2.10は半極集合の概念が有効であることを示す。

注意 2. 定義より明らかに(H) $\Leftrightarrow$ すべての半極集合は極集合。

証明は,ここでは省略しMeyerの論文(〔1〕P94)を見ていただくことにする。

以下Huntによるいくつかの条件をのべる。

(I) ,μを台がcompact な測度とする。今 U_μが有界で それのμの台の上への制限が,連続であるならばU_μ はいたるところ連続である。

(J) $\varphi(x)$がexcessive function とすると,$\forall\varepsilon>0$に対しεより小なる容量をもった開集合Gが存在してφをS-Gへ制限すれば連続。

(K) すべてのexcessive functionはregular : すなわちφをexcessive function とするとき,すべてのP_μ-measureについて$\forall\tilde{\omega}$に対し$\varphi(x_t)$はx_tが連続な時間では連続

$$(0<t<\sigma_\infty)$$

定理2.11 (Hunt)四条件(H),(I),(J),(K)は同等。

証明 ていねいにやるのは少し準備がいつてめんどうであるのである部分は省略し,又ある部分は$u(x,y)$がある種の条件のもとでは簡単に証明できるのでそのようにした。ただ(K)→(H)はMeyer 〔1〕が明快な証明をあたえているのでそれを紹介することにした。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

（ⅰ） （I） ⇒ （J） ⇒（K）

一見してわかるようにこれは，excessive function の連続性を種々の角度からながめたものである。たとえば（J） ⇒ （K）がなりたちそうなことはすでに感じられる。くわしくはHunt〔2 Ⅲ p.195〜〕にゆずつて省略することにする。

（ⅱ） （K） ⇒ （H）の証明

（K）がなりたつとし，$C(F)>0$ $F^r=\phi$ として矛盾を出せばよい。

$F^r=\phi$なら Fは半極集合，故に前定理より M について半極集合（双対半極集合）．故に $F'\subset F$を適当にとるとμ_FのF' への制限 $\mu'=\mu_F|F'$は0でなく $F'^{\,co-r}=\phi$ と出来る。（μ_F は§4の平衡分布 $\Phi_F=U\mu_F$） したがつてF' はポテンシャル0の集合で特に$\xi(F')=0$である。（近藤〔1〕p 参照）故に定理2．6の証明のときのLemmaから $\forall f(x)\geq 0$ に対し

$$(P^f(\cdot)=\int f(x)Px(\cdot)\text{として}) \qquad \exists G_n\downarrow F'$$

$$P^f(\sigma_{Gn}\uparrow\sigma^*_{F'})=1 \qquad \text{となる。}$$

他方今 $f(x)\in C_K(S)$を$f(x)>1$ on F'なるようにとつておくと掃散（定理2．3）の証明と同様にして，（$F'^{\,co-r}=\phi$に注意）

$$\int f(x)\int \pi F'(x.dz)\,U\mu'(z)dx<\int f(x)U\mu'(x)dx$$

左辺は $E^f(U\mu(x_{\sigma^*_{F'}}))$

一方Gnに対してはあきらかに $E^f(U\mu'(x_{\sigma_{Gn}}))=\int f(x)\,U\mu'(x)dx$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} E^f(U\mu'(x_{\sigma_{Gn}})) = E^f(U\mu'(x_{\sigma_{F'}^*}))$$

他方 $\widetilde{\forall}$ w (P^f)について $x_t(w)$は$t=\sigma_{F'}^*$ で連続である（Blumenthalの定理 近藤〔1〕参照）． $U\mu'$は有界なexcessive functionで今（K）がなりたつことから，上のことはあきらかに矛盾となる。

（ⅲ） （H） ⇒ （I）

一般の場合の証明はHunt〔2－Ⅲ〕にあるがこゝではそれを省略し，Kernel $u(x,y)$ がある条件をみたす場合について証明をおこなうことにする。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

〔A〕 $\forall \nu \in \mathfrak{M}_k$[1] に対して $U_\nu(x)$ は $S(\nu)^c$ で連続。

（安定過程に対応するKernelではこれがなりたつことは容易にわかる）

今（L） $\exists A>0$ $\nu \in \mathfrak{M}_K$ で

$$U_\nu(x) < A \sup_{x' \in S(\nu)} U_\nu(x')$$ とする

このとき〔A〕をみたすKernel $u(x,y)$ については（H）$\Rightarrow$（L）$\Rightarrow$（I）

まず（H）$\Rightarrow$（L）

掃散の原理（2．4）から $u(x,y) = \int \pi^F(x,dz)\, u(z,y)$ がなりたゝぬようなFの点全体は $F \cap F^{co-ir}$ 従つてこれは仮定（H）によつてnegligible．$\nu \in \mathfrak{M}_K$ に対して $U_\nu(x)$ を考える。今 $U_\nu(x)$ は有界であるから ν はnegligible setの上にmassをもたない。

$$\therefore\ U_\nu(x) = \int_F \pi^F(x,dz) U_\nu(z) \leq \sup_{Z \in F} U_\nu(z)$$

よつて，FをS（ν）ととつておけば（L）がAを1としてなりたつ。

（L）$\Rightarrow$（I）

（$\because$）

$\nu \in \mathfrak{M}_K$．S（ν）＝Fとおく。$U\nu$ のFへのrestrictionが連続であるとする。仮定〔A〕があるから（I）をいうには，$x \in \partial F$ で連続であることをいえば良い。今 $F = F_1 + F_2$ とわける。（Fi：compact） $U\nu = U\nu_1 + U\nu_2$（ν_i は ν の Fi へのrestriction）とするとき，$U\nu_i$ が下半連続であることと $U\nu$ が F で連続なることより $U\nu_i$ の F へのrestrictionは連続

$x_0 \in \partial F$ とする　$Kn(x_0) \downarrow x_0$ なる開球の列をとる。

$$\int_{F-K_n} u(x,y)\,\nu(dy) \uparrow \int_F u(x,y)\nu(dy)$$ 且つこれらの函数は F 上で連続。

Dini の定理により F 上でこの収束は一様

$$\therefore \int_{F \cap K_n} u(x,y)\nu(dy) \downarrow 0 \quad \text{unif on } F$$ こゝで（L）に注意すると，この収

1）$\mathfrak{M}_K = \{\nu : \text{compact support},\ U_\nu\ ;\ \text{有界}\}$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

束は全体で一様に 0 にゆくことがわかる。

$$\therefore \int u(x,y)\nu(dy) = \int_{F-K_n} u(x,y)\nu(dy) + \int_{K_n \cap F} u(x,y)\nu(dy)$$

右辺才一項は Kn で連続，才二項は全体で一様に 0 に収束

$\therefore$ $\int u(x,y)\nu(dy)$ は $x=x_0 \in \partial F$ で連続。

以上で特に〔A〕のもとで（H）＝（I）がいえたことになる。（先にのべた様に実はこの条件〔A〕はとりのぞく事ができる。）

uniform motion 以外の Riesz Kernel では〔A〕は明らかで，又（L）が Kernel の形を見て直接 Check できるのでこれで（H）がなりたつことがわかつた。又 uniform motion では（H）のなりたたないことはどの条件に照しても容易にわかる。

注意　（H）のなりたつ十分条件でもつとも簡単なものはポテンシャルの対称性 $u(x,y)=u(y,x)$ すなわち $M=\widehat{M}$ である。Hunt〔2 Ⅲ p201～〕

次に最大値の原理について述べる。

定理 2．12　（完全最大値の原理）

（H）がなりたつとき，次の完全最大値の原理がなりたつ。すなわち，$\nu \in \mathfrak{M}_K$，かつ ν は E 上の測度とする。又 μ' は任意の測度とする。（測度と単にいうときは常に正なものとする。）このとき容量 0 の集合をのぞいて

（＊）　$U\nu(x) \leq U\mu(x) + a$ が x　E でなりたつならば，実はすべての点でなりたつ。

証明　先に（H）$\Rightarrow$（L）を示したときと殆んど同じやり方で行う。まず $E \cap E^{co-ir}$，及び（＊）式をみたさぬ集合は negligible である。ν はその上で mass をもたぬから（2．4）より

$\therefore$

$$U\nu(x) = \int_{S(\nu)} \pi^{S(\nu)}(x,dz)U\nu(z) \leq \int_{S(\nu)} \pi^{S(\nu)}(x,dz)\left\{U\mu(z)+a\right\}$$

$$= U\mu(x) + a$$　（証了）

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

以後対称な場合のみ考える

今 $\mathfrak{E}=\{\mu$; 符号のついた測度: $\iint u(x,y)|\mu|(dx)|\mu|(dy)<+\infty\}$ とおく。

定理2.13 （エネルギー積分の原理）

$\mu\in\mathfrak{E}$ に対しそのエネルギー積分

$$\|\mu\|^2=\iint u(x,y)\mu(dx)\mu(dy)\geqq 0$$

かつ $=0 \iff \mu=0$

証明

指数 α 次の安定過程に対応する $u(x,y)$ を $u^{\alpha}(x,y)$ とおくと，

$$u^{\alpha+\beta}(x,y)=\int_{R^N}u^{\alpha}(x,z)\,u^{\beta}(z,y)dz$$ がなりたつ。

（ただし $\alpha+\beta$ は〔G〕のなりたつ場合）

これは，Riesz核でよく知られた基本的な関係であるが，一般に Markov 過程が対称な $g_0(x,y)=\int_0^{\infty}p(t,x,y)dt$ をもつとき，その α 次の subordination に対する $g_0^{(\alpha)}(x,y)$ は

$$g_0^{(\alpha)}(x,y)=\int_0^{\infty}p(t,x,y)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{t^{1-\alpha}}dt$$

となるから

$$g_0^{(\alpha+\beta)}(x,y)=\int g_0^{(\alpha)}(x,z)g_0^{(\beta)}(z,y)\xi(dz)$$

がなりたつことに注意しておく。

そうすると， $u(x,y)$ の対称性に注意して

$$\|\mu\|^2=\iint u^{\alpha}(x,y)\mu(dy)\mu(dx)=\int\left|\int u^{\frac{\alpha}{2}}(x,z)\mu(dx)\right|^2dz\geqq 0$$

かつ $\|\mu\|^2=0 \iff \int u^{\frac{\alpha}{2}}(x,z)\mu(dx)=0 \iff \mu=0$

（証了）

定理2.14 compact集合 F に対し

$C(F)>0 \iff \mu$ ：台が F に含まれる正の測度 $(\neq 0)$
$\|\mu\|^2<+\infty$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

証明　$\Rightarrow$ は　$\mu=\mu_F$としてあきらか

$\Leftarrow$　$\|\mu\|^2<+\infty$　とすると，$\mu\{x : U_\mu(x)=+\infty\}=0$であるから

$\mu(F')>0$　かつ　x　F' で　$U_\mu(x)<M$なる$F'\subset F$（compact集合）が存在する。

μ'をμのFへの制限とすると，　$U\mu'<U_\mu<M$がμ'の台でなりたつから，定理2.12の最大値の原理によつて　$U\mu'<M$がいたるところなりたつ。

故に定理2.6（iii）より　$C(F)>0$　　　　　　（証了）

§5　Recurrent な場合

ここでは，（G）をみたさぬ安定過程のポテンシヤルを論ずる。（G）をみたさぬ対称安定過程はR^1で$1<\alpha<2$，　R^2で$\alpha=2$ である。実際このとき

$$(2.5)\qquad g_\lambda(x,y)-h(\lambda)=u(x,y)+\varepsilon(x,y;\lambda)$$

ここで

$$h(\lambda)=\begin{cases}\left(\alpha\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^{-1}\lambda^{\frac{1}{\alpha}-1} & 1<\alpha\leq 2, \quad R^1\\[2mm] \dfrac{1}{\pi}\log\dfrac{1}{\lambda} & \alpha=1, \quad R^1\\[2mm] \dfrac{1}{4\pi}\log\dfrac{4}{\lambda}+\dfrac{\gamma}{2} & \alpha=2, \quad R^2\end{cases}$$

（γ : Euler 定数）

$$(2.6)\qquad u(x,y)=\begin{cases}\left(\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}\Gamma(\alpha)\right)^{-1}|x-y|^{\alpha-1} & 1<\alpha\leq 2, \quad R^1\\[2mm] \dfrac{1}{\pi}\log\dfrac{1}{|x-y|} & \alpha=1, \quad R^1\\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{|x-y|} & \alpha=2, \quad R^2\end{cases}$$

したがつて$u(x,y)$はRiesz核（2.1）に他ならない。

又$\varepsilon(x,y;\lambda)$は$|x-y|$が有界な集合をうごくときには一様に 0へ収束する。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$(\lambda\to 0)$ 今$h(\lambda)\to+\infty$ $(\lambda\to 0)$であるから(G)はなりたたない。これらはいわゆるRecurrentなMarkov過程の場合になつている。上の事実の証明は1次元では

$$g_\lambda(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(x-y)\xi}{\lambda+|\xi|^\alpha}\,d\xi$$

を用いて証明できるし，2次元のBrown運動では$g_\lambda(x,y)$は変形Bessel 函数としてあらわされることから容易に示せるが省略する。

以後(2.6)であたえられるkernelのポテンシャル論をしらべることにする。方法は$\lambda>0$については今までの結果がつかえるからそこで$\lambda\to 0$として，$u(x,y)$についての結果をうる。これは平面の対数ポテンシャルについてはよく知られている結果になる。(したがつて以後ことわらないかぎり，R^1で$1\leq\alpha\leq 2$，R^2で$\alpha=2$ の場合を考えるものとする。)

Eを解析集合とし，$\sigma_E{}^*$をhitting time とする。§3と同様にEがnegligible というのは$P_x(\sigma_E{}^*=+\infty)=1$ $\forall x$となることとする。以後この§ではEがnegligible のとき容量0の集合，他の場合Eを容量正の集合という。

Prop2.15 Eを容量正の集合とするとき

$\forall x$に対し $P_x(\sigma_E{}^*<+\infty)=1$

証明 今考えている場合はrecurrentであるから，開集合$G\neq\phi$に対しては$P_x(\sigma_G<+\infty)=1$ となる。さてEを容量正の集合とする。$\lambda>0$に対しては§3の理論がなりたつから

$$\Phi_E^\lambda(x)=E_x(e^{-\lambda\sigma_E{}^*})=\int_{E\cup E^r} g_\lambda(x,y)\mu_E{}^{(\lambda)}(dy)$$

ここで上の函数は下半連続である。又§4により$E^r\neq\phi$で x E^rでは $\Phi_E^\lambda(x)=1$となる。今 $x_0\in E^r$を1つとりU_nをその近傍列で$U_n\downarrow x_0$なるものとする。任意のxに対し

$$\begin{aligned}P_x(\sigma_E^*<+\infty)&>P_x(\sigma_E^*>\sigma_{U_n},\ \sigma_E{}^*<+\infty)\\&=E_x(P_{x\sigma_{U_n}}(\sigma_E^*<+\infty)\ ;\ \sigma_{U_n}<+\infty)\\&\geqq E_x(\Phi_E^\lambda(x\sigma_{U_n}))\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$(n\to\infty\text{として})\qquad \geq Ex(\underline{\lim}\,\Phi_E^{\lambda}(x_{\sigma_{U_n}}))\geq\Phi(x_0)$$

（証了）

<u>定理２．16</u>　Eを容量正の有界な集合とし

$$\pi^E(x,dy)=Px(x_{\sigma_E^*}\in dy)\quad\text{とおく。}$$

これは$E\cup E^r$ 上の全質量１の分布になるが，これについて変形された掃散の原理がなりたつ：

$$(2.7)\qquad k(x)+u(x,y)\geq\int_{E\cup E^r}\pi^E(x,dy)u(z,y)$$

かつ＝がE上高々容量０の集合をのぞいてなりたつ。ここで

$$(2.8)\qquad k(x)=\lim_{\lambda\downarrow 0}h(\lambda)(1-Ex(e^{-\lambda\sigma_E^*}))$$

<u>証明</u>　$\lambda>0$に対して定理２．３の掃散を行い（２．５）に注意して$\lambda\downarrow 0$の両辺の有限部分をとることにより容易に示せる。今の場合（Ｈ）がなりたつているから$E\quad E^{co-r}$は容量０の集合になる。

上の$k(x)$は明らかに

$$k(x)=0\qquad x\notin E^r\text{であるが，実はある定数}C\text{に対し}$$

$$k(x)=C-\int_{E\cup E^{co-r}}u(x,y)u(dy)\qquad\text{とかけることが示せる}$$

これがrecurrentな場合における平衡分布にあたるものである。以下簡単のためFをcompact な集合として話を進める。

<u>定理２．17</u>

Fをcompactな集合とする。

（ｉ）　Fが正の容量をもつための必要十分条件は，F上の正の測度μが存在し

$$U\mu(x)=\int u(x,y)\mu(dy)$$

が局所有界（各compactの上で有界）となることである。

（ii）　Fが正の容量をもつときF上に次の性質をもつ測度μ_Fが一つかつ唯一つ存在する。これをFの平衡分布という。

$$\mu_F(F)=1\qquad U_{\mu_F}\text{は}F\text{上容量０の集合をのぞいて定数}$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

証明

(i)は§3定理2.6に注意すれば(2.5)からあきらかである。

(ii)は一般的に確率論的方法で証明できるが，ここではそれは省略しただ次の注意のみにとどめる。

1次元で$-1<x<1$，2次元で 円 $|x|<1$の場合平衡分布μ_Kの存在及び形が知られていて§3例4と同じになる。又任意のrに対し，$|x|<r$の平衡分布は，簡単な尺度の変換ですぐ求まる。しからばFがこれらの集合の部分集合のとき

$$\mu_F(dy)=\int\pi^F(dy,z)\mu_r(dz)$$

が平衡分布になる。(今の場合では $\hat{\pi}=\pi$)

§3では平衡分布は定理2.6(i)(ii)のような特徴づけが可能であつた。今の場合はそのような特徴づけができないので次のようにする。

$\mathcal{E}=\{\mu$：符号のついた測度で台は有界，かつ$\iint|u(x,y)|\,|\mu|(dy)\,|\mu|(dx)<+\infty\}$

$\mathcal{E}^+=\{\mu:\mu>0\}$

$\mathcal{E}^\circ=\{\mu:\bar{\mu}=0\}$ ($\bar{\mu}$は全質量をあらわす)

$\mu\in\mathcal{E}$に対してそのエネルギー積分を

$$\|\mu\|^2=\iint u(x,y)\mu(dy)\mu(dx)$$

で定義する。

定理2.13に対応して次のことがいえる。

定理2.18 (エネルギー積分の原理)

$\mu\in\mathcal{E}^\circ$に対し $\|\mu\|\geq 0$ かつ $\|\mu\|=0$ と $\mu\equiv 0$ とは同等

証明

(2.5)と $\mu\in\mathcal{E}^\circ$に注意して

$$\|\mu\|^2=\iint u(x,y)\mu(dx)\mu(dy)=\iint g_\lambda(x,y)\mu(dx)\mu(dy)$$

$$-\iint\varepsilon(x,y;\lambda)\mu(dx)\mu(dy)$$

$\varepsilon(x,y;\lambda)$ は有界な集合の上で一様に0にいくから，Prop2.13によつて

$\iint g_\lambda(x,y)\mu(dx)\mu(dy)>0$ なることとあわせて

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$\|\mu\|^2 = \lim_{\lambda \downarrow 0} \iint g_\lambda(x, y)\mu(dx)\mu(dy) > 0$$

次に $\|\mu\| = 0$ とする。やはり（２．５）をつかえば上と同様にして $\nu \in \mathcal{E}^\circ$ に対し

$<\mu, \nu> = \iint u(x, y)\mu(dx)\mu(dy)$ とおくとき

$|<\mu, \nu>| < \|\mu\| \cdot \|\nu\|$　がいえる。

故に　$<\mu, \nu> = 0 \quad \forall \nu \in \varepsilon^\circ$

これよりあきらかに　$U\mu(x) \equiv C$ ．　ところで $\lim_{|x| \to \infty} u(x, y) = -\infty$ であるから

$C = 0$　これより $\mu = 0$ は明らかである。　（証了）

定理２．１９　（μ_F 及び π_F の特徴づけ）

（ｉ）　平衡分布 μ_F は $\min\{\|\mu\| ; \mu \in \mathcal{E}^+, \ S(\mu) \subset F, \ \bar{\mu} = 1\}$ をattain する唯１つの分布である。

（ii）　調和測度　$\pi^F(x, dy)$ は

$\min\{E_x(\nu) ; \mu \in \mathcal{E}^+, \ S(\mu) \subset F, \bar{\mu} = 1\}$　但し

$E_x(\nu) = \int_F \left[\int_F u(z, y)\nu(dz) - 2u(x, y) \right] \nu(dy)$

をattainする唯一つの分布である。

証明

（ｉ）　$\|\mu - \mu_F\|^2 = \|\mu\|^2 + \|\mu_F\|^2 - 2<\mu, \mu_F>$ で今 $U\mu_F$ が F 上capacity 0の集合をのぞいて定数かつ $\mu \in \mathcal{E}$ ならば μ はcapacity 0 の集合の上にmass をもたぬことに注意して　$<\mu, \mu_F> = \bar{\mu} = 1$

故に $\|\mu\|^2 = \|\mu - \mu_F\| - \|\mu_F\|^2 + 2$ でこれは $\mu = \mu_F$ のとき最小値をとる。

（$\mu - \mu_F \in \mathcal{E}^\circ$ に注意）

（ii）　$E(\nu) = \|\pi^F(x, \cdot) - \nu\|^2$ が容易に示せるからこれより明らか。　（証了）

定理２．２０　compact集合 F が容量正 $\Leftrightarrow$ $\mu \in \mathcal{E}^+$, $\mu \neq 0$, $S(\mu) \subset F$

$$\|\mu\|^2 < +\infty$$

証明　この定理は（２．５）に注意すれば容易に定理２．１４に帰着できる。

定理２．２１　（最大値の原理）

μ, ν を全質量の等しい正の測度で，μ は集合 E 上に質量をもち，$U\mu(x)$ は局所有界であるとする。このとき定数 a に対し

$U\mu(x) < U\nu(x) + a$　が E 上高々容量０の集合をのぞいてなりたつならば実はすべての x でなりたつ。

証明　定理２．１６を用いて，定理２．１２と同様に証明できる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

第3章　ある種の微積分方程式と安定過程

この章では，安定過程の半群の生成作用素に関する問題をとりあつかう。加法過程についてはその生成作用素について二回連続的微分可能な函数に対する一般的表現が知られているが，安定過程の場合にはもう少し精密に論ずることが出来る。ここではまず有限区間での吸収壁安定過程の生成作用素を求め，それをもとにして全体の生成作用素を決定する。その応用として安定過程の諸量がある微積分方程式の解として得られることをみる。

これは Diffusion 方程式と Brown 運動の関係を安定過程にもちこもうという意企のものである。又方法としては weak solution の概念を統一的に用いるがこれは M.Kac [1] によつて導入されたものである。最後に J.Elliott [1] が考察した確率過程の確率論的構成などを論じる。

§1　Lévy 測度に関する関係式

この節は一般な Markov 過程についての話である。

Sを第二可算公理をみたす局所 compact な距離空間とし，M＝(S，P_x)をS上の Markov 過程で次の仮定をみたすものとする。($\bar{S}$は，Sが compact でないとき，その一点 compact 化の空間である)

(A．1)，$T_t : C(\bar{S}) \longrightarrow C(\bar{S})$：強連続

(A．2)　(Lévy 測度の存在)

$n(x, E)$，$x \in S$，$E \in \mathbf{B}(S)$ なる核があり

i)　$n(x, E) < +\infty$　　但し，$\rho(x, E) > 0$

(ρはSの距離)

ii)　$f \in C(S)$ に対し$S(f)$をfの台とする。今 domain DがD$\subset S(f)$なるとき

$$\frac{\int f(y)\, P(t, x, dy)}{t} \longrightarrow \int f(y)\, n(x, dy)$$

が$x\in D$でなりたち，しかもDで有界に収束する。

例1． 加法過程

加法過程 $x_t(w)$

$$E_0(e^{i<x_t,\xi>})=e^{-t\psi(\xi)}$$

$$\varphi(\xi)=(m,\xi)-\frac{1}{2}(v\xi,\xi)+\int\left(e^{i(\xi,u)}-1-\frac{i(\xi,u)}{1+|u|^2}\right)\sigma(du)$$

に対しては (A．1) (A．2) はみたされ

(3．1) $n(x,dy)=\sigma(dy-x)$

となる。

実際 $\pi_t(dy)=P_0(x_t\in dy)$ とおいて

$\int f(y)P(t,x,dy)=\int f(x+y)\pi_t(dy)$ なること及び

$\dfrac{\pi_t(dy)}{t}\longrightarrow\sigma(dy)$ (弱収束) なることに注意すればよい。

尚 斉次空間 G/H 上の不変過程 (すなわち遷移確率が

$P(t,x,E)=P(t,gx,gE)$ ($\in G$) をみたすような Markov 過程)

についても (A．1) (A．2) がなりたつことがしられている Cf. J. wool. [1]

例2． M_1を (A．1) (A．2) をみたすS上の Markov 過程 Mを M_1 から

ψ－subordination によつてえられた Markov 過程とすると Mも

(A，1) (A，2) をみたしその Lévy 測度 $n(x,dy)$ は

$$n(x,dy)=Cn_1(x,dy)+\int_0^\infty P_1(\tau,x,dy)\sigma(d\ )$$

ここで $P_1(\tau,x,dy)$，$n_1(x,dy)$ は M_1の遷移確率及び Levy 測度

又 $\psi(\xi)=C+\int_0^\infty(e^{-\xi\tau}-1)\sigma(d\tau)$ とする

証明は第I章§3 と同様にして出来る。

さて (A．1) (A．2) をみたすS上の Markov 過程 Mがあたえられたとし，その Path は右連続かつ左極限をもつような version をとつておく。

$D\subset S$を有界な domain とし $\tau_D=\sigma_{D^c}$ を Path がDを最初に離れる時間

$$\tau_D(w)=\inf\{t,\ x_t(w)\notin D\}$$
$$=+\infty\quad(\text{もしこのような}t\text{が存在しないとき})$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

とする，（Path の右連続性より $x_{\tau_D} \in D$ なることに注意する）

M_Dを multiplicative functional $\chi(\tau_D(w)>t)(w)$

Mの sub-process，すなわち Mの path を時間 τ_D で殺して得られる

Markov 過程とする。M^D の Green 測度を λ^D であらわす：

$$\lambda^D(x, E) = E_x\left(\int_0^{\tau_D} \chi_E(x_t)\,dt\right), \quad E\subset D$$

$(A.3)$ $g_\lambda{}^D$ $E_x(\tau_D)<+\infty$ $, x$ D

定理3．1　$\lambda>0$ （（$A.3$）がなりたてば$\lambda=0$を含めて）と，$\rho(E.D)>0$ なる Borel 集合Eに対して

$$(3.2)\quad E_x(e^{-\lambda\tau} : x_{\tau_D} \in E) = \int_D g_\lambda{}^D(x, dy)\, n(y, E)$$

証明　fをDの近傍で 0になるようなC（S）の函数とし

$$U = nGnf$$

とおく　あきらかに　$Un \to f$ で特に D上で

$$Un \Longrightarrow 0$$

である。（$\Longrightarrow$ は一様収束をあらわす）

他方（A．2）に注意して $x \in D$ に対し

$$nu_n(x) = n^2\int_0^\infty e^{-nt}T_t f(x)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}.t\ T_{\frac{t}{n}} f(x) \Big/ \frac{t}{n}\,dt$$

$$\int f(y).n(x.dy)\int e^{-t}.t\ dt = \int f(y)\,n(x.dy)$$

かつこの収束はD上で有界である。

をT tの生成作用素とすると　$\mathfrak{g} = -f$　特にD上で

$\mathfrak{g}\,Un = nu_n$　故に　上のことは

$$\mathfrak{g}\ Un(x) \longrightarrow \int f(y)\,n(x.dy) \quad (x\in D\text{で．有界収束})$$

なることに他ならない。　次の Dykin の公式：

$$E_x\left(e^{-\lambda\tau_D}Un(x_{\tau_D})\right) - Un(x) = -E_x\left(\int_0^{\tau_D} e^{-\lambda t}(\lambda-\mathfrak{g})\,Un(x_t)\,dt\right)$$

$$= \int g_\lambda{}^D(x, dy)\ (\lambda-\mathfrak{g})Un(y)$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

において $n \to \infty$ とすると（$u \Longrightarrow f$，特にD上で $u \Longrightarrow 0$，なることに注意して）
Lebesgue の有界収束定理から x Dで

$$E_x(e^{-\lambda\tau_D}(x_{\tau_D}))=\int_D g_\lambda{}^D(x, dy)\int f(z)\, n(y, dz)$$

$$=\int f(z)\int_D g_\lambda{}^D(x, dy)\, n(y, dz)$$

となり証明できた。

（3．2）式で両辺の Laplace 変換をもどすと，

$$P_x(\tau_D \in dt, x_{\tau_D} \in dz)=\int P^D(t, x, dy)\, n(y, dz)\, .dt$$

ここで P^D は M^D の遷移確率： $P^D(t, x, dy)=P_x(x_t \in dy, t<\tau_D)$
すなわち τ_D と x_{τ_D} の同時分布が P^D と Lévy 測度によりあらわされたわけで，その直観的意味は明らかであろう。これより次のことも当然予想される。

$$P_x(\tau_D \in dt,\ x_{\tau_D -} \in dy.\ x_{\tau_D} \in dz)=P^D(t, x, dy)\, n(y, dz)\, dt$$

$$(x_{\tau_D -}=\lim_{n\to\infty} x_{\tau_D - \frac{1}{n}})$$

以上それについて次の仮定のもとで証明する。

（A．4）　D上の有界な測度 $m(dx)$ が存在し

$$g_\lambda{}^D(x, dy)=g_\lambda{}^D(x, y)\, m(dy) \quad とかけ$$

$G_\lambda{}^* f(x) \equiv \int_D g_\lambda{}^D(y, x)\, f(y)\, m(dx)$ はC（D）(1)をC（D）にうつし

（$D_1 \subset D_2 \cdots\cdots \subset D_n \cdots\cdots \subset D$ ，$D_n \uparrow D$，$D_n \subset D_{n+1}$ として）

$G_\lambda{}^*(C(D))$ は 各 $C(\bar{D}_n)$ 上で dense である。

定理3．2　Mが（A．1）（A．2）の他に（A．4）をみたすとき
$\lambda>0$ （（A．3）がなりたてば $\lambda=0$ も含めて）と $F \subset D. \rho(E. D)>0$
なる Borel 集合 F．E に対し

（3．3）　$E_x(e^{-\lambda\tau_D}; x_{\tau_D -} \in F, x_{\tau_D} \in E)=\int_F g_\lambda{}^D(x, dy)\, n(y, E)$

$$=\int_F g_\lambda{}^D(x, y)\, n(y, E)\, m(dy)$$

(1) C（D）はD上の有界な連続函数の全体である。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

証明　(3.3) を $m(\partial F)$ なる閉集合 $F \subset D$ についていえば十分である。
(両辺が下について測度なのだから)。　$x \in D$ に対して

$$u(x) = E_x(e^{-\lambda\tau_D}\ ;\ x_{\tau_D} \in E,\ x_{\tau_D -} \in F)$$

$$v(x) = E_x(e^{-\lambda\tau_D}\ ;\ x_{\tau_D} \in E',\ x_{\tau_D -} \in E-F)$$

$$w(x) = E_x(e^{-\lambda\tau_D}\ ;\ x_{\tau_D}\ \ E)$$

とおくと，まず

$$w(x) = u(x) + v(x)$$

実際左辺と右辺の違いは　$E_x(e^{-\lambda\tau_D}\ ;\ x_{\tau_D -} \in \partial D,\ x_{\tau_D} \in E)$ であるが
Blumenthal の定理　(近藤〔1〕P.21) を使うと　これが 0 になることがわかる。
次に $u(x)$ が　M^D-Process について　λ-excessive : i.e.

$$e^{-\lambda t}E_x^{(D)}(u(x_\tau)) \equiv e^{-\lambda t}E_x(u(x_\tau)\ ;\ t<\tau_D) \leqq u(x)$$

かつ　　$e^{-\lambda t}\bar{E}_x^D\ (u(x_\tau)) \uparrow u(x) \qquad x \in D \qquad t \downarrow 0$

これは Markov 性から容易にわかる。
次に　$G \subset D$　なる F の開近傍 G をとり　σ_G を G への　hitting time
とする。　　このとき

$$u(x) = E_x(e^{-\lambda\tau_D}\ ;\ x_{\tau_D} \in E,\ x_{\tau_D -} \in F)$$

$$= E_x(e^{-\lambda\tau_D}\ ;\ x_{\tau_D} \in E,\ x_{\tau_D -} \in F,\ \tau_D > \sigma_G)$$

$$+ E_x(e^{-\lambda\tau_D}\ ;\ x_{\tau_D} \in E,\ x_{\tau_D -} \in F,\ \tau_D < \sigma_G)$$

であるが　$\sigma_G > \tau_D$ ならば明らかに　$x_{\tau_D -}\ \ F$ となるから　第2項$=0$
第1項を σ^G に関する強　Markov 性を使つてやると容易に

$$u(x) = E_x(e^{-\lambda\sigma_G}\ u(x_{\sigma_G}\ \ ;\ \sigma_G < \tau_D)$$

$$= E_x^{(D)}(e^{-\lambda\sigma_G}\ u(x\sigma_G))$$

ここで Hunt の定理　〔2, I, Th 6, 6〕を用いると $\{f_n\}$ なる G の外で 0 に
の正の函数列が存在し

$$U_n\ (x) = \int_G g_\lambda{}^D(x, y) f_n(y)\, m(dy)\ \uparrow\ u(x) \qquad x \in D$$

となる。　$\varphi_0 \in C(D)$ を　$\psi(x) = G_\lambda{}^*\varphi(x) > 1$，$x \in G$，
なるようとると ((A.4) より可能)，

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$\int f_n(y)\, m(dy) \leqq \int \varphi(y) f_n(y)\, m(dy) = \int u_n(x) \varphi_0(x)\, m(dx) \leq +\infty$$

$$\int u(x) \varphi_0(x)\, m(dx) < +\infty$$

となり測度列 $\{ f_n(y)\, m(dy) \}$からある部分列がぬき出せて

$$f_n(y)\, m(dy) \longrightarrow \mu \qquad n \longrightarrow \infty$$

そうすると φ C (D) に対し

$$\int u(x) \varphi(x)\, m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int U_n(x) \varphi(x)\, m(dx)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{G}} \left\{ \int g_\lambda^D (x.y) \varphi(x)\, m(dx) \right\} f(y)\, m(dy)$$

$$= \int_{\overline{G}} \left\{ \int g_\lambda^D (x.y) \varphi(x)\, m(dx) \right\} \mu(dy)$$

$$= \int_D \varphi(x) \left\{ \int_{\overline{G}} g_\lambda^D (x.y)\, \mu(dy) \right\} m(dy)$$

故に $u(x) = \int_{\overline{G}} g_\lambda^D (x.y)\, \mu(dy)$ が $m(dx)$ についてほとんどいたるところ

なりたつが両辺が M^D- process について $\lambda-$excessive であるから

$x \in D$ でなりたつ。又 (A.4) より $\mu(dy)$ が unigue なることもあきらかである。

ところでGはFのかつてな近傍でよく，μがuに対し unigue に定まること

から (これも (A.4) よりわかる)

$$u(x) = \int_F g_\lambda^D (x.y)\, \mu(dy)$$

一方 $v(x)$ に対してもほぼ同様にして ある $(D-F)\cup\partial F$ 上の測度νが存在して

$v(x) = \int_{(D-F)\cup\partial F} g_\lambda^D (x.y)\, \nu(dy)$ なることがいえる

$v_\kappa(x) = E_x(e^{-\lambda\tau_D}; x_{\tau_D} \in E, x_{\tau_{D-}} \in D_\kappa - F)$ とおくと $u(x)$ の場合と全く同様

で $\kappa \to \infty$ として $v(x)$ についてもポテンシャル表が出来る。

定理3．1によつて

$$w(x) = \int_D g_\lambda^D (x.y)\, n(y.E)\, m(dy) \qquad \text{故に}$$

$$\int_F g_\lambda^D (x.y)\, \mu(dy) + \int_{(D-F)\cup\partial F} g_\lambda (x.y)\, \nu(dy) = \int g_\lambda^D (x.y)\, n(y.E)\, m(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

ここで又ポテンシャルの測度の一意性と $m(\partial F)=0$ に注意すると

結局 $\nu(dy)$ は ∂F 上に質量をもたず $n(y.E)\,m(dy)$ の F への制限が μ

D−F への制限が ν となる。　　故に

$$u(x)=\int_F g_\lambda^D(x.y)\,n(y.E)\,m(dy)$$ となり証明できた。

系1　Mが（A．1）　（A．4）をみたす上にさらに

（A．5）．$P_x(x_{\tau_D}\in\partial D)=0$

をみたすなら　$\rho(E.D)>0$ なるEに対し

$$(3.4)\quad P_x(x_{\tau_D}\in E/x_{\tau_D}=y)=\frac{n(y.E)}{n(y.D^c)}$$

証明　$U_n=\left\{x:\ \rho(x,D)>\frac{1}{n}\right\}$ とおくと　$U_n\uparrow\bar{D}^c$

定理3．2より

とすると $$P_x(x_{\tau_D-}\in F,\ x_{\tau_D}\in U_n)=\int_F g_0^D(x,dy)\,n(y,U_n)$$

$n\to\infty$ （（A．5）に注意して）

$$P_x(x_{\tau_D-}\in F)=\int_F g_0(x.dy)\,n(y.\bar{D}^c)$$

故に $$\int_F\frac{n(y.E)}{n(y.D^c)}P_x(x_{\tau_{D-}}\in dy)=\int_F\frac{n(y.E)}{n(y.D^c)}n(y.D^c)\,g_0^D(x,dy)$$

$$\int n(y.E)\,g_0(x.dy)=P_x(x_{\tau_{D-}}\in F,\ x_{\tau_D}\in E)$$

（証了）

系2　（A1）−（A5）のもとで

τ_D と x_{τ_D} は $x_{\tau_{D-}}$ がきまつたという条件のもとで独立である。

証明　（3．4）同様にして

$$E_x(e^{-\lambda\tau_D}/x_{\tau_D-}=y)=\frac{g_\lambda^D(x.y)}{g_0^D(x.y)}\quad,\quad y\ D$$

$$E_x(e^{-\lambda}\ ;x_{\tau_D}\in E/x_{\tau_D-}=y)=\frac{n(y.E)}{n(y.D^c)}\ \frac{g_\lambda^D(x.y)}{g_0^D(x.y)}$$

と なるので　（3．4）と合せてあきらかである。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

注意　　可算 state をもつた Markov 過程では一点 a の holding time τ_a と x_{τ_a} が独立になることはよく知られているが，系2はこのことの連続 state への拡張と考えられる。

最後に応用として片側　安定過程について次の結果がえられる。

$$E\,(e^{-\gamma x_t}) = e^{-t\gamma^{\alpha}} \qquad 0<\alpha<1\,,\quad x_0=0\,,\quad \gamma>0$$

なる　片側安定過程を考えると　R^1 全体の Markov 過程がいつものようにしてえられるが $D=(-1,b)$ $b>0$ としたとき (A.1)—(A.5) がすべてみたされ

($m\ (dx)$ として dx をとる)

$$n\ (x\,.\,E) = \frac{\alpha}{\Gamma\,(1-\alpha)} \int \chi_{R^+}(y-x) \quad \frac{dy}{(y-x)^{\alpha+1}}$$

$$g_0\ (x\,.\,y) = \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)}\,\chi_{R^+}\,(y-x) \quad \frac{1}{(y-x)^{1-\alpha}} \qquad x,y \in D$$

となる。

(A.4) については，Abel の積分方程式が C^1 の函数については連続函数の解をもつことに注意すればよく (A.5) については一点が capacity 0 なること (第II章§3) よりあきらかである。

又 path の単調性から D が出る path については τ_D は，path が最高に $x=b$ をこえる時間に他ならない。　　定理3.2によつて

$$P_0\,(x_{\tau_D -} \in d\xi\,,\, x_{\tau_D} \in d\eta) = \frac{\alpha \sin \pi\alpha}{\pi} \quad \frac{1}{\xi^{1-\alpha}} \quad \frac{1}{(\eta-\xi)^{1+\alpha}}\, d\xi\,, d\eta$$

$$b>\xi>0\,, \qquad \eta>b$$

又は　　$y_1 = b - x_{\tau_D} -$ ，$y_2 = x_{\tau_D} - b$ とおいて

$P_0\ (y_1 \in du\,,\, y_2 \in dv) = P_b\ (u\,,\,v)\ du, dv$

ここで

$$p_b\ (u\,.\,v) = \frac{\alpha \sin \pi\alpha}{\pi} \quad \frac{1}{(b-u)^{1-\alpha}} \;\cdot\; \frac{1}{(u+v)^{1+\alpha}}$$

$$0<u<b\,, \qquad v>0$$

これは Dynkin [1] にある式である。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

以後考えるのはR^1での対称安定過程 $\underline{\underline{M}}$のみで，その確率法則平均等は

$P_x($ $)$, E_x ( ) であらわす。

$I=(-1,1)$

$\tau(w)=\tau_I(w)=\inf\{t\ ;\ x_t(w)\notin I\}$: Iを最初にはなれる時間，(吸収時間)

$\underline{\underline{M}}$を時間$\tau$で殺して得られる Markov 過程 $\underline{\underline{M}}_0{}^I$をI上の吸収壁安定過程という。

これの生成作用素を決定するのが最初の目的である。

$\alpha=2$のとき，すなわち Brown 運動の場合では，その生成作用素 は

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\ :\ D(g)=\{u\,;u\quad C^2(I)\,,u(-I)=u(I)=0\}$$

となるが，$0<\alpha<2$では，境界条件が g の形と密接に関係し，境界条件を g の形のうちに吸収されてしまうことが可能になる。これは g が局所作用素でないことによる。

最初に $\underline{\underline{M}}_0{}^I$ の Green 函数を定義する。

<u>定義3．1</u> $\lambda\geq 0$ に対し

$$(3.5)\qquad g_\lambda^I(x,y)=g_\lambda(x,y)\quad \int_I \pi_\lambda(x,d\xi)\,\mathcal{g}_\lambda(\xi,y)$$

ここで $\displaystyle \mathcal{g}_\lambda(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(x-y)\xi}{\lambda+\xi^\alpha}\,d\xi$: Mのλ次 Green 函数

$\pi_\lambda(x,d\xi)=E_x(e^{-\lambda\tau};\ x_\tau\in d\xi)$: I^cへのλ次調和測度

Dynkin の公式より明らかに(第二章 §2．定理2．4の証明参照)

$$(3.6)\qquad E_x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda\tau}f(x_t)\,dt\right)=\int_I g_\lambda^I(x,y)\,f_I(y)\,dy$$

$$\equiv G_\lambda^I\cdot f(x)$$

(第二章．定理2．4) から

$$(3.7)\qquad g_\lambda^I(x,y)=0\qquad \lambda\quad I$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

及び第三章定理２．３から

$$\int_{I^c} \pi_\lambda (x, d\xi)\, g_\lambda (\xi, y) = \int_{I^c} g_\lambda (x, \xi)\, \hat{\pi}_\lambda (d\xi, y) = \int_{I^c} \pi_\lambda (y, d\xi)\, g_\lambda (\xi, x)$$

であるので

$$(3.8) \qquad g^I_\lambda (x, y) = g^I_\lambda (y, x)$$

次に　Mの生成作用素について，もつとも計算しやすいL^1　上の半群の生成作用素をきめておく

$$f \quad L^1(R) \text{ に対し } T_t f(x) = \int f(y)\, P(t.x-y)\, dy$$

$$\left(P(t.x-y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi^\alpha t} \cos (x-y)\xi . d\xi \right)$$

とおくと　Ttf　L^1かつ

$$\| Ttf - f \|_1 \to 0 \quad (t \to 0), \qquad \text{すなわち } Ttf$$

はL^1上の　吉田－Hille　の半群になる。

実際　Ttf　L^1は明らかで

$$\| Ttf - f \|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} P(t, z)\, (f(x+z) - f(x))\, dz \right| dx$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{\infty} P(t, z) \int_{-\infty}^{\infty} | f(x+z) - f(x) |\, dx . dz$$

$$\leqq \int_{|z| \leqq \delta} P(t, z) \int | f(x+z) - f(x) |\, dx . dz + 2\|f\|_1 \int_{|z| > \delta} P(t, z)\, dz$$

第一項でδを十分小さくとり，それに応じてｔを小さくすれば左辺はいくらでも小さくなる。

定理３．３　　L^1の半群　Tt　の生成作用素Ω_1 は次のようになる。

$$\Omega_1 u(x) = \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \frac{1}{|x-y|^{\alpha-1}}\, dy, \qquad 1 < \alpha < 2$$

$$= \lim_{N \leftarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-N}^{N} u(y) \log \frac{1}{|x-y|}\, dy, \qquad \alpha = 1$$

$$= \frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \frac{\mathrm{sgn}(y-x)}{|x-y|^{\alpha}}\, dy, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

ここで

$$C(\alpha)=\frac{1}{\pi}\,\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}$$

$D(\Omega_1)=\{u : u\in L^1,\ \Omega_1 u\in L^1\},\qquad 0<\alpha<2,\quad \alpha\neq 1$

(注意：　この場合　$u\in L^1$ に対して $\Omega_1 u$ は超函数の意味で定義可能で，その $\Omega_1 u$ が L^1 の函数によつて定義されることが　$u\in D(\Omega_1)$ なるための条件である)

$$=\Big\{u\ ;\ u\quad L^1,\qquad f\quad L^1;\ \lim\frac{1}{\pi}\frac{d^2}{dx^2}\int u(y)\log\frac{1}{|x-y|}dy$$

$$=f(x),\quad (\text{収束は}\ (\mathscr{E}\quad)\ \text{の意味}\Big\}\qquad \alpha=1$$

(注意：　この場合　$u\in L^1$ に対して　$\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_{-N}^{N}u(y)\log\frac{1}{|x-y|}dy$ は $(\mathscr{E}'\ )$ の元として　well-defined であり，それがある L^1 の函数に収束するような u の全体が $D(\Omega_1)$ になるというのが上の意味である。もちろん f は u に対して一意的にきまる)

証明　　どれでも同じであるから　$1<\alpha<2$ について行う。

$u(x)=G_\lambda f(x)$，　$f\in L^1$ とおく。　両辺の Fourier 変換をとつて

(3.10)　$$u(\sigma)=\frac{f(\sigma)}{\lambda+|\sigma|^\alpha}$$

二つの（超）函数　$T_1(x)$，　$T_2(x)$ を

$$T_1(x)=\frac{1}{|x|^{\alpha-1}},\qquad T_2(x)=\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$$ とおくと

$$\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\frac{d^2}{dx^2}T_1*u=T_2*u$$　であるが，よく知られているように (Gelfand, −Silov [1] P.217)

$$\widehat{T_2}(\sigma)=-\frac{1}{C(\alpha)}|\sigma|^\alpha$$　であるので両辺の　Fourier 変換をとつて

$$\widehat{\Omega_1 u}=\widehat{T_2*u}=-\frac{1}{C(\alpha)}|\sigma|^\alpha\cdot\widehat{u}(\sigma)$$

(これを厳味にやるのは　testing fn., φ をかけて，簡単な積分の順序変換をやればよいが，ここでは省略する)

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

故に（3．10）とあわせて

$$\widehat{\lambda u-\Omega_1 u}=\hat{f}$$

すなわち　$\lambda u-\Omega_1 u=f$

特に　$\Omega_1 u=\lambda u-f\in L^1$である。

逆に　$u\in D(\Omega_1)$ とし　$f=\lambda u-\Omega_1 u$ とおくと $f\in L^1$ で，今　$v=G_\lambda f$ とおくと，上と同様にして　$\lambda v-\Omega_1 v=f$。

故に　$w=u-v$ とおくと　$\Omega_1 w=\lambda w$　　両辺の Fourier 変換をとると　上と同様にして

$$\widehat{\lambda w-\Omega_1 w}=(\lambda+|\sigma|^\alpha)\,\hat{w}(\sigma)=0$$

これより　$\hat{w}=0$　　すなわち　$w=0$　　故に　$u=G_\lambda f$。

（証了）

<u>Lemma</u>　　(Polya−Szego 〔1〕)

(3．11)　$$\int_{-1}^{1}|x-y|^{1-\alpha}(1-y^2)^{\frac{d}{2}-1}\,dy=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\qquad -1<x<1,\quad 0<\alpha<2,\ \alpha\neq1,$$

$$\int_{-1}^{1}\log|x-y|\,(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy=\pi\ ,\qquad -1<x<1$$

証明　$f(z)=(1-z^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}(z-x)^{1-\alpha}$ を　$-1\leqq z\leqq 1$ を右まわりに積分して Cauchy の定理を用いると容易に証明できる。

又は　$y=\dfrac{x+y'}{1+xy'}$　で y' に積分変数を変換すると（3．11）の左辺は

$$(1-x^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}\int\frac{|y|^{1-\alpha}(1-|y|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{1+xy}\,dy=2(1-x^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}\int\frac{y^{1-\alpha}(1-y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{1-x^2y^2}\,dy$$

にうつり　$y=\dfrac{1-t}{1-x^2t}$　でさらに t の積分に変換すると

$$=\int_0^1(1-t)^{\frac{\alpha}{2}}\,t^{\frac{\alpha}{2}-1}\,dt=\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}$$

（証了）

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

この Lemma と定理3.3より，次の定理がえられる。これは $0<\alpha<1$ の場合 J.Elliott が得たものである。 J.Elliott 〔2〕

<u>定理3.4</u>

$$E_x(\tau)=\frac{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad 0<\alpha\leqq 2$$

証明　以下 $0<\alpha<2$ とする。（$\alpha=2$ はよく知られているし，その証明も簡単である）

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} & |x|\leqq 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

とおくと $u \in L^1$ かつ

$$(3.12)\qquad \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{1}\frac{u(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy=-1,\ |x|<1$$

が上の Lemma と同様にして得られる。

他方 $|x|>1$ では

$$(3.13)\qquad \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{1}\frac{u(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy=C(\alpha)\int_{-1}^{1}\frac{u(y)}{|x-y|^{\alpha+1}}dy$$

$|x|<1$ では（3.12）の右辺 $|x|>1$ では（3.13）の右辺で定義される。

函数 $F(x)$ は L^1 に属するが R^1 全体で（超函数の意味）

$$\Omega_1 u=F \qquad \text{をいうには} \qquad \frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{u(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy \text{ が}$$

連続になる必要がある。しかしこれは簡単な計算で示せる。故に定理3.3と Dynkin の変形により

$$u(x)=G_\lambda(\lambda u-F)(x)=E_x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda t}(\lambda u(x_t)-F(x_t))\,dt\right)$$

$$+E_x(e^{-\lambda\tau}u(x_\tau))$$

$$=E_x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda t}(\lambda u(x_t)+1)\right) \qquad \left(\begin{array}{ll} u(x)=0 & x\notin I\\ F(x)=-1 & x\in I\end{array}\right.$$

ここで $\lambda\downarrow 0$ として $E_x(\tau)=u(x)$ を得る　　　　（証了）

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

§1の Th 3.2より

Prop. 3.5　　$\forall F \subset I$,　$\forall E \subset I^c$

(3.14)　$E_x\left(e^{-\lambda\tau}; x_{\tau-} \in F, x_\tau \in E\right) = C(\alpha) \int_E d\xi \cdot \int_F \frac{g_\lambda^I(x,y)}{|y-\xi|^{\alpha+1}} dy$

特に

(3.15)　$\pi_\lambda(x, d\xi) = C(\alpha) \int_I \frac{g_\lambda{}^I(x,y)}{|y-\xi|^{\alpha+1}} dy \cdot d\xi \quad (0<\alpha<2)$

なおこのためには Mが (A.5) の仮定すなわち

$\pi_\lambda(x, \{(-1)\} \cup \{1\}) = 0 \qquad x \in I$　をいう必要があるが

ここではその証明は省略する。($0<\alpha<1$ では1点が negligible なることが明らかであるが，$1<\alpha<1$ でもなりたつ)

Prop3.6　　$f \in \beta(I) \equiv \{I$ 上の有界可測函数$\}$のとき
$u(x) = G_\lambda{}^I f(x) = \int_I g_\lambda{}^I(x.y) f(y) dy$ は　$C(I) = \{I$ 上の有界連続函数$\}$に属し

$\lambda u(x) - \Omega^I u(x) = f(x)$　をみたす

ここで

(3.16)　$$\Omega^I u(x) = \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^{1} \frac{u(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy \quad 0<\alpha<2,\ \alpha \neq 1$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} P \int_{-1}^{1} \frac{u(y)}{y-x} dy \qquad \alpha = 1$$

注意1　$\Omega^I u(x)$ は任意の $u \in C(I)$ に対し I 上の超函数の意味で常に定義できる

注意2　上の $\Omega^I u(x)$は　$0<\alpha<1$ のときは

$$\frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{d}{dx} \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(y-x)}{|x-y|^{\alpha}} u(y) dy$$　とかいてもよい。

証明　(3.5)，Green 函数の対称性 (3.8) 及び (3.15) に注意して

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$u(y) = \int g_\lambda{}^{I}(x, y) f(x)\, dx$$

$$= \int g_\lambda(x-y) f(x)\, dx - \int C(\alpha) \int_{|\xi|>1} \int_{|u|<1} \frac{g_\lambda{}^{I}(x, u)}{|\xi-u|^{\alpha+1}}$$

$$g_\lambda(\xi-y)\, du\, d\xi f(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} g_\lambda(x-y) f(x)\, dx - C(\alpha) \int_{|\xi|>1} g_\lambda(\xi-y) \int_{|u|<1} \frac{G_\lambda{}^{I} f(u)}{|\xi-u|^{\alpha+1}}\, du$$

$$= G_\lambda \varphi(y)$$

ここで

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & |x|<1 \\ -C(\alpha) \displaystyle\int_{|u|<1} \frac{G_\lambda{}^{I} f(u)}{|x-u|^{\alpha+1}}\, du, & |x|>1 \end{cases}$$

$u \in C(I)$ の証明： まず $\int_{-1}^{1} g_\lambda(x-y) f(x)\, dx$ が連続なることに注意する（有界函数とL^1 の函数の convolution であるから）

又 定理３．４より

$$|G_\lambda{}^{I} f(u)| < \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (1-u^2)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad |u|<1$$ は明らかであるから

$$F(\xi) \equiv \int_{|u|<1} \frac{G_\lambda{}^{I} f(u)}{|\xi-u|^{\alpha+1}}\, du = O\left(\frac{1}{(|\xi|-1)^{\frac{\alpha}{2}}}\right) \quad |\xi|=1 \text{の近くで}$$

$$O\left(\frac{1}{|\xi|^{\alpha+1}}\right) \quad |\xi|=\infty \text{の近くで}$$

がいえる。 今 $y \in I$ をとり $y_n \to y$ なるIの点列 $\{y_n\}$ をとる。 $|y_n|<1-\varepsilon$， $\varepsilon>0$ となつているとしてよいから $g_\lambda(x)$ が $|x|>\varepsilon$ で有界かつ連続なることに注意して Lebesgue の定理より

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|\xi|>1} g_\lambda(\xi-y_n) F(\xi)\, d\xi = \int_{|\xi|>1} g_\lambda(\xi-y) F(y)\, dy$$

故に $u(y) \in C(I)$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

次に定理３．３から　（$\varphi \in L^1$ に注意）

$$\lambda u(x) - \Omega_1 u(x) = \varphi(x)$$ であるが　$u(x)=0$　$|x|>1$

なることに注意して　$x \in I$　で

$$\lambda u(x) - \Omega^I u(x) = f(x)$$ （証了）

<u>Prop.3.7</u>　$u \in C(I)$ がある $\lambda > 0$ に対して　I 上で

$$\lambda u - \Omega^I u = 0$$

となるなら　$u \equiv 0$

証明

まず　$\lambda = 0$ の場合をしめす

$$\Omega^I u(x) \equiv 0 \qquad x \in I$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy = ax+b \qquad \exists a, b, \quad |x|<1$$

であるが前の Lemma （３．１１）から適当に a, b をえらぶと

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-y)^{\frac{\alpha}{2}-1}(ay+b)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy = ax+b \qquad |x|<1$$

とできるので

$$v(y) = (1-y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}(ay+b) - u(y)$$ とおくと

$$\int_{-1}^{1} \frac{v(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy = 0, \qquad |x|<1$$，となる。

故に

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_{-1}^{1} \frac{u(x)\,v(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy \cdot dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \int_{-1}^{1} v(y)\,dy = 0$$

（（３．１１）による）

かつ $$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{v(x)\,v(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dx\,dy = 0$$ がなりたつ。

故に第二章のエネルギー積分の原理（定理２．１３），２．１８）によつてＩ上ほとんどいたるところで

$$v(x) = 0$$

他方は $u(y)$ は有界なのだからこれが可能のためには

$$a = b = 0$$

故に　$u \equiv 0$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

次に　　$\lambda u - \Omega^{\mathrm{I}} u = 0$ とすると

$F(x) = \Sigma \ (-\lambda)^n (G_\lambda{}^{\mathrm{I}}) u^n (x)$ とおくと　$F(x) \in C(\mathrm{I})$ かつ

$F(x) - \lambda G_\lambda{}^{\mathrm{I}} F(x) = u(x)$ をみたす，したがつて $\Omega^{\mathrm{I}} F = 0$

これから上のことによつて　$F \equiv 0$　　故に　$u \equiv 0$

（証了）

以上をあわせて次の定理をうる

定理３．８

$\mathbb{M}^{\mathrm{I}}{}_{0\,0}$ の生成作用素 $\mathfrak{G}$　：$(\lambda - G_\lambda{}^{\mathrm{I}})^{-1}$ ：$D(\mathfrak{G}) \equiv G_\lambda(\beta(\mathrm{I}))$

$\rightarrow \mathbb{B}^{(\mathrm{I})}/\partial t \qquad \partial t = \{ f ; \mathbb{B}(\mathrm{I}) : G_\lambda^{\mathrm{I}} f = 0 \}$　Cf　K．Ito〔2〕

は次のようになる

$\mathfrak{G} = \Omega^{\mathrm{I}}$　　（（３．１６）のもの）

$D(\mathfrak{G}) = D(\Omega^{\mathrm{I}}) \equiv \{ u \in C(\mathrm{I}) ; \Omega^{\mathrm{I}} u \in \mathbb{B}(\mathrm{I}) \}$

$= \{ f ; f = 0 \quad a.e. \text{ on } \mathrm{I} \}$

証明は Prop.3.6，Prop.3.7 からほぼあきらかであろう。

系　　$u \in D(\Omega^{\mathrm{I}})$ ならば　　ある定数Kが存在し

$$|u(x)| < K(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \qquad |x| < 1$$

証明　　$u \in D(\Omega^{\mathrm{I}})$ ならば

$f = -\mathfrak{G} u \in \mathbb{B}(\mathrm{I})$ で

$u = G^{\mathrm{I}}{}_0 f$　　　定理３．４より

$$|u(x)| < \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

（証了）

$\alpha = 2$ の場合と異つて $D(\mathfrak{G})$ にはなんら境界条件を明記しておく必要がないことは，注目に値する。境界条件は $\mathfrak{G}$ の形 Ω^{I} に吸収されていると考えるのが自然である。

次に見るように $\mathfrak{G}$ として $\mathfrak{D}^{\mathrm{I}}$ の形をとつたときには境界条件 $u(-1) = u(1) = 0$ を附さねばならなくなる。尚この点に関し Kac〔1〕にのべてあることは誤りというべきであろう。

§３　吸収時間 τ に関する諸量のみたす方程式

今までの結果を用いて τ に関する諸量のみたす方程式をもとめる。これはある場合にはとけて，それらの量の具体的な形をもとめることが出来る。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

まず Brown 運動 $(\alpha=2)$ については

$u(x)=E_x(e^{-\lambda\tau};\ x_\tau\in(1,\infty))$ は I で

$$\lambda u-\frac{1}{2}u''=0 \qquad u(-1)=0 \qquad u(1)=1$$

の方程式の解として特徴づけられることはよく知られているが，

これは $0<\alpha<2$ の場合次のようになる。

定義3.2 $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{I}}u(x)=\Omega^{\mathrm{I}}u(x)+\dfrac{C(\alpha)}{\alpha}\dfrac{u(1)}{(1-x)^\alpha}+\dfrac{C(\alpha)}{\alpha}\dfrac{u(-1)}{(1+x)^\alpha}$

$$D(\widetilde{\Omega}^{\mathrm{I}})=\{u\in C(\mathrm{I}),\ \widetilde{\Omega}^{\mathrm{I}}u(x)\in C(\mathrm{I})\}$$

注意1．$D(\widetilde{\Omega}^{\mathrm{I}})$ の意味は次のとおり：$u\in C(\mathrm{I})$ を I 上のみで考えると I 上の超函数の意味で $\Omega^{\mathrm{I}}u(x)$ は定義でき，したがつて $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{I}}$ は定義されるが，それが I 上の連続函数になるもの全体を $D(\widetilde{\Omega}^{\mathrm{I}})$ とする。

注意2 $u\in C(\mathrm{I})$，I で u' が存在し $u'\in L^1(\mathrm{I})$ なら

$$(3.17)\qquad \widetilde{\Omega}u(x)=\begin{cases}\dfrac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{u(y)}{|y-x|^{\alpha-1}}dy & \alpha\neq1,\ 0<\alpha<2\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\mathrm{P}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{u(y)}{y-x}dy & \alpha=1\end{cases}$$

定理3.9 $\xi_1^\lambda(x)=E_x(e^{-\lambda\tau};x_\tau\in(1,\infty))$

$$\left(\ \xi_{-1}^\lambda(x)=E_x(e^{-\lambda\tau};x_\tau\in(-\infty,-1))\ \right)$$

は それぞれ $\lambda u-\widetilde{\Omega}^{\mathrm{I}}u=0 \qquad u(-1)=0,\quad u(1)=1$

$(\ u(-1)=1,\quad u(1)=0\ )$

の $u\in D(\widetilde{\Omega}^{\mathrm{I}})$ の一意解になる。

証明 (3.15) によつて

$$\xi_1^\lambda(x)=\int_1^\infty\pi_\lambda(x,d\xi)=\frac{C(\alpha)}{\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{g_\lambda{}^{\mathrm{I}}(x,y)}{(1-y)^\alpha}dy$$

$$\xi_{-1}^\lambda(x)=\int_{-\infty}^{-1}\pi_\lambda(x,d\xi)=\frac{C(\alpha)}{\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{g_\lambda{}^{\mathrm{I}}(x,y)}{(1+y)^\alpha}dy$$

例えば $u(x)=\xi_1^\lambda(x)$ については

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$u(x) = G_\lambda{}^{\mathrm{I}} f(x) \quad , \quad f(y) = \frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{1}{(1-y)^\alpha}, \quad |y|<1$$

とけるから形式的に　（$u(-1)=0$，$u(1)=1$，は容易にわかる）

$$\lambda u(x) - \Omega^{\mathrm{I}} u(x) = f(x) = \frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{1}{(1-x)^\alpha}$$

$$= \frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{u(1)}{(1-x)^\alpha} + \frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{u(-1)}{(1+x)^\alpha}$$

故に　$\lambda u(x) = \widetilde{\Omega}^{\mathrm{I}} u(x)$　となる。

このことを厳密にいうには次のようにすればよい。

$\varphi \in K(\mathrm{I}) = \{$Iに含まれる台をもつた C^∞－函数$\}$

$$(\Omega^{\mathrm{I}} u(x), \varphi(x))$$

$$= \left(u(x), \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \int \frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy\right)$$

$$= \left(u(x), \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \frac{d^2}{dx^2} \int \frac{\varphi(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy\right)$$

$$= (u(x), \Omega^{\mathrm{I}} \varphi(x))$$

$$= \left(\frac{C(\alpha)}{\alpha} \int \frac{g_\lambda{}^{\mathrm{I}}(x,y)}{(1-y)^\alpha} dy.\ \Omega^{\mathrm{I}} \varphi(x)\right)$$

$$= \frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{1}{(1-y)^\alpha}, \int g_\lambda{}^{\mathrm{I}}(x,y)\, \Omega^{\mathrm{I}} \varphi(x)\, dx\ )$$

ここで　$\varphi \in D(\Omega^{\mathrm{I}})$　なることと　$g_\lambda{}^{\mathrm{I}}$ の対称性を用いると

$$= \left(\frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{1}{(1-y)^\alpha}, \lambda G_\lambda{}^{\mathrm{I}} \varphi(y) - \varphi(y)\right)$$

$$= \left(\frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{1}{(1-y)^\alpha}, \lambda G_\lambda{}^{\mathrm{I}} \varphi(y)\right) - \left(\frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{1}{(1-y)^\alpha}, \varphi(y)\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$= (\lambda u(x), \varphi(x)) - \left(\frac{C(\alpha)}{\alpha} \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}, \varphi(x)\right)$$

すなわち上にいつたことが証明できた。又一意性は Prop.3.7 より明らか

(証了)

<u>系</u>　$\xi_1(x) = P_x(x_\tau \in (1, \infty)) = 2^{1-\alpha} \dfrac{\Gamma(\alpha)}{[\Gamma(\frac{\alpha}{2})]^2} \displaystyle\int_{-1}^{x} (1-y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} dy$

$\xi_{-1}(x) = P_x(x_\tau \in (-\infty, -1)) = 1 - \xi_1(x)$

<u>証明</u>　$\xi_1(x)$ は $\mathfrak{D}^{\mathrm{I}} u = 0$　$u(-1) = 0$,　$u(1) = 1$

の一意解であるが (3.11) よりただちにとけて上の結果をうる。

(尚この結果は $\alpha = 1$ の場合に Spitzer が2次元 Brown 運動と Cauchy 過程との関係を用いて得ていた。第I章§3 参照)

次に (3.15) によつて

$$\pi_\lambda(x, d\xi) = \pi_\lambda(x, \xi)\, d\xi, \qquad \pi_\lambda(x, \xi) = C(\alpha) \int \frac{g_\lambda{}^{\mathrm{I}}(x, y)}{|y-\xi|^{\alpha+1}}\, dy$$

であるが，これは ($|\xi| > 1$ を一つ固定して)

$$\lambda u - \mathfrak{D}^{\mathrm{I}} u(x) = C(\alpha) \frac{1}{|x-\xi|^{\alpha+1}}$$

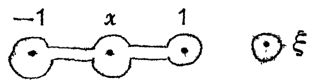
の一意解である。$\lambda = 0$ のときは実際にとけて次の結果をうる

<u>定理3.10</u>
(3.18)　$$\pi(x, \xi) = P_x(x_\sigma \in d\xi) / d\xi = \frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\pi} \frac{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(\xi^2-1)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{|\xi - x|},$$

$$|x| < 1, \quad |\xi| > 1$$

証明　$f(z) = \dfrac{(z^2-1)^{\frac{\alpha}{2}}}{\xi - z} \dfrac{1}{(z-x)^{\alpha-1}}$　($z > 1$ で実数をとる)

に対し右図のごとき積分路で積分し Cauchy の定理を用いると (3.18) の右辺の函数が



$$\mathfrak{D}^{\mathrm{I}} u(x) = -C(\alpha) \frac{1}{|x-\xi|^{\alpha+1}}$$

をみたすことがいえる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

定理3．10により 0次の Green 函数 $g_0{}^{I}(x, y)$ の具体的な形がきまつたことになる。ここでは，それにはこれ以上ふれないで特に$\alpha=1$の場合には，(F. Tricomi 〔1〕 p. 178) $g_0{}^{I}(x, y)$ の形が次の様にして出ることに注意する。

$$P\int_{-1}^{1} \frac{g(y)}{y-x}\,dy = h(y) \quad \Longrightarrow \quad g(y) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{(1-y^2)}{(1-x^2)}}\, \frac{f(y)}{y-x}\,dy + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$$

なる反転公式を用いると

$$u(x) = \int_{-1}^{1} g_0{}^{I}(x, y)\, f(y)\, dy \quad \text{が}$$

$$P\int_{-1}^{1} \frac{u'(y)}{y-x}\,dy = -f(x), \qquad u(-1) = u(1) = 0 \quad \text{をみたすこと}$$

に注意して

$$g_0{}^{I}(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{1-y^2}{1-Z^2}\,\frac{dZ}{y-Z} = \frac{1}{2\pi}\,\log\left\{\frac{1-xy+\ (1-x^2)\ (1-y^2)}{1-xy-\ (1-x^2)\ (1-y^2)}\right.$$

(Kac. Pollard)

§ 4 対称安定過程の生成作用素

対称安定過程 Mの L^1 上の生成作用素は§2で求めたが (定理3．3)
ここでは $C(\overline{R}^1) = \{ f : R^1$ 上で連続で $|x| \to \infty$ のとき極限をもつ$\}$
上の生成作用素を求めてみよう。一般に加法過程では

$u \in C^2$ に対してはその生成作用素の一般的表現式があり Mにそれを適用すると

$$(3.19) \qquad u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(y) - u(x) - (y-x)\,u'(x)]\, C(\alpha) \frac{dy}{|x-y|^{\alpha+1}}$$

となる。 (K. Ito 〔2〕)

<u>定理3．11</u> Mの $C(\overline{R}^1)$ 上の半群 T_t (これは吉田－Hille の半群である)
の生成作用素Ωは次のようになる。

$$D(\Omega) = \{ u \ ; \quad f \in C(\overline{R}^1), \qquad \varphi \in K(R^1) \ \text{に対し}$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

(3.20) $$\left(u(x), \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy\right)=(f(x), \varphi(x))\}$$

$$K(R^1)=\{\varphi: 台が\ \mathrm{compact}\ なC^{\infty}-函数\}$$

に対してはこのようなfは一意的にきまり

$$\Omega u=f$$

証明　(3.20)をみたすfがuに対し一意的にきまるのはあきらかである。

(i)　$u=G_\lambda f$　$f\in C(\overline{R})$に対し

$$\left(u(x), \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy\right)=(\lambda u(x)-f(x), \varphi(x))$$

が　$\forall\varphi\in K$　に対してなりたつ。

∵) まずφ　Kは　$D(\Omega)$に属し　$$\Omega u=\frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy$$

になることに注意する。これは(3.19)を部分積分で変形すればよい。

故に $$\left(u(x), \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy\right)=(G_\lambda f(x), \Omega\varphi)$$

$$=(f(x), G_\lambda\Omega\varphi(x))=(f(x), \lambda G_\lambda\varphi(x)-\varphi(x))$$

$$=(f(x), \lambda G_\lambda\varphi(x)-(f(x), \varphi(x))=(\lambda u(x), \varphi(x))-(f(x), \varphi($$

このことは，$u(x)$が(3.20)をみたし(3.20)のfにあたるものが丁度

$\Omega u=\lambda u-f$になつていることを示す。

ii) 逆に$u\in C(\overline{R}^1)$がある　f　$C(\overline{R}^1)$に対し(3.20)を

みたしたとする。　$v=G_\lambda(\lambda u-f)$　とおくと(i)より

$$(v(x), \Omega\varphi(x))=(\lambda(v(x)-u(x))+f(x), \varphi(x))$$

又$(u, \Omega\varphi)=(f, \varphi)$であるから

$$(v-u, \Omega\varphi)=(\lambda(v-u), \varphi)$$

故に一般に「w　(R)がすべてのφ Kに対し$(u, \Omega\varphi)$

$=(\lambda u, \varphi)$　をみたすなら　$u\equiv 0$」を証明しておけば上のことから

$v=u=G_\lambda(\lambda u-f)$　となつて証明は終る

「　　」の部分の証明

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

今 u (R^{-1}) が φ Kに対し $(u, \Omega\varphi) = (\lambda u, \varphi)$ であつたとする $(\lambda > o)$，区間 $I_A = (-A, A)$ での吸収壁過程 M^{I_A} の生成作用素

Green 函数等すべて Ω^{I_A}， $g_\lambda^{I_A}$，のようにあらわすことにする。

このとき $x \in I$ で

$$(3.21) \qquad u(x) = C(\alpha)\int_{-A}^{A} g_\lambda^{I_A}(x, y) \int_{|\xi|>A} \frac{u(\xi)}{|y-\xi|^{\alpha+1}} d\xi . dy$$

がなりたつ。 なぜなら $\varphi \in K(I_A)$ に対し

$$(\Omega^{I} u(x), \varphi(x)) = \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \int_{-A}^{A} u(x) . \int_{-A}^{A} \frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy . dx$$

$$= \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \int_{-A}^{A} \frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy . dx - \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \int_{|x|>A} u(x) . \times \int_{-A}^{A} \frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}} dy\ dx$$

$$= (u, \Omega\varphi) - \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \int_{-A}^{A} \varphi''(y)\, dy \int_{|x|>A} \frac{u(x)}{|x-y|^{\alpha-1}} dx$$

で第二項に部分積分を二度施せば

$$= (\lambda u, \varphi) - C(\alpha) \int_{-A}^{A} \varphi(y) \int_{|x|>A} \frac{u(x)}{|x-y|^{\alpha+1}} dx。$$

すなわち I_A 上で

$$\Omega^{I_A} u(x) = \lambda u(x) - C(\alpha) \int_{|\xi|>A} \frac{u(\xi)}{|\xi-x|^{\alpha+1}} d\xi$$

がなりたつ。

一方（3.21）の右辺で定義される函数を一応 $v(x)$ としておくと これが

$$\Omega^{I_A} v(x) = \lambda v(x) - C(\alpha) \int_{|\xi|>A} \frac{u(\xi)}{|\xi-x|^{\alpha+1}} d\xi$$

をみたすことは定理3.9の証明と同様にしていえるから

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$u-v=w$ が $\lambda w=\Omega^{IA}w$ をみたす。 Prop.3.8より $w=0$,すなわち

I_A 上で $u=v$ となり(3.21)がいえたことになる。

(3.21)から $|u(x)|<C(\alpha)\|u\|_\infty \int g_\lambda^{IA}(x,y)\int_{|\xi|>A}\frac{d\xi}{|y-\xi|^{\alpha+1}}\cdot dy$

$$=C(\alpha)\|u\|^\infty Ex(e^{-\lambda\tau_{IA}}) \quad (\text{Prop.3.5})$$

Aは任意であつたから $A\to\infty$ とすると右辺は明らかに0へ行くから

$u(x)\equiv 0$ (証了)

系　ある$\lambda>0$に対し $u\in C(R^1)$ がすべての$\varphi\in K$に対して

$$\left(u(x),\ \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy\right)=(\lambda u(x),\varphi(x))$$

をみたせば　$u\equiv 0$

これは 今の定理の「　　　」の部分であつた。

この定理の1応用として $0<\alpha<2$ の $D(\Omega)$ が $\alpha=2$ すなわちBrown 運動の$D(\Omega)$ より本当に広くなつていることを示す。これは Subordination によつて生成作用素の domain が真に増す 1例となる。

実際 $0<\alpha<2$ としたとき

$$u(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<-1\\ \int_{-1}^{x}(1-y^2)^{\frac{\alpha}{2}}dy & ,\ -1\leqq x\leqq 1\\ \int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\frac{\alpha}{2}}dy & ,\ 1<x\end{cases}$$

なる函数は α次の M の$D(\Omega)$ に入ることが容易に示せるが明らかに $u''(x)$ は不連続になる。

今は R^1 全体で考えたが 半直線 $R^+_1=(0,\infty)$ での吸収壁安定過程 M_0^+の生成作用素も全く同様に決定できる。

§5 J.Elliottの確率過程の構成

J. Elliott [1] は定義3.2であたえられた作用素 $\widetilde{\Omega}^f$ に対し,それが $I=[-1,$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

1〕 上のMarkov 過程の生成作用素となるような $\widetilde{\Omega}^{\tau}$ の定義域（又は境界条件といつてもよい）をもとめ，それが 1次元 Brown 運動に関する Feller の境界条件に完全に対応することを示した。ここではBrown 運動の場合にならつてそれらの Markov 過程の確率論的構造を調べる。

以後簡単のため半直線 $R^{+}=(0,+\infty)$ で考える。そこでの吸収壁安定過程を M_0^{+} であらわす。そのGreen 作用素は

$$G_\lambda^{+} f(x)=\int_{R^{+}} g_\lambda^{+}(x,y)\,f(y)\,dy=E_x\left(\int_0^{\tau^{+}} e^{-\lambda t} f(x_t)\,dt\right)$$

$$\tau^{+}(w)=\inf\{t:\ x_t \notin R^{+}\}$$

特に $g_0^{+}(x,y)$ は D. Ray 〔1〕 が計算した。

$$(3.22)\quad g_0^{+}(x,y)=\frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2}\int_0^{y\wedge x}\xi^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\xi+|y-x|\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi$$

<u>定義3.3</u> $\xi_\lambda(x)=E_x\left(e^{-\lambda\tau^{+}}\right)$

<u>定義3.4</u> （作用素 $\widetilde{\Omega}^{+}$）

$D(\Omega^{+})=\{u\in C(R^{+}),;\ f\in c(R^{+}),\quad \varphi\in K(R^{+})$ に対し

$$\left(u(x),\ \frac{c(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi''(y)}{|x-y|}dy\right)+\left(\frac{c(\alpha)}{\alpha}\ \frac{1}{x^{\alpha}}u(0),\varphi(x)\right)=(f(x),\varphi(x))$$

$u\in D(\widetilde{\Omega}^{+})$ に対してこのfはあきらかに一意的に定まり

$\widetilde{\Omega}^{+}u=f$ と定義する。

次のことは 今までと全く同様にして示せる。

i） M_0^{+} の 生成作用素 は

$=\Omega^{+}/D(\mathcal{G})=\{u\in D(\widetilde{\Omega}^{+}),\ \ u(0)=0\}$

であたえられる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

ii) $\lambda>0$ に対し $\xi_\lambda(x)$ は

$(\lambda-\tilde{\Omega}^+)u=0 \quad u(0)=1$ の一意解である。

iii) $f\in c(\bar{R}^+)$ に対し $(\lambda-\tilde{\Omega}^+)u=f$ の解は

$u(x)=G_\lambda^+f(x)+u(0)\xi_\lambda(x)$ とあらわされる。

定義 3.5

$$\eta_\lambda(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)}\left(x^{\frac{\alpha}{2}-1}-\lambda\int_0^\infty y^{\frac{\alpha}{2}-1}g_\lambda^+(x,y)\,dy\right) \tag{3.23}$$

このとき (3.22) を用いて次のことが示せる。(詳細は略する)。

iv) f を R^+ 上の有界可測函数とし, $u(x)=G_\lambda^+f(x)$, $\lambda>0$

とおくと,

$$\delta u(0)\equiv\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{u(\varepsilon)-u(0)}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}$$ が存在し

$$\delta u(0)=\int_{R^+}f(y)\,\eta_\lambda(y)\,dy$$ となる。

$\bar{R}^+=[0,\infty)$ 上のMarkov 過程で $\tilde{\Omega}^+$ を生成作用素としてもつもの全体は次のようになる。

$\sigma\geqq 0$, $p\geqq 0$, $r\geqq 0$ と $\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}}n(dx)+\int_1^\infty n(dx)<+\infty$

なる 正の測度 $n(dx)$ に対し

$$\Sigma=\{u\in D_0(\tilde{\Omega}^+),\ pu(0)=\int_0^\infty[u(x)-u(0)]\,n(dx)-\sigma\tilde{\Omega}^+u(0)-r\,\delta u(0)\}$$

とおくと

定理 3.12 (J.Elliott) Ω^+/Σ を生成作用素とする R^+ 上のMarkov 過程が存在する。

以下 境界条件 $\delta u(0)=0$ に対応するものを $\bar{R}^+$ 上の反射壁過程 M_r^+ ということにする。 M_r^+ の path は次のようにして構成される。

α次の対称安定過程 M の1つのpath を $x_t(w)$ とし

$$\tilde{x}_t(w)=\begin{cases}x_t(w) & t<\tau^+(w)\\ x_t(w)-\inf\limits_{\tau^+\leq s\leq t}x_s(w), & t>\tau^+(w)\end{cases}$$

$x\in[0,+\infty)$ に対し

$$\widetilde{P}_x(B)=P_x(w:\widetilde{x}.(w)\in B) \qquad (B\in\mathbb{B}(W))$$

とおくと

定理3.13 $\quad M_r^+=(\overline{R}^+,\ \widetilde{P}_x,\quad x\in\overline{R}^+)$

証明 $(\overline{R}^+,\ \widetilde{P}_x,\ x\in\overline{R}^+)$が強 Markov 過程になることは容易に示せるので両者のGreen 作用素が一致することをいえばよい。

M_r^+ の Green 作用素は上のiii) iv) から容易に

$$(3.24)\qquad G_\lambda^+ f(x)=G_\lambda^+ f(x)-\frac{\xi_\lambda(x)}{\delta\xi_\lambda(0)},\int_0^\infty f(y)\cdot\eta_\lambda(y)\,dy.$$

故に

$$G_\lambda^+ f(x)-\frac{\xi_\lambda(x)}{\delta\xi_\lambda(0)}\int_0^\infty f(y)\,\eta_\lambda(y)\,dy$$

$$=\widetilde{E}_x\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x_t)\,dt\Big)=E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(\widetilde{x}_t(w))\,dt\Big)$$

をいえばよい。一方

$$E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(\widetilde{x}_t(w))dt\Big)=E_x\Big(\int_0^{\tau^+}e^{-\lambda t}f(\widetilde{x}_t)\,dt\Big)$$

$$+E_x\Big(\int_{\tau^+}^\infty e^{-\lambda t}f(\widetilde{x}_t(w))dt\Big)=G_\lambda^+ f(x)+E_x\Big(e^{-\lambda\tau^+}\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(\widetilde{x}_{\tau^++t}(w)\,dt\Big)$$

$$=G_\lambda^+ f(x)+E_x\Big(e^{-\lambda\tau^+}E_{x_{\tau^+}}\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(\widetilde{x}_t(w)-\widetilde{x}_0(w))\Big)\Big)$$

(明らかに $\widetilde{x}_{\tau^++t}(w)=\widetilde{x}_t(w_{\tau^+}^+)-\widetilde{x}_0(w_{\tau^+}^+)$)

$$=G_\lambda^+ f(x)+E_x\Big(e^{-\lambda\tau^+}E_0\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(\widetilde{x}_t)\,dt\Big)\Big)$$

$$=G_\lambda^+ f(x)+E_x(e^{-\lambda\tau^+})E_0\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(\widetilde{x}_t)\,dt\Big)$$

$$=G_\lambda^+ f(x)+\xi_\lambda(x)\ E_0\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(\widetilde{x}_t)\,dt\Big) \qquad \text{(定義3.3)}$$

故に

$$(3.25)\quad E_0\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(\tilde{x}_t)\,dt\right) = -\frac{1}{\delta\xi_\lambda(0)}\int_0^\infty f(y)\,\eta_\lambda(y)\,dy$$

を示せば十分である。

吸収壁安定過程の遷移確率を $p^+(t,x,E)$ とすると

$$p^+(t,x,E) = P_x(x_t\in E,\ \tau^+>t)$$

$$=p_x(x_t\in E,\ \inf_{0<s<t} x_s>0)$$

安定過程の空間的一様性によって

$$P_o(x_t\in E,\ \inf_{0\leq s\leq t} x_s>a) = p^+(t,-a,E-a)$$

$$=\int_E p^+(t,-a,y-a)\,dy$$

$$\therefore\quad P_o(\tilde{x}_t<b) = p_o(x_t-\inf_{0\leq s\leq t} x_s<b)$$

$$=p_o(\inf_{0\leq s\leq t} x_s>x_t-b)$$

$$=\int_{-\infty}^{b} p^+(t,\ b-\xi,b)\,d\xi$$

$$=\int_0^\infty p^+(t,b,\xi)\,d\xi$$

これより $\chi_{(0,b)}$ を区間 $(0,b)$ の特性函数として

$$(3.26)\qquad E_0\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\chi_{(0,b)}(x_t)\,dt\right) = \int_0^\infty g_\lambda^+(b,\xi)\,d\xi$$

上にのべたことから右辺の函数は

$$\lambda u-\tilde{\Omega}^+u=1\ ,\quad u(0)=0$$ の一意解である。

他方 $u_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^x g_\lambda^+(\varepsilon,y)\,dy,$ $\varepsilon>0$とおくと上の (IV) より

$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x)\equiv\int_0^x \eta_\lambda(y)\,d\eta$ であるが今 $\forall\varphi\in K(R^+)$

に対し

$$\left(u_\varepsilon(x),\ \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}\,dy\right)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^\infty\left(\int_0^x g_\lambda^+(\varepsilon,y)\,dy\right)\left(\frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}\,dy\right)dx$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^\infty g_\lambda^+(\varepsilon,x)\ \frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{\varphi'(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}\,dy\,.\,dx \quad \text{(部分積分)}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^\infty g_\lambda^+(\varepsilon,x)\,\mathfrak{G}^+\phi(x)\,dx \quad \left(\phi(x)=\int_0^x\varphi(y)\,dy\in D(\mathfrak{G})\right.$$

$\mathfrak{G}$: M_0^+の生成作用素)

$$=-\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\lambda\int_0^\infty g_\lambda^+(\varepsilon,x)\,\phi(x)\,dx+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\phi(\varepsilon)$$

$$=-\frac{\lambda}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^\infty g_\lambda^+(\varepsilon,x)\int_0^x\varphi(y)\,dy+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\phi(\varepsilon)$$

$$=-\frac{\lambda}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^\infty g_\lambda^+(\varepsilon,y)\,dy\int_0^\infty(y)\,dy+\lambda\int_0^\infty\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\int_0^x g_\lambda^+(\varepsilon,y)\,dy\,.$$

$$\varphi(x)\,dx-\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\phi(\varepsilon) \quad \text{(部分積分)}$$

$$=\frac{\lambda}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\ \frac{\xi_\lambda(\varepsilon)-1}{\lambda}\int_0^\infty\varphi(y)\,dy+\lambda\int_0^\infty u_\varepsilon(x)\,.\,\varphi(x)\,dx-\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\phi(\varepsilon)$$

ここで $\varepsilon\downarrow 0$とすると $\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\phi(\varepsilon)\to 0\right.$ に注意して)

$$\left(u(x),\frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}\,dy\right)=\delta\,\xi_\lambda(0)\int_0^\infty\varphi(y)\,dy+\lambda\int_0^\infty u(x)\,.$$

$$\varphi(x)\,dx$$

すなわち
$$(u(x),\lambda\varphi(x)-\frac{C(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{\varphi''(y)}{|x-y|^{\alpha-1}}dy)=(-\delta\xi_\lambda(0),\varphi(x))$$

故に
$$-\frac{u(x)}{\delta\xi_\lambda(0)}=\frac{-1}{\delta\xi_\lambda(0)}\int_0^x\eta_\lambda(y)\,dy \quad \text{は} \quad \lambda u-\mathfrak{G}^+u=0,$$

$u(0)=1$ ，　の解で，したがつて前のこととあわせて

(3.27)
$$E_0\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\chi_{(0,x)}(\tilde{x}_t)\,dt\right)=\int_0^\infty g_\lambda^+(x,y)\,dy=$$
$$=\frac{1}{\delta\xi_\lambda(0)}\int_0^x\eta_\lambda(y)\,d\eta$$

これより (3.25) は直ちに出る　(証了)

さて長くなるので以下要点のみ簡単にしるすことにする。

V) (3.24) であたえられる M_Γ^+ の Green 作用素は測度

$$dm(y)=\frac{\alpha}{2}\,y^{\frac{\alpha}{2}-1}dy \qquad (\text{これは } M_\Gamma^+ \text{ の不変測度である})$$

について密度 $\tilde{g}_\lambda(x,y)$ をもち

$\tilde{g}_\lambda(x,0)$ は　$<x<+\infty$ で連続かつ有界，実際それは

$$\tilde{g}_\lambda(x,0)=-\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)^2}\,\frac{\xi_\lambda(x)}{\delta\xi_\lambda(0)}$$

であたえられる

VI) $\tilde{g}_\lambda(x,0)$ は M_Γ^+ に関する λ-excessive function であるから

田中－Volkonsky の定理によつてこれに対応する連続な additive functional が存在し，しかもそれは Path が $x=0$ にいる時点でのみ増加する

$S(t,w)$ の右連続な逆函数 $t(u,w)=\max\{t;S(t,w)=u\}$ は

$$E_0(e^{-\lambda t(u,w)})=e^{-\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)\sqrt{\lambda}\,u}$$

であたえられる $\frac{1}{2}$ 次の片側

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

安定過程になる。　この証明には次の vii) の結果を用いる。

vii)　$$-\delta\xi_\lambda(0)=\sqrt{\lambda}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)}=\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)^2}\cdot\frac{1}{g_\lambda(0,0)}$$

証明は次のようにする，(3．27) より

$$\int_0^\infty g_\lambda^+(\varepsilon,y)\,dy=\frac{1-\xi_\lambda(\varepsilon)}{\lambda}=-\frac{1}{\delta\xi_\lambda(0)}\int_0^\varepsilon\eta_\lambda(y)\,dy$$

$$\therefore -\frac{1}{\lambda}\delta\xi_\lambda(0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1-\xi_\lambda(\varepsilon)}{\lambda\cdot\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}-\frac{1}{\delta\xi_\lambda(0)}\frac{1}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\int\eta_\lambda(y)\,dy$$

$$=-\frac{1}{\delta\xi_\lambda(0)}\frac{1}{[\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)]^2}$$　(これは (3．23) より証明するが詳細は略す)

故に　$$\delta\xi_\lambda(0)=\sqrt{\lambda}\;\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)$$

上の vi は・ M_Γ^+ の $x=0$ における Path の行動は指数 α の影響をうけないことを示している。特に Path の零点は (指数 α に無関係に) Hausdorff 次元が $\frac{1}{2}$ の集合をなす。

viii) 我々が M_Γ^+ を構成したやり方は，Brown 運動の反射壁過程の 1 構成法として P.Lévy が得たものであるが，もつと簡単に

$$\dot{x}_t(w)=|x_t(w)|$$

としても反射壁 Brown 運動が出来た。今我々の安定過程の場合でも，これによつて 1 つの Markov 過程が得られるが，$\alpha=2$ (Brown 運動) 以外では M_Γ^+ とは一致しない。実際この過程の不変測度は Lebesgue 測度 dx，$(0<x<+\infty)$ であり，次章でみるごとく，Path の零点は $0<\alpha\leqq 1$ で空集合 $1<\alpha\leqq\frac{1}{2}$ で Hausdorff 次元 $1-\frac{1}{\alpha}$ の集合をなす。これは M_Γ^+ とはあきらかに異つた様相を呈しており，Path 不連続性の反映である。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

ⅸ) M_γ^+ とその local time $S(t, w)$ を用いて例えば

$$\delta u(o) = \gamma \cdot u(o) \qquad \gamma > 0$$

なる境界条件をもつ Process がえられるが，その事情は Brown 運動の場合と同じである。 Ito-Mckean〔1〕 参照

ⅹ) ⅷ) でのべた安定過程を折りかえして得られる Process は反射壁 Brown 運動に subordination を施したものと一致する。

このように一般の境界条件をもつた Brown 運動に suborclination を施すと，新たな，Markov 過程が得られるが，それには Elliott の Process は1つも含まれない。特に吸収壁 Brown 運動を subordination したものと，我々の吸収壁安定他程とは一致しない。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

第4章 Pathの性質

前章での主題が安定過程の「解析的な研究」と呼ぶならば，この章の主題は安定過報のpathの「図形的な研究」といつてよいだろう。Browh運動と比べるならば。研究の歴史も浅く，来開拓な問題が多く残されている。現在までに知られた比較的まとまつた研究のいくつかをここに整理するが，path の重要な性質としては，そのほかすでに第一章第二章などにおいて述べておいたことも少くない。なお本章では前章までと異なり，安定過程を表わすのに，大文字でX(t，w)を表わしている。

§ 4.1 Hausdorff測度の一般論

Lebesgue 積分がRiemann の積分にはない美しい性質を有する一つの理由として，複雑な性質を有する点を測度0の集合のなかに繰り入れてしまうことに成功したことが挙げられるであろう。しかしながら一口に測度0の集合といつても種々雑多な集合があり，微細な集合の計量的性質を研究するためには，ただ一種の測度のみに頼っていたのでは，精密な理解に達しないのである。三次元空間の中で，三次元Lebesgue 測度について議論している間は，そのなかの平面も，直線も，面積のある曲面も，ことごとく一様に測度0である。この点にも，いろいろの段階の測度が必要になつてくる一つの理由を見ることができる。

このような観点から適切と考えられる測度の一つとしてHausdorff測度があり，F，Hausdorff〔1〕は，その基本的性質を研究し，Cantor 集合を構成するのと同じような方法で，Hausdorff次元がα($\alpha<\alpha<1$)なる一次元の集合の存在を示した。その後A.S.Besicovitch とその弟子たちによつて，研究が引き継がれ解析学や整数論の諸問題に応用している。Newton 容量0の集合は，Lebesgve 測度0であるが，一般化された容量とHausdorff 測度の関係は，O.Frost の著各なThése〔1〕において始めて論ぜられ，ポテンンシヤル論の一つの研究課題となつたが，わが国でも，亀谷俊司氏のすぐれた論文〔1〕がある。確率論と接触をもち始めたのは，1950年代に入つてからでP.Lévy，S.J.Taylor，H.P.McKean，R.M.Blumenthal-R.K. Getoor らの研究が現われたが，安定過程では，その次数がpath の Hansdorff 次元と一致するので，とくに重要である。応用性も応いので，Hausdorff 測度の一般論をこゝにまとめておきたい。

$h(t)$を，原点の近傍($t\geqq 0$)で定義された単調増大な連続函数で$\lim_{t\to+0} h(t)=0$とする。このような例としては，$t^{\alpha}(\alpha>0)$，$(\log t^{-1})^{-1}$， $t^{\alpha}(\log t^{-1})^{-\beta}(\log\log t^{-1})^{-\gamma}$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

….（ここで$\alpha\geq 0$，$\beta\geq 0$，$\gamma\geq 0$，……，$\alpha+\beta+\gamma$……>0）などが考えられる。R^Nの任意の点集合Eと任意の正の実数εに対して，直径がεより小なる高々可算個の集合$\{E_i ; i\geq 1\}$を用いてEを被覆する。いま，あらゆる被覆のとり方に対して$\sum_{i=1}^{\infty} h(\mathrm{diam} E_i)$の下限を考えれば，それは，$\varepsilon$とEとhとで定まる非負な値であつて，$\Lambda_\varepsilon^h(E)$と表わすことにする。このような被覆が存在しないときは，$\Lambda_\varepsilon^h(E)=\infty$とする。ここで$E_i$として，開集合またたは，閉集合に制限しても同じ値をえることが証明される。[1] $0<\varepsilon<\varepsilon'<+\infty$なる任意の$\varepsilon$，$\varepsilon'$に対しては，$\mathrm{diam}\ E_i<\varepsilon$ならば，$\mathrm{diam}\ E_i<\varepsilon'$であるから，明らかに$\Lambda_\varepsilon^h(E)\geq\Lambda_{\varepsilon'}^h(E)>0$となる。よつて$\varepsilon\to 0$なるとき，有限または無限の極限$\lim_{\varepsilon\to 0}\Lambda_\varepsilon^h(E)=\Lambda^h(E)$が必ず存在する。これをEのh−Hauodorff測度という。普通measure functionとして$h(t)=t^\alpha$（$\alpha>0$）がよく用いられ，本書では，この場合を主として論ずるので，以後$\Lambda^\alpha(E)$なる記号で表わし，Eのα−Hausdorff 測度（あるいはα次元的Hausdorff測度）と呼ぶことにする。また$h(t)=(\log t^{-1})^{-1}$の場合，Λ^hを対数的測度という。このようなHausdorff 測度はmetric なCarathéodory の外測度の条件をみたす。すなわち（C，1）$X\subseteq Y$ならば$\Lambda^\alpha(X)\leq\Lambda^\alpha(Y)$

（C，2）任意の可算無限集合列$\{X_i ; i\geq 1\}$に対して

$$\Lambda^\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right)<\sum_{i=1}^{\infty}\Lambda^\alpha(X_i)$$

（C．3）$\Lambda^\alpha(\phi)=0$

（C．4）$\rho(X,Y)>0$のとき，$\Lambda^\alpha(X\cup Y)=\Lambda^\alpha(X)+\Lambda^\alpha(Y)$したがつて，Borel集合はつねに可測である。またregular な外測度で，しかも等測被としてはG_δ集合の中から選ぶことができる。[2]

一般に，二つの測度μ，νの間に“$\mu(E)<+\infty$ならば必ず$\nu(E)=0$”という関係が存在するときに，νはμより高位である，μはνより低位であるという。このとき$\nu(E)>0$ならば$\mu(E)=+\infty$となる。また$0<\mu(E)<\infty$ならば必ず$0<\nu(E)<\infty$であつて，その逆もなり立つとき，μとνとは同位であるという。この場合は，$\mu(E)=0$のとき，$\nu(E)=0$であり，またこの逆もなり立つ。高位，低位，同位という概念で，すべての測度が互いに比較できるというのではないことは，勿論である。二つの函数$h(t)$と$g(t)$とに対するHausdorff 測度Λ^hとΛ^gとは，もし，$0<\varliminf_{t\to+0}\frac{h(t)}{g(t)}<+\infty$がなり立てば，互いに同位である。同じく定義から直接明らか

(1) Hausdorff の論文に証明されている。

(2) 以上のことの証明は，功力金二郎〔1〕が読みやすい。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

なように $\lim_{t\to+0}\frac{h(t)}{g(t)}=0$，すなわ，$\varepsilon>0$ をどんな小さな数にとつても，t が十分小さいかぎり，$h(t)<\varepsilon\cdot g(t)$ ならば $\wedge^h$ は $\wedge^g$ より高位である。よつて，$h(t)=t^\alpha$ の場合は，α が大になるにしたがつて，その測度は高位となる。一般にN次元Lebesgue 外測度とN次元的Hausdorff 測度とは同位である。すなわち，その値は必ずしも一致しないが，一方の値が0となれば，他方も0となる。

以上の考察から，$\sup\{\alpha:\wedge^\alpha(E)=\infty\}=\inf\{\alpha:\wedge^\alpha(E)=0\}$ なる性質があることがわかる。この共通の値をEのHausdorff 次元といい，記号としては，dimEを用いる。これは次元の概念の拡張の一つであり，fractional dimension(gebrochen Dinension 独)とも，呼ばれるべきものである。たとえば $[0,1]$ のCantor 集合の次元は $\log2/\log3$ で，$\log2/\log3$ 次元的Hausdorff 測度は1である。(3) 一般にN次元の集合の次元をNを越えないのである。つぎに述べる定理は，あとで有用になるものである。

定理1．1 (Besicovitch-Davies) Eを $\wedge^\alpha(E)=M<\infty$ なる解析集合とし，$0<h<M$ であるとする。このとき，$\wedge^\alpha(F)=h$ かつ $F\subset E$ なる閉集合Fが存在する。

証明はBesicovitch [2] またはDavies [1] を参照。Besicevith はEとしてBorel 集合の場合を証明し，Davies，これを解析集合に拡張した。

つぎに容量とHausderff 測度の関係について論じたい。いま，Φ を $\lim_{t\to+0}\Phi(t)=+\infty$ であるような単調に減少する連続函数とする。このような函数の例として，$t^{-\alpha}$ ($\alpha>0$)，$\log1/t$，$t^{-1}e^{-\lambda t}$ ($\lambda>0$) などが重要である。有界なBorel 集合Eの上の測度で，総質量が1なるものの全体を $\mathfrak{F}_E$ で表わすことにする。このとき，エネルギー積分の下限W(E)すなわち

$$W(E)=\inf_{m\in\mathfrak{F}_E}\int_E\int_E\Phi(|x-y|)m(dx)m(dy)$$

を考える。このとき，Eの Φ－容量 $C_\Phi(E)$ はつぎのように定義される。$W(E)<+\infty$ ならば

$C_\Phi(E)=\Phi^{-1}(W(E))$ (4)

$W(E)=+\infty$ ならば $C_\Phi(E)=0$

とくに $\Phi(t)=t^{-(N-2)}$ (Nは空間の次元) $\Phi(t)=t^{-\alpha}$ ($\alpha>0$)，$\Phi(t)=\log1/t$ の場合にそれぞれNewton容量，α の位の容量 (あるいは α 次の容量)，対数容量といい，前の二つの場合に C_{n-2}，C_α などの記号を用いることにする。この定義は，Frostman の流儀に従う

---

(3) Hausdorff の論文を参照。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

ものであり，本章の第二章§3ですでに定義したように，平衡ポテンシヤルをindnce すを測度の総質量で与えるVallée Poussin の定義とは，異なることに注意せられたい。両者の関係については本章prop.3.4で述べる。

以下，簡単のため，α位の容量と，α-Hausdorff 測度について述べる定理は一般の $-$ 容量と，h-Hausdorff 測度に関しても成立することなのである。

定届1.2（Frostman-Kametani）有界なBorel集合Eに対して，$C_\alpha(E)>0$ ならば，$\Lambda^\alpha(E)>0$である。さらに$\Lambda^\alpha(E)=+\infty$でさえある。これの対偶をとると，$\Lambda^\alpha(E)<+\infty$ならば，$C_\alpha(E)=0$である。

証明 $\Lambda^\alpha(E)>0$を示すのは，比較的容易であつて，これを少し拡張した次の定理1.3でで証明を与える。$\Lambda^\alpha(E)=+\infty$の方は，準備が必要なので，割愛する。Kametani〔1〕の定理11を参照。

定理1.3 fを〔0，1〕からR^Nへの可測函数，Eを〔0，1〕のBorel部分集合とし

$$\int_E\int_E \frac{1}{|f(t)-f(s)|^\alpha} m(dt)m(ds)<+\infty$$

となるようなEの上の確率測度mが存在するとき，$\Lambda^\alpha[f(E)]>0$．ここで$f(E)$とは，Eのfによる像集合である。

証明 QをEの部分Borel集合でつぎの性質を満すものとする。$m(Q)>0$かつすべての$t\in Q$に対して$\int_E |f(t)-f(s)|^{-\alpha} m(ds)\leq M<+\infty$（つまり，容量が正ならば，ポテンシヤルを有界ならしめるような正の測度が存在する。）つぎに$f(Q)\subset \bigcup_i \theta_i$なるBorel集合列$\{\theta_i; i\geq 1\}$をとり，$Q_i=f^{-1}(\theta_i)$とおくと，$\{Q_i\cap Q : i\geq 1\}$は$Q\subset\bigcup_i(Q_i\cap Q)$なるようなBorel集合列となる。

もしも $t, s\in Q_i\cap Q$ならば$(\mathrm{diam}\ \theta_i)^\alpha\geq|f(t)-f(s)|^\alpha$すなわち$(\mathrm{diam}\ \theta_i)^\alpha$とおくと，$\{Q_i\ Q : i>1\}$はQ $_i$ ($\cup_i$ Q) なるようなBorel集合列となる。

もしも $t, s\in Q_i\cap Q$ならば$(\mathrm{diam}\ \theta_i)^\alpha\geq|f(t)-f(s)|^\alpha$ すなわち$(\mathrm{diam}\ \theta_i)$ $|f(t)-f(s)|^{-\alpha}\geq 1$であるから，すべての$t\in Q_i\cap Q$に対して

$$m(Q_i\cap Q)\leq(\mathrm{diam}\ \theta_i)^\alpha\int_{Q_i\cap Q}|f(t)-t(s)|^{-\alpha}m(ds)$$

よつてすべてのiに対して$m(Q_i\cap Q)\leq M(\mathrm{diam}\ \theta_i)^\alpha$となり，

$$0<\frac{1}{M}m(Q)<\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{\infty}m(Q_i\cap Q)<\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}\ \theta_i)^\alpha$$

---

(4)Φ^{-1}はΦの逆函数を表わす。$\Phi(t)=t^{-\alpha}$ ときには，$\Phi^{-1}(t)=t^{-\frac{1}{\alpha}}$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

かくて$\Lambda^{\alpha}[f(E)]\geq\Lambda^{\alpha}[f(Q)]\geq M^{-1}m(Q)>0$である。

注意 この定理でfを恒等写像とし，EをN次元の集合としたときが，前定理であつて，証明の要点は同じである。

定理1．4 (Frostman-Kametani) Eを有界なBorel集合とし，$\beta<\alpha$とする。このとき，$\Lambda^{\alpha}(E)>0$ならば，$C_{\beta}(E)>0$。

証明 完全な証明はKametani [1] 定理13を参照していただくことにし，ここでは，一次元の集合の場合についての簡単な証明を述べるにとどめる。

$\beta<\alpha\leq\dim E$に対して $\inf\limits_{m\in\mathfrak{F}_E}\int_E\int_E\frac{m(dx)m(dy)}{|x-y|^{\beta}}<+\infty$を証明すればよい。本節定理1．1によつて$0<\Lambda^{\alpha}(K_1)<\Lambda^{\alpha}(E)\leq+\infty$であるようなコンパクト集合$K_1\subset E$が存在する。さらにBesicovitch [1] の169頁－170頁によれば，$0<\Lambda^{\alpha}(K_2)<\infty$かつすべての$a\in K_2$に対して$\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(2\varepsilon)^{-\alpha}\cdot\Lambda^{\alpha}[K_2\cap(a-\varepsilon,a+\varepsilon)]\leq 1$であるように，コンパクト集合$K_2\subset K_1$を選ぶことができる。したがつて，コンパクト集合$K_3$を選んで，$0<\Lambda^{\alpha}(K_3)<\infty$かつ$a\in K_3$で$\varepsilon<\gamma$ならばつねに$(2\varepsilon)^{-\alpha}\Lambda^{\alpha}[K_3\cap(a-\varepsilon,a+\varepsilon)]<2$が成立するような$\gamma>0$が存在するようにできる。

$$m(dy)=\frac{\Lambda^{\alpha}(K_3\cap dy)}{\Lambda^{\alpha}(K_3)}$$ とおくと，$m\in\mathfrak{F}_{K_3}$であつて，

$$\int_E\int_E\frac{m(dx)m(dy)}{|x-y|^{\beta}}=\int_{K_3}m(dx)\Big[\int_{|x-y|\geq\gamma}\frac{m(dy)}{|x-y|^{\beta}}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\gamma}{2^n}\leq|x-y|<\frac{\gamma}{2^{n-1}}}\frac{m(dy)}{|x-y|^{\beta}}\Big]$$

$$\leq\int_{K_3}m(dx)\Big[\gamma^{-\beta}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\gamma}{2^n}\Big)^{-\beta}\cdot\frac{1}{\Lambda^{\alpha}(K_3)}\cdot 2\Big(2\frac{\gamma}{2^{n-1}}\Big)^{\alpha}\Big]$$

$$=\gamma^{-\beta}+\frac{1}{\Lambda^{\alpha}(K_3)}\cdot 2^{2\alpha+1}\cdot\gamma^{(\alpha-\beta)}\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n(\alpha-\beta)}<+\infty\ (\because\alpha>\beta)$$

注意 この定理を一般の$h(t)$，$\Phi(t)$の形で述べておく。《Eが有界なBorel集合でかつ$-\int_0^r h(t)d\Phi(t)<+\infty$を満足する$h(t)$に対して，$\Lambda^{h}(E)>0$ならば，$C_{\Phi}(E)>0$である。》

Frostmanは Hausdorff 次元に対応して，容量次元をつぎのように定義した。これを$C-\dim(E)$で表わすことにする。

$C-\dim(E)=0$　　すべての$\alpha>0$に対して$C_{\alpha}(E)=0$のとき，

$C-\dim(E)=s>0$　　$0<\alpha<s$に対しては$C_{\alpha}(E)>0$で，$\alpha>s$に対しては$C_{\alpha}(E)=0$のとき，

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

定理1．2と定理1．4を合せて，つぎの系をえる。

系 R^Nの有界Borel 集合Eに対して，Eの容量次元は，Hausdorff次元と一致する。

§4．2 pathのHausdorff次元

この節の主目標はN次元安定過程のpathのHausdorff次元数を求めることである。現在までに知られているpathの性質の大部分は，対称安定過程の場合であるが，Hausdorff次元数は，必ずしも対称でない一般の安定過程についても，求めることに成功している。

定理2．1 EをHausdorff次元数λなる〔0．1〕の部分Borel集合とし，$\{X(t);t\geq 0\}$をα次のN次元安定過程とする。このとき，

$P_0\left[\dim X(E,\omega)=\min(N,\alpha\lambda)\right]=1$

である。ここで$X(E,\omega)=\{x\in R^N;$ あるt∈Eに対して$x=X(t,\omega)\}$とする。

証明 N＝1のときは，$\dim X(E)\leq 1$であるから，$\alpha\lambda\leq 1$の場合だけを調べればよい。よつてN＝1のときは$\alpha\lambda\leq 1$と仮定して，N≧2のときと統一的に論ずることにする。

（第一段）$P_0\left[\dim X(E)\geq\alpha\lambda\right]=1$ の証明

$0<\beta<\gamma\lambda<\alpha\lambda$となるような正数β，γを選ぶ。よつて$\beta/\gamma<\lambda$であつて，$^{\beta/\gamma}(E)=\infty$である。前節定理1・4から$C_{\beta/\alpha}(E)>0$となる。（$\because\gamma<\alpha$であるから$\beta/\gamma>\beta/\alpha$）

すなわち

$$\int_E\int_E\frac{m(dt)m(ds)}{|t-s|^{\beta/\alpha}}<+\infty \tag{1}$$

なるような$m\in\mathfrak{F}_E$が存在する。一方

$$E_0(|X(t)-X(s)|^{-\beta})=E_0(|X(t-s)|^{-\beta})$$
$$=|t-s|^{-\beta/\alpha}E_0(|X(1)|^{-\beta})=C|t-s|^{-\beta/\alpha} \tag{2}$$

ここでCは有限な正数である。なぜなら，X(1)は有界な連続密度f(x)をもつことと$\beta<\alpha\lambda<2$であり，とくに仮定からN＝1のときは，$\beta<1$であることに留意するならば，

$$E_0(|X(1)|^{-\beta})=\int_{R^N}\frac{1}{|x|^\beta}f(x)dx<M\int_0^\varepsilon\frac{1}{r^\beta}r^{N-1}dr+\int_{|x|>\varepsilon}\frac{1}{|x|^\beta}f(x)dx<+\infty$$

となるからである。(2)式の両辺を$m\times m$に関して，E×Eの上で積分し，さらに(1)式に注意するならば

$$\int_E\int_E E_0(|X(t)-X(s)|^{-\beta})m(dt)m(ds)=C\int_E\int_E|t-s|^{-\beta/\alpha}m(dt)m(ds)<+\infty$$

Fubiniの定理により

$$\int_E\int_E|X(t,\omega)-X(s,\omega)|^{-\beta}m(dt)m(ds)<+\infty$$

が殆んどすべてのωに対してなり立つことがわかる。前節定理1・3によつて$P_0[\ {}^{\beta}(X(E))>0]=1$，すなわち $P_0[\dim X(E)\geq\beta]=1$である。βをαλに近づけることによつて$P_0[\dim X(E)\geq\alpha\lambda]=1$ をえる。

（第二段） $\lambda<1$のとき，$P_0[\dim X(E)\leq\alpha\lambda]=1$の証明。

$\lambda<\beta<1$となるように正数βをとる。任意のnに対して$\{E_{in}\,;\,i>1\}$を$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}E_{in})^{\beta}=0$かつ$E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_{in}$ であるような閉区間の列とする。これは$\Lambda^{\beta}(E)=0$であるから可能である。そうすると，すべてのnに対して$X(E,\omega)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}X(E_{in},\omega)$であり，さらに$[\mathrm{diam}X(E_{in})]^{\alpha\beta}$は$(\mathrm{diam}E_{in})^{\beta}[\mathrm{diam}X([0,1])]^{\alpha\beta}$と同分布に従うから

$$E_0\left\{\sum_{i=1}^{\infty}[\mathrm{diam}X(E_{in})]^{\alpha\beta}\right\}=\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}E_{in})^{\beta}E_0\left\{[\mathrm{diam}X([0,1])]^{\alpha\beta}\right\}$$

したがつて$E_0\{[\mathrm{diam}X([0,1])]^{\alpha\beta}\}<+\infty$が証明されれば右辺は$n\to\infty$のとき0に近づくから，左辺の$\sum\limits_{i=1}^{\infty}[\mathrm{diam}X(E_{in})]^{\alpha\beta}$は0に平均収束し，nの適当な部分列に対して概収束する。βをλに近づけると，$P_0[\dim X(E)\leq\alpha\lambda]=1$

残した$E_0\{[\mathrm{diam}X([0,1])]^{\alpha\beta}\}<+\infty$ については，つぎのようにして証明される。殆んどすべての$X(\cdot\,\omega)$は有界なt区間では有界であることから，すべての$0\leq t\leq1$に対して$P_0[\,|X(1)-X(t)|\geq M]<\frac{1}{2}$が成立つようなMが存在する。Ottavianiの不等式(1)により，すべての$C>M$に対して

$$P_0[\sup_{0\leq t\leq1}|X(t)|\geq2c]\leq2P_0[\,|X(1)|\geq C]$$

すなわち，すべての$C>M$に対して

$$P_0[\mathrm{diam}X([0,1])\geq4c]<2P_0[\,|X(1)|\geq C]$$

が成立する。α次の安定分布に関するp字の絶対能率は$p<\alpha$ならば有限であるから$E_0(|X(1)|^{\alpha\beta})<\infty$。かくして

$$E_0\{[\mathrm{diam}X([0,1])]^{\alpha\beta}\}<\infty \text{ となる。}$$

（第三段） $\lambda=1$のとき，$P_0[\dim X(E)\leq\alpha]=1$ の証明。

$\dim X([0,1])\leq\alpha$ を示せば，$\dim X(E)\leq\alpha$がいえるから$E=[0,1]$と仮定して証明する。また$E=[0,t]$としても，本質的に同じであることは，以下の証明方法でわかることである。

---

(1) 伊藤清「確率論」p.102およびp.162参照。独立変数の和のときの証明が，加法過程のときにそのまゝ適用する。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

まず任意の$\varepsilon>0$と正の整数kに対して

$$T_{1\varepsilon}=\inf\{t>0\,;\,|X(t)|>\varepsilon^{1/\alpha}\}$$

$$T_{k+1.\varepsilon}=\inf\{t>0\,;\,|X(t+T_{1\varepsilon}+\cdots\cdots+T_{k\varepsilon})-X(T_{1\varepsilon}+\cdots\cdots+T_{k\varepsilon})|>\varepsilon^{1/\alpha}\}$$

と定義する。path が右連続で時間的一様な加法過程は強マルコフ性をもつことが，Hunt〔1〕により証明されている。よつて$T_{1\varepsilon}$，$T_{2\varepsilon}$，……は互いに独立なかつ同分布に従う確率変数列である。つぎに

$$P_0[T_{1\varepsilon}<a]=P_0[\sup_{t<a}|X(t)|>\varepsilon^{1/\alpha}]$$

$$=P_0[\sup_{t<a}\varepsilon^{-1/\alpha}|X(t)|>1]=P_0[\sup_{t<a}|X(t\varepsilon^{-1})|>1]$$

$$=P_0[\sup_{t<a\varepsilon^{-1}}|X(t)|>1]=P_0[T_{11}<a\varepsilon^{-1}]=P_0[\varepsilon T_{11}<a]$$

であるから$T_{k\varepsilon}$はεT_{k1}（$k\geq1$）と同じ確率法則に従うことがわかる。さらに

$$N_\varepsilon=\min\{n\geq1\,;\,T_{1\varepsilon}+\cdots\cdots+T_{n\varepsilon}>1\}$$

中心が原点0で，半径$\varepsilon^{1/\alpha}$なる閉球を$S(0,\varepsilon)$，中心が$X(T_{1\varepsilon}+\cdots\cdots+T_{k\varepsilon})$で半径$\varepsilon^{1/\alpha}$なる閉球を$S(k,\varepsilon)$で表かす。そうすると$X([0,1])\subset\bigcup_{k=0}^{N_\varepsilon-1}S(k,\varepsilon)$でかつ$\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}[\operatorname{diam}S(k,\varepsilon)]^{\alpha\beta}=2^{\alpha\beta}\varepsilon^\beta N_\varepsilon$となる。ここで βは1より大きい任意の数とする。

任意の$x>0$に対して

$$P_0[\varepsilon^\beta N_\varepsilon\leq x]=P_0[N_\varepsilon\leq x\varepsilon^{-\beta}]=P_0[T_{1\varepsilon}+\cdots\cdots+T_{[x\varepsilon^{-\beta}],\varepsilon}>1]$$

$$=P_0[\varepsilon T_{11}+\cdots\cdots+\varepsilon T_{[x\varepsilon^{-\beta}],1}>1]$$

ここで$[x\varepsilon^{-\beta}]$は$x\varepsilon^{-\beta}$を越えない最大の整数である。$\varepsilon=(\frac{x}{k})^{1/\beta}$とおくと，$[x\varepsilon^{-\beta}]=k$となり，上の式は

$$=P_0[(\frac{x}{k})^{1/\beta}(T_{11}+\cdots\cdots+T_{k1})>1]$$

$$=P_0[x^{1/\beta}\cdot\frac{T_{11}+\cdots\cdots+T_{k1}}{k}\cdot k^{1-1/\beta}>1]$$

となる。pathの右連続性から，$T_{11}=\inf\{t>0\,;\,|X(t)|>1\}$が正である確率は1であつて，$E_0(T_{11})>0$である。(2) さらに，$\beta>1$かつ$x>0$に留意するならば，大数の強法則(3)によつて，上の確率は$k\to\infty$（$\varepsilon\to0$）のとき，1に近づく。すなわち，$\varepsilon\to0$のとき，

(2) $E_0(T_1)$の値については第三章定理3・4を参照。

(3) ここでつぎのtypeの大数の強法則を用いた。$\{x_n\,;\,n>1\}$を同一分布に従いかつ非負な独立確率変数列とするとき，たとえ$E(x_1)$が無限大であつても，確率1で$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=E(x_1)$が成り立つ。丸山儀四郎「確率論」p.27参照。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$\varepsilon^{\beta}N_{\varepsilon}$ は0に確率収束するわけである。したがつて適当な部分列をとつて0に概収束させることができる。かくして $P_0\left[\Lambda^{\alpha\beta}(X([0,1]))=0\right]=1$ をえる。β を1に近づけることにより，$P_0[\dim X([0,1])\leq a]=1$

系 $P_0[\Lambda^{\alpha}(\overline{X([0\ ,\ 1])})<+\infty]=1$ 　ここで $X([0,1])$ は $\overline{X([0\ ,\ 1])}$ の $X([0,1])$ の閉包を表わす。

証明 定理の第三段の証明において $\beta=1$ とすると，

$$\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1}[\mathrm{diam}\,S(k,\varepsilon)]^{\alpha}=2^{\alpha}\varepsilon N_{\varepsilon} \quad \text{かつ}$$

$$P_0[\varepsilon N_\varepsilon<x]=P_0\left[x\cdot\frac{T_{11}+\cdots\cdots+T_{k1}}{k}>1\right]$$

となる。$\frac{1}{E_0(T_{11})}<x<\infty$ となるように x をとると $k\to\infty$ ($\varepsilon\to0$) のとき確率1で

${}^{\alpha}(X([0\ ,\ 1]))<2^{\alpha}x<\infty$ となる。閉包をとつても α 次元的測度が有限であることは，閉球 $S(k,\varepsilon)$ の集合で $X([0\ ,\ 1])$ を被覆していることからわかる。

注意 McKean [2] は，上の定理の Brown 運動 $B(t)$ の場合を証明した。すなわち

$P_0[\dim B(E)=\min(N\ ,\ 2\lambda)]=1$

これを α 次の対称安定過程 $X(t)$ の場合に拡張するのに，subordination の方法が有効であることを，Blumenthal-Getoor [1] は示している。彼等はまず $\alpha/2$ 次の片側安定過程 $\theta(t)$ について，確率1で $\dim\theta(E)=\alpha\lambda/2$ が成立つことを証明し，$X(t,\omega)=B(\theta(t_1\ \omega_1),\ \omega_2)$，$\omega=(\omega_1\ ,\ \omega_2)$ となることから，$X(E,\omega)=B(\theta(E,\omega_1),\omega_2)$ の次元は $2\cdot\frac{\alpha\lambda}{2}=\alpha\lambda$ であることを導いた。詳細は上述論文を参照。

二次元 Brown 運動の曲線は平面上いたるところ dense ではあるが，その二次元 Lebesgue 測度は0であることが知られている。[4]

二次元安定過程の path の像集合の二次元 Lebesgue 測度も，やはり0であることは，2-Hausdorff 測度と二次元 Lebesgue 測度とが同位であることと前定理から，直ちにわかることである。つぎに安定過程の path の像集合の α-Hausdorff 測度が0か $+\infty$ か正の定数かの問題が起るわけで，少くとも有限であることは，上の系で述べたとおりである。Brown 運動の場合[5]と一次元 Brown 運動の零点の場合[6]は0であることがわかつているので，一般の安定過程でも同様であろうと予想される。まだその証明ができないので，中間的な結果として一次元 Cauchy 過程の場合について述べておこう。

---

(4) P.Lévy [1]. K.Ito [2] 参照。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

定理2・2　α次の一次元対称安定過程$X(t)$において$0<\alpha\leqq 1$のとき，$P_0\left(|X([0,+\infty))|=0\right)=1$である。ここで$X([0,+\infty))=\{x\in R^1$；ある$t\in[0,\infty)$に対して$x=X(t,\omega)\}$とし、$|E|$はEのLebesgue 測度を表わすものとする。

注意　この定理が$0<\alpha<1$のとき成立つことは、前定理から明らかであるが、$0<\alpha<1$のときも統一的に証明できるので、上のように述べたのである。一次元で$1\leqq\alpha\leqq 2$のときはrecurrentでpathの像集合はeverywhere dense であること[7]がわかっているので、$\alpha=1$の一次元Cauchy 過程は、二次元Brown 運動と同様の性質をもつことになる。

証明　記号を簡略にして$X([0,+\infty))$を$\overline{X_{0,\infty}}$を$\overline{X_{a,b}}$などと書くことになる。まず

$$f_X(a,w)=\begin{cases}1 & a\in\overline{X_{0,t}}\ \text{のとき}\\ 0 & a\notin\overline{X_{0,t}}\ \text{のとき}\end{cases}$$

で定義された函数は(a,w)に関して$B(R^1)\times B(W)$可測であることを示す。それには、$\{(a,w);a\notin\overline{X_{0,t}}\}\in\mathcal{B}(R^1)\times\mathcal{B}(W)$であることを示せば十分である。任意の開集合$U\subset R^1$に対して

$$\{W;\ \overline{X_{0,t}}\subset U^c\}=\bigcap_{\substack{r\leq s\leq t\\ r\text{は有理数}}}\{W;\ \lim_{r\to s}X(r,w)\in U^c\}$$

であるから左辺は$\mathcal{B}(W)$可測である。開集合の可算なbase を$\{U_n;\ n\geq 1\}$で表わすことにすれば

$$\{(a,w);a\notin\overline{X_{0,t}}\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[U_n\times\{w;\ \overline{X_{0,t}}\subset U_n{}^c\}]\ \mathcal{B}(R_1)\times\mathcal{B}(W)$$

が証明できる。

$|\overline{X_{0,t}}|=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(a,w)da$であり、Fubiniの定理から，$|\overline{X_{0,t}}|$はwに関して$\mathcal{B}(W)$可測である。つぎに$\{X(s,w);\ 0\leq s\leq t\}$と同じ確率法則に従う三つのprocess を考える。

$$Y(s,w)=X(s+t,w)-X(t,w)\qquad 0\leq s\leq t$$

$$Z(s,w)=-(X(t,w)-X(t-s,w))\qquad 0\leq s\leq t$$

$$U(s,w)=2^{-\frac{1}{\alpha}}X(2s,w)\qquad 0\leq s\leq t$$

---

(5)　S, J, Taylor〔1〕参照

(6)　S, J, Taylor〔2〕　K, Ito–H, P, Mckean〔1〕参照

(7)　H, P, Mckean〔1〕参照

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$E_0(|\overline{X_{0,t}}|) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(f_X(a,w))da = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(f_Y(a,w))da = E_0(|\overline{Y_{0,t}}|)$$

同様にして

$= E_0(|\overline{Z_{0,t}}|) = E_0(|\overline{U_{0,t}}|)$ がえられる。集合Aをrだけ平行移動させたものを[A+r]で、また≡で合同を表わすことにすると

$$\overline{X_{0,2t}} = \overline{X_{0,t}} \cup [\overline{Y_{0,t}} + X(t)] \equiv [\overline{X_{0,t}} - X(t)] \cup \overline{Y_{0,t}}$$

$$= \overline{Z_{0,t}} \cup \overline{Y_{0,t}}$$

$$\therefore |\overline{X_{0,2t}}| + |\overline{Y_{0,t}} \cap \overline{Z_{0,t}}| = |\overline{Y_{0,t}}| + |\overline{Z_{0,t}}|$$

$$E_0(|\overline{X_{0,2t}}|) + E_0(|\overline{Y_{0,t}} \cap \overline{Z_{0,t}}|) = E_0(|\overline{Y_{0,t}}|) + E_0(|\overline{Z_{0,t}}|)$$

$$= 2E_0(|\overline{X_{0,t}}|)$$

一方

$$E_0(|\overline{X_{0,2t}}|) = E_0(|2^{1/\alpha}\overline{U_{0,t}}|) = 2^{1/\alpha}E_0(|\overline{U_{0,t}}|) = 2^{1/\alpha}E_0(|\overline{X_{0,t}}|)$$

であるから、これを前式に代入すると

$$2^{1/\alpha}E_0(|\overline{X_{0,t}}|) + E_0(|\overline{Y_{0,t}} \cap \overline{Z_{0,t}}|) = 2E_0(|\overline{X_{0,t}}|)$$

すなわち

$$(2^{1/\alpha}-2)E_0(|\overline{X_{0,t}}|) + E_0(|\overline{Y_{0,t}} \cap \overline{Z_{0,t}}|) = 0$$

$0<\alpha<1$ のときは、この式の左辺の各項はともに非負でかつ $2^{1/\alpha}-2>0$ であることから、直ちに $E_0(|\overline{X_{0,t}}|)=0$ をえる。$\alpha=1$ のときは $2^{1/\alpha}-2=0$ であるから、$E_0(|\overline{Y_{0,t}} \cap \overline{Z_{0,t}}|)=0$、これを書きなおして

$$E_0\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(a,w) f_Z(a,w)da\right) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(f_Y(a,w) f_Z(a,w))da = 0$$

X(S)の独立加法性によつて、Y(S)、Z(S)は互いに独立であつて

$$E_0(f_Y(a,w) f_Z(a,w)) = E_0(f_Y(a,w))E_0(f_Z(a,w)) = [E_0(f_X(a,w))]^2$$

よつて $\int_{-\infty}^{\infty} [E_0(f_X(a,w))]^2 ab = 0$　　これから殆んどすべてのaに対して

$E_0(f_X(a,w))=0$ となることがわかり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_0(f_X(a,w))da = E_0(|\overline{X_{0,t}}|) = 0$$

したがつて　$0<\alpha\leq 1$ ならば $P_0(|\overline{X_{0,t}}|=0)=1$

$0=|\overline{X_{0,t}}| > |X_{0,t}|$ であることと、零集合の可算和はやはり零集合であることによつて、$P_0(|X_{0,\infty}|=0)=1$ をえる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

§ 4，3 重 複 点

Hausdorff 測度と一般化された容量の関係および前節で述べたpathのHausdorff測度に関する研究を応用すると、対称安定過程の重複点の存在する範囲が、空間の次元Nと次数αで決定される。これはA.Dvoretsky － P,Erdös － S,Kakutani〔1〕によるBrown 運動の場合の研究を拡張したものである。pathw に対して $0 \leq s < t < \infty$ があつて、$X(s,w)=X(t,w)=a$ となるとき、aをこのpathの重複点という。

Prop 3・1　Eを$\beta<\alpha$なるすべてのβに対して$C_\beta(E)>0$であるような有界Borel集合とするとき、$C_\beta(F)>0$かつ$F\subset E$なるコンパクト集合Fが存在する。

証明　$\beta<\gamma<\alpha$なるγをとる。$C_\gamma(E)>0$であるから、本章定理1・2によつて、$\Lambda^\gamma(E)=\infty$、したがつて定理1・1から、$F\subset E$、かつ$0<\Lambda^\gamma(F)<\infty$なるようなコンパクト集合Fが存在する。

さらに定理1・4によつて、$C_\beta(F)>0$がえられる。

Prop 3・2　α次のN次元安定過程$X(t,w)$において、つぎのことが確率1で成立つ。

$0<\alpha\leq\beta$ならば　$C\beta(\overline{X_{0,t}})=0$

$0<\beta<\alpha$ならば　$C\beta(F)>0$かつ$F\subset X_{0,t}$なるコンパクト集合Fが存在する。ここで$X_{0,t}=\{x\in R^N;\ あるt\in[0,t)に対してx=X(t,w)\}$とする。

証明　前節の定理2・1およびその系から、$\alpha\leq\beta$のとき$\Lambda^\beta(X_{0,1})<\infty$である。定理2・1およびその系でも注意したように、$X_{0,1}$と$X_{0,t}$のHausdorff 測度は一致し閉包をとつても、Hausdorff測度は同じあることは、閉集合だけに制限して、被覆しておいてもHausdorff測度は同じ値をえるという一般的性質からわかる。あとは定理1・2の対偶から$C_\beta(\overline{X_{0,t}})=0$である。

定理2・1とHausdorff次元の定義から、$\beta<\alpha$のときは$\Lambda^\beta(X_{0,t})=\infty$であつて、prop 3・1と同じ論法で上の主張がえられる。（証終）

第二章§2，3で平衡Rieszポテンシヤルを導くような測度の総質量で容量を定義したが、これは（$N-\alpha$）位の容量ともいうべきものであるので以下$C^{N-\alpha}$で表わすことにする。これは本章§4．1で与えておいたFrostman流のα位の容量C_αと区別するためである。

Prop 3・3　α次のN次元対称安定過程（たゞし$N>\alpha>0$）において、任意の点xからコンパクト集合Fへのhitting probabilityを$\Phi_F(X)$で表わすとき、もし、$C^{N-\alpha}(F)>0$ならば$\Phi_F(x)>0$で、もし$C^{N-\alpha}(F)=0$ならば$\Phi_F(x)=0$である。すなわち

$C^{N-2}(F)>0$ と $\Phi_F(x)>0$ とは同等である。

証明 第二章 Prop 2.5 によれば、F の上のただ一つの測度 μ_F が存在して

$$\Phi_F(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha}\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_F\frac{1}{|x-y|^{N-\alpha}}\mu_F(dy)$$

となる。よって

$$\frac{M\,C^{N-\alpha}(F)}{\max\limits_{y\in F}|x-y|^{N-2}}\leq\Phi_F(x)\leq\frac{M\,C^{N-\alpha}(F)}{\min\limits_{y\,F}|x-y|^{N-\alpha}}$$

(ここでMは定数)であるから、上の主張は明らかである。

Prop 3・4 任意のコンパクト集合Fに対して、Vallee Poussin流の容量 $C^{N-\alpha}(F)$ が正であることは、Frostman流の容量 $C_{N-\alpha}(F)$ が正であることと同等である。

証明 この事実の証明だけなら2章Prop.2.14に示されているがここではもう少し一般的考案を行う。コンパクト集合Fに対し，つぎのような集合函数を考える。

$$V(F)=\inf_{\mu\in\mathfrak{F}_F}\sup_{x\in R^N}U_\mu(x)=\inf_{\mu\in\mathfrak{F}_F}\sup_{x\in R^N}\int\frac{1}{|x-y|^{N-\alpha}}\mu(dy)$$

ここで $U_\mu(x)$ は μ によるRiesz ポテンシャルである。このV(F)がエネルギー積分の下限W(F)

$$W(F)=\inf_{\mu\in\mathfrak{F}F}\int_F\int_F\frac{1}{|x-y|^{N-\alpha}}\mu(dx)\mu(dy)$$

と一致することは、ポテンシャル論でよく知られている事実であるので、これを仮定する。

$C_{N-\alpha}(F)>0$ のとき、すなわちエネルギー積分を有限ならしめるような $\mu\in\mathfrak{F}F$ が存在することは、上の事実から、$\sup\limits_{x\in R^N}U_\mu(x)<+\infty$ ならしめる $\mu\in\mathfrak{F}F$ が存在することと同等である。換言すると、ポテンシャルを有界ならしめる総質量1の測度が存在することと同等である。第二章Prop2.6(iii)によって、このとき $C^{N-\alpha}(F)>0$ である。逆に $C^{N-\alpha}(F)>0$ ならば hitting probehility $\Phi_F(x)>0$ で、そのRieszポテンシャル表示によって、確かにポテンシャルを有界ならしめるFの上の総質量1の測度が存在する。

定理3・5 α 次のN次元対称安定過程 $X(t,w)$ には $N\leq 3$ かつ $\frac{N}{2}<\alpha\leq 2$ のとき、ほとんどすべてのpathについて重複点に対応する時点は無限に存在する。一方 $N\geq 4$ の場合と $N\leq$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

うでも$0<\alpha<\frac{N}{2}$のときには確率1で重複点をもたない。

証明 (1) $N\leq 3$かつ$\frac{N}{2}<\alpha\leq 2$でさらに$N>\alpha>0$の場合。

Prop 3・3とProp 3・4から$\Phi F(x)>0$であるための必要十分条件は$C_{N-\alpha}(F)>0$なることである。さらにProp 3・2によって$N-\alpha<\alpha$のとき、すなわち$\frac{N}{2}<\alpha\leq 2$かつ$N\leq 3$のとき、$\Phi_K(x)>0$であって$K\subset X_{0,t}$なるコンパクト集合Kがほとんどすべてのpathについて存在する。

$0\leq a<b<c<\infty$とする。

$P_0\{w;X_{a,b}(w)\cap X_{c,\infty}(w)\neq\phi\}=P_0\{w;X_{a,b}(w)\quad X_{0,\infty}(W_c^t)\neq\phi\}$

マルコフ性によって

$=\int_W P_{X_c(w)}\{W';X_{a,b}(W)\cap X_{0,\infty}(W')\neq\phi\}P_0(dw)$

$=\int_W \Phi X_{a,b}(w)(X(c,w))P_0(dw)\geq\int_W \Phi K(w)(X(c,w))P_0(dw)$

ここでK(w)とは$K(w)\subset X_{a,b}(w)$かつ$\Phi K(w)(X)>0$なるコンパクト集合であってwを固定すると、K(w)を固定されるわけで、上の式における右辺が正であるから、$P_0\{X_{a,b}\cap X_{c,\infty}\neq\phi\}>0$ これより、$c<d<\infty$なるdで$P_0\{X_{a,b}\cap X'_{c,d}\neq\phi\}=\rho>0$なるものが存在する。

$a_k=a+kd$, $b_k=b+kd$, $c_k=c+kd$, $d_k=(k+1)d$, $(k\geq 1)$とおくと、$P_0\{X_{a_k,b_k}\quad X_{c_k,d_k}\neq\phi\}=\rho>0$ $(k\geq 1)$が成立し、相異なるkに対して、これらの事象は独立であるから、Borel-Cantelliの定理が使えて、$\sum_{k=0}^{\infty}P_0\{X_{a_k,b_k}\cap X_{c_k,d_k}\neq\phi\}=+\infty$によって、$P_0\{$無限箇のkに対して、$X_{a_kb_k}\cap X_{c_kd_k}\neq\phi\}=1$がえられる。

(ii) $N\geq 4$または$N\leq 3$かつ$0<\alpha\leq\frac{N}{2}$の場合

Prop 3・2から$\alpha\leq N-\alpha$のとき、すなわち$0<\alpha\leq\frac{N}{2}$のときは、$\Phi_{\overline{X_{0,t}}}(x)=0$が確率1で成立つ。

$P_0\{X_{a,b}\cap X_{c,\infty}\neq\phi\}\leq\int_W\Phi_{\overline{X_{a,b}(w)}}(X(c,w))P_0(dw)$

は(i)のときと同様に示せるが、右辺は0であるから、左辺も同じく0となる。よって$0\leq r<r'<r''<r'''<\infty$なる任意の有理時点に対して$P_0\{X_{r,r'}\cap X_{r'',r'''}=\phi\}$である。$0\leq a<b<c<d<\infty$なる任意の実数時点に対しては、$r\leq a<b\leq r'<r''\leq c<d\leq r'''<\infty$なる

(注意) (1) たとえば大津賀信「函数論特論」P74参照

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

ように有理数をとることによつて

$P_0\{X_{a,b} \cap X_{c,d} = \phi\} = 1$ がえられる。

(iii) $N=\alpha=1$ の場合（$N=\alpha=2$ のときは省略）

$X_{0,1}$ が確率1で容量正であることがいえれば、第二章Prop 2.15によって $\Phi_{X0,1}(x)=1$ となり、あとは、(i)と平行した議論によつて、重複点に対応する時点が無限に存在することが証明される。

$$E_0\left(\log \frac{1}{|X(t,w)-X(s,w)|}\right) = E_0\left(\log \frac{1}{|X(t-s,w)|}\right)$$

$$= E_0\left(\log \frac{1}{|t-s|\,|X(1)|}\right) = E_0\left(\log \frac{1}{|t-s|} - \log |X(1)|\right)$$

$$= \log \frac{1}{|t-s|} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$$

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ の収束することは、$0<\lambda<1$ とするとき

$$\frac{x^\lambda \log x}{1+x^2} \to 0\ (x\to 0 \text{ のとき}) \text{ および } \frac{x^{1+\lambda}\log x}{1+x^2} \to 0\ (x\to\infty \text{ のとき})$$

であることからわかるが、さらに

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 + \int_1^\infty = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{\log t}{1+t^2}\,dt = 0$$

となる。（第二項において $x=\frac{1}{t}$ なる変数変換をほどこす）

よつて $\displaystyle E_0\left(\log \frac{1}{|X(t,w)-X(s,w)|}\right) = \log \frac{1}{|t-s|}$

さらに $\displaystyle\lim_{x\to 0} |x|^\lambda \log \frac{1}{|x|} = 0\ (0<\lambda<1)$ に留意すると

$$\int_0^1\int_0^1 E_0\left(\log \frac{1}{|X(t,w)-X(s,w)|}\right) dt\,ds = \int_0^1\int_0^1 \log \frac{1}{|t-s|}\,dt\,ds$$

$$\leq M\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{|t-s|^\lambda}\,dt\,ds < +\infty$$

である。したがつて

$$E_0\left(\int_0^1\int_0^1 \log \frac{1}{|X(t,w)-X(s,w)|}\,dt\,ds\right) < \infty$$

となるから、殆んどすべてのpathに対して

$$\int_0^1\int_0^1 \log \frac{1}{|X(t,w)-X(s,w)|}\,dt\,ds < \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

が成立つ。$m_{\omega}(dx) = |\{t;\ X(t,w) \in dx\} \cap [0,1]|$
とおくと，（$|E|$でEのLebesgue測度を表わすことにする）
$m_{\omega} \in \mathfrak{F}_{X_{0.1}}$で

$$\int_{X_{0.1}}\int_{X_{0.1}} \log\frac{1}{|x-y|}\, m_w(dx)\,m_w(dy) < \infty$$

となる。すなわち，エネルギー積分有限ならしめる測度$m_w \in \mathfrak{F}_{X_{0.1}}$が存在することになり，第二章Prop2.20により，$X_{0.1}$は容量正となる。

(iv)　$N=1$かつ$1<\alpha\leq 2$の場合

第二章§3．例3及びProp.2.15によれば，任意のx，$y \in R^1$に対して$P_x\{\sigma_{\{y\}} < +\infty\} = 1$である。強マルコフ性と　$P_y\{\sigma_{\{x\}} < +\infty\} = 1$とより，出発点$x$にもどつてくる確率は1である。つまり出発点$x$は重複点であり，しかも任意の$k$に対して$k$重点になつているのである。これから重複点に対応する時点は無限にあることもわかる。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

§ 4.4 path の零点

1次元Brown 運動のPath の零点の集合は，詳細にしらべられている。Le'vy〔3〕. Ito.-Mckean〔1〕。それは Hausdorff 次元 $\frac{1}{2}$ の位相的Cantor 集合をなす。ここでは1次元対称安定過程についてその零点の集合をしらべてみることにする。第Ⅱ章 §3 例2 でみたように1点よりなる集合 F は $0<\alpha\leqq 1$で negligible $1<\alpha<2$ で non-negligible であつた。

これより

Prop.4.1 $Z=\{ t: X(t . w)=0 \}$ (零点の集合) とおく。

$0<\alpha\leqq 1$ で $P_o(Z=\phi)=1$

$1<\alpha\leqq 2$ で $P_o(Z\neq\phi)=1$

この§の目的は次の結果である。

定理 4.2

$1<\alpha\leqq 2$ で

$$P_o(\dim Z=1-\frac{1}{\alpha})=1$$

これより明らかに

系 Z は確率1で非可算集合。

証明 Brown 運動のときにならつて Local time を定義する。

$\varepsilon>0$ に対し

$$S_\varepsilon(t,w)=\frac{1}{\varepsilon}\int_o^t \chi_{(o,\varepsilon)}(X(s,w))ds$$

とおくとき $\{\varepsilon_m\}$，$\varepsilon_m\downarrow 0$ が存在して

$$P_0(S_{\varepsilon_m}(t,w)\to S(t,w) \text{ かつ収束は} t \text{ についてコンパクト一様})=1$$

がいえる。証明は 池田，上野，田中，佐藤〔1〕p22〜 と同様に出来る：

$$P(t,x)<Kt^{\frac{1}{\alpha}} \quad (K\text{は}x\text{に無関係})$$

に注意し

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$E_x(S_\varepsilon(t,w)) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \int_0^t p(s,x-y)ds\, dy$$

$$\to \int_0^t p(s,x-y)dy \quad (\varepsilon\to 0,\quad (x\cdot t)\in R^1\times[0,\infty)\text{上で コンパクト一様})$$

がいえる。すると上記論文 p23〜からの証明がそのままなりたつからくわしくはかかない。

$S(t,w)$ は あきらかに連続な additive functional である。

これを 0における local time という。

path の右連続性からもし $X(t,w)\fallingdotseq 0$ なら $t'>t$ が存在して $S(t,w)=S(t',w)$ は明らかで，したがつて

$$t(u,w)=\max\{t;\ u=s(t,w)\}$$

とおくと $X(t(u,w),w)=0$ となる。このことと $S(t,w)$ が additive functional ということから $t(u,w)$が P_0- 測度について右連続な加法過程になることは容易に示せる。その特性函数を

$E_0(e^{-\lambda t(u,w)}) = e^{-u\phi(\lambda)}$ とすると

$$\frac{1}{\phi(\lambda)} = \int_0^\infty E_0(e^{-\lambda t(u,w)})du = E_0\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}ds(t,w)\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}p(t,0)\,dt = g_\lambda(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\lambda+\xi^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{1+\eta^\alpha}$$

故に $t(u,w)$は $1-\dfrac{1}{\alpha}$ 次の片側安定過程である。

$Z\supset\{t,\ \exists_u\ t=t(u,w)\}$ は上のことから明らかである。

次にP_0 (すべての$t'<t''$ に対し$(t',t'')\cap Z\fallingdotseq\phi\Rightarrow S(t',w)<S(t'',w))=1$ をいう。 P_0(すべての有理数 $r'<r''$に対し $(r',r'')\cap Z\fallingdotseq\phi\Rightarrow S(r',w)$

$$<S(r'',w))=1$$

をいえばよいから特に ある $r'<r''$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$P_o\left((r', r'') \cap Z \neq \phi \Rightarrow S(r', w) < S(r'', w) \right) = 1$$

をいえばよい。それには $(r_1, r_2) \cap Z \neq \phi \Rightarrow r_1 + \sigma_{\{o\}}(w^+_{r_1}) < r_2$

なることと $P_o(t>0 \Rightarrow S(t, w) > 0) = 1$ なることを注意すればよい。

したがつて 確率1で

$$Z \subset \{ t : t = t(u, w) \text{ 又は } t = t(u-, w),\ u > 0 \}$$

実際 $X(t', w) = 0$ なら $t' < t < t''$ なる任意の t', t'' に対し

$S(t', w) < S(t'', w)$ 故に $u = S(t, w)$ とおくと

あきらかに $t = t(u-, w)$ か さもなければ $t = t(u, w)$.

故に §4.2 定理2.1 より 定理は証明された。(証3)。

§4.5 原点の近傍における挙動

この節では，一般の安定過程 $X(t)$ の $t=0$ の近傍における局所的な"Holder condition" ともいうべき簡単な性質について述べる。これから発展して，Khintchine が Brown 運動の場合に示したような重複対数の法則（$t\to\infty$のとき，$t\to0$ のときの両方とも）がえられてしかるべきであろうが，誰かによつて調べられているかどうか，筆者は知らない。

α次のN次元対称安定過程$X(t, w)$の連続密度函数を$f_\alpha(t, y)$，β次のN次元対称安定分布の連続密度函数をg_βで表わす。 すなわち

$$E_o\left(e^{i(x, X(t))}\right) = \int_{R^N} e^{i(x, y)} f_\alpha(t, y)\,dy = \exp\left[-t\left(C_0 + i\frac{x}{|x|}C_1\right)|x|^\alpha\right]$$

$$= e^{-t\phi(x)}, \quad \int_{R^N} e^{i(x, y)} g_\beta(y)\,dy = e^{-|x|^\beta}$$

とする。

Prop 5.1 $\alpha < \beta < 2$ とし

$$A(t) = \int_{R^N} e^{-|x|^\beta} f_\alpha(t, x)\,dx$$

とおくとき $\lim_{t \downarrow 0} t^{-1}[1 - A(t)] = k < \infty$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

証明 $A(t)=\int f_a(t,x)\,dx\int e^{i(x,y)}g_\beta(y)\,dy=\int e^{-t\phi(y)}g_\beta(y)\,dy$

$\therefore\ \dfrac{1}{t}[1-A(t)]=\int\dfrac{1}{t}[1-e^{-t\phi(y)}]\,g_\beta(y)\,dy$

$Re\ \phi(y)=C_0|y|^a>0$ であるから，すべての y に対して

$t^{-1}|1-e^{-t\phi(y)}|<|\phi(y)|=K|y|^a$ である。よつて $|y|^a\ g_\beta(y)\,dy$

$<+\infty$ ($\because\ \alpha<\beta\leqq 2$) であることとLebesgue の極限定理とからProp の主張の

正しいことがわかる。

定理 5.2 α次のN次元安定過程$X(t)$について

もしも $\alpha<\beta$ ならば

$$P_o\left(\lim_{t\to 0}\frac{X(t)}{t^{1/\beta}}=0\right)=1$$

証明 ここでKhintchine [1] によつてえられたつぎの結果を仮定する。$\{Y(t);t>0\}$ を一次元の時間的に一様な加法過程とする。$u(t)$ を $0<t<1$ で定義された正の非減少函数とし，$P_c(t)=P_o(|Y(t)|>cu(t))$ とするとき，確率1で $\lim_{t\to 0}Y(t)/u(t)=0$ が成立つための必要十分条件は任意の$c>0$に対して$\int_0^1 t^{-1}P_c(t)\,dt<\infty$ をみたすことである。これはN次元の場合にも成立つ。

$\alpha<2$ ならば $\alpha<\beta\leq 2$ なるβに対して証明すれば十分である。ηを正のある数とし，前のProp と同じ記号を用いることにすれば

$$1-A(t)=\int(1-e^{-|x|^\beta})f_a(t,x)\,dx\geqq\int_{|x|>\eta^{1/\beta}}(1-e^{-|x|^\beta})f_a(t,x)\,dx$$

$$>(1-e^{-\eta})P_o(|X(t)|>\eta^{1/\beta})$$

である。一方 $\eta^{-1}(1-e^{-\eta})\to 1$ ($\eta\to 0$のとき) であり，また前のprop により

$t^{-1}[1-A(t)]\to k<\infty$ ($t\to 0$のとき) である故に，もしもtとηを十分小さくとつておけば

$$P_o(|X(t)|^\beta>\eta)<K_\beta t\,\eta^{-1}$$

(ここでK_βは正の定数) が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

つぎに $u(t)=t^{1/\beta}$ とし，$\alpha<\gamma<\beta$ なるように γ を選ぶ。
そうすると任意の $c>0$ に対して

$$P_c(t)=P_o(|X(t)|>ct^{1/\beta})=P_o(|X(t)|^{\gamma}>c^{\gamma}t^{\gamma/\beta})<K_{\gamma}\,c^{-\gamma}t^{1-\gamma/\beta}$$

が t の十分小さいとき（どの程度小さくあればよいかは c に関係する）成り立つことになる。
よつて

$$\int_o^1 t^{-1}P_c(t)\,dt<K\int_o^{\varepsilon}t^{-\gamma/\beta}dt+\int_{\varepsilon}^1 t^{-1}P_c(t)\,dt<\infty$$

となり，Khintchine の定理から，確率 1 で $t^{-1/\beta}X(t)\to 0$

（$t\to 0$）がいえたことになる。

$\alpha=2$ のときは，くわしく述べないが Khintchine による重複対数の法則[1]から導けることである。

定理 5.3　α 次の N 次元安定過程 $X(t)$ について　もしも　$\beta<\alpha$　ならば

$$P_o\left(\overline{\lim_{t\to o}}\ \frac{|X(t)|}{t^{1/\beta}}=\infty\right)=1$$

証　明　$\beta<\gamma<\alpha$ なるような γ を選ぶ。$t^{-1/\gamma}X(t)$ の特性函数を $\rho_t(y)$ とかくことにすると，$\rho_t(y)=\exp[-t\psi(t^{-1/\gamma}y)]$ である。$\psi(y)=(C_o+i\frac{y}{|y|}C_1)\times|y|^{\alpha}$ に留意すれば，$n\to\infty$ のとき $|y_n|\to\infty$ かつ $|y_n|^{-\gamma}R_e\,\psi(y_n)\to\infty$ なる点列 $\{y_n\}$ が存在することがわかる。つぎに $t_n=|y_n|^{-\gamma}$，$\theta_n=|y_n|^{-1}y_n$ とおく。
このとき，$t_n\to 0$（$n\to\infty$）で θ_n は N 次元空間の単位球面上の点である。さらに

$$\rho_{t_n}(\theta_n)=\exp[-t_n\,\psi(t_n^{-1/\gamma}\theta_n)]=\exp[-|y_n|^{-\gamma}\psi(y_n)]\to 0$$

点列 $\{t_n^{-1/\beta}|X(t_n)|\}$ を考えると，この点列の上極限は加法過程 $X(t,w)$ の t の任意に小さい部分にのみ関係するから Blumenthal[2] の〔0－1法則〕によつて，確率 1 で定数 c に等しい。$c<\infty$ と仮定して矛盾を導く。このとき確率 1 で，$t_n^{-1/\gamma}|X(t_n)|\to 0$

(1)　伊藤　清「確率論」p.232 参照

(2)　K Ito〔2〕

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

であつて，特性函数の列ρ_{t_n} は，任意の有界集合の上で一様に1に近づかなくてはならない。しかしながらこれは $\rho_{t_n}(\theta_n)\to 0$ であることに矛盾するから，$c=\infty$でなければならない。

<u>注意</u>　$\beta<\alpha$ならば$t^{-1/\beta}|X(t)|$ は∞に確率収束することも証明される。(Blumenthal-Getoor [3] の Cor.5.1) さらに片側安定過程$T(t)$ のときには$\beta<\alpha$ならば $t^{-1/\beta}T(t)\to\infty$が確立1で成立ち，$\beta>\alpha$ならば $\liminf t^{-1/\beta}T(t)=0$ が同じく確率1で成立する。(Blumenthal-Getoor [3] のTh.6.2)

§ 4.6　path の変数

βをある正数，fを $[a,b]$ $(-\infty<a<b<\infty)$ からR^Nへの函数とする。fの $[a,b]$ の上のβ-variation $V_\beta(f;a,b)$ をつぎのように定義する。

$$V_\beta(f;a,b)=\sup\sum_{j=1}^{m}|f(t_j)-f(t_{j-1})|^\beta$$

ここでsup は $[a,b]$ の有限個からなる細分$a=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_m=b$ のすべてにわたるものとする。

われわれはfとして安定過程 $X(\cdot,w)$，$[a,b]$ として $[0,1]$ の場合を考察し，$V_\beta(X)=V_\beta(X(\cdot,w);0,1)$ なる記号を用いる。$X(\cdot,w)$の右連続性と，$|x|^\beta$が連続函数であることに注意するならば，細分 $0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_m=1$ において有理時点にのみ制限してsup をとつても，$V_\beta(X)$と等しい値をえる。したがつて$V_\beta(X)$は可算個の確率変数の上限ということになつて，それ自身が確率変数である。

<u>Prop 6.1</u>　$\beta<\gamma$かつ $V_\beta(f;a,b)<\infty$ ならば
$V_\gamma(f;a,b)<\infty$ となる

<u>証明</u>　$a_k>0$ とするとき，よく知られた不等式(1) $\left(\sum_k a_k^\gamma\right)^{1/\gamma}<\left(\sum_k a_k^\beta\right)^{1/\beta}$

によって $\Sigma|f(t_j)-f(t_{j-1})|^\gamma<\left(\Sigma|f(t_j)-f(t_{j-1})|^\beta\right)^{\gamma/\beta}$

であるから $V_\gamma(f)<(V_\beta(t))^{\gamma/\beta}<\infty$ となる。

<u>Prop 6.2</u>　$\beta<1$のとき，$V_\beta(f;a,b)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\left|f\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\right|^\beta$

---

(1) たとえば河田龍夫「応用数学概論Ｉ」p.8参照

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

証明 $x \geq 0$，$y \geq 0$ とすると，一般に $(x+y)^{\beta} \leq x^{\beta}+y^{\beta}$ [2] が成り立つことは，variation の場合，細分をより細かくすれば単調に非減少であることを意味する。

定理 6.3 α 次の N 次元安定過程 $X(t)$ について $\beta<\alpha$ ならば，確率 1 で $V_{\beta}(X)=\infty$ である。

証明 任意の正整数 n に対して

$$F_n(w) = \sum_{j=1}^{2^n} \left| X\left(\frac{j}{2^n}, w\right) - X\left(\frac{j-1}{2^n}, w\right) \right|^{\beta}$$

とし，さらに $F(w)=\sup F_n(w)$ とおく。明らかに $F(w)<V_{\beta}(X)$ であるから，殆んどすべての w に対して $F(w)=\infty$ を証面すれば十分である。前節の prop 5.1 と同じ記号を用いることにすると

$$A(t)=e^{-B(t)}=\int_{R^N} e^{-|x|^{\beta}} f_a(t,x)\,dx=\int e^{-t\phi(y)} g_{\beta}(y)\,dy$$

$$\leq \int e^{-t c_0 |y|^{\alpha}} g_{\beta}(y)\,dy$$

$$\therefore \frac{1}{t}[1-A(t)] > \frac{1}{t}[1-e^{-t c_0 |y|^{\alpha}}]\, g_{\beta}(y)\,dy$$

ところで $t^{-1}[1-e^{-t c_0 |y|^{\alpha}}]$ は $t \downarrow 0$ のとき，単調増大して $c_0 |y|^{\alpha}$ に近づくから，上の不等式の右辺において極限と積分の順序交換が許されて

$$\lim_{t\to 0}\frac{B(t)}{t}= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[1-A(t)] \geq c_0 \int |y|^{\alpha} g_{\beta}(y)\,dy=\infty \quad (\because \beta<\alpha)$$

$X(t)$ の時間的一様性と独立加法性により

$$0 \leq E_0(e^{-F(w)}) \leq E_0(e^{-F_n(w)})=[A(2^{-n})]^{2^n}=\exp[-2^n B(2^{-n})]$$

となるが，右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に近づく。かくして確率 1 で $F(w)=\infty$ がえられる。

以上は $\beta \leq \alpha<2$ の場合についての証明であるが，$\alpha=\beta=2$ の場合は，P，Lévy [1] の定理 9 で証明されており，$\beta<\alpha=2$ のときは prop 6.1 の対偶と Lévy の結果から

(2) 上掲書 p.7 参照

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

導かれて，すべての場合についてこの定理が正しいことがわかる。

定理 6.4　α次のN次元安定過程$X(t)$ について，$0<\alpha<1$ かつ $\alpha<\beta$ならば，確率1で$V_\beta(X)<\infty$ である。

証明　前節のprop 5.1 や前定理におけると同じような記号を用いる。まず$\beta<1$を仮定するとprop 6.2によつて $V_\beta(X)=\lim_{n\to\infty} F_n(w)$．　任意の$t>0$ と $u>0$ に対して

$$A(t,u)=e^{-B(t,u)}=\int_{R^N} e^{-u|x|^\beta} f_\alpha(t,x)dx$$

$$=\int f_\alpha(t,x)dx\int e^{i(u^{1/\beta}x,y)}g_\beta(y)\,dy=\int e^{-t\phi(u^{1/\beta}y)}g_\beta(y)\,dy$$

とおくと，Prop 5.1のときと全く同様にして

$$\frac{1}{t}\left[1-A(t)\right]\leq K\,u^{\alpha/\beta}\int|y|^\alpha g_\beta(y)\,dy<\infty$$

であつて右辺は $u\to 0$のとき，0に近づく。さらにLebesgue 極限定理によつて

$$\lim_{u\to 0}\lim_{t\to 0} t^{-1}B(t,u)=\lim_{u\to 0}\lim_{t\to 0} t^{-1}\left[1-A(t,u)\right]=0$$

である。

$$\lim_{u\to 0} E_0(e^{-uV_\beta(X)})=\lim_{u\to 0}\lim_{n\to\infty} E_0(e^{-uF_n(w)})$$

$$=\lim_{u\to 0}\lim_{n\to\infty}\exp\left[-2^n B(2^{-n},u)\right]=1$$

一方，$\lim_{u\to 0} E_0(e^{-uV_\beta(X)})=P_0(V_\beta(X)<\infty)$であるから

$P_0(V_\beta(X)<\infty)=1$　となる。prop 6.1と合わせると$\beta<1$なる仮定を除くことができて，証明が完結する。

以上のように $0<\alpha<1$のときだけについて β-variation の有限性が示されたが，一般の安定過程について，$\alpha\geq 1$のときは未解決である。ところが対称安定過程のときには，Subordination を用いて解決されている。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

定理 6.5　α次のN次元対称安定過程$X(t)$ について，$\alpha<\beta$ならば，確率1で $V_\beta(X)<\infty$ である。

証明　Paley-Wiener〔1〕の定理47で証明されている，Brown 運動に関する Hölder 連続性の定理を仮定する。すなわち

"$\{B(t,w);t>0\}$ をN次元Brown 運動とし，$0<\lambda<1/2$ かつ$K>0$とする。このとき，殆んどすべてのwに対して，確率変数$M(w)<\infty$ と $\varepsilon(w)>0$ が存在して $0\leq t_1\leq t_2\leq K$ かつ $|t_2-t_1|<\varepsilon(w)$ がみたされるとき

$$|B(t_2,w)-B(t_1,w)|<M(w)|t_2-t_1|^\lambda$$

が成り立つ。"

$\alpha=2<\beta$ のときは，この定理と，有界なt区間で，$B(t)$は有界であることから，われわれの定理を導くことができるが，その方針は，このすぐあとに述べる $0<\alpha<2$ の場合と同様なので，省略する。

$0<\alpha<2$の場合については，まず$\alpha/2$ 次の片側安定過程を$\{T(t);t\geq 0\}$とし，$\beta\lambda>\alpha/2$ なるように $\lambda<1/2$ を選ぶ。任意の$\delta>0$に対して，$K<\infty$と$P(\Omega_1)>1-\delta/3$ なるような$\Omega\supset\Omega_1$が存在して，もし$w\in\Omega_1$ならば，$T(1,w)<K$ とすることができる。このKとλをPaley-Wiener の定理に適用させると，$M<\infty$と $\varepsilon>0$ と $P(\Omega_2)>1-\delta/3$ をみたす$\Omega\supset\Omega_2$が存在して，もし$w\in\Omega_2$ならば，$M(w)<M$，かつ$\varepsilon(w)>\varepsilon$ が成り立つようにできる。最後に$J<\infty$と$P(\Omega_3)>1-\delta/3$ をみたす$\Omega\supset\Omega_3$が存在して，もし$w\in\Omega_3$ならばすべての$t\leq K$に対して$|B(t,w)|<J$ならしめることが可能である。$\Omega_0=\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3$とおけば，$P(\Omega_0)>1-\delta$である。$0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n=1$を〔0，1〕の有限箇からなる細分とするとき，$w\in\Omega_0$に対して，片側安定過程の増加量 $T(t_{j+1},w)-T(t_j,w)$ がεを超えるのは，高々 $[K/\varepsilon+1]=K'$ 個である。かくして $w\in\Omega_0$ならば

$$\sum_{j=1}^n|X(t_j,w)-X(t_{j-1},w)|^\beta=\sum_{j=1}^n|B[T(t_j,w),w]-B[T(t_{j-1},w),w]|^\beta$$

$$\leq(2J)^\beta K'+M^\beta\ \Sigma\,|T(t_j,w)-T(t_{j-1},w)|^{\beta\lambda}$$

となる。右辺第二項の和は，$T(t_j,w)-T(t_{j-1},w)\leq\varepsilon$ なるようなjについて加えたものである。よつて $w\in\Omega_0$ ならば

$$V_\beta(X)<(2J)^\beta K'+M^\beta\cdot V_{\beta\lambda}(T)$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

となるが，$\beta\lambda > \alpha/2$ かつ $1 > \alpha/2$ であるから前定理によつて $V_{\beta\lambda}(T) < \infty$ が確率1で成り立つ。以上から $P(V_\beta(X) < \infty) > 1-\delta$ であるが，δ は任意に小さい数であつつたから，われわれの定理がえられたことになる。

補遺

§4.1　本文にも書いておいたように，Hausdorff〔1〕に続いては，Besicovitch 学派の研究が多産であつて，それはBesicovitch〔1〕に始まり，彼の初期の論文は，Math, Annalen, 後期の彼や弟子たちの論文は，Jour. Lond. Math. Soc や Proc. Camb. Phil. Soc. などのイギリス系の雑誌やIndag. Math に散見される。本文中に引用した文献以外で参考にしたものは，亀谷〔2〕，Hurewicz-Wallman〔1〕である。本節の執筆に際しては，亀谷〔2〕に多く影響されている。

§4.2　定理2.1はBlumenthal-Getoor〔2〕で証明されたことである。ただし部分的に訂正したり，改良した点もある。この論文ではquasi-stable の場合も調べてある。Hausdorff 測度を確率論に応用した研究は，Lévy〔2〕に始まるが，これは本シリーズvol.9 pp65-67 に解説されている。これとは独立に，Taylor〔1〕はN次元Brown 運動の曲線のHausdorff 次元を決定し，Besicovitch-Taylor〔1〕とTaylor〔2〕の一次元Brown 運動の零点に関する研究がこれに続く。McKean〔2〕は，彼がBesicovitch のもとで研究していた時期の産物であろう。安定過程についてはMcKean〔1〕，Blumenthal-Getoor〔1〕をへて，Blumenthal-Getoor〔2〕で一応完成された。Blumenthal-Getoor〔3〕は，Gaussian part のない加法過程について，安定過程の場合のanalogy を追つているが，完全な結果とはいい難い。

§4.3　Brown 運動の重複点に関する研究の歴史を述べておこう。まずLévy〔1〕は二次元のときには，重複点に対応する時点は，いたるところdense な非可算集合であるが測度0であると述べている。Kakutani〔1〕は五次元のときを調べたが，Dvoretzky-Erdős-Kakutani〔1〕は，ポテンシャル論を援用することによつて，三次元と四次元の場合についても解決した。ついでDvoretzky-Erdős-Kakutani〔2〕は二次元のとき，多重点の存在を証明し，Dvoretzky-Erdős-Kakutani-Taylor〔1〕は三次元のとき，三重点のないことを示した。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

§4.4　本書執筆中に到着したBlumenthal-Getoor〔4〕では，Taylor〔2〕がBrown 運動の場合に調べた零点とグラフの次元を対称安定過程の場合に求めている。これは本節と同一の結果であるが，方法は異なるものである。なおIto-McKean〔1〕に，Brown 運動の零点についての精細な研究が述べられていることを注意しておく。

§4.5　本節はBlumenthal-Getoor〔3〕の結果を整理したものである。彼らはGaussian part のない加法過程で，安定過程を含むような条件の下で証明している。この研究を本書のように安定過程でやると証明がだいぶ簡略になる。

§4.6　この種の研究は，Lévy〔1〕，Bochner〔1〕に始まる。Bochner の研究は，Bochner〔2〕の§5.3にも述べられている。定理6.3と定理6.4は Blumenthal-Getoor〔3〕をもとにして書いたものだが，証明の基本方針はBochner の方法である。定理6.5はBlumenthal-Getoor〔2〕による。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

第５章　時空安定過程のMartin境界

この章では片側の時空安定過程に於る調和函数の積分表現を具体的に構成する。

まず時空安定過程を定義する。

x_t (w) をΩ $(B\cdot P)$ に於て定義された片側の安定過程とする。

x_t (w) の特性函数は今次の様に与えられる。

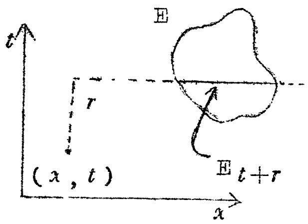
$$(5\cdot1)\qquad E(e^{i\xi x_t(w)})=exp\left\{-t|\xi|^{\alpha}\left(1-i\frac{\xi}{|\xi|}\tan\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right\};\ 0<\alpha<1$$

x_t (w) の確率密度函数を$p(x\cdot t)$ $x\geq 0$ と記す。

通常$p(t\cdot x)$ と書くが後の計算の都合上時間と空間を逆にしておく。

State S を $S\equiv\left\{(x\cdot t)\ \begin{matrix}0\leq x<\infty\\ 0\leq t<\infty\end{matrix}\right\}$とし通常のtopologyを入れておく。推移確率系 $p(r\cdot(x\cdot t),E)$ $E\in B(S)$ を

$$(5\cdot2)\qquad p(r\cdot(x\cdot t)\cdot E)=\int_{E_{t+r}}p(y-x\cdot r)\,dy$$



で与える。ここに $E_{t+r}=\{(z\cdot t+r):(z\cdot t+r)\in E\}$ とする。

定義　　Sの上に（５・２）を推移確率とするMarkov過程を時空安定過程（Markov過程としての）という。

定義　　次の関係をみたす函数$u(x\cdot t)$；$(x\cdot t)\in S$を調和函数という（T_t－調和）

$$(5\cdot3)\qquad u(x\cdot t)=\int_0^{\infty}u(x+y,t+s)\,p(y\cdot s)\,dy$$

（任意の固定した $s>O$ に対して。）

$u(0\cdot0)$： 正で有限，$u(x\cdot t)\geq 0$ のとき（５・３）の解の積分表現を求めることがこの章の問題である。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

準備として二つのLemmaを挙げる。

Lemma 確率密度函数（index αの安定過程の）$p(x\cdot t)$は次の性質をもつ。

(5.4) $p(x\cdot t)=C^{\frac{1}{\alpha}}\,p(C^{\frac{1}{\alpha}}x,\ ct)$ $c>0$: constant.

証明 第1章§2によって $x_t(w)\sim C^{-\frac{1}{\alpha}}x_{ct}(w)$

$$\therefore\ p(x_t(w)\in E)=\int_E p(x\cdot t)\,dt$$

又 $p(x_t(w)\quad E)=p(c^{-\frac{1}{\alpha}}x_{ct}(w)\ \varepsilon E)=p(x_{ct}(w)\ \varepsilon C^{\frac{1}{\alpha}}E)$

$$=\int_{c^{\frac{1}{\alpha}}E} p(y\cdot ct)\,dy,\quad *ここで$$

$y=C^{\frac{1}{\alpha}}x$ とおいて

$$*=\int_E p(C^{\frac{1}{\alpha}}x,ct)C^{\frac{1}{\alpha}}\,dx$$

$$\therefore\ p(x\cdot t)=C^{\frac{1}{\alpha}}\,p(C^{\frac{1}{\alpha}}x\cdot\ ct)$$

Lemma （安定分布の密度函数の漸近公式）

(5.1) 式の安定過程の密度函数$p(x\cdot 1)$について次の公式がなりたつ。

(5.5) $x\downarrow 0$のとき

$$p(x\cdot 1)=A(\alpha)\,x^{-1-\frac{\lambda(\alpha)}{2}}\,exp(-B(\alpha)\,x^{-\lambda(\alpha)})\times\left[1+O(x^{\frac{\lambda}{2}-\varepsilon})\right]$$

ここに $A(\alpha)=\dfrac{\alpha^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(\cos\frac{\pi}{2}\alpha)^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}}}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)}}$ $\quad\lambda(\alpha)=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$

$$B(\alpha)=(1-\alpha)\,\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}$$

(5.6) $x\to\infty$のとき

$$p(x\cdot 1)=\frac{1}{\pi x}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{-\alpha n}$$

ここに $a_n=\dfrac{(-1)^n\,\Gamma(\alpha+1)}{n!}\left(1+\tan^2\frac{\pi}{2}\alpha\right)^{\frac{n}{2}}\sin(\pi\alpha)$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

この公式及び他の安定分布に対する同様の公式についてはA，B，Ckopoxo△〔1〕参照

以上の準備のもとに表現を得よう。

(5．3) $u(x\cdot t)=\int_0^\infty u(x+y\cdot t+s)\,p(y\cdot s)\,dy \quad s>0$

$u(0\cdot 0)$ 正，有限　　$u(x\cdot t)\geq 0$ である。

$x+y\to y,\quad s+t\to S$ と変換すると

$$u(x\cdot t)=\int_x^\infty u(y\cdot s)\,p(y-s,s-t)\,dy\ ;\ \begin{matrix} s\geq t\\ y\geq x\end{matrix}$$

$$=\int_x^\infty \frac{p(y-s,s-t)}{p(y\cdot s)}\,p(y\cdot s)\,u(y\cdot s)\,dy \quad (*)$$

ここで　$y=sb$ とおくと

$$(*)=\int_{\frac{x}{s}}^\infty \frac{p(sb-x,s-t)}{p(sb\cdot s)}\,sp\,(sb\cdot s)\,u(sb\cdot s)\,db \quad (**)$$

ここで $\dfrac{p(sb-x\cdot s-t)}{p(sb\cdot s)}\equiv 0$; $sb\leq x$ に対して，とおくと

(5．7) $(**)=\int_0^\infty \dfrac{p(sb-x\cdot s-t)}{p(sb\cdot s)}\,sp\,(sb\cdot s)\,u(sb\cdot s)\,db\ ,\quad S\geq t$

第一段階として　$\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{p(sb-x\cdot s-t)}{p(sb,s)}$ を求める（$x\cdot t$ を固定）

（5．7）のその他の部分は将来測度になるべき部分である。

(I)　$\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{p(sb-x\cdot s-t)}{p(sb\cdot s)}$ に関して。

Lemma（確率密度函数の時空変換についての）を用いて

$$\frac{p(sb-x\cdot s-t)}{p(sb\cdot s)}=\left(\frac{s}{s-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{p\left(\frac{sb-x}{(s-t)^{\frac{1}{\alpha}}},\ 1\right)}{p\left(\frac{sb}{s^{\frac{1}{\alpha}}},\ 1\right)}$$ ここで（5．5）を用いて

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$=\left(\frac{s}{s-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{A(\alpha)\left\{\frac{sb-x}{(s-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-1-\frac{1}{2(1-\alpha)}}exp\left[-B(\alpha)\left\{\frac{sb-x}{(s-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]}{A(\alpha)\left\{\frac{sb}{s^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-1-\frac{1}{2(1-\alpha)}}exp\left[-B(\alpha)\left\{\frac{sb}{s^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]}$$

$$\times\frac{\left[\left[1+o\left(\left\{\frac{sb-x}{(s-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}-\varepsilon'}\right)\right]\right.}{\left[1+o\left(\left\{\frac{sb}{s^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}-\varepsilon'}\right)\right]}$$

$$=\left(\frac{s}{s-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left\{\frac{1-\frac{x}{sb}}{\left(1-\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-1-2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}exp\left[-B(\alpha)\,sb^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left\{\left(1-\frac{x}{sb}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1-\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-1\right\}\right]$$

$$\times\frac{\left[1+o\left(\left\{\frac{sb-x}{(s-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}-\varepsilon'}\right)\right]}{\left[1+o\left(\left\{\frac{sb}{s^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}-\varepsilon'}\right)\right]}\qquad (5.8)$$

（5．8）で$exp.$の部分をとり出して（$1-\frac{x}{sb})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$，（$1-\frac{t}{s})^{\frac{1}{1-\alpha}}$を展開すると次の様になる。

$$exp\left[-B(\alpha)\,sb^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left\{\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x}{sb}+\frac{1}{2!}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left\{1-\theta\frac{x}{sb}\right\}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-2}\left(\frac{x}{sb}\right)^2\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(1-\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{t}{s}\right)+\frac{1}{2!}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left\{1-\theta'\frac{t}{s}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}-2}\left(\frac{t}{s}\right)^2\right)-1\right\}\right];\ \begin{array}{l}0<\theta<1\\0<\theta'<1\end{array}$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$=exp[-B(\alpha)sb^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x}{sb}-\frac{1}{1-\alpha}\frac{t}{s}+\frac{1}{2!}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}(1-\theta\frac{x}{sb})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-2}(1-\frac{1}{1-\alpha}\frac{t}{s})(\frac{x}{sb})^2$$

$$+\frac{1}{2!}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}(1-\theta'\frac{t}{s})^{\frac{1}{1-\alpha}-2}(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x}{sb})(\frac{t}{s})^2$$

$$+\frac{1}{2!2!}\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^4}(1-\theta\frac{x}{sb})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-2}(1-\theta'\frac{t}{s})^{\frac{1}{1-\alpha}-2}(\frac{x}{sb})^2(\frac{t}{s})^2\}]$$

$$=exp[-B(\alpha)b^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x}{b}-\frac{1}{1-\alpha}t+\frac{1}{2!}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}(1-\theta\frac{x}{sb})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-2}(1-\frac{1}{1-\alpha}\frac{t}{s})\frac{x^2}{b}\frac{1}{s}$$

$$+\frac{1}{2!}\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}(1-\theta'\frac{t}{s})^{\frac{1}{1-\alpha}-2}(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x}{sb})\frac{t^2}{s}$$

$$+\frac{1}{2!2!}\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^4}(1-\theta\frac{x}{sb})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-2}(1-\theta'\frac{t}{s})^{\frac{1}{1-\alpha}-2}(\frac{x}{sb})^2\frac{t^2}{s}\}] \quad (5.9)$$

任意の$0<\delta<A<+\infty$なる〔δ．A〕をとり固定すると，$b\in$〔δ．A〕で（5．9）すなわち（5．8）のexpの部分は$s\to+\infty$のとき一様に

$$(5.10) \quad exp[-B(\alpha)b^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x}{b}-\frac{1}{1-\alpha}t\}]$$

$$=exp[-B(\alpha)\{\frac{\alpha}{1-\alpha}b^{\frac{1}{\alpha-1}}x-\frac{t}{1-\alpha}b^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\}]$$ に収束する。

（5．8）のexp以外の部分 $(\frac{s}{s-t})^{\frac{1}{\alpha}}\{\frac{1-\frac{x}{sb}}{(1-\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}}\}^{-1-\frac{1}{2(1-\alpha)}}$，

$$\frac{[1+o(\{\frac{sb-x}{(s-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\}^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}-\varepsilon'})]}{[1+o(\{\frac{sb}{s^{\frac{1}{\alpha}}}\}^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}-\varepsilon'})]}$$ も〔δ．A〕で$s\to\infty$のとき一様に1に収束する。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

以上により $\lim_{s\to\infty} \dfrac{p(sb-x, s-t)}{p(sb, s)} = exp\left[-B(\alpha)\left\{\dfrac{\alpha}{1-\alpha} x b^{\frac{1}{\alpha-1}} - \dfrac{t}{1-\alpha} b^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}\right]$

収束は〔δ . A〕で一様。勿論 b を固定すると各点で収束。

第二の段階として収束が（0 . ∞）で一様であることを示す。

（Ⅱ） 収束の一様性について

〔δ . A〕に於て一様である事は証明できているから（δ . A . 任意）$A \leq b$ 及び $b \leq \delta$ について証明すればよい。

（Ⅱ－A） $A \leq$ について

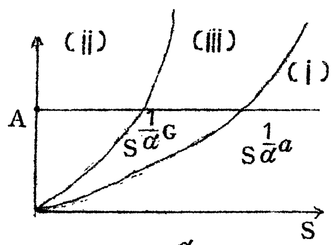
(5.11) $exp\left[-B(\alpha)\left\{\dfrac{\alpha}{1-\alpha} x b^{\frac{1}{\alpha-1}} - \dfrac{t}{1-\alpha} b^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right\}\right] \equiv F(b)$ とおく

$\lim_{b\to\infty} F(b) = 1$ であるから $\forall \varepsilon > 0$ が与えられたとき A を十分大きく $|F(b) - 1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ $A \leq b$ となるようにし，このとき s が存在して $s <\ \ s$ に対して

$$\left|\frac{p(sb-x . s-t)}{p(sb . s)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$ とできる事を示せば良い。

ここで b は $A \leq b$ なのであるが，収束の一様性を証明するためには b が S と共に $+\infty$ に S の早さに関して色々の order で $+\infty$ に近づく事が可能なため，そのすべての場合について収束の様子を調べる必要がある。ここでは $b\ \ +\infty$ の早さを次の三つの場合に分類して，それぞれ一様であることを示す。

（ⅰ） $A \leq b \leq s^{\frac{1}{\alpha}-1} a$ のとき（a : 十分小）



$$\frac{P(sb-x . s-t)}{P(sb . s)} = \left(\frac{s}{s-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left\{\frac{1-\frac{x}{sb}}{(1-\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-1-2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}$$

$$\times exP\left[-B(\alpha)\, b^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\ \frac{x}{b} - \frac{t}{1-\alpha} + \frac{1}{2!}\ \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left\{1-\theta\frac{x}{sb}\right\}^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-2} \times\right.\right.$$

$$\left(1-\frac{1}{1-\alpha}\ \frac{t}{s}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^2 \frac{1}{s} + \frac{1}{2!}\ \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left\{1-\theta\frac{t}{s}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}-2}\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\ \frac{x}{sb}\right)\frac{t^2}{s}$$

$$+\frac{1}{2!}\ \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(1-\theta'\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-2}\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\ \frac{x}{sb}\right)\frac{t^2}{s}$$

$$+\frac{1}{2!\,2!}\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^4}\left(1-\theta\frac{x}{sb}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}-2}\left(1-\theta'\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-2}\left(\frac{x}{sb}\right)^2\frac{t^2}{s}\}\Big]$$

$$\times\frac{\left[1+o\left(\left\{\frac{sb-x}{(s-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}-\varepsilon'}\right)\right]}{\left[1+o\left(\left\{\frac{sb}{s^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}-\varepsilon'}\right)\right]}$$

この式で exp までの部分は $A\leq b$ で一様に 1，1，$F(b)$ に収束する。

最後の部分は $\dfrac{1-K\left\{\frac{a-xs^{-\frac{1}{\alpha}}}{(1-\frac{t}{s})}\right\}^{2\frac{\alpha}{(1-2)}}}{1+Ka^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}}$ と $\dfrac{1+K\left\{\frac{a-xs^{-\frac{1}{\alpha}}}{(1-\frac{t}{s})}\right\}^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}}{1-Ka^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}}$

ここに K：正の常数； で上と下から押えられ a を十分小にとつておくと，いくらでも 1 に近づく。

従つて $\varepsilon>0$ に対し，ある $a>0$ がきまり $A\leq b\leq s^{\frac{1}{\alpha}-1}a$ では S_1 が存在し，

$^\exists S_1<{}^\forall S$ で $\left|\dfrac{p(sb-x.\,s-t)}{p(sb\cdot s)}-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ とできる。

(ii) $s^{\frac{1}{\alpha}-1}G\leq b$ のとき (G：十分大)

$b=s^{\frac{1}{\alpha}-1}C$ とおく， $G\leq C$

$$\frac{p(sb-x.\,s-t)}{p(sb\cdot s)}=\left(\frac{s}{s-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{p\left(\frac{c-\frac{x}{s^{\frac{1}{\alpha}}}}{(1-\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot 1\right)}{p(c\cdot 1)}\quad(*)$$

ここでLemmaの (5．6) 式を用いて

$$(*)=\left(\frac{s}{s-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{c}{\frac{c-xs^{-\frac{1}{\alpha}}}{(1-\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}}}\frac{\left[a_1\left\{\frac{c-s^{-\frac{1}{\alpha}}x}{(1-s^{-1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-\alpha}+a_2\left\{\frac{c-s^{-\frac{1}{\alpha}}x}{(1-s^{-1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-2\alpha}+a_3\{\quad\}^{-3\alpha}+\cdots\right]}{\left[a_1c^{-\alpha}+a_2c^{-2\alpha}+a_3c^{-3\alpha}+\cdots\right]}$$

$$=\left(\frac{s}{s-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{\dfrac{c}{\dfrac{c-xs^{-\frac{1}{\alpha}}}{(1-\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}}}\left[a_1\left\{\dfrac{1-s^{-\frac{1}{\alpha}}c^{-1}x}{(1-s^{-1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-\alpha}+a_2\left\{\dfrac{1-s^{-\frac{1}{\alpha}}c^{-1}x}{(1-s^{-1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-2\alpha}c^{-\alpha}+\cdots\right]}{\left[a_1+a_2c^{-\alpha}+a_3c^{-2\alpha}+\cdots\right]}$$

第一，第二の部分は$G\leq c$に於て一様に1に近づく第三の部分でa_nはnについて一様に有界（5．6）式でa_nの形から）であるから$|a_n|\leq M$とおく。$\left\{\dfrac{1-s^{-\frac{1}{\alpha}}c^{-1}x}{(1-s^{-1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-\alpha}$は$G$

$G\leq c$で一様にある正の常数qで押えられる。よつてこの部分は$G\leq c$に対して

$$\frac{a_1\left\{\dfrac{1-s^{-\frac{1}{\alpha}}c^{-1}x}{(1-s^{-1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-\alpha}-qM\dfrac{qG^{-\alpha}}{1-qG^{-\alpha}}}{a_1+M\dfrac{G^{-\alpha}}{1-G^{-\alpha}}}$$ と

$$\frac{a_1\left\{\dfrac{1-s^{-\frac{1}{\alpha}}c^{-1}x}{(1-s^{-1}t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-\alpha}+qM\dfrac{qG^{-\alpha}}{1-qG^{-\alpha}}}{a_1-M\dfrac{G^{-\alpha}}{1-G^{-\alpha}}}$$ で上と下から押えられる。従つて

$\forall\varepsilon>0$を与えるとS_2が存在し，$S_2<\forall S$に対して$S^{\frac{1}{\alpha}-1}G\leq b$で

$\left|\dfrac{p(sb-x.s-t)}{p(sb.s)}-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$とできる。

(iii) $S^{\frac{1}{\alpha}-1}a\leq b\leq S^{\frac{1}{\alpha}-1}G$ のとき

$b=S^{\frac{1}{\alpha}-1}C\qquad a\leq C\leq G$とおく。

$$\frac{p(sb-x.s-t)}{p(sb.s)}=\left(\frac{s}{s-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{p\left(\dfrac{c-xs^{-\frac{1}{\alpha}}}{(1-\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}},1\right)}{p(c.1)}$$

p (x ・ 1) は$a \leq x \leq G$で一様連続且つ$\neq 0$であるから$s^{\frac{1}{\alpha}-1} a \leq b \leq s^{\frac{1}{\alpha}} G$ なるbに関してS_3 が存在して$S_3 < \forall S$に対して $\left| \dfrac{p(sb-x \cdot s-t)}{p(sb \cdot s)} - 1 \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ とできる。

以上で $Max\{S_1, S_2, S_3\}$ をとることによつて$A \leq b$の部分の一様収束は証明された。

(Ⅱ・B) $b \leq \delta$について

$$F(b) \equiv exp\left[-B(\alpha)\, b^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x}{b} - \frac{1}{1-\alpha} t\right\}\right]$$ と書いているが，

$\lim\limits_{b \to \infty} F(b) = 0$である。

$\varepsilon > 0$を与えるとき，δとSがきまり$F(b) < \dfrac{\varepsilon}{2}$，$b < \delta$ $\dfrac{p(sb-x \cdot s-t)}{p(sb \cdot s)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$，

$b < \delta$， $S > S$ となることを示せば良い。$sb \leq x$のとき $\dfrac{p(sb-x \cdot s-t)}{p(sb \cdot s)} \equiv 0$

と約束しているから $sb \leq x$ については上の事がなりたつている。

$$\frac{p(sb-x \cdot s-t)}{p(sb \cdot s)} = \left(\frac{s}{s-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left\{\frac{(1-\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}}{(1-\frac{x}{sb}}\right\}^{1+\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}}$$

$$\times exp\left[-B(\alpha)\, sbb^{-\frac{1}{1-\alpha}} \left\{\frac{(1-\frac{t}{s})^{\frac{1}{\alpha}}}{(1-\frac{x}{sb}}\right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1\right]$$

$$\times \frac{\left[1+o\left(\left\{\dfrac{sb-x}{(s-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}-\varepsilon'}\right)\right]}{\left[1+o\left(\left\{\dfrac{sb}{s^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}-\varepsilon'}\right)\right]} \qquad (5 \cdot 12)$$

この式で最初と最後の部分は一様に１に収束するから中の二つの部分について考える。

中の二つの部分は（５、１３）

$$\left\{\frac{1}{(1-\frac{x}{sb})}\right\}^{1+2\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} exp\left[-B(\alpha)\, sbb^{-\frac{1}{1-\alpha}} \left\{\left(1-\frac{x}{sb}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(1-\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1\right\}\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

で押えられる。bを固定して$sb=A$とおく。$x<A<\infty$である（5．13）を書きかえて

$$(5.14):\ (1-\frac{x}{A})^{-(1+2\frac{\alpha}{(1-\alpha)})} exp\left[-B(\alpha)Ab^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left\{(1-\frac{x}{A})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\frac{b}{A}t)^{\frac{1}{1-\alpha}}-1\right\}\right]$$

$\equiv g_b(A)$ とおく　　$(x<A<\infty)$

$g_b(A)$ は$A\rightarrow x$のとき$g_b(A)\rightarrow 0$である。そこで$g_b(x)=0$と定義する。
$g_b(A)$ は又$A\rightarrow+\infty$で，$exp\left[-B(\alpha)\,b^{-\frac{1}{1-\alpha}}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}x-\frac{1}{1-\alpha}bt\right\}\right]$に収束する。
ここで
$g_b(\infty)=exp\left[-B(\alpha)\,b^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}x-\frac{1}{1-\alpha}bt\right\}\right]$ とする。
この様に〔x．$+\infty$〕に拡張された$g_b(A)$ は〔x．$+\infty$〕で連続
$b\rightarrow 0$のとき〔x．$+\infty$〕の各点で単調に0に収束している。Dini の定理により$g_b^b(A)$ は〔x．$+\infty$〕で一様に0に収束。

以上の事実により　$\varepsilon>0$に対し，$\delta_2(\leq\delta_1)$ 及びSがきまり $b\leq\delta_2$．$S\geq S$　で

$\dfrac{p(sb-x.s-t)}{p(sb.s)}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となる。

$F(b)\rightarrow 0$　$(b\downarrow 0)$ よりδ_3 がきまり $\delta_3\geq b$ に対し $F(b)<\dfrac{\varepsilon}{2}$
よつて Min $(\delta_2, \delta_3)=\delta$として　$\delta\geq b$の部分の一様性が証明できた。

以上によつて $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{p(sb-x.s-t)}{p(sb.s)}=F(b)$ 及びその（$0+\infty$）での一様性が証明できた。以後$F(0)=0$　$F(\infty)=1$と定義しておく。$F(b)$ は〔0．$+\infty$〕で連続となる。

Ⅲ　測度の収束と積分表現

$$u(x.t)=\int_0^\infty\frac{p(sb-x.s-t)}{p(sb.s)}\ sp(sb.s)\,u(s.b)\,db$$

$$=\int_0^\infty\frac{p(sb-x.s-t)}{p(sb.s)}\,d\mu_s(b)\ \text{とおく。}$$

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

ここに$\mu_s(b)=\int_0^b sp(sa.s)\,u(sa.s)\,da$

$$=\int_0^{sb} p(a.s)\,u(a.s)\,da \leq \int_0^{\infty} p(a.s)\,u(a.s)\,da=u(0.0) \text{（正で有限）}$$

μ_s は〔$0+\infty$〕の測度で total mass $u(0.0)$ である。

μ_s を〔$0+\infty$〕の測度で total mass $u(0.0)$ と考えても良い。Helly の定理により〔$0.+\infty$〕の測度μ' が存在し，total mass $u(0.0)$で$\mu_{s'}\to\mu$ $s'\to\infty$ とできる。

$$|u(x.t)-\int_0^{\infty} F(b)\,d\mu(b)|=|\int_0^{\infty}\frac{p(s'b-x.s'-t)}{p(s'b.s')}\,d\mu_{s'}(b)$$

$$-\int_0^{\infty} F(b)\,d\mu(b)| \leq \int_0^{\infty}|\frac{p(s'b-x.s'-t)}{p(s'b.s')}-F(b)|\,d\mu_{s'}(b)$$

$$+|\int_0^{\infty} F(b)\,[d\mu_{s'}-d\mu]|$$

第一項は一様収束性，第二項は$F(b)$の連続性と測度の収束により$\downarrow 0$である。$F(0)=0$より測度μは（$0.+\infty$〕の測度（0にpoint massをもたぬ）と考えて良い。

以上により次の定理がなりたつ。

定理５．１　$u(0.0)$ 正且つ有限 $u(x.+)\geq 0$ の調和函数$u(x.t)$は次の積分表現をもつ

$$(5.15)\quad u(x.t)=\int_0^{\infty} exp\left[-B(\alpha)\,b^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{x}{b}-\frac{1}{1-\alpha}\,t\right\}\right]d\mu(b)$$

μは（$0.+\infty$〕の有界な測度

ただし Kernel は $b=0$で0 $b=+\infty$で１ときめておく。

(5.15) は $E(e^{-sx_t(w)})\equiv L(s)\ (=e^{-t(\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}\alpha)^{-1}s^{\alpha}})$

$$-\frac{L'(s)}{L(s)}=b \text{ の解を } S(b)\left(=\left\{\frac{\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}\alpha}{\alpha}b\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}\right.$$ とおく事によつて，

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

$$(5.16)\quad u(x.t)=\int_0^\infty \frac{e^{-s(b)x}}{[L(s(b))]^t}\,d\nu(b)$$ と書ける。

ここにνは$(0+\infty]$の測度，Kernel は$b=0$で0　$b=\infty$で1
又は

$$(5.17)\quad u(x.t)=\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{[L(s)]^t}\,dv(s)$$

ここに　vは$[0.+\infty)$の測度　Kernel は$s=0$で1ときめておく。

(IV)　表現の uniqueness について

$$(5.17)\quad u(x.t)=\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{[L(s)]^t}\,dv(s)$$ より

$v(s)$が0にpoint mass をもたぬなら Laplace 変換の一意性によりunique
次にもし

$$u(x.t)=C_1+\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{[L(s)]^t}\,d\nu_1(s)$$

$$=C_2+\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{[L(s)]^t}\,d\nu_2(s)$$

v_1，v_2 は$(0.+\infty)$の有界な測度

$$\forall(x.+)について\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{[L(s)]^t}\,d[v_1(s)-v_2(s)]=C_2-C_1$$

従つて　$C_2=C_1$ 且つ $v_2\equiv v_1$
以上によつて表現のuniquenessが示された。
定理5.2　(5.15)，(5.16)，(5.17) の積分表現はuniqueである。

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

文　献

Besicovitch, A. S. [1] On linear sets of points of fractional dimension, Math. Ann. vol.101 (1929) 161–193

〃 [2] On the existence of subsets of finite meaure of sets of infinite measure, Indag. Math. vol.14 (1952) 339–344

Besicovitch, A. S.–Taylor, S. J. [1] On the complementary intervals of a linear closed set of Zero Lebesgue measure, J. London, Math. Soc. vol.29 (1954) 449–459

Blumenthal, R. M–Getoor, R. K. [1] Some theorems on stable processes, Trans. Amer, Math. Soc. vol 95 (1960) 263–273

〃 〃 [2] A dimension theorem for sample functions of stable processes, Ill, J. Math. vol 4 (1960) 370–375

〃 〃 [3] Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments, J. Math, Mech. vol.10 (1961) 493–516

〃 〃 [4] The dimension of the set of zeros and the graph of a symmetric stable process, Ill, J. Math. vol.6 (1962) 308–316

Bochner, S [1] Length of random paths in generel homogeneons spaces, Ann. of Math. vol.57 (1953) 309–313

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

Bochner.S〔2〕 Harmonic analysis and the theory of probability, Berkeley and Los Angeles, (1955)

Davies, R.O. 〔1〕 Subsets of finite measure in analytic sets, Indag. Math., vol.14 (1952) 488—489

Doob, J.L. 〔1〕 Stochastic processes.

Dvoretzky,A—Erdős, P—Kakutani, S. 〔1〕 Double points of paths of Brownian motion in n—space. Acta Sci. Math. Szeged, vol.12 (1950) 75—81

〃 〃 〃 〔2〕 Multiple points of paths of Brownian motion in the plane. Bull, Res. Coun. Israel, vol. 3 (1954) 364—371

Dvoretzky, A—Erdős, P—Kakutani,S—Taylor,S.J. 〔1〕 Triple points of Brownian paths in 3—space, Proc, Camb. Phil. Soc vol 53 (1957) 856—862

Dynkin, E.B. 〔1〕 Some limit theorems for sums of independent random variables with infinite mathematical expectation, Izv.Acad. Nauk. SSSR., 19(1955) 247—266

Elliott. J. 〔1〕 The boundary value problems and semi—groups associated with certain integro—differential operators, T.A.M.S. 76 (1954) 300—331

〃 〔2〕 Absorbing barrier processes connected with the symmetric stable deusities. Illinois J. Math. 3 (1959) 200—216.

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

Elliott.J and Feller, W [1] Stochastic processes connected with harmonic functions, T.A.M.S, vol.82(1956) pp392–420

Frostman,O. [1] Potentiel d'equilibre et capacite' des ensembles avec quelques applications a la the'orie des fonctions, Medd. Lunds Unir Mat. Sem. vol 3 (1935)

〃 [2] Les points irreguliers dans la theoie du potentiel et le critere de Wiener. (1938)

Гельфанд, И.М-Шилов, Г.И.[1] Обобщенные функции (I)

Hausdorff, F. [1] Dimension und ausseres Mass. Math. Ann. vol.79 (1919) 157–179

Hunt, G.A. [1] Some theorems concerning Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc. vol.81(1956) 294–319

〃 [2] Markoff processes and Potentials Illinois J.Math I.II.III. (1957.1958)

Hurewicz, W–Wallman, H. [1] Dimension theory, Princeton (1941)

池田, 上野, 田中, 佐藤 [1] 多次元拡散過程の境界問題(下) Sem. on Prob. vol.6.

N.Ikeda–S.Watanabe [1] On some relations between Le' measure and harmonic measure for a certain class of Markov processes (to appear)

伊藤 清(K.Ito) [1] 確率論(岩波) 1953

〃 [2] Stochastic processes. Tata institute note.

〃 [3] 確率過程 I 岩波応数講座

伊藤 清 〔4〕 Subordinalionについて 数理科学研究報告

伊藤,福島,渡辺〔1〕 一次元拡散過程 Sem. on Prob. vol.3

Ito,K.—McKean,H.P.〔1〕 Diffusion theory, Springer (to appear)

Kac. M 〔1〕 On some connections between probability theory and integral and differential equations 2nd. Berkeley Sym.(1950)

Kakutani,S. 〔1〕 On Brownian motion in n-space, Proc. Acad. Tokyo. vol 20(1944) 648—652

Kametani,S. 〔1〕 On Hausdorff's measures and generalized capacities with some of their applications to the theory of functions. Jap. J. Math. vol 19(1946) 217—257

亀谷俊司 〔2〕 ポテンシャル論の最近の発展,現代の数学才1集,共立出版(1950)

河田竜夫 〔1〕 応用数学概論 I , 岩波全書 (1950)

Khintchine, A. 〔1〕 Sur la croissance locale des processus stochastique homogènes à acroissements indépendants, Izvestia Akad. Nauk. SSSR, ser. Math, (1939) 487—508; Math. Rev. 1.(1940)344

近藤亮司〔1〕 ポテンシャル論とMarkov過程 Sem. on Prob. vol.11

功力金二郎 〔1〕 積分論及び実函数論,共立基礎数学講座(1957)

Lévy.P 〔1〕 Le mouvement Brown plan, Amer. J.Math. vol.62(1940) 487—550

〃 〔2〕 La mésure de Hausdorff de la courbe du mouvement Brownian, Giorn. Ist.

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

Ital. Attuari 16 (1935) 1—37

Le'vy.P [3] Processus stochastiques et mouvement Brownien (1948)

丸山儀四郎 [1] 確率論，共立現代数学講座 (1957)

McKean,H.P. [1] Sample functions of stable processes, Ann. Math. vol.61(1955) 564—579

〃 [2] Hausdorff—Bericovitch dimension of Brownian motion paths, Duke, Math. J. vol. 22 (1955) 229—234

Meyer,P.A. [1] Fonctionelles multiplecatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, 12(1962)

大津賀 信 [1] 函数論特論，共立現代数学講座 (1957)

Paley, R.E.A.C.—Wiener,N. [1] Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. vol.19,(1934)

Po'lya—Szegö [1] Transfiniter Durchmesser ebener und räumlicher Punktmengen. J.Reine Angew.Math. 165 (1931)

Ray.D [1] Stable processes with an absorbing barrier. Trans.Amer. Math. Soc 67 (1958)

Riesz.M [1] Inte'grales de Riemann—Liouville et potentiels Acta, Sci Math. Szeged. vol.9 (1938)

白尾恒吉 [1] 確率論における強法則の精密化の一般論 Sem. on Prob. vol 2

Скороход А.В. [1] асимптотические формулы для устойчивых законов распределения (D.A.H. ТОМ. 98. (1954))

Taylor,S.J. [1] The Hansdorff α—dimensional measure of Brownian paths in n—spoce. Proc. Camb. Phil.Soc. vol 49(1953) 31—39

〃 [2] The α—dimensional measure of the graph and set of zeros of a Brownian path.

Proc. Camb. Phil. Soc. vol.51(1955) 265–274

Tricomi, F.G. [1] Integral equations. (1957)

Watanabe, S. [1] On stable processes with boundary conditions J. Math. Soc. Jap. vol.14 No.2 (1962)

Watanabe, T. [1] A probabilistic method in Hausdorff moment problem and Laplace–Stieltjes transform : J.Math.Soc.Jap.12(1960)

Woll.J [1] Homogeneous stochastic processes. Pacific J. Math. vol 9. (1959)

Spitzer.F [1] Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motions, T.A.M.S [87] (1958)

Sem. on Probab.
Vol.13 1962年
P1-119

1962．7．発行 確率論セミナー