Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 21

拡散過程と正則点

神田 護

京都大学
1556907
図書
数理解析研究所

1965

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

目　　次

京都大学
1556907
図書
数理解析研究所

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

§0 序

このノートは，楕円形偏微分方程式に関連する正則点の問題を扱つたものである。この問題は，Perron-Wiener〔30〕〔31〕による一般領域における，一般解（Laplace 方程式の）概念の導入以来，その解が境界上で与えられた連続函数の値をとりうるための，境界の正則条件として，更に一般の場合に多くの人によつて論じられてきた。たとえばPuschel〔23〕，Tautz〔29〕，Oleinik〔22〕，Herve〔4〕，littman, Stampacchia, Weinberger〔13〕。

確率論では，Ito-Mckean〔5〕によつて，Brown運動の一問題として，Laplace方程式のDirichlet問題は定式化され，正則点の判定は，いわゆるBorel-CantelliのLemmaに帰着されるという，直観的にも明白な形で把握されて以来，確率論の概念として，2階の偏微分方程式と無関係に，たとえばrandom walk〔35〕，stable processの場合〔34〕，Markov chain の場合〔11〕等でとり扱れ，特に，natural topology の確率論的な導入以来，正則点の問題は重要性をましつつある。

このノートの目的は，Ito-Mckean〔5〕の線に従つて，一般の楕円形偏微分方程式に関連する正則点の問題を整理する事にある。

まず，第I章では，Dynkin〔1〕による，Hölder連続係数を持つ偏微分作用素（(1,1) 参照）をgeneratorとして持つ，canonical diffusion process の概念を利用して，それの正則点とBrown運動の正則点とが一致する事を証明する。（これは，Herve〔 〕の結果に対応する），尚，§5において，Shur〔32〕〔33〕の方法を真似する事によつて，canonical diffusion process の場合にも，いわゆるRieozの表現定理がなりたつ事が証明される。

第II章では，係数に連続性のみを仮定した場合，一点がそれ自身に関して正則点であるという異常な事がなりたつ事を例をあげて示した。Process に回転不変の条件を加えた場合，係数が簡単な形で表現されるので，汚い証明であるがのせておいた。

第III章では，係数に有界可測性のみを仮定 た場合に，self-adjointの形の偏微分作用素をとり扱つた。この場合にMarkov process の存在は知られてなかつたが，Littman, Stampacchia, Weinberger〔13〕の構成したGreen kernel $G(x, y)$ の発散のorderが，Brown運動のそれと同じ事を用いて，それから導かれるresolvent kernel G^{λ} の値域がC_0でdenseな事が証明でき（§2参照），従つてstandard

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

process が構成される。正則点については第Ⅰ章の方法にもちこんで，第Ⅰ章の結論と同じ事がいえる。（この結論はLittman, Stampacchia, Weinborger〔13〕に対応する）なお，上の方法を用いてある条件の下で第Ⅰ章のcanonical diffusion process のdual process が構成できる。

一般に基本的な新しい結果がない時には，それの整理の明確さ，あるいは斬新さが要求される。残念ながら，このノートは2つともみたされていないし，結果も不充分である。（特に第Ⅱ章）これは筆者の能力の不足と怠惰さによるものであり，前もつて，読んで下さる方におわびをし，恥かしいような間違いがあるのは，期日にせまられてあわてたためと，厚かましい弁解をしておきます。

尚，このノートの作製にあたつて，度々セミナーを開いて下さつた伊藤先生始め関西確率論セセミナーのメンバーの方に心から謝意を表します。特に池田，渡辺（信）両氏には，細部にわたつて助言及び叱正をたまわり，両氏なしでは，完成し得なかつたであろう事を，感謝の念を持つて，つけ加えておきます。

註，原則として，Dynkin〔1〕及び過去に出版されたSeminor noteの結果は証明なしに用いる。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

第Ｉ章　Holder 連続係数を持つ拡散過程の正則点

§1　準備 ―基本解―

n次元ユークリッド空間R^nにおける，次の偏微分作用素$\mathcal{D}$を考える。

$$(1.1)\quad \mathcal{D} f(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x)+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) - c(x)f(x)$$

(1.1.A)　$a_{ij}(x)$，$b_i(x)$，$c(x)$ 有界でHolder連続(*)，$a_{ij}=a_{ji}$

(1.1.B)　Strictly elliptic即ち，ある定数$\gamma_i>0$ $(i=1,2)$が存在して，任意のx及び実数の組λ_1，……，λ_nに対して

$$\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \geqq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geqq \gamma_2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

(1.1.C)　$c(x)\geqq 0$

函数$P(t,x,y)$ $(t>0, x, y\in R^n)$が次の条件をみたす時

$$(1.2)\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\mathcal{D}u$$

の基本解という。

(1.2.A)，$P(t,x,y)$はt，x，yに関して連続で，xに関して２回連続的微分可能で，tとxに関して，(1，2)をみたす。

(1.2.B)　任意の有界連続函数$f(x)$に対して

$$(1.3)\quad \lim_{t\downarrow 0}\int_{R^n} P(t,x,y)f(y)\,dy=f(x) \qquad x\in R^n$$

その収束は，R^nの任意の有界部分集合の上で一様である。

(1.2.C)　任意の$\delta>0$に対して，$P(t,x,y)$は$t+|x-y|\geqq\delta$で有界

(*) $f(x)$がGでHolder連続であるとは，あるconstant $0<C$が存在して，任意のx，yに対して$|f(x)-f(y)|<C|x-y|^{\lambda}$，$\lambda>0$ 定数

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

である。特に（1．1．A）～（1．1．c）をみたす　に対しては一意的に，基本解P（t，x，y）が存在して，次の性質を有する。

定理1．1　　が（1．1．A）～（1．1．C）をみたす偏微分作用素の時，（1．2）の基本解P（t，x，y）が一意的に定まる。

更に次の評価がなりたつ

i）　任意のt＞0，x，y　R^n に対して，P（t，x，y）＞0

ii）　ある定数M，α＞0が存在して

$$(1.4)\qquad P(t,x,y)\leqq Mt^{-n/2}\,e^{-\frac{\alpha|y-x|^2}{t}}$$

$$(1.5)\qquad \left|\frac{\partial P(t,x,y)}{\partial x_i}\right|\leqq Mt^{-\frac{n+1}{2}}\,e^{-\frac{\alpha|y-x|^2}{t}}$$

$$(1.6)\qquad \left|\frac{\partial^2 P(t,x,y)}{\partial x_i\partial x_j}\right|\leqq Mt^{-\frac{n+1}{2}}\,e^{-\frac{\alpha|y-x|^2}{t}}$$

$$(1.7)\qquad \left|\frac{\partial P(t,x,y)}{\partial t}\right|\leqq Mt^{-\frac{n+2}{2}}\,e^{-\frac{\alpha|y-x|^2}{t}}$$

iii）　ある定数M_1，M_2，α_1，α_2，λ＞0が存在して

$$(1.8)\qquad P(t,x,y)\geqq M_1 t^{-n/2}\,e^{-\frac{\alpha_1|y-x|^2}{t}}-M_2 t^{-n/2+\lambda}\,e^{-\frac{\alpha_2|y-x|^2}{t}}$$

いずれの評価式も，例えば$\mathfrak{a}$をgeneratorとするMarkov processの構成の際，必要となるが，ここでは省略する。例えば〔10〕参照

次に述べる定理は，D.Girbarg及びJ.Serrin〔3〕によつて証明されたもので，いわゆるmaximum principleの拡張されたものとなつている。

定理1．2　$\mathfrak{a}$を（1．1）の形の作用素で，（1．1．A）～（1．1．C）の仮定をみたし，更にC（x）≡0とする。S_0 を半径t_0 の球で中心を抜いたもの，即ち　x；0＜r　$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\leqq r_0$　とする。今，non constant function u（x）がS_0で

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$\mathfrak{A}u \geqq 0$ をみたし，更に

$$(1.9) \qquad u = \begin{cases} o(\log r) & n=2 \\ & \qquad \text{as } r \downarrow 0 \\ o(r^{2-n}) & n \geqq 3 \end{cases}$$

がなりたつならば，$M = \max_{r=r_0} u$ とおけば

$$(1.10) \qquad u < M \quad \text{in} \quad 0 < r < r_0$$ でしかも

$$(1.11) \qquad \limsup_{x \to 0} u(x) < M$$

となる。

注意1　このことは，係数 a_{ij} の条件は，Holder連続より，弱いDini連続の条件でよい。

注意2　$C(x) \leqq 0$ の時は，$M = \max(0, u)$ とすれば，上の主張がなりたつ。

証明　$g \equiv r^{2-n}$ $(n \geqq 3)$，$\equiv \log({}^{r_0}/_{r})$ $(n=2)$ とおく。

Kをある正の定数として，$h \equiv g(1+Kr^{\lambda})$（$\lambda$ はHolder係数）とする。そのとき，十分大きなKと十分小さな r_1 に対して $S_1 = \{x \,;\, 0 < (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} \leq r_1\}$ で

$$(1.12) \qquad \mathfrak{A} h \leqq 0$$

なぜならば，gが $r > 0$ では $\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g = 0$ に注意すると，$n \geq 3$ の時

$$^{(*)}\ (1.13) \qquad h = (1+Kr^{\lambda}) \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g$$

$$+ 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} g \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (1+Kr^{\lambda}) + g \cdot \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (1+Kr^{\lambda})$$

$$+ (1+Kr^{\lambda}) \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} g + g \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} (1+Kr^{\lambda})$$

$$= (1+Kr^{\lambda}) \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij}) \Big\{ n(n-2) r^{-n-1} \frac{x_i x_j}{r} + (2-n) r^{-n} \delta_{ij} \Big\}$$

(*) 一般性を失うことなしに中心0で $a_{ij}(0) = \delta_{ij}(0)$ としてよいから，この後，計算では，$a_{ij}(0) = \delta_{ij}$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$+2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cdot K\cdot\lambda(2-n)\, r^{\lambda-n}\frac{x_i x_j}{r^2}$$

$$+r^{2-n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} K\cdot\left\{\lambda(\lambda-2)\, r^{\lambda-3}\frac{x_i x_j}{r}+\lambda r^{\lambda-2}\delta_{ij}\right\}$$

$$+(1+Kr^{\lambda})\sum_{i=1}^{n} b_i (2-n)\, r^{-n} x_i + r^{2-n}\sum_{i=1}^{n} b_i\cdot K\cdot\lambda r^{\lambda-2} x_i$$

従つて，十分小さいrに対して，Kを十分大きくとつておくと，（1．1．B）に注意すれば

$$(1.14)\quad \mathcal{D}h \leqq Kn(n-2)\gamma^{\lambda}\cdot\gamma^{-n}+2K\cdot\lambda\cdot(2-n)\cdot\gamma^{\lambda}\gamma^{-n}\cdot\frac{1}{r^2}\gamma_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$+K\lambda(\lambda-2)\gamma^{-n}\gamma^{\lambda}\gamma^{-2}\gamma_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2+K\lambda\gamma^{-n}\gamma^{\lambda}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$=Kn(n-2)\, r^{\lambda} r^{-n}+2K\lambda(2-n)\,\gamma_2\gamma^{\lambda}\gamma^{-n}$$

$$+K\lambda(\lambda-2)\, r^{\lambda} r^{-n}\gamma_2+K\lambda r^{\lambda} r^{-n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\leqq 0.$$

2次元の場合も，同様にできるから，（1.11）がなりたつ。次に$M_1=\max\limits_{r=r_1}$ に対して

$$(1.15)\quad v=u-\varepsilon h-M_1 \qquad \varepsilon>0$$

と定義すると，明らかにS_1で$\mathcal{D}v\geqq 0$，しかも$v\leqq 0$ on $r=r_1$，さらに仮定（1．9）より十分小さいrに対して$v\leqq 0$。従つてmaximum principleよりS_1で$v<0$．又，領域$\frac{1}{2}r_1<\gamma<r_0$にmaximun principleを適用すると，$\max\limits_{\geqq r_1} u<\max(M, M_1)$ $M_1<M$それゆえ$u<M$ in $0<r<r_0$ ， $\limsup\limits_{x\to 0} u\leqq M_1<M$.

§2 Canonical diffusion process

§1に与えた$\mathcal{D}$のclosed extensionをgeneratorとするMarkov processを構成するには，例えば確率微分方程式を用いる方法，あるいはHill－Yoshidaの定理にもちこむ方法等があるが，ここでは§1で述べた基本解P（t，x，y）を用いてMarkov processを構成し，Dynkin の意味でのcanonical diffusion process及びstopped canonical diffusion processを定義しよう。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

定理2.1 〔Dynkin〕 $P(t, x, y)$ を§1にのべた $u=\frac{\partial u}{\partial t}$ の基本解とする。その時 R^n 上に

$$(2.1) \qquad T_t f(x) = \int_{R^n} P(t, x, y) f(y)\, dy$$

でもつて定義されるsemi-group $\{T_t\}$ に対応する強Feller. $\hat{C}$-diffusion process $X=(x_t, M_t, \zeta, P_x)$ が存在する。M_t はBorel field，ζ はkilling time，Xがdiffusion processであるとはcontinuous Markov process で をそのcharacteristic operator，即ち，任意の $\bar{\mathcal{B}}^{(*)}$－可測函数 f に対して

$$(2.2) \qquad \mathfrak{A} f(x) = \lim \frac{E_x f[x_{\tau(V)}] - f(x)}{E_x \tau(V)} \qquad V; \text{open set} \ni x$$

$$\tau(V) = \inf(t \geqq 0.\ x_t \quad V^c)$$
$$\zeta(\omega) \qquad \text{if}(\quad) = \phi$$

$\mathbb{D}_{\mathfrak{A}}(x)$ をその定義域（即ち $f(x) < \infty$ なる $\bar{\mathcal{B}}$－可測 f の全体）

$\mathbb{D}(x)$ を $\mathfrak{A}$ の定義とした時に全ての $x \in R^n$ に対して $\mathbb{D}(x) \subseteq \mathbb{D}_{\mathfrak{A}}(x)$ をみたすことである。Xが $\hat{C}$－processであるとは，$T_t\hat{C} \subset \hat{C}$ となる事を意味する。ここに $\hat{C}$ は $\varepsilon > 0$ に対してcompact set Kが存在して，$R^n - K$ で ε より小なる連続函数全体示す。

強Fellerであるとは T_t が有界 $\bar{\mathcal{B}}$－可測函数 を連続函数にうつす事を意味する。任意の diffusion process は normal $^{(**)}$ (Dynkin [1] lemma 5.11)，stockstic continuous$^{(***)}$（同上）である事に注意すると，この process X は C－process であるからいわゆるDynkinの意味での standard process となる。(Dynkin [1] Th.3.14)．semi-compact space $(E, \mathcal{B})$ 上のMarkov process $X=(x_t, \zeta, M_t, P_x)$ がstandard processであるというのはnormal，強Markov，右連続及びquasi-left－連続なprocessであり，更にpath space Ω 上のBorel field M_t は次の条件をみたすことを意味する。

(*) $\bar{\mathcal{B}}$ は，R^n 上の通常の意味でのBorel field $\mathcal{B}$ を全ての確率分布 μ でcompletionしたもの

(**) $P(+0.x, R^n) = 1, \qquad x \in R^n$

(***) U open set $\quad x \in U \quad \lim_{t \downarrow 0} P(t, x, U) = 1$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(*)
(2.3) $\mathrm{M}^0=\overline{\mathrm{M}}^0$ $\quad \mathrm{M}_{t+0}=\mathrm{M}_t$, $t\geqq 0$, Bは位相的Borel field

この定理の証明はDynkin〔1〕のTh.5.11を参照してもらうことにして，次にstopped processを定義しよう。その前に，Dynkin〔1〕による次のlemmaを与える。証明はDynkin〔1〕Th.10.2参照

<u>LEMMA 2.1</u> Xを$(E,\mathcal{B})$上の完全(**)な強Markov processで強可測(***)とする。更に次の仮定をみたすとする。

(2.1.A) $\forall x\in E$, $\exists \omega\in\Omega$ (path space), $x_t(\omega)=x$, $t\in[0,+\infty)$ 今，Gを$\tau(G)=\inf\{t\geqq 0 \ \ x_t\notin G\}$, ζ, if $\{\quad\}=\phi$ に対して$\{\tau>t\}\in \mathrm{M}_t\cap\overline{\mathrm{N}}^{(***)}$となる集合とした時，

(2.4)
$$\tilde{\zeta}(\omega)=\begin{cases}\zeta(\omega) & \text{if } \tau(\omega)=\zeta(\omega)\\ +\infty & \text{if } \tau(\omega)<\zeta(\omega)\end{cases}$$

$$\tilde{x}_t(\omega)=x_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) \qquad 0\leq t<\tilde{\zeta}(\omega)$$

$$\tilde{\mathrm{M}}_t\ ;\ \{A \ \ \mathrm{M}_0\ ,\ A\subseteq\{\tilde{\zeta}>t\},\ \{A,\tau>t\}\in\mathrm{M}_t\}$$

とおけばX $\tilde{X}=(\tilde{x}_t,\tilde{\zeta},\tilde{\mathrm{M}}_t,\mathrm{P}_x)$は$(E,\overline{B})$上の強Markov processとなる。これをXのGにおけるstopped processと呼ぶ。

<u>注意</u> (2.1.A)は本質的な仮定ではない。任意の$x\in E$に対して$\mathrm{P}_x(\tilde{\Omega})=0$なるpathの集合$\tilde{\Omega}$をつけ加えればよいからである。

今，このlemmaをcanonical diffusion processに適用するとstandardであるから，任意のopen set Dに対してτDはlemmaの衔定をみたし，D上のstopped diffusion processが定義出来る。これをstopped canonical diffusion prpcess $X^D=(x_t{}^D,\zeta^D,\mathrm{M}_t{}^D,\mathrm{P}_x{}^D)$と呼ぶ。これが$R^n$上のcontinuous s standard processである事は明らかである。

(*) 序でのべたように，ここでは全てDynkinのnotationに従う。
M_t, M^0についてはDynkin〔1〕116, M_{t+0}についてはp128を参照。

(**) $\mathrm{M}^0=\overline{\mathrm{M}}^0$, $\mathrm{M}_t=\overline{\mathrm{M}}_t$

(***) $\forall\Gamma\ \mathcal{B}$ $\quad\{(u,\omega)\ ;\ x_u(\omega)\ \ \Gamma\}\in\mathcal{B}[0,\infty)\times\overline{N}$

(***) Nの定義についてはDynkin〔1〕p119

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

更に，Dがclass $\mathcal{A}$ に属するsetとする。その時X はC－processで任意の $t>0$，x D，dy Dに対してtransition probability density $P^D(t,x,y)$ が存在して，tとxに関して

$$(2.5)\qquad \frac{\partial P^D}{\partial t}= P^D \quad , \lim_{x\to\alpha\ \partial D} P^D(t,x,y)=0$$

$$(2.6)\qquad P^D(t,x,y)\leq Kt^{-n/2}e^{-\frac{|y-x|^2}{2th}} \quad , \quad K, h>0 \text{ 定数}$$

以後のsectionでは断わらない限り，Xはcanonical diffusion process X^D はDでのstopped canonical diffusion processとする。

又，Dはclass に属するset，あるいはR^nとする。

注意 (2.5)，(2.6) の事はDynkinの本ではpart processに関するとして証明されているが，$x\in$ D，dy$\in$ Dに限るならばstopped processX^Dについてもなりたつ事は明らかである。

§3 excessive, superkarmonic, harmonic functions

定義3.1 函数fがX－excessive functionであるとは，次の3条件をみたす事である。

i) 非負，$\bar{B}$－可測

ii) $T_t f(x)\leq f(x)$ ， $t>0$， $x\in R^n$

iii) $T_t f(x)\longrightarrow f(x)$ $t\downarrow 0$， $x\in R^n$

同様にX^D－excessive functionをも定義する。

(*) Dがclass$\mathcal{A}$に属するとはconnected founded, Open setで，任意の境界点aで $(1,\lambda)$ のなめらかさを持つ。即ちaのε－近傍を$U_\varepsilon(a)$ とした時，aの近傍でその1次の偏導函数が，λ次のHolder条件をみたす函数gが存在して

$$U_\varepsilon(a)\cap D=U_\varepsilon(a)\cap\{x\ ;\ g(x_1;g(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})<x^n\}$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

定義3．2　函数fがopen set Gで，superharmonic (X^D) であるとは，次の3条件をみたす事である。

i）almost Borel，C^0－連続(*)，$(-\infty, +\infty]$ の値をとる。

ii）任意の$U \in \mathcal{U}(G)^{(**)}$で下から有界

iii）$\forall x \in G$, $\forall U \in \mathcal{U}(G)$, $E_x^D f(x_{\tau_U}) \leq f(x)$

注意1　D_1，D_2を$D_1 \supset \bar{D}_2$なるopen setとする。D_2でsuperharmonic (X)な函数のclassと，D_2でsuperharmonic (X_{D_1})な函数のclassは一致する。(Dynkin [1] Th12.9)

注意2　D_1をopen setとする。D_1でsuperharmonic (X)な，非負な函数のclassは，X^{D_1}－excessiveな函数のclassと一致する。(同上)

注意3　D_1をopen setとする。D_1で函数$f(x)$がsuperharmonic (X)であるための必要十分条件は，次の条件をみたすことである。$\forall U \in \mathcal{U}(D_1)$に対して

3.A)　$\forall x \in U$　ある定数Cに対して

$$f(x) \geq C P_x\{\tau(U) < \zeta\}$$

3.B)　$T_t^U f(x) \leq f(x)$　$(t \geq 0,\ x \in D_1)$

3.C)　$\lim_{t \downarrow 0} T_t^U f(x) = f(x)$　$(x \in D_1)$

Dynkin [1] Th 12.10′

注意4　Dをopen setとする。その時，下に有界なsuperharmonic (X^D)な函数$f(x)$は$P_x^D(\tau < \tau(D)) = 1$なる任意のMarkov time τに対して

(3.1)　$E_x^D f(x_\tau) \leq f(x)$

である。(Dynkin [1] p518)

定義3．3　fがX^D－harmonicであるとは，次の条件をみたす事である。

i）fは任意のcompact set上で有界

ii）$T_t^D f(x) = f(x)$　$t \geq 0$，$x \in R^n$

(*)　函数fがalmost Borel measurableとは，任意の確率分布μに対してB－可測函数f_1, f_2, $f_1 \leq f \leq f_2$が存在して，$P_\mu\{f_1(x_t) = f_2(x_t)$，$t \in [0, \zeta(\omega))\} = 1$．$C_0^-$－continuousとは細位相(natural topology)で連続。

(**)　$\mathcal{U}(G) = \{$open set U，$\bar{U}$ compact，$\bar{U} \subset G\}$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

定義3．4　Gをopen setとする。函数fがGでharmonic (X^D) であるとは，次の条件をみたすことである。

i) fはalmost Borel mesurable

ii) fは $U\in\mathfrak{U}(G)$ でbounded

iii) $x\in G$ $U\in\mathfrak{U}(G)$ に対して $E_x^D f(x_{\tau_U})=f(x)$

注意5　GGをopen setとする。Gでharmonic (X) な函数のclassはGで $\mathfrak{A}f(x)=0$ なる。2回連続的微分可能な函数のclassと一致する。(Dynkin [1] Th Th.13.9)

注意6　Dをopen setとする。Dでharmonic (X) な函数のclassは，Dでharmonic (X^D) な函数のclassと一致する。(Dynkin [1])．

注意7　函数fが X^{D_1}－harmonicならば，D_1 でharmonic (X) である。Dynkin [1] Th12.13.

注意8　D_1，D_2 を $D_1\supset\overline{D}_2$ なるopen setとする。もし函数fが D_1 でharmon harmonic (X) ならば，D_2 で X^{D_2}－harmonicである。(同上)

注意9　DDをopen set．Γ を $D\supset\overline{\Gamma}$ なるcompact closureを持つanalytic setとする。$\sigma_\Gamma=\inf(t>0,\ x_t\in\Gamma)$，もし存在しない時∞とする。その時 $P_x^D(\sigma_D<\infty)$ は x の函数として X^D－excessive，更に $D-\overline{\Gamma}$ でharmonic (X^D)．X^D－excessiveであることは Dynkin [1] 12章p498と同じ理由からであり，harmonic (X^D) であることは強Markov性より任意の $U\in\mathfrak{U}(D-\overline{\Gamma})$ に対して $P_x^D(\sigma_D<\infty)=P_x^D(\sigma_\Gamma(\omega_{\tau_U}^+)<\infty)=E_x^D(P_{x_{\tau_U}}(\sigma_\Gamma<\infty))$

§4　Green函数

ここで与えるGreen函数の定義はDynkin [1] p565によるものである。

定義4．1　Dをopen setとする。函数 $G(x,y)=G_y(x)$ がDの全ての点 $x\neq y$ で定義されていて，次の条件をみたす時，DのGreen函数という。

i) Dに含まれる任意のyの近傍の外で $G_y(\cdot)$ は有界

ii) $G_y(\cdot)$ はD－yで連続，$y_n\to y$ ならば，yの任意の近傍の外で一様に $G_{y_n}(\cdot)\to G_y(\cdot)$

iii) Dに含まれる任意のBorel set Γ に対して

$$(4.1)\quad \int_\Gamma G(x,y)\,dt=E_x\int_0^{\tau_\Gamma} X_\Gamma(x_t)\,dt$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

注意1　canonical diffusion process Xのtransition probability density $P(t, x, y)$が，ある区間(S, ∞)で積分可能な函数$\alpha(t)$で

(4.2)　$P(t, x, y) \leqq \alpha(t) \qquad (t > 0, \quad x, y \quad R^n)$

ならば，次のように定義された$G(x, y)$は

(4.3)　$G(x, y) = \int_0^\infty P(t, x, y)\,dt$

R^nのGreen函数となる。従ってn≧3ならば，(1.4)により$\alpha(t)$として$t^{-n/2}$をとれるからR^nのGreen函数が定義できる。

更にDをclass $\mathcal{A}$に属するsetとする。$P^D(t, x, y)$を§2の終りにのべた，X^DのDにおけるtransition probability-densityとすれば

(4.4)　$G^D(x, y) = \int_0^\infty P^D(t, x, y)\,dt$

は，process Xに関するDのGreen函数(*)となる。しかも$a \in \partial D$ならば

(4.5)　$\lim_{x \to a} G^D(x, y) = 0$　　(Dynkin [1] Th.13.19)

注意2　更に$G^D(y, y) = \lim_{x \to y} G^D(x, y)$とすれば，$G^D(x, y)$は，任意の$y \in D$を固定すると，Dでsuperharmonic (X). D−yでharmonic (X)

(Dynkin [1] Th.13.21)

以後，$G^D(x, y)$は，上のように修正したものを考え，D外では0の値をとるものとする。

注意3　D_1, D_2を$D_1 \supset \bar{D}_2$なるopen setとする。その時

(4.6)　$G^{D_2}(x, y) = G^{D_1}(x, y) - E_x G^{D_1}(x_{\tau_{D_2}}, y)$

又，明らかに，$G^{D_2}(x, y) = G^{D_1}(x, y) - E_x^{D_1} G^{D_1}(x_{\tau_{D_2}}, y)$でもある。

定理4.1　Dをclass $\mathcal{A}$に属するsetとする。KをDに含まれるcompact setとすれば，Kのみにdependする正定数(*) C_1, C_2が定まつて，任意の$x, y \in K$に対し

(4.7)　$C_2\phi(r) \leqq G^D(x, y) \leqq C_1\phi(r)$

ここに$r = |x - y|$，　$\phi(r) = 1/r^{n-2}$ (　(n≧3)　　$\log\frac{1}{r}$　(n=2)

(*)　n=2でもよい。

(*)　C_1, C_2は係数a_{ij}にはdependしているかも知れないが，今はある係数a_{ij}をfixして考えているから，その事を断らない事にする。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

証明　i）　$G^D(x, y) \leqq C_1\phi(r)$ の証明．このことは（4．3），（4．4）及び（1．4），（2．6）から明らかである。

ii）　$G^D(x, y) \geqq C_2\phi(r)$，$x, y \in K$ の証明，$G^D(x, y) = G_y^D(x)$ は§4注意2より，$D-y$ でharmonic（X）．従つて§3注意5より $D-y$ で $\mathscr{D} G_y^D(\cdot)=0$，$G_y^D(\cdot)$ に定理1．2を適用すると $G_y^D(\cdot) > 0$ 及び（4．5）に注意すれば，$G_y^D(x)$ の y での発散のorderは0（$\phi|x-y|$）であるはずはない。それ由 i）の結果を併せると $G_y^D(\cdot)$ の y での発散のorderは $\phi(|\cdot - y|)$ のそれと一致するから，任意の $y \in K$ に対して，正定数 C_y が存在して，

$$(4.8) \qquad \lim_{x \to y} \frac{G^D(x, y)}{\phi(|x-y|)} = C_y$$

適当に小さいrを固定すると，（任意の $y \in K$ に対して，yを中心とする半径rの球 $U(y)$ が完全にDの中に含まれるようなr），ある定数 $C'_y > 0$ が存在して，全ての $x \in U_r(y)$ に対して

$$(4.9) \qquad C'_y \ \phi(|x-y|) \leq G^D(x, y)$$

となる。というのは，（4．9）より，yの十分小さい近傍 U'_y に含まれる x に対しては

$$(4.10) \qquad \frac{1}{2} C_y \phi(|x-y|) \leq G^D(x-y)$$

とする事ができ，

$$(4.11) \qquad \frac{G(x, y)}{\phi(|x-y|)} \phi(|x-y|) = G(x, y)$$

に注意すると，$G(x, y) \big/ \phi(|x-y|)$ が $\overline{U_r(y)} - U'_y$ で x に関して連続で，strict に正であるからある定数 $C''_y > 0$ が存在して

$$(4.12) \qquad C''_y \leqq \frac{G(x, y)}{\phi(|x-y|)}$$

C'_y を $C''_y \wedge \frac{1}{2} C_y$ とおけば，（4．9）式がなりたつ。

今，$\inf_{y \in K} C'_y = 0$ とすれば，$K_n = K \cap \{ C'_y < \frac{1}{n} \}$ とおいた時，全てのnに対して K_n は空でない。従つて

$$(4.13) \qquad \bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \phi$$

$\bigcap_n \overline{K}_n \subseteq K$ であるから，$K \in y_0$ なる点が存在して

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(4.14) $\quad C'y_0=0$

これは，矛盾。今までの事をあわせると，十分小さいrに対して正定数$C'>0$が存在して，$|x-y|<r$なる限り

(4.15) $\quad C'\phi(|x-y|)\leq G(x,y)$

一方，全ての$|x-y|\geq r$なるx，yに対しては正定数βが存在して$G^D(x,y)>\beta$となる事が分るから，$C''=\beta/\phi(r)$とおけば

(4.16) $\quad G^D(x,y)>C''\phi(|x-y|) \qquad |x-y|\geq r$

従つて(4.9)と(4.16)から，$C_2=C'\wedge C''$とおけば

(4.17) $\quad G^D(x,y)>C_2\phi(r) \qquad x,y\in K$

注意4　$n\geq 3$の時は，(4.3)(4.4)に注意すると，基本解$P(t,x,y)$の評価(1.4)及び(1.8)，及び関係式(4.6)のみを用いる事によつて定理4.1が証明される。

§5 Rieszの表現

たとえば，Brown運動では，あるcompact closureを持つanalytic setのhitting timeが有限であるという確率が，そのsetのclosureにconcentrateするmeasureとBroun運動のGreen函数とで積分の形であらわされる事はよく知られている。(〔5〕，〔6〕)この§では，§2で定義したstopped canonical diffusion processについて，上の事実がなりたつことを示そう。以後，class に属するDを固定し，そこでのstopped process X^Dを考える。以下の結果及び証明はSchur〔32〕〔33〕が$a_{ij}\in C^2$，$b_i\in C^1$の場合に行なつたのをいくらかmodifyしたものである。

最初に次の分解定理を証明しよう。

定理5.1　$f(x)$を有界X^D-excessive function D_1を$\overline{D}_1$ Dなるopen setとする。その時$\overline{D}_1(D_1)$にconcentrateするmeasure $\tilde{\mu}(\mu)$が存在して次の等式がなりたつ。

(5.1) $\quad f(x)=\tilde{g}(x)+\int_{\overline{D}_1}\tilde{G}^D(x,y)\tilde{\mu}(dy) \qquad \forall x\in D_1$

(5.2) $\quad f(x)=g(x)+\int_{D_1}G^D(x,y)\mu(dy) \qquad \forall x\in D_1$

ここに$\tilde{g}$，gはD_1でharmonic(X^D)

証明のために，Lemmaを2，3準備しよう。

LEMMA5.1　$f(x)$を有界X^D-excessive functionとする。その時

(5.3) $\quad f=g+\lim_{t\downarrow 0}R^D u_t$

ここに g は X^D-harmonic, $u_t = t^{-1}\,[f - T_t^D f]$, $R^D f = \int_0^\infty T_t^D f\,dt$

証明　任意の定数 に対して，次の等式がなりたつ事に注意すればよい。

$$(5.4)\quad \int_0^c T_s^D (f - T_t^D f)\,ds = \int_0^t T_s^D f\,ds - \int_c^{c+t} T_s^D f\,ds$$

LEMMA 5.2　D_1 を $\overline{D}_1 < D$ なる open set とする。f は有界とする。その時，次のように定義された g は D_1 で harmonic (X) である。

$$(5.5)\quad g = R^D f - R^{D_1} f$$

証明　$E_x^D \tau < \infty$ なる X^D の Markov time で $\tau \leqq \tau_{D_1}$ となるものを考える。Dynkin の公式より

$$(5.6)\quad E_x^D R^D f(x_\tau) - R^D f(x) = -E_x^D \int_0^\tau f(x_s)\,ds$$

τ は明なかに X^{D_1} の Markov time でもあるから，同様に Dynkin の公式から

$$(5.7)\quad E_x^{D_1} R^{D_1} f(x_\tau) - R^{D_1} f(x) = -E_x^{D_1} \int_0^\tau f(x_s)\,ds$$

$\tau \leqq \tau_{D_1}$ に注意すると (5.6) は次のようにかきかえられる。

$$(5.8)\quad E_x^{D_1} R^D f(x_\tau) - R^D f(x) = -E_x^{D_1} \int_0^\tau f(x_s)\,ds$$

従って (5.7) と (5.8) から

$$(5.9)\quad E_x^{D_1} \{ R^D f(x_\tau) - R^{D_1} f(x_\tau) \} = R^D f(x) - R^{D_1} f(x)$$

それ由　$g = R^D f(x) - R^{D_1} f(x)$ は D_1 で harmonic (X^{D_1}) 従って §3 注意 6 より D_1 で harmonic (X)

LEMMA 5.3　f (x) を有界 X^D-excessive function. τ_1, τ_2 共に $\leqq \tau_D$ を X^D の Markov time で $P_x^D(\tau_1 \geqq \tau_2) = 1$　$x \in D$ とする。そのとき

$$(5.10)\quad E_x^D f(x_{\tau_1}) \leqq E_x^D f(x_{\tau_2})$$

証明　lemma 5.1 より f は X^D-harmonic な部分と，potential part とに分けることが出来る。harmonic part g については，明らかに g は X^D-excessive だから §3 注意 4 より

$$(5.11)\quad E_x^D f(x_{\tau_i}) \leq f(x) \qquad i = 1, 2$$

$g' \equiv -f(x) + \inf_{x \in R^n}(-f(x))$を考えると，stopped processだから定数はh harmonicであることに注意するとg'はX^D−excessive.従つて（5．11）の不等号を逆にしたものがなりたつ。次にpotential partについて証明しよう。$R^D h$について調べてみると，Dynkinの公式より

$$(5.12)\quad f(x) - E_x^D f(x_{\tau_i}) = E_x^D \int_0^{\tau_i} h(x_t)\,dt$$

従つて

$$(5.13)\quad f(x) - E_x^D f(x_{\tau_1}) = f(x) - E_x^D f(x_{\tau_2}) + E_x^D\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} h(x_t)\,dt\right) \geqq f(x) - E_x^D f(x_{\tau_2})$$

それ由，$R^D u(x_t)$のtについての単調性に注意すれば証明は終る。

LEMMA 5．4　D_2を$\overline{D}_2 \subset D$なる球とする。$G^D(x,y) \equiv G_y^D(x)$とおけば，次のように定義された$h_s(x,y)$は任意の$x \in D_2$を固定すると$y \in D$の函数として連続

$$(5.14)\quad h_s(x,y) = T_s^{D_1} G_y^D(x)$$

証明　$h_s(x;y)$を次のようにかきかえておく。

$$(5.15)\quad h_s(x,y) = T_s^{D_2}\{G_y^D(x) - E_x^D G_y^D(x_{\tau_{D_2}})\} + T_s^{D_2}\{E_x^D G_y^D(x_{\tau_{D_2}})\}$$

i）$T_s^{D_2}\{E_x^D G_y^D(x_{\tau_{D_2}})\}$の連続性の証明，$x \in D_2$を固定する。

$$(5.16)\quad T_s^{D_2}\{E_x^D G_y^D(x_{\tau_{D_2}})\} = E_x^{D_2}\{E_{x_s}^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y),\ s < \tau_{D_2}\} +$$

$$+ E_x^{D_2}\{G^D(x_{\tau_{D_2}}, y)\ \ s \geqq \tau_{D_2}\} = E_x^D\{E_{x_s}^D G(x_{\tau_{D_2}}, y),\ s < \tau_{D_2}\}$$

$$+ E_x^D\{G^D(x_{\tau_{D_2}}, y),\ s \geqq \tau_{D_2}\} = E_x^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y)$$

従つて，$E_x^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y)$について主張を証明すれば良い。今，任意の$y \in D - \overline{D}_2$を固定すると，$G^D(x,y)$は，$D-y$でharmonic (X)．それゆえ，$x \in D_2$に注意すると

$$(5.17)\quad G^D(x,y) = E_x G^D(x_{\tau_{D_2}}, y) = E_x^{D_2} G^D(x_{\tau_{D_2}}, y)$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$y \ \partial D_2$ に対しては，点列 $\{y_n\}$ を $y_n \in D-\overline{D}_2$ で，D_2 の中心と y を結ぶ半径方向上にあつて $y_n \to y$ となるようにとる。その時任意の $u \ \partial D_2$ に対しては（4．7）より

$$(5.18) \quad G^D(u, y_k) \leqq C_1 \phi(|u-y_k|) \leq C_1 \phi(|u-y|) \leq \frac{C_1}{C_2} G^D(u, y)$$

であるから

$$(5.19) \quad \lim_{n\to\infty} E_x^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y_n) = \lim_{n\to\infty} E_x^D(G^D(x_{\tau_{D_2}}, y_n),\ G^D(x_{\tau_{D_2}}, y) < \infty)$$

$$+ \lim_{n\to\infty} E_x^D(G^D(x_{\tau_{D_2}}, y_n),\ G^D(x_{\tau_{D_2}}, y) = \infty) = E_x^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y)$$

又，y，y' を D_2 の内部にあるものとすると

$$(5.20) \quad \left| E_x^D \{ G^D(x_{\tau_{D_2}}, y') - G^D(x_{\tau_{D_2}}, y) \} \right| \leq \sup_{z \in \partial D_2} |G^D(z, y') - G^D(z, y)|$$

$G^D(x, y)$ の一様連続性に注意すれば $y' \to y$ ならば右辺 $\to 0$

従つて（5．17）（5．19）（5．20）をあわせると $D-D_2$ 及び D_2 で連続。それ由

$$(5.21) \quad \lim_{\substack{y_n \to y \\ y_n \in D_2 \\ y \in \partial D_2}} E_x^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y_n) = G^D(x, y)$$

がいえればよい。$G_y^D(x)$ が superharmonic (X) に注意すると，Fatou の lemma を用いて

$$(5.22) \quad \overline{\lim_{\substack{y_n \to y \\ \uparrow \quad \uparrow \\ D_2 \quad \partial D_2}}} E_x^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y_n) \geq \underline{\lim}_{y_n \to y} E_x^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y_n)$$

$$\geqq E_x^D \underline{\lim}_{y_n \to y} G^D(x_{\tau_{D_2}}, y_n)$$

$$= E_x^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y)$$

（5．17）と（5．19）より $\quad = G^D(x, y)$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$\varlimsup_{y_n \to y} E_x^D G^D(x_{\tau_{D_2}}, y_n) \leqq \varlimsup_{y_n \to y} G^D(x, y_n) = G^D(x, y)$$

((5.21) がいえた。

ii) 残りの部分の連続性を証明する。

まず，x，$y \in D_2$ に限ると，$x \in \partial D_2$ ならば，D_2は球だから$G_y^{D_2}(x)=0$ に注意して

$$(5.23) \quad T_s^{D_2}\{G_y^D(x) - E_x^D G_y^D(x_{\tau_{D_2}})\} = T_s^{D_2} G_y^{D_2}(x)$$

$$= \int_{D_2} G^{D_2}(z, y) P^{D_2}(s, x, z)\, dz$$

$$= \int_{D_2} \int_0^\infty P^{D_2}(t, z, y)\, dt \; P^{D_2}(s, x, z)\, dz$$

$$= \int_0^\infty P^{D_2}(t+s, x, y)\, dt = \int_s^\infty P^{D_2}(t, x, y)\, dt$$

従つて，y の函数としてD_2で連続。D_2^cではⅰ）で証明したように$G_y^D(x) = E_x^D G_y^D(x_{\tau_{D_2}})$。

それと（5.21）をあわせれば証明は終る。

<u>LEMMA5</u>.5 $f(x)$ を有界X^D-excessive functionとする。

その時

$$(5.24) \quad \mu_n(A) = t_n^{-1} \int_A [f(y) - T_{t_n}^{D_1} f(y)]\, dy$$

は，$n \to \infty$につれてsupportが$\bar{D}_1$に含まれるfinite measure $\tilde{\mu}$に弱収束するように$\{t_n\}$が選べる。

証明　まず，次の等式に注意すると

$$(5.25) \quad t^{-1} \int_0^t T_s^D f(x)\, ds = g + t^{-1} R^D [f - T_t^D f]$$

ここに$g(x) \equiv \lim T_s^D f(x)$は有界，$X^D$-harmonic 従つて任意の$t>0$，$x \in D$に対して$t^{-1} R^D [f - T_t^D f]$は一様に有界．lemma5.3 において$\tau_1 = t \wedge \tau_D$，$\tau_2 = t \wedge \tau_{D_1}$と思うと，(5.10) より

$$(5.26) \quad T_t^{D_1} f(x) \geqq T_t^D f(x)$$

だから，$t^{-1} R^D [f - T_t^{D_1} f]$ も一様に有界，それ由，ある定数Cが存在して

$$(5.27) \quad t^{-1} \int_{D_1} [f(y) - T_t^{D_1} f(y)]\, G^D(x, y)\, dy \leqq C$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$\overline{D_2}$ をD_1を含み，$D_2 \subset D$なるcompact setとすると

$$(5.28) \quad \gamma \equiv \inf_{x,y \in D_2} G^D(x, y)$$

とおくと$\gamma > 0$．それ由．D_2で

$$(5.29) \quad \int t^{-1}{}_{D_1}[f(y) - T_t^{D_1} f(y)]\, dy \leq C\gamma^{-1}$$

fはX^D−excessiveだから，§3注意2より，Dでsuperharmnnic(X)．従つて§3注意3の3，B）より

$$(5.30) \quad f \geq T_t^{D_1} f$$

明らかにD_1^cで$f - T_t^{D_1} f = 0$。　従つて適当に$\{t_n\}$を選ぶと$\overline{D}_1$にconcentrateするfinite measure $\tilde{\mu}$に弱収束させることが出来る。以上のlemmaを用いると，定理定理5．1が証明できる。即ち

<u>定理5．1の証明</u>　まず　$x \in D_1$に対して次の式がなりたつ事に注意しよう。

$$(5.31) \quad t^{-1}\int_0^t T_s^{D_1} f(x)\, ds = g'(x) + t^{-1} R^{D_1}[f - T_t^{D_1} f]$$

ここに$g'(x)$は有界X^{D_1}−harmonic．今，g_tを次のように定義すると

$$(5.32) \quad g_t = g' - t^{-1}[R^D(f - T_t^{D_1} f) - R^{D_1}(f - T_t^{D_1} f)]$$

g'はX^{D_1}−harmonicだから，D_1でharmonic(X)，lemma 5．2より右辺の後半はD_1でharmonic(X)。従つてg_tもD_1でharmonic(X)。§3の注意8より任意のopen set D_2，$\overline{D}_2 \subset D_1$で，$g_t$は$X^{D_2}$−harmonicである。又，(5．31)，(5.32)をあわせると

$$(5.33) \quad t^{-1}\int_0^t T_s^{D_1} f(x)\, ds = g_t(x) + t^{-1}\int_{D_1} G^D(x, y)\,[f(y) - T_t^{D_1} f(y)]\, dy$$

となるから，$f_t(x)$を次のように定義すると

$$(5.34) \quad f_t(x) = t^{-1}\int_0^t T_s^{D_1} f(x)$$

$g_t(x)$がX^{D_2}−harmonicに注意すると

$$(5.35) \quad T_s^{D_2} f_{t_n}(x) = g_{t_n}(x) + \int_{D_1} h_s(x, y)\, \mu_n(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

ここに$h_s(x, y)$，$\mu_n(dy)$はそれぞれ（5．14），（5．24）で定義されたものとする。$f_{t_n}(x)$は一様に有界で，$f(x)$に収束，従つて

$$(5.36)\quad \lim_{n\to\infty} T_s^{D_2} f_{t_n}(x) = T_s^{D_2} f(x)$$

lemma 5.4により，$\overline{D}_2 \subset D_1$を，球をするとと$h_s(x, y)$は$y\in D$で連続だからlemma 5.5より$\{t_n\}$を適当に選んで，

$$(5.37)\quad \lim_{n\to\infty}\int_{D_1} h_s(x, y)\mu_n(dy) \to \int_{\overline{D}_1} h_s(x, y)\tilde{\mu}(dy)$$

と出来る。従つて有界harmonic函数$g_t(x)$もある　D_1でharmonic（X）な函数$\tilde{g}(x)$に収束する。以上の事から

$$(5.38)\quad T_s^{D_2} f(x) = \tilde{g}(x) + \int_{\overline{D}_1} h_s(x, y)\tilde{\mu}(dy) \qquad x\in D_2$$

$G^D(x, y)$はDでsuperharmonic（X）だから，しかも非負だから，§3注意1よりX^{D_2}−excessiveそれゆえ

$$(5.39)\quad h_s(x, y) \quad G^D(x, y), \qquad S\downarrow 0$$

$f(x)$をX^{D_2}−excessiveである事に注意すると（5．38）と（5．39）から(5.1)が得られる。（5．2）を得るには，$g(x)$を

$$(5.40)\quad g(x) = \tilde{g}(x) + \int_{\partial D_1} G^D(x, y)\tilde{\mu}(dy)$$

とおけばよい。定理5．1を用いる事によつてRieszの表現定理が証明出来る。即ち

<u>定理5．2</u>　Aをcompact closureを持つanalytet setで$\overline{A}$ Dとする。今

$$(5.41)\quad f(x) = P_x^D(\sigma_A < \infty)^{(*)}$$

とおくと，$\overline{A}$にconcentrateするfinite measure μ_Aがuniqueに定まつて

$$(5.42)\quad f(x) = \int_{\overline{A}} G^D(x, y)\mu_A(dy)$$

ままず，lemmaをいくつか準備しよう。

(*)　$\sigma_A = \inf(t>0, x_t\in A)$, $+\infty$ if ( ) $=\phi$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

LEMMA5.6 Dをclass$\mathbb{A}$に属するopen set. λ_1, λ_2をD内にcompact supportを持つfinite measureとする。もし

(5.43) $$\int_D G^D(x, y)\lambda_1(dy) = \int_D G^D(x, y)\lambda_2(dy) \qquad \forall x \in D$$

ならば

(5.44) $$\lambda_1 = \lambda_2$$

証明 任意のopen set $\omega \subset D$に対して

(5.45) $$\int_\omega G^D(x, y)\lambda_1(dy) = \int_\omega G^D(x, y)\lambda_2(dy)$$

が言えればよい。今，$h(x)$を次のようにおき

(5.46) $$h(x) = \int_D G^D(x, y)\lambda_i(dy) \qquad i=1, 2$$

$h_\omega(x)$を下のように定義する。

(5.47) $$h_\omega(x) = \inf_{f \in \mathbb{G}} f(x)$$

$$= \{ f \text{はDでpositive superharmonic}(X) \quad f-h \text{は}\omega\text{でsuperharmonic}(X) \}$$

h_ωがwell-definedである事は，明らかに$\mathbb{G}$は空でなく，f，g $\mathbb{G}$ならば$f \wedge g \in \mathbb{G}$である事から分る。次に

(5.48) $$I_\omega(x) = \int_\omega G^D(x, y)\lambda_1(dy)$$

とおくと

(5.49) $$(h - I_\omega)(x) = \int_{D-\omega} G^D(x, y)\lambda_1(dy)$$

はωでharmonic(X)．従って$I_\omega \in \mathbb{G}$ それゆえ

(5.50) $$I_\omega \geqq h_\omega$$

さて，Kをcompact setで$K \subset \omega$とする。I_Kを(5.48)の形で定義されたものとすると，任意の$h' \in \mathbb{G}$に対して$h' - I_K$はD−Kでsuperharmonic(X)。かつ
かつ$h' - h$はωでsuperharmonic(X)だから，$h' - I_K = h' - h + I_{D-K}$は$\omega$でsuperharmonic(X)．従って$h' - I_K$はDでsuperharmonic(X)．しかも

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(5.51) $\liminf_{\substack{x \to a \\ \cap \quad \cap \\ D \quad \partial D}} h' - I_k \geqq 0$

従つて

(5.52) $h' \geqq I_k \qquad x \quad D$ (*)

(5.50)(5.52)をあわせると(5.45)が言えて，証明が終る。

LEMMA 5.7 λ_1, λ_2はDの内部にconcentrateしているfinite measureとする。更にDはclass $\mathbb{A}$に属するものとする。

(5.53) $h_i(x) = \int_D G^D(x, y) \lambda_i(dy) \qquad i = 1, 2$

(5.54) $h_2(x) = h_1(x) + h(x)$; $h(x)$はDでharmonic (X)

(5.53)及び(5.54)がなりたつならば

(5.55) $h(x) = 0 \qquad \forall x \in D$

証明 open setの列$\{F_k\}$を$F_k \uparrow D$, $F_k \subsetneqq F_{k+1}$となるようにとる。

(5.56) $\omega_k(y) = E_x^D G^D(x(\tau_{F_k}), y)$

とおくと，$x \in F_{k_0}$, $y \in F_{k_0+1}$の場合，$k \geqq k_0 + 2$とおけば

(5.57) $\omega_k(y) \leqq \sup_{\substack{z \in D \setminus F_{k_0+2} \\ y \in F_{k_0+1}}} G^D(z, y) \leqq {}^{\exists} C_1 =$定数

次に，$\omega_k(y) \leqq G^D(x, y)$に注意すると，$x \in F_{k_0}$, $y \in D \setminus F_{k_0+1}$ならば

(5.58) $\omega_k(y) \leqq {}^{\exists} C_2 =$定数

(5.57)及び(5.58)より，limitの交換ができて

(5.59) $E_x^D G^D(x(\tau_{F_k}), y) \to 0 \qquad (k \to \infty, \ y \in D)$

(*) 今，Dでsuperharmonic（下に有界）(X)な函数gが，$\liminf g(x) \geqq 0$であつたとする。gは下半連続だから，gがDで負であつたとすると，定数$k < 0$が存在して，$\inf g(x) = k$，しかもkはある点$x_0 \in D$でattain，かつ$f - k$は非負superharmonic (X)，かつD内の点x_0で0

それゆえ $f \equiv k \quad \forall x \in D$ 矛盾

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

従つて

(5.60) $\lim_{k\to\infty} E_x^D h_i(x(\tau_{F_k}))=0$

それ由，h(x) はDでharmonic (X) に注意すると，(5.54) 式及び (5.60) から

(5.61) $\lim_{k\to\infty} E_x^D h(x(\tau_{F_k}))=\lim_{k\to\infty} h(x)=0$

f (

<u>LEMMA5.8</u>　f(x) を (5.41) のそれとし，class $\mathbb{A}$ に属する D_n を $D_n \uparrow D$ となるように選ぶ。その時

(5.62) $\lim_{n\to\infty} E_x^D f(x_{\tau_{D_n}})=0$

証明　任意のnについて $D_n \supsetneqq A$ としておいて差支えない。今，$D_e \supsetneqq D_k$ とする。

(5.63) $E_x^D f(x(\tau_D \ \overline{D}_l))=P_x^D(\sigma_A<\infty)=f(x)$

次に $\sigma_{D_e}^*(\omega)=\inf(t\geqq 0,\ x_t\in D_l)$ とおいて，$\xi_n(\omega)$ を次のように定義すれば

(5.64) $\xi_n(\omega)=\sigma_{D_l}(\theta_{\tau_{D_n}}(\omega))+\tau_{D_n}(\omega)$

(5.65) $E_x^D f(x_{\tau_{D_n}})=E_x^D f(x(\xi_n))\leqq P_x^D(\xi_n<\infty)$

しかるに

(5.66) $\varphi(x,\overline{D}_l)=\int_{\overline{D}_l} G^D(x,y)\,dy$　，　$\delta=\min_{x\in\partial D_l}\varphi(x,\overline{D}_l)$

とおくと，$\delta>0$ だから

(5.67) $E_x^D\varphi(x_{\xi_n},\overline{D}_l)\geqq\delta P_x^D(\xi_n<\infty)$

$\xi_n\geqq\tau_{D_n}$ に注意して

(5.68) $E_x^D\varphi(x_{\xi_n},\overline{D}_l)=E_x^D\int_{\xi_n}^{\tau_D}\chi_{\overline{D}_l}(x_t)\,dt\leqq E_x^D\int_{\tau_{D_n}}^{\tau_D}\chi_{\overline{D}_l}(x_t)\,dt$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$\to 0\ ,\quad n\downarrow\infty$

従つて（5.67）より

$$(5.69)\qquad P_x^D(\xi_n<\infty)\to 0$$

（5.65）をあわせると（5.62）がでる。

定理5.2の証明　定理5.1より

$$(5.70)\qquad f(x)=f_n(x)+\ {}_{D_n}G^D(x,y)\mu_n(dy)\qquad x\quad D_n$$

ここに f_n は D_n でharmonic (X)

a)　μ_n は $\bar{A}$ にconcentrateしている。なぜならば $f(x)$，$\hat{f}_n(x)$ は共に $D_n\setminus\bar{A}$ でharmonic (X)．従つて ${}_{D_n}G^D(x,y)\mu_n(dy)$ も $D_n\setminus\bar{A}$ でharmonic (X)。今，$h_0(X)$ を次のようにおくと。

$$(5.71)\qquad h_0(x)=\ {}_{D}G^D(x,y)\lambda(dy)$$

ここに λ は μ_n を $D_n-\bar{A}$ に制限したmeasureとする。$h_0(x)$ も D_n-A でharmonic (X)。　D_n/A　U　open setで $\lambda(U)>0$ とする。

§4．注意3より

$$(5.72)\qquad G^U(x,y)=G^D(x,y)-E_x^D G^D(x(\tau_U),y)\ ,\ x\ ,\ y\quad U$$

であり，$G^U(x,y)>0$，x，y　Uに注意すると

$$(5.73)\qquad E_x^D G^D(x_{\tau_U},y)<G^D(x,y)\qquad x\ ,\ y\quad U$$

従つて

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(5.74)\qquad \int_{D_n} E_x^D G^D(X_{\tau_U}, y)\,\lambda(dy) < \int G^D(x, y)\,\lambda(dy)$$

それゆえ

$$(5.75)\qquad E_x^D h_0(X_{\tau_U}) \neq h_0(x) \qquad x \in U$$

矛盾

b) $\bar{A}$にconcentrateするmeasure μが一意的に定つて

$$(5.76)\qquad f(x) = \hat{f}_n(x) + \int G^D(x, y)\,\mu(dy) \qquad \forall x \in D_n$$

なぜならば　$l > n$とすれば，定理5．1より

$$(5.77)\qquad f(x) = \hat{f}_l(x) + \int G^D(x, y)\,\mu_l(dy) \qquad x \quad D_e$$

ここに$\hat{f}_l(x)$はD_lでharmonic(X)．（5．77）と（5．70）をあわせて
lemma5．7を適用すれば，

$$(5.78)\qquad \int G^D(x, y)\,\mu_l(dy) = \int G^D(x, y)\,\mu_n(dy) \qquad \forall x \in D_n$$

§4注意3を用いると，（5．78）は

$$(5.79)\qquad \int G^{D_n}(x, y)\,\mu_l(dy) + \int E_x^D G^D(X_{\tau_{D_n}}, y)\,\mu_l(dy)$$
$$= \int G^{D_n}(x, y)\,\mu_n(dy) + \int E_x^D G^D(X_{\tau_{D_n}}, y)\,\mu_n(dy)$$
$$\forall x \in D_n$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(5.16)より $E_x G^D(X_{\tau_{D_n}}, y)$ はX −harmonic. 従つて§3注意7より，D_n でharmonic (X) だからlemma 5.7が使えて

$$(5.80) \qquad \int G^{D_n}(x, y)\,\mu_l(Dy) = \int G^{D_n}(x, y)\,\mu_n(dy) \qquad x \in D_n$$

それゆえ，lemma5.6より $\mu_l = \mu_n$ それを μ とおけばよい。

c) $\lim_{n \to \infty} \hat{f}_n(x) = 0$

なぜならば，$\{D_n\}$ をclass に属するopen setで $D_n \quad D_{n+1}$，$D_n \uparrow D$ とすると(5.76)より

$$(5.81) \qquad E_x^D f(X_{\tau_{D_{n-1}}}) = E_x^D \hat{f}_n(X_{\tau_{D_{n-1}}})$$
$$+ E_x^D \; G^D(X_{\tau_{D_{n-1}}}, y)\,\mu(dy),$$
$$x \quad D_n$$

左辺はlemma5.8より，$n \to \infty$ につれて0に近づく。右辺の第2項は(5.60)より，$n \to \infty$ につれて0になる。第1項は $\hat{f}_n$ が D_n でharmonic (X) に注意すると $E_x^D \hat{f}_n(x_{\tau_{D_{n-1}}}) = \hat{f}_n(x)$. 従つて

$$(5.82) \qquad \lim \hat{f}_n(x) = 0$$

(5.76)と(5.82)より，定理5.2は証明される。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

§6. Wiener test と regular point

この§では，今まで扱つてきた stopped canonical diffusion process $X^D = (x_t^D, \zeta^D, M_t^D, P_x^D)$ に対して，いわゆる Wiener test がなりたつ事を示し，それを用いて，ある点が compact closure をもつ analytic set 対して stopped canonical diffusion process X^D に関する regular point であるという事は，その点が同じ集合に対して，Brown 運動に関する regular point であるという事と equivalent である事を証明する。この後，勿論 D は十分なめらかな境界をもつ有界領域とし，固定する。ある点 x が compact closure をもつ analytic set A に対して，X^D に関する regular point であるとは，次の (6.1) がなりたつことである。

$$(6.1) \qquad P_x^D(\sigma_A = 0) = 1$$

0－1－law より，$P_x^D(\sigma_A = 0) = 1$ or 0 であることに注意する。
以後，添字の D は省略して，P_x，M_t 等と書きあらわすことにする。

最初に capacity の概念を導入し，Brown 運動の場合に，Hunt [ ] に従つて capacity の 2，3の性質を述べておこう。
任意の compact closure を持つ analytic set A に対して，$\bar{A}$ に mass をもつ measure μ_A が一意的に定まり

$$(6.2) \qquad P_x(\sigma_A < \infty) = \int G(x, y)\,\mu_A(dy)$$

と表現出来る事は，§5の結果であるが，この A に対し capacity C(A) を次のように定義する。

<u>定義 6.1</u> $\quad C(A) \equiv \mu_A(\bar{A})$

特に Brown 運動の場合は $C^B(A)$(*)とかくことにする。まず次の lemma に注意して，Brown 運動の capacity について大切な性質を述べよう。

<u>Lemma 6.1</u> 任意の compact closure を持つ analytic set A に対して $P_x^{(*)}$, $P_{x(*)}$ を次のように定義すると

(*) 以後，断りなしに肩に“B”をつけることによつて Brown 運動に関する用語をあらわすものとする。たとえば $G^B(x, y)$，P_x^B ，etc.

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(6．3) $\quad P_x^{(*)}(\sigma_A<\infty) = \inf\{P_x(\sigma_G<\infty),\ G;\text{open set} \supset A\}$

(6．4) $\quad P_{x(*)}(\sigma_A<\infty) = \sup\{P_x(\sigma_K<\infty),\ K;\text{compact set} \subset A\}$

それらは $P_x(\sigma_A<\infty)$ に等しい。即ち

(6．5) $\quad P_x(\sigma_A<\infty) = P_x^{(*)}(\sigma_A<\infty) = P_{x(*)}(\sigma_A<\infty)$

証明　$\mathcal{G}$ を D 上の open set から生成される Borel algebra としよう。その時 $P_x(\sigma_A<\infty) \equiv \varphi(A)$ は $\mathcal{G}$ の上で定義された。いわゆる order 2 の capacity となる。即ち〔0，1〕の値をとり

A)　$\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{G},\ \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \qquad \varphi(\Gamma_1) \leqq \varphi(\Gamma_2)$

B)　$\Gamma_n \in \mathcal{G},\ \Gamma_n \uparrow \Gamma \Rightarrow \Gamma \in \mathcal{G}$ かつ $\lim_{n\to\infty} \varphi(\Gamma_n) = \varphi(\Gamma)$

C)　任意の compact set Γ 及び任意の $\varepsilon>0$ に対して open set $G \supset \Gamma$ が存在して $\varphi(G) - \varphi(\Gamma) < \varepsilon$

D)　$\Gamma, \tilde{\Gamma}, B \in \mathcal{G},\ \tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma \qquad \varphi(\Gamma \cup B) - \varphi(\tilde{\Gamma} \cup B) < \varphi(\Gamma) - \varphi(\tilde{\Gamma})$

をみたす。A) は明らかである。B) については $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ であるから $\{\sigma_{\Gamma_n}<\infty\}$ の単調性に注意すると $\lim_{n\to\infty} P_x\{\sigma_{\Gamma_n}<\infty\} = P_x\{\lim_{n\to\infty}(\sigma_{\Gamma_n}<\infty)\} = P_x\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\sigma_{\Gamma_n}<\infty)\} = P_x\{\sigma_{\Gamma}<\infty\}$。C) を言うには，単調な open set の列 $\{G_n\}$ で $G_n \supset \Gamma$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \Gamma$ に対して $P_x(\sigma_{G_n}<\infty) \downarrow P_x(\sigma_{\Gamma}<\infty)$ が言えれば十分である。まず $\{\sigma_{G_n}<\infty\}$ の単調性から $\lim_{n\to\infty} P_x(\sigma_{G_n}<\infty) = P_x\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\sigma_{G_n}<\infty)\}$ となる事に注意する。今，D は有界な領域であるから $P_x(\tau_D<\infty) = 1$ であり，又 σ_{G_n} の定義より $P_x(\sigma_{G_n}<\infty) = P_x(\sigma_{G_n}<\tau_D)$ に注意すると，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\sigma_{G_n}<\infty\}$ に含まれる殆んど全ての ω に対してある有限な値 ℓ_0 (ω に depend して) が定まって $\lim_{n\to\infty} \sigma_{G_n}(\omega) = \ell_0$。又 path の右連続性から $\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_{G_n}(\omega)}(\omega) = x_{\ell_0}(\omega)$ であり，又 $\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_{G_n}}(\omega) \in \Gamma$，なぜならば任意の n_0 に対して，$n>n_0$ なる全ての n に対して $x_{\sigma_{G_n}}(\omega) \in G_{n_0}$ 従って $\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_{G_n}} \in G_{n_0}$，$n_0$ 任意だから $\lim_{n\to\infty} x_{\sigma_{G_n}}(\omega) \in \bigcap_{n_0=1}^{\infty} G_{n_0} = \Gamma$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

これらの事から $\sigma_\Gamma(\omega) \leq \ell_0 < \infty$. 由にC) はいえた。

D) については $P_x(\sigma_{\Gamma \cup B} < \infty) - P_x(\sigma_{\tilde{\Gamma} \cup B} < \infty) = P_x(\sigma_{\Gamma \quad B} < \infty, \sigma_{\tilde{\Gamma} \quad B} = \infty) = P_x(\sigma_\Gamma < \infty, \sigma_{\tilde{\Gamma} \cup B} = \infty) \leq P_x(\sigma_\Gamma < \infty, \sigma_{\tilde{\Gamma}} = \infty) = P_x(\sigma_\Gamma < \infty) - P_x(\sigma_{\tilde{\Gamma}} < \infty)$ より明らか。従って Dynkin [1] P 178 定理1 より Lemma の主張が証明される。

注意　上の主張は任意の初期分布 μ に対する P_μ についてもなりたつことはすぐ分る。

Lemma 6.2　任意の compact closure を持つ analytic set A に対して $C^{B(*)}(A)$, $C^B_{(*)}(A)$ を次のように定義すると

$$(6.6) \qquad C^{B(*)}(A) \equiv \inf\left\{ C^B(G),\ G \text{ open set} \supset A \right\}$$

$$(6.7) \qquad C^B_{(*)}(A) \equiv \sup\left\{ C^B(K),\ K \text{ compact set} \subset A \right\}$$

それらは $C^B(A)$ と等しい。即ち

$$(6.8) \qquad C^B(A) = C^{B(*)}(A) = C^B_{(*)}(A)$$

証明　次の関係式がいえさえすれば，証明は Lemma 6.1 及び注意から明らかである。
任意の open set $G \supset \bar{A}$ に対して

$$(6.9) \qquad C^B(A) = \int P^B_x(\sigma_A < \infty)\, \mu^B_G(dx)$$

まず $G^B(x, y) = G^B(y, x)$, x, y D に注意する。(*)

$$(6.10) \qquad \int_{\bar{G}} P^B_x(\sigma_A < \infty)\, \mu^B_G(dx) = \int_D \int_D G^B(x, y)\, \mu^B_G(dy)\, \mu^B_G(dx)$$
$$= \iint G^B(y, x)\, \mu^B_G(dx)\, \mu^B_A(dy)$$
$$= \int P^B_y(\sigma_G < \infty)\, \mu^B_A(dy)$$

$G \supset \bar{A}$ であり G の点は regular point だから (G : open set)，右辺は $\int \mu^B_A(dy) = C^B(A)$ に等しい。

(*)　この事の証明は例えば Dynkin [1] 14章を参照。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

Lemma 6.3　特に A が open set の時，X^D の capacity と Brown 運動の capacity との間に次の関係式がなりたつ。

$$(6.11)\qquad k_2 C^B(A) \leqq C(A) \leqq k_1 C^B(A)$$

ここに k_1, k_2 は定理4.2の C_1, C_2 のみに depend する定数。

証明　L^* を次のような mesure の全体とすると

$$(6.12)\qquad L^* = \{\mu,\ \int G^B(x,y)\,\mu(dy) \leq 1,\quad x \in \overline{A} \text{ のある近傍}$$

$$\mu \text{ の support } \subsetneqq \overline{A}\ \}$$

任意の L^* に含まれる μ に対して，$\overline{A} \subsetneqq \overline{G} \subset D$ なる open set G をとると

$$\begin{aligned}(6.13)\qquad \mu(\overline{A}) &\leqq \int_{\overline{A}} P_x^B(\sigma_G < \infty)\,\mu(dx)\\ &= \int_{\overline{A}}\int_{\overline{G}} G^B(x,y)\,\mu_G^B(dy)\,\mu(dx)\\ &= \int_{\overline{G}}\int_{\overline{A}} G^B(y,x)\,\mu(dx)\,\mu_G^B(dy)\\ &\leqq \int_{\overline{G}} \mu_G^B(dy)\\ &= C^B(G)\end{aligned}$$

他方，$k_2\,\mu_A(dy)$ を考えてみると明らかにその support は $\overline{A}$ に含まれ，定理4.1から任意の(*) $x, y \in K$ に対して strictly positive な定数 C_1, C_2 が存在して $C_2\,\phi(|x-y|) \leq G(x,y) \leq C_1\,\phi(|x-y|)$，同様に C_1^B, C_2^B (strictly positive な定数) が存在して $C_2^B\,\phi(|x-y|) \leq G^B(x,y) \leq G^B(x,y) \leq C_1^B\,\phi(|x-y|)$。従って $C_2/C_1^B\ G^B(x,y) \leq G(x,y) \leq C_1/C_2^B\ G^B(x,y)$ であるから $k_2' \equiv C_2/C_1^B$ とすると

$$(6.14)\qquad 1 \geqq P_x(\sigma_A < \infty) = \int G(x,y)\,\mu_A(dy) \geq k_2 \int G^B(x,y)\,\mu_A(dy)$$

(*) 従ってこの後の議論はある compact set K を固定して，その K 内に含まれる set A についてのみなりたつが，簡単のため以後この事は断らない。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

それ由 $k'_2 \mu_A \in L^*$。 (3.13) より $k'_2 C(A) \leq C^B(G)$。
従つて Lemma 6.2 より $k'_2 C(A) \leq C^B(A)$。
次に L^{**} を次のように定義すると

$$(6.15) \qquad L^{**} \equiv \{ \mu,\ \int G^B(x, y)\mu(dy) \geqq 1,\ \forall x \in A$$
$$\mu \text{ の support } \subseteq \bar{A}$$

任意の L^{**} に含まれる μ に対して，A に含まれる compact set S をとれば，次の関係式がなりたつ。

$$(6.16) \qquad \mu(\bar{A}) \geqq \int_{\bar{A}} P_x^B(\sigma_S < \infty)\mu(dx)$$
$$= \int_{\bar{A}} \int_S G^B(x, y)\mu_S^B(dy)\mu(dx)$$
$$= \int_S \int_{\bar{A}} G^B(y, x)\mu(dx)\mu_S^B(dy)$$
$$\geqq \int_S \mu_S^B(dy)$$
$$= C^B(S)$$

前と同様にして $k'_1 \equiv C_1 / C_2^B$ とおくと A を open set であるから $k'_1 \mu_A \in L^{**}$。
従つて，(6.16) より $k'_1 C(A) \geqq C^B(S)$。 Lemma 6.2 より $k'_1 C(A) \geqq C^B(A)$。 $k_1 \equiv 1/k'_2$ ， $k_2 \equiv 1/k'_1$ とおけば Lemma の主張がなりたつ。

次に，様々な regular point の判定条件を与えよう。まず下の Lemma に注意する。

<u>Lemma 6.4</u> $\{O_n\}$ を共通の中心 Z を持った半径 r_n の球の列で，$n \uparrow \infty$ につれて $r_n \downarrow 0$ とする。その時

$$(6.17) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in K - O_1} P_x(\sigma_{O_n} < \infty) = 0 \qquad K\text{: conpact set}$$

<u>証明</u> 定理4.1と定理5.2から任意の $x \in K^{(*)}$ に対して

(*) 勿論 K は $\{O_n\}$ を含むように広くとつておく。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(6.18)\qquad C_2\phi\Big(\sup_{y\in \overline{O}_n} |x-y|\Big)\,\mu_{O_n}(\overline{O}_n) \leqq \int_{\overline{O}_n} G(x,y)\,\mu_{O_n}(dy)$$

$$= P_x(\sigma_{O_n}<\infty)\leqq 1$$

一方

$$(6.19)\qquad \sup_{x\in K-O_1} P_x(\sigma_{O_n}<\infty)\leqq C_1\int\phi(|x-y|)\,\mu_{O_n}(dy)$$

$$\leqq C_1\,\phi(\gamma_1-\gamma_n)\,\mu_{O_n}(\overline{O}_n)$$

(6 . 18) と (6 . 19) をあわせると，

$$(6.20)\qquad \sup_{x\in K-O_1} P_x(\sigma_{O_n}<\infty)\leqq \frac{C_1}{C_2}\,\frac{\phi(\gamma_1-\gamma_n)}{\phi\big(\sup_{y\in\overline{O}_n}|Z-y|\big)}=\frac{C_1\phi(\gamma_1-\gamma_n)}{C_2\phi(\gamma_n)}$$

$P(\gamma_n)\uparrow\infty$ $n\uparrow\infty$ であるから (6 . 17) を得る。

注意 X^D では，一点 x は $\{x\}$ に対して regalar point でないことが分る。

Lemma 6.5 A を analytic set, x をその境界点とせよ。
今， A_k 及び A_k^* を次のように定義するならば

$$(6.21)\qquad A_k\equiv\Big\{y\ ;\ \frac{1}{2^k}<|y-x|\leqq\frac{1}{2^{k-1}}\Big\}\cap A$$

$$(6.22)\qquad A_k^*\equiv\{\sigma_{A_k}<\infty\}$$

x が，A に対して X^D に関する regular point であることは，次の条件と同等である。

$$(6.23)\qquad P_x\big(\overline{\lim_{k\to\infty}}\ A_k^*\big)>0$$

証明 $O_n\equiv\Big\{y\ ;\ |y-x|\leqq\frac{1}{2^n}\Big\}\cap D$ とする。今，$P_x(\sigma_{O_n^c}\downarrow\sigma_{D-x})=1$
即ち $P_x(\sigma_{O_n^c}\downarrow 0)=1$ に注意すると

$$(6.24)\qquad P_x(\sigma_A>0)=P_x\Big\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(0<t<\sigma_{O_n^c},\ x_t\notin B)\Big\}$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

を得る。さて(6.23)がなりたつのにも係らず x は regular point でない，即ち $P_x(6_A>0)=1$ とする。すると任意の ε に対してある番号 n_0 が存在して

$$(6.25)\qquad P_x(0< t<6_{O_n^c},\ x_t \notin B)\geqq 1-\varepsilon$$

一方 $G_n \equiv O_n \cap A$ とおけば

$$(6.26)\qquad P_x(6_{G_n}<\infty)=P_x(0< t<6_{O_{n_0}^c},\ x_t \notin B,\ 6_{G_n}<\infty)$$
$$+P_x(0< t<6_{O_{n_0}^c},\ x_t \in B,\ 6_{G_n}<\infty)$$
$$=E_x(P_{x_{6_{O_{n_0}^c}}}(6_{G_n}<\infty),\ 0< t<6_{O_{n_0}^c},\ x_t \notin B)$$
$$+P_x(0< t<6_{O_{n_0}^c},\ x_t \in B,\ 6_{G_n}<\infty)$$
$$n > n_0$$

従つて(6.25)と(6.17)から十分大きな n に対して

$$(6.27)\qquad P_x(6_{G_n}<\infty)\leqq(1-\varepsilon)\sup_{Z\in K-O_{n_0}} P_Z(6_{G_n}<\infty)+\varepsilon$$
$$\leqq 2\varepsilon$$

これは，(6.23)に矛盾する。

逆に $P_x(\lim_{n\to\infty} A_n^*)=0$ とすると 事象 $\{A_n^*\}$ を有限回しかおきないから明らかに x は regular point でない。

Lemma 6.5 から，境界点が regular point であるか否かは事象列 $\{A_k^*\}$ の極限の状態の如何によるものであり，従つて Borel-Cantelli の lemma に類似のものが使用できるのではないかと予想される。すぐ後でのべるように，この事象列 $\{A_k^*\}$ に対しては Lamperti の lemma が適用出来る。

Lemma 6.6 (Lamperti [11]) 事象列 $\{E_k\}$ が次の条件を満足するならば

i) $\sum_k^\infty P(E_k)=+\infty$

ii) 正定数 N と C が存在して，全ての $n>m>N$ に対して $P(E_n E_m)\leqq C\,P(E_n)\,P(E_m)$。

その時

$$P(\lim_{k\to\infty} E_k)>0$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

Lemma 6.6 の証明　$P(E_k)$ が $k\to\infty$ につれて 0 に収斂しないならば，主張は明らかだから，$\lim_{k\to\infty} P(E_k)=0$ と仮定する。今，Iを $(0, 2/C)$ の閉部分区間とする。その時，仮定 i）より，任意の k に対して，$k<n_1<n_2$ を次のように選ぶことが出来る。

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} P(E_n)=x\in I$$

従って

$$P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right)\geq P\left(\bigcup_{n=n_1}^{n=n_2} E_n\right)\geq \sum_{n=n_1}^{n_2} P(E_n)-\sum_{n_1\leq n<m\leq n_2} P(E_n E_m)$$

$$\geq \sum_{n=n_1}^{n_2} P(E_n)-\frac{1}{2}C\sum_{\substack{n,m=n_1\\ n\neq m}}^{n_2} P(E_n)P(E_n)$$

$$\geq x-\frac{1}{2}C\sum_{n,m=n_1}^{n_2} P(E_n)P(E_m)=x-\frac{1}{2}Cx^2>0$$

Lemma 6.7　lemma 6.5 と同じ仮定，記号の下で，境界点 x が，A に対して X^D に関する regular point である事は次のことと同等である。

$$(6.28)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} P_x(A_k^*)=\infty$$

証明　最初に，定理 4.2において定義された $\phi(\gamma)$ が，次の性質を持つことを注意しておく。

α）　$\gamma=0$ を除いて連続

β）　$\gamma\downarrow 0$ につれて $\phi(\gamma)\uparrow\infty$

γ）　$\dfrac{\phi(\frac{\gamma}{2})}{\phi(\gamma)}=2^{n-2}$　$n\geq 3$　$\dfrac{\phi(\frac{\gamma}{2})}{\phi(\gamma)}\leq 2$ ，$n=2$　（γ 十分に小）

i）　もし $\sum_k^{\infty} P_x(A_k^*)<\infty$ ならば，Borel−Cantelli の lemma によって $P_x(\lim_{k\to\infty} A_k^*)=0$。従って x は A の regular point ではない。

ii）　$\sum_k^{\infty} P_x(A_k^*)=\infty$ とする。その時 $\sum_k^{\infty} P_x(A_{2k}^*)$ と $\sum_k^{\infty} P_x(A_{2k+1}^*)$ の少くともいずれかが発散するから，一般性を失うことなしに $\sum_k^{\infty} P_x(A_{2k}^*)$ が発散すると仮定しよう。任意の $k>j$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(6.29)\qquad P_x(A_{2k}^* \cap A_{2j}^*) = P_x(\sigma_{A2k} < \infty,\ \sigma_{A2j} < \infty)$$

$$= P_x(\sigma_{A2k} < \sigma_{B2j} < \infty) + P_x(\sigma_{A2j} < \sigma_{A2k} < \infty)$$

$$= E_x(P_{x\sigma_{A2k}}(\sigma_{A2j} < \infty),\ \sigma_{A2k} < \sigma_{A2j} < \infty)$$

$$+ E_x(P_{x\sigma_{A2j}}(\sigma_{A2k} < \infty),\ \sigma_{A2j} < \sigma_{A2k} < \infty)$$

$$\leqq E_x(P_{x\sigma_{A2k}}(A_{2j}^*),\ \sigma_{A2k} < \infty)$$

$$+ E_x(P_{x\sigma_{A2j}}(A_{2k}^*),\ \sigma_{A2j} < \infty)$$

A2j と A2k のきよりは $1/2^{2k-1}$ 及び $1/2^{2j+1}$ より大きい事に注意し，定理5.2，及び定理4.1，$\phi(\gamma)$ の性質 β) に注意すると，任意の $y \in \bar{A}_{2j}$ に対して

$$(6.30)\qquad P_y(A_{2k}^*) = \int_{\bar{A}_{2k}} G(y, z)\,\mu_{A2k}(dz)$$

$$\leqq C_1 \int_{\bar{A}_{2k}} \phi(|y-z|)\,\mu_{A2k}(dz) \leqq C_1\phi(1/2^{2k-1})\,C(A2k)$$

同様に任意の $y \in \bar{A}2k$ に対して

$$(6.31)\qquad P_y(A_{2j}^*) \leqq C_1\phi(1/2^{2j+1})\,C(A2j)$$

一方

$$(6.32)\qquad P_x(A_{2k}^*) \geqq C_2\phi(1/2^{2k-1})\,C(A2k)$$

$$(6.33)\qquad P_x(A_{2j}^*) \geqq C_2\phi(1/2^{2j-1})\,C(A2j)$$

(6.30) と (6.32) をあわせると任意の $y \in \bar{A}_{2j}$ に対して

$$(6.34)\qquad P_y(A_{2k}^*) \leqq \frac{C_1}{C_2} P_x(A_{2k}^*)$$

(6.31) と (6.33) をあわせると，任意の $y \in \bar{A}2k$ に対して，定数 M があつて

$$(6.35)\qquad P_y(A_{2j}^*) \leqq \frac{C_1}{C_2}\,\frac{\phi(1/2^{2j+1})}{\phi(1/2^{2j-1})}\,P_x(A_{2j}^*) \leqq \frac{C_1}{C_2} M\,P_x(A_{2j}^*)$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(6.29)に，(6.34)，(6.35)を代入すると，M>1だから

$$(6.36)\qquad P_x(A_{2j}^* A_{2k}^*) \leqq 2M\frac{C_1}{C_2}P_x(A_{2j}^*)P_x(A_{2k}^*)$$

それ由，Lamperti の lemma より

$$(6.37)\qquad P_x(\lim_{k\to\infty} A_{2k}^*) > 0$$

lemma 6.5を考慮にいれると証明は完成する。

この lemma から，いわゆる Wiener test が導かれる。即ち

定理 6.1 lemma 6.5と同じ仮定の下で，点 x が A に対して，X^D に関する regular point であることは，次の関係式がなりたつことと同等である。

$$(6.38)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \phi(\frac{1}{2^k})C(A_k) = \infty$$

証明 lemma 3.7の計算を用いて，ある定数 M があつて

$$(6.39)\qquad \frac{C_1}{M}\phi(\frac{1}{2^k})C(A_k) \leqq P_x(A_k^*) \leqq C_1\phi(\frac{1}{2^k})C(A_k)$$

従つて，(6.38)と(6.28)とは同等である。それ由，lemma 6.7より，定理は明らかである。

これらの lemma 及び定理を用いる事によつて，この§の最初にのべた事を証明する。即ち

定理 6.2 A を cnmpact closure をもつ analytic set とせよ。x が A に対して，X^D に関する regular point ならば，A に対して Brown 運動に関する regular point である。逆もなりたつ。

証明 記号は今まで用いたものを使用する。任意の A_k に対して open set $G_k \supset A_k$ を次のように選ぶ。

$$(6.40)\qquad P_x(6_{A_k}<\infty)+\frac{1}{2^k} \geqq P_x(6_{G_k}<\infty) \geqq P_x(6_{A_k}<\infty)$$

$$P_x^B(6_{A_k}<\infty)+\frac{1}{2^k} \geqq P_x^B(6_{G_k}<\infty) \geqq P_x^B(6_{A_k}<\infty)$$

$$(6.41)\qquad \phi(\inf_{y\in G_k}|x-y|) \leqq 2\phi(\frac{1}{2^k})$$

$$\phi(\sup_{y\in G_k}|x-y|) \geqq \frac{1}{2}\phi(\frac{1}{2^k})$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

それが可能な事は，lemma 6.1 及び $\phi(\gamma)$ の性質から明らかである。

まず（6.40）及び（6.39）から

$$(6.42)\qquad \sum_{k}^{\infty} P_x(A_k^*)=\infty \Longleftrightarrow \sum_{k}^{\infty} P_x(\sigma_{G_k}<\infty)=\infty$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k}^{\infty} \phi\left(\frac{1}{2^k}\right) C(G_k)=\infty$$

lemma 6.3に注意すると

$$(6.43)\qquad \sum_{k}^{\infty} \phi\left(\frac{1}{2^k}\right) C(G_k)=\infty \Longleftrightarrow \sum_{k}^{\infty} \phi\left(\frac{1}{2^k}\right) C^B(G_k)=\infty$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k}^{\infty} P_x^B(\sigma_{G_k}<\infty)=\infty \Longleftrightarrow \sum_{k}^{\infty} P_x^B(A_k^*)=\infty$$

（6.42）と（6.43）から，lemma 6.7 を用いると定理が証明される。

この事は，もし D の係数のなめらかさを連続性のみに制限すれば必ずしも正しくない。（次§参照）

注意 1　A を open set とせよ。x が $\bar{A}$ に対して，X^D に関する regular point ならば，A に対してもそうである。なぜならば Brown運動については，lemma 3.2 と定理 6.1 から明らかであり，X^D については定理6.2 から分る。

注意 2　meaoure μ_A は，実は ∂A にのみ mass を持つ。

それには

$$(6.44)\qquad P_x(\sigma_A<\zeta)=P_x(\sigma_{\partial A}<\zeta)$$

が言えたらよい。これは容易なので，省略する。

注意 3　今までの証明から分るように，Green 函数の order が 定理4.1（4.7）式をみたすものであれば，process が standard である事と，copacitary measure μ_A が存在して，$\bar{A}$ にのみ mass を持つ事が言えさえすれば，path が連続である事は必要でない事に注意する。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

第Ⅱ章　連続係数を持つ拡散過程の正則点

— 回転不変の場合 —

この章では，R^d $(d \geqq 2)$ での半径 R の球 Ω を考え，$\bar{\Omega}$ に与えられた次の2階の微分作用素 $\mathscr{D}$ の $C_0(\Omega)$ での(*) closed extension $\bar{\mathscr{D}}$ を generator とする。H. Tanaka〔28〕によって構成された Markov process を扱う事にする。

(1)　$$\mathscr{D} = \sum_{i \cdot j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \qquad x = (x_1, x_2 \cdots\cdots, x_d) \in \bar{\Omega}$$

(1, a)　$a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$

(1, b)　strictly elliptic 即ち，ある定数 $M > 0$ が存在して

$$0 < \left[\sum_{i \cdot j}^{d} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \right] \leq M, \quad |\lambda| = 1 \quad x \quad \bar{\Omega}$$

<u>定理 1.</u>　Ω上に，(1) の $\mathscr{D}$ に，次の意味で対応し，$\bar{\mathscr{D}}$ を generator とする強 Markov process $X = (x_t, \zeta, N_t, P_x)$ が存在する。しかも path は連続である。f を compact snpport を持つ $C^2(\Omega)$ に属する函数とすれば，

(2)　$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{T_t f - f}{t} - \sum_{i \cdot j}^{d} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\Omega} = 0$$

<u>注意 1.</u>　H. Tanaka〔28〕では，更に有界可測な係数を持つ一階の項がついてる場合，$\Omega = R^d$ の時にも証明している。

以後，簡単のため，特に d＝2，3の場合を考えよう。$\mathscr{D}$ を形式的に極座標で表現すると，d＝3の時

(3)　$$= a^r_r \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} a^r_\theta \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r} a^r_\varphi \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \cdot a^\varphi_\theta \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta}$$

(*)　$D_x = \{ u;\ ^{\exists}U \ni x$; bdd domain, $\{\mathscr{D}^{(n)}\}$ approxi mating operator with sufficiently smooth coefficients, $\{u^{(n)}\} \in C^2(U)$ で unifomly に converge u 及び $f \in C(U)$ に converge する。$\}$ とおけば f は U, $\mathscr{D}^{(n)}$ 及び $u^{(n)}$ の選び方に無関係に定まる事が言えて，$D_x \ni u$ に対して，$\bar{\mathscr{D}}$ が定義できて $\bar{\mathscr{D}} u(x) = f(x)$ とおける。$\bar{\mathscr{D}}$ の定義域は，$u \in C_0(\Omega) = \{ u \in C(\Omega)$, $u \to 0$ as $\rho(x, \partial\Omega) \to 0 \}$ でdenseで全ての$x \in \Omega$ に対し，$u \in D_x$ で，$\bar{\mathscr{D}} u \in C_0(\Omega)$ とする。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$+\frac{1}{r^2}\alpha_\theta^\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\alpha_\varphi^\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\alpha_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\alpha_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\alpha_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

但し，$x_1=r\sin\theta\cos\varphi$，$x_2=r\sin\theta\sin\varphi$，$x_3=r\cos\theta$，$r=\ x_1^2+x_2^2+x_3^2$

(4) $$\alpha_r^r=a_{11}\sin^2\theta\cos^2\varphi+a_{22}\sin^2\theta\sin^2\varphi+a_{33}\cos^2\theta$$
$$+2a_{12}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+2a_{13}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi$$
$$+2a_{23}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi$$

(5) $$\alpha_\theta^r=a_{11}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi+a_{22}\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta-a_{33}\sin\theta\cos\theta$$
$$+2a_{12}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi+a_{13}\cos\varphi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$+a_{23}\sin\varphi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

(6) $$\alpha_\varphi^r=-a_{11}\sin\varphi\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi\cos\varphi+a_{12}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$$
$$-a_{13}\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\theta}+a_{23}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi$$

(7) $$\alpha_\theta^\varphi=-a_{11}\frac{\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta}{\sin\theta}+a_{22}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$+a_{12}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+a_{13}\sin\varphi-a_{23}\cos\varphi$$

(8) $$\alpha_\theta^\theta=a_{11}\cos^2\varphi\cos^2\theta+a_{22}\cos^2\theta\sin^2\varphi+a_{33}\sin^2\theta$$
$$+2a_{12}\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi-2a_{13}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi$$
$$-2a_{23}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi$$

(9) $$\alpha_\varphi^\varphi=a_{11}\sin^2\varphi+a_{22}\cos^2\varphi-2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi$$

(10) $$\alpha_r=a_{11}(\cos^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi)+a_{22}(\cos^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)$$
$$+a_{33}\sin^2\theta+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi\ (\cos^2\theta-1)$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$- 2a_{13} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi - 2a_{23} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi$$

(11) $$\alpha_\theta = a_{11} \cos\theta\left(-2\sin\theta\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\sin\theta}\right) + a_{22} \cos\theta\left(-2\sin\theta\sin^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{\sin\theta}\right) + 2a_{33}\sin\theta\cos\theta - 2a_{12}\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\left(2\sin\theta - \frac{1}{\sin\theta}\right) + 2a_{13}\cos\varphi(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + 2a_{22}\sin\varphi(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

(12) $$\alpha_\varphi = a_{11}\sin\varphi\cos\varphi - a_{22}\sin\varphi\cos\varphi + 2a_{12}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$$

特に，今，この Markov proceess が回転不変であるとする。即ち，任意の回転 g に対して

(13) $$P(t, x, \Gamma) = P(t, gx, g\Gamma)$$

であったとする。その時，(3)はさらに簡単な形にあらわす事ができる。

LEMMA 1　定理1で構成した Markov process $X = (x_t, \zeta, N_t, P_x)$ が原点を中心として回転不変であったとする。その時，次のような函数 $a(r)$，$b(r)$ が定まつて

i) r の函数として，$a(r)$，$b(r)$ は連続 on $(0, R]$

ii) $\lim_{r\to 0} (a(r) - b(r)) = 0$

iii) ある定数 C_1，$C_2 > 0$ があつて $C_2 < a(r), b(r) < C_1$, on $(0, R]$

d＝3の時，$\mathfrak{A}$ は

(14) $$\mathfrak{A} f(r,\theta,\varphi) = a(r)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2b(r)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{b(r)}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$

d＝2の時，更に鏡像不変の仮定を加えるならば

(15) $$f(r,\theta) = a(r)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2b(r)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{b(r)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

その場合，係数 a_{ij} は，（d＝2，3の時）

(16) $$a_{ij}(x) = \delta_{ij}\cdot b(r) + \{a(r) - b(r)\}\frac{x_i x_j}{r^2}$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

と表現できる。

逆に，i)，ii)，iii) をみたす，$a(r)$，$b(r)$ によって，(16) で表現される係数 a_{ij} を持つ Markov process は回転不変である。(原点を中心として)

<u>注意 2.</u>　d＝2 の時，鏡像不変の仮定がないならば，一般に

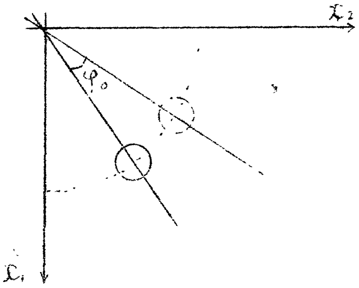
$$(17)\qquad f(r,\theta)=a(r)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2b(r)}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}+\frac{C(r)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{C(r)}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$-\frac{2b(r)}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

<u>証明</u>　3 次元の場合を証明する。

$1)^{\circ}$　α^{r}_{r} 及び α_r が r のみの函数 $a(r)$ 及び $2b(r)$ のなるのは明らかである。

$2)^{\circ}$　α_{φ} は φ－invariant である。なぜなら任意の点 $x'=(r,\theta,\varphi')$ $x''=(r,\theta,\varphi'')$ を固定し，$\varphi''-\varphi'=\mathring{\varphi}$ とする。x'，x'' のある近傍で $x=(r,\theta,\varphi)$ ならば $f(x)=\varphi$ の値をとる C^2 に属する函数を考える。



x'，x'' を中心とする半径 ρ の球をそれぞれ S'_ρ，S''_ρ とおけば，$\tau_{S_\rho}=\inf(t\,;\,x_t\notin S_\rho)$

$$(18)\qquad f(x'')=\lim_{\rho\downarrow 0}\frac{E_{x''}\,f(x_{\tau_{S''_\rho}})-f(x'')}{E_{x''}(\tau_{S''_\rho})}$$

$$=\lim_{\rho\downarrow 0}\frac{E_{(r,\theta,\varphi'')}f(x_{\tau_{S''_\rho}})-(\varphi'+\mathring{\varphi})}{E_{x''}(\tau_{S''_\rho})}$$

x_3－ 軸のまわりの $\mathring{\varphi}$ なる回転を考えると，$6'$ を $\partial S'_\rho$ 上の，$6''$ を $\partial S''_\rho$ 上の harmonic measnre とすれば

$$(19)\qquad 右辺=\lim_{\rho\downarrow 0}\int\frac{(\varphi\,t\,\mathring{\varphi})\,6''(r,\theta,\varphi')(dz)-(\varphi'+\mathring{\varphi})}{E_{x''}(\tau_{S''_\rho})}$$

であるから，回転不変の条件から

$$(20)\qquad 右辺=\lim_{\rho\downarrow 0}\frac{\varphi\,6'(r,\theta,\varphi')(dz)-\varphi'}{E_{x'}(\tau_{S'_\rho})}$$

$$=\mathfrak{A}f(x')$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

従って

$$(21) \qquad \frac{\alpha_\varphi(x')}{r^2 \sin\theta} = \frac{\alpha_\varphi(x'')}{r^2 \sin\theta}$$

であるから，α_φ は φ− invariant。（今の証明は $0<\varphi<2\pi$ の時にのみ通用するが，連続性から，$0\leq\varphi<2\pi$ までこめて φ− invariant）

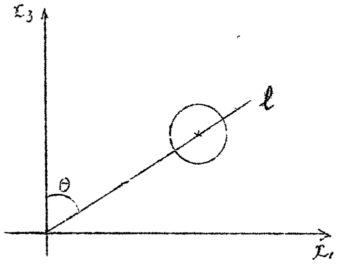
3) $\underline{\alpha_\varphi \equiv 0}$，なんとなれば，(12) で $\varphi=0$ とおくと，α_φ が φ−invariant に注意すれば

$$(22) \qquad \alpha_\varphi = -2a_{12}(r, \theta, 0)$$

今，$x=(x_1, x_2, x_3)$ の時，$f(x)=x_1 x_2$ の値をとる函数 $f(x)$ をとれば

$$(23) \qquad f(r, \theta, 0) = 2a_{12}(r, \theta, 0) = -\alpha_\varphi$$

従って，$\mathfrak{A} f(r, \theta, 0)=0$ が言えればよい。$x=(r, \theta, 0)$ を中心とする半径



ρ の球 S_ρ を考えると

$$(24) \qquad \mathfrak{A} f(r, \theta, 0) = \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{E_{(r,\theta,0)} f(x_{\tau_{S_\rho}}) - f(r,\theta,0)}{E_{(r,\theta,0)}(\tau_{S_\rho})}$$

$f(r, \theta, 0)=0$ に注意すれば

$$(25) \qquad \mathfrak{A} f(r, \theta, 0) = \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{E_{(r,\theta,0)} f(x_{\tau_{S_\rho}})}{E_{(r,\theta,0)}(\tau_{S_\rho})}$$

ℓ 軸のまわりの 180° の回転を考えて，それぞれ対応する点を x'，x'' とすれば $f(x') = -f(x'')$。従って

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(26)\qquad E_{(r,\theta,0)}\, f(x_{\tau_{S_\rho}}) = 0$$

$\mathring{4}$) $\alpha^r_\varphi = \alpha^\varphi_\theta = 0$ の証明 ; $\mathring{3}$) の結果より, $\alpha_\varphi = 0$ であるから

$$(27)\qquad \alpha^r_\varphi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(a_{23}\cos\varphi - a_{13}\sin\varphi),\ \alpha^\varphi_\theta = a_{13}\sin\varphi - a_{23}\cos\varphi$$

従つて, $\alpha^r_\varphi = 0$ が言えればよい。もし, α^r_φ が φ − invariant が言えたとすれば

$$(28)\qquad \alpha^r_\varphi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, a_{23}(r,\theta,0)$$

となるから, $\mathring{3}$) と同様にして, $a_{23}(r,\theta,0) = 0$ が言えて, $\alpha^r_\varphi = 0$ となる。
α^r_φ が φ − invariant である事を証明しよう。任意に $x' = (r,\theta,\varphi')$, $x'' = (r,\theta,\varphi'')$, φ', $\varphi'' > 0$。 $\varphi' - \varphi'' = \mathring{\varphi}$ を固定して, それぞれの近傍で $x = (r,\theta,\varphi)$ の時, $f(x) = r\varphi$ なる C^2 に属する函数を考えれば, $6'$, $6''$ をそれぞれ $\partial S'_\rho$, $\partial S''_{\rho\rho}$ の harmonic measure (x', x'' を出発点とする) とおくと回転不変に注意すれば

$$(29)\qquad f(x') = \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{\int r'\varphi\, 6'_{(r,\theta,\varphi')}(d(r',\theta,\varphi)) - r\varphi'}{E_{x'}(\tau_{S'_\rho})}$$

$$= \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{\int r'\varphi\, 6''_{(r,\theta,\varphi'')}(d(r',\theta,\varphi)) + \mathring{\varphi}\, r' 6''_{(r,\theta,\varphi'')}(d(r',\theta,\varphi)) - r(\varphi'' + \mathring{\varphi})}{E_{x''}(\tau_{S'_\rho})} = \mathfrak{A} f(x'') - \mathring{\varphi}\, \mathfrak{A}\hat{f}(x'')$$

但し, $\hat{f}$ は $x = (r,\theta,\varphi)$ の時, $f(x) = r$ となる函数。一方

$$(30)\qquad f(x') = \varphi' \cdot \frac{2b(r)}{r} + 2\alpha^r_\varphi(r,\theta,\varphi')$$

従つて, (29) とあわせて

$$(31)\quad \varphi' \cdot \frac{2b(r)}{r} + 2\alpha^r_\varphi(r,\theta,\varphi') = \varphi'' \frac{2b(r)}{r} - \mathring{\varphi}\frac{2b(r)}{r} + 2\alpha^r_\varphi(r,\theta,\varphi'')$$

それ由

$$(32)\qquad \alpha^r_\varphi(r,\theta,\varphi') = \alpha^r_\varphi(r,\theta,\varphi'')$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

5°) α_φ^φ は $\varphi-$invariant である事の証明 ; 任意に $x'=(r,\theta,\varphi')$, $x''=(r,\theta,\varphi'')$ を固定し，それぞれの近傍で $f(x)=\varphi^2$, $x=(r,\theta,\varphi)$ となる C^2 に属する函数を考えれば，今までと同じようにして，$\mathring{\varphi}=\varphi'-\varphi''$ とすると

$$(33)\qquad \mathfrak{A}\, f(x')=\mathfrak{A}\, f(x'')+2\mathring{\varphi}\,\mathfrak{A}\,\hat{f}(x'')$$

ここに $\hat{f}$ は $x''=(r,\theta,\varphi)$ の時，$\hat{f}(x'')=\varphi$ となる函数。3°) の結果より $\alpha_\varphi=6$，従って $2\mathring{\varphi}\,\mathfrak{A}\,\hat{f}(x'')=0$　それ由，α_φ^φ は $\varphi-$invariant。

6°) α_φ^φ は r のみの函数である事の証明 ; 5°) の結果より，

$$(34)\qquad \alpha_\varphi^\varphi=a_{22}(r,\theta,0)$$

である事が分るから，$a_{22}(r,\theta,0)$ が $\theta-$invariant である事が言えればよい。任意に $x'=(r,\theta',0)$, $x''=(r,\theta'',0)$ を固定して，その近傍で $x=(x_1,x_2,x_3)$ ならば $f(x)=x_2^2$ の値をとる C^2 に属する函数とすれば，x_2- 軸のまわりの $\theta'-\theta''$ の回転を考えると，$\mathfrak{A}\,x_2=0$ に注意すれば

$$(35)\qquad \mathfrak{A}\, f(x')=\mathfrak{A}\, f(x'')$$

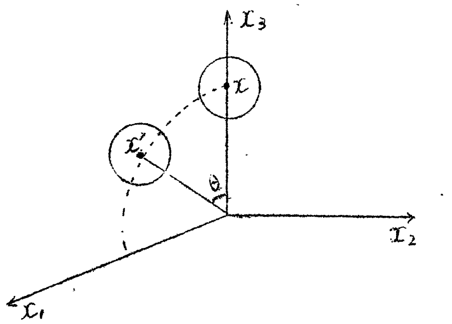
従って，$a_{22}(r,\theta,0)$ は $\theta-$invariant

7°) α_θ^θ は r のみの函数である事の証明 ; (7) と (9) より

$$(36)\qquad \alpha_\theta^\theta=2b(r)-\frac{1}{r}\alpha_\varphi^\varphi$$

であるから，6°) の結果より明らか。

8°) $\alpha_\theta=\cos\theta/\sin\theta\cdot\{r$ の函数$\}$ の証明 ; まず $a_{13}(r,\theta,0)=0$ を証明しよう。$x=(x_1,x_2,x_3)$ の時，$f(x)=x_1x_3$ の値をとる函数 f を考える。$a_{13}(r,\theta,0)$ は $\theta-$invariant である。なぜならば，$x=(0,0,x_3)$, $x'=(x_1,0,x_3\cos\theta)$ なる2点をとり，それを中心とする半径 ρ の球 S_ρ, S_ρ' をとり，6_ρ, $6_\rho'$ をそれぞれ，x, x' に関する ∂S_ρ, $\partial S_\rho'$ 上の harmonic measure とすれば，



Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(37)\qquad \mathfrak{A} f(x') = \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{E_{x'}(f(x_{\tau_{S_\rho}})) - f(x')}{E_{x'}(\tau_{S_\rho})} = \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{\int Z_1 Z_3\, \sigma'_\rho(dz) - x_1 x_3 \cos\theta}{E_{x'}(\tau_{S_\rho})}$$

$$= \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{\int (Z_1 - x_1)(Z_3 + x_3(1-\cos\theta))\, \sigma'_\rho(dz) - x_1 x_3 \cos\theta}{E_{x'}(\tau_{S_\rho})}$$

$\mathfrak{A}(x_1) = \mathfrak{A}(x_3) = 0$ に注意すれば，回転不変から

$$(38)\qquad \mathfrak{A} f(x') = \mathfrak{A} f(x) = a_{13}(r, 0, 0)$$

それ由，$a_{13}(r, \theta, 0)$ は θ－invariant， ところが明らかに

$$(39)\qquad \mathfrak{A} f(x) = 0 \quad , \quad x = (r, 0, 0)$$

従つて，$a_{13}(r, \theta, 0) = 0$。 $x = (x_1, x_2, x_3)$ の時， $f(x) = x_1^2$ あるいは x_3^2 の値をとる函数を考える事によつて，上と同様の方法で $a_{11}(r, \theta, 0)$ 及び $a_{33}(r, \theta, 0)$ は θ－invariant である事が分る。

更に $a_{11}(r, \theta, 0) = a_{22}(r, \theta, 0)$ がいえる。というのは，$x = (x_1, x_2, x_3)$ の時， $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ の値をとる函数を考えると

$$(40)\qquad \mathscr{D} f(x) = 2a_{11}(x) - 2a_{22}(x)$$

$$(41)\qquad \mathscr{D} f(r, 0, 0) = \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{E_{(r,0,0)} f(x_{\tau_{S_\rho}})}{E_{(r,0,0)}(\tau_{S_\rho})}$$

x_3 軸についての回転を考える事によつて

$E_{(r,0,0)} f(x_{\tau_{S_\rho}}) = 0$ が分るから， $a_{11}(r, 0, 0) = a_{22}(r, 0, 0)$。 従つて，主張がなりたつ。同様に $x = (x_1, x_2, x_3)$ の時， $f(x) = x_2^2 - x_3^2$ の値をとる函数を考える事によつて， $a_{22}(r, \theta, 0) = a_{33}(r, \theta, 0)$ が分る。即ち，

即ち，$a_{11}(r, \theta, 0) = a_{22}(r, \theta, 0) = a_{33}(r, \theta, 0)$。さて，8°) の証明にうつろう。

$x = (r, \theta, \varphi)$ の時， $f(x) = \cos\theta$ なる函数を考えると

$$(42)\qquad \mathscr{D} f(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{r^2}\left(\sin\theta\, \alpha_\theta + \frac{\cos\theta}{r^2}\, \alpha_\theta^\theta\right)$$

$\cos\theta = \frac{x_3}{r}$ として， $x_2 = 0$ とおくと， $a_{12}(r, \theta, 0) = a_{23}(r, \theta, 0)$ に注意して

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(43)\quad \mathcal{D} f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}(r,\theta,0)\cdot x_3\cdot\frac{2x_1^2-x_3^2}{r^5}+a_{22}(r,\theta,0)\cdot x_3\cdot\frac{-x_1^2-x_3^2}{r^5}$$

$$+a_{33}(r,\theta,0)\cdot x_3\cdot\frac{-3x_1^2}{r^5}+2a_{13}(r,\theta,0)\frac{-x_1 r^2+3x_1x_3^2}{r^5}$$

上の結果より

$$(44)\quad \mathcal{D} f(r,\theta,0)=a_{11}(r,\theta,0)\left\{\frac{x_3}{r^5}(-2x_1^2-2x_3^2)\right\}$$

$$=-\frac{1}{r^2}\cos\theta\cdot a_{11}(r,\theta,0)=\cos\theta\cdot\{r\text{ の函数}\}$$

α_θ^θ は r のみの函数だつたから，(42) と (44) をあわせて，8°) が言える。

9°) $\alpha_\theta^r=0$ の証明 ; α_θ^r が φ − invariant であることは $x=(r,\theta,\varphi)$ の時， $f(x)=r\theta$ なる函数を考えることによつて分るから，(5) において，$\varphi=0$ とおけば， $a_{12}(r,\theta,0)=a_{13}(r,\theta,0)=a_{23}(r,\theta,0)=0$ から

$$(45)\quad \alpha_\theta^r=a_{11}\sin\theta\cos\theta-a_{33}\sin\theta\cos\theta=0$$

10°) $\alpha_\theta^\theta=b(r)$, $\alpha_\varphi^\varphi=b(r)$, $\alpha_\theta=b(r)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ の証明

1°) と (10) より

$$(46)\quad \frac{2\,b(r)}{r}=\frac{1}{r}\left(a_{11}(r,\theta,0)+a_{22}(r,\theta,0)\right)$$

7°) と (8) より

$$(47)\quad \alpha_\theta^\theta=a_{11}(r,0,0)$$

6°) と (9) より

$$(48)\quad \alpha_\varphi^\varphi=a_{22}(r,0,0)$$

$x=(x_1,x_2,x_3)=(r,\theta,\varphi)$ の時， $f(x)=x_3=r\cos\theta$ なる値をとる函数を考える事によつて

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(58) $\quad Af(0)=0$

しかるに，0の近傍で，$x=(x_1, x_2, x_3)$ の時， $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ の値をとる C^2に属する（compact support）函数 f を考えれば

(59) $\quad f(0)=2(a_{11}(0)+a_{22}(0)+a_{33}(0)$

右辺は strictly elliptic の性質より >0。矛盾

従つて残るのは entrance と regular であるが，これらは後で示すように，いずれの場合も可能である。ところで entrance の 場合は 0 における path の行動は一意的に定まつてしまうので，即ち境界条件はきまつてしまうので問題はないが， regular の時は，更に境界条件を指定する必要がある。ところがこの場合は作り方から反射壁の境界条件になつているので，process はきまるが，境界 0 が regular の時，もとの process で考えれば，回転不変であるので 0 は $\{0\}$に関して regular point である。この事実は，第Ⅰ章§6 lemma 6.4 注意でのべたように canonical diffusion process の場合と事情が異なる事を示す。実際このような例がある事を示そう。 d＝2とし，

(60) $\quad a(r)=\dfrac{\log r}{2+\log r}\quad,\quad b(r)=1\quad,\quad R=e^{-3}$

とおけば，これは lemma 1 の条件をみたすから，(16)によつてきまる $\mathscr{D}$ に対応する process は回転不変となり，その半径成分の generator $\mathscr{D}$ r は

(61) $\quad \mathscr{D}\,r=\dfrac{\log r}{2+\log r}\;\dfrac{1}{r(\log r)^2}\;\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{r(\log r)^2\;\dfrac{\partial}{\partial r}\right\}$

であるから

$$6=\int_0^{e^{-3}}\int_y^{e^{-3}}(2+\log x)\;\frac{x(\log x)^2}{\log x}\;dx\;\frac{dy}{y(\log y)^2}$$

$$\mu=\int_0^{e^{-3}}\int_y^{e^{-3}}\frac{dx}{x(\log x)^2}\;\frac{2+\log y}{\log y}\;y(\log y)^2\,dy$$

を調べると，$6<\infty$， $\mu<\infty$ となる。従つて 0 は regular である。しかし，このような事は3次元では起らない事が分る。即ち，

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

定理3　定理2と同じ仮定の下で，X の半径 process X_r の境界 0 は，3次元ならば entrance に限る。

証明　lemma 1 より，X_r の generator $\mathscr{G}_r$ は $a(r)\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{2b(r)}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ となるから，境界 0 は次の式によつて判定される。C は $(0, R)$ 上の一点で，固定する。

$$B(\xi)=\int_C^{\xi}\frac{2b(\xi)}{\xi a(\xi)}d\xi$$

$$(63)\qquad S(x)=\int_C^x e^{-B(\xi)}d\xi \quad , \quad m(x)=\int_C^x \frac{1}{a(\xi)}e^{B(\xi)}d\xi$$

$$\sigma=\iint_{0<y<x<C} dm(x)\,dS(y) \quad , \quad \mu=\iint_{0<y<x<C} ds(x)\,dm(y)$$

0 が entrance であることは，$\sigma=\infty$，$\mu<\infty$ となることである。

lemma 1 i) ii) iii) から，C を十分小さくとつておいて

$$(64)\qquad \frac{1}{2}<\frac{b(r)}{a(r)}<\frac{3}{2} \qquad\qquad r\in[0, C)$$

として差支えない。$\xi<C$ ならば

$$(65)\qquad 3\log\xi-3\log C\leq B(\xi)\leq 2\cdot\frac{1}{2}\int_C^{\xi}\frac{1}{\xi}d\xi=\log\xi-\log C$$

従つて，

$$(66)\qquad \sigma\geq\iint_{0<y<x<C} dm(x)\,e^{-\log y+\log C}dy$$

$$\geq e^{\log C}\int_0^C\int_y^C\frac{1}{C_1}e^{3\log x-3\log C}e^{-\log y}dy$$

$$=\frac{e^{-2\log C}}{C_1}\int_0^C\frac{1}{4}(C^4-y^4)\frac{1}{y}dy=\infty$$

定理2より，natural はありえないから，常に 0 は entrance。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(49) $$\alpha_\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\{2\,b(r) - \alpha_\theta^\theta\} - 2\alpha_r^\theta$$

9°) より

(50) $$\alpha_\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\{2\,b(r) - \alpha_\theta^\theta\}$$

(46) (47) (48) (50) をあわせて，10°) が証明できる。以上の事を綜合すると，後は簡単な計算によつて (14) 式が言える。(16) 式の証明は，α_θ^θ と α_θ^r をくらべて，a_{13} と a_{23} の項を消すと

(51) $$2a_{11}\cos^2\varphi\cos^2\theta + 2a_{22}\sin^2\varphi\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\, a_{33} + 2a_{12}\sin^2\varphi\cos^2\theta = 2b(r)\cos 2\theta$$

一方，(52) $\alpha_\theta^\theta + \alpha_r^r = a(r) + b(r) = a_{11}\cos^2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi + a_{33} + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi$ であるから，(51) と (52) より

(53) $$-2a_{33} + 2a(r)\cos^2\theta = 2b(r)\{\cos 2\theta - \cos^2\theta\}$$

従つて

(54) $$a_{33} = b(r) + \frac{x_3^2}{r^2}(a(r) - b(r))$$

(i)，(ii)，(iii) の性質は明らかだから略する。

極座標で，書いた時，(0，φ，θ) 以外の点での infinitesimal oprator の形は，Lemma 1 のように与えられている。従つて (0，φ，θ)，即ち，原点での infinitesimal operator の形を指定すると process は定まる。それは後でのべる半径 process の境界条件として与えられるので，0 での境界の状態が Feller の分類でどのようになるかが問題になる。まずその前に，Dynkin〔1〕10章§6 定理 10.13 を引用しておこう。

<u>LEMMA 2</u> X=(x_t，ζ，M_t，P_x) を (E．B) 上の Markov process，P(t，x，Γ) をその transition probability，γ を (E．B) から ($\widetilde{E}$．$\widetilde{B}$) への measurable mapping で $\gamma E = \widetilde{E}$，$\gamma(B) \subseteq \widetilde{B}$，更に次の条件がみたされているとする。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

任意の $\Gamma \in \widetilde{B}$ と，$\gamma x = \gamma x'$ なる任意の $x, x' \in$，E に対して

(55)
$$P(t, x, \gamma^{-1}\Gamma) = P(t, x', \gamma^{-1}\Gamma)$$

その時，$\widetilde{x}_t = \gamma x_t$，$\widetilde{N}^0$ を $\{\widetilde{x}_t \in \Gamma\}$ $(t \geq 0, \Gamma \in \widetilde{B})$ から生成される Borel freld，$\widetilde{M}_t = M_t \cap \widetilde{N}^0$，$\widetilde{P}_{\gamma x}(A)$，$A \in \widetilde{N}^0$ とおくことによって，$(\widetilde{E}, \widetilde{B})$ 上の Markov process $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_t, \zeta, \widetilde{M}_t, \widetilde{P}_x)$ が構成できて，その transition probality は

(56) $$\widetilde{P}(t, \gamma x, \Gamma) = P(t, x, \gamma^{-1}\Gamma)$$

更に，Xが強 Markov process ならば，$\widetilde{X}$ も強 Markov process であり，γ^*を $\gamma^* f(x) = f(\gamma x)$ なる mapping とすれば，

(57)
$$\gamma^* \widetilde{T}_t = T_t \gamma^*$$
$$\gamma^* \widetilde{A} = A \gamma^*$$
$$f \in D_{\widetilde{A}} \Longleftrightarrow \gamma^* f \in D_A$$

但し，T_t，A，D_A，$\widetilde{T}_t$，$\widetilde{A}$，$D_{\widetilde{A}}$ は，それぞれ X 及び $\widetilde{X}$ の semi-group，infinitesimal operator 及びその定義域を示す。

この lemma より，球 Ω 上の Markov process が回転不変ならば，γ を Ω から $[0, R)$ への mapping で，Ω $x = (r, \theta)$ ならば $\gamma x = r$ となるものとすれば，lemma の条件をみたすから $[0, d)$ 上の Markov process $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_t, \zeta, \widetilde{M}_t, \widetilde{P}_x)$ が構成できる。それを X の半径 process と呼ぶ。

さて，定理1で構成した process に回転不変の条件を加えて，それの半径 process の境界条件を調べてみよう。まず

<u>定理2</u>　定理1で構成した球 Ω 上の Markov process が回転不変であるとすれば，X の半径 process の境界 0 は，Feller の意味での natural boundary 及び exit boundary ではありえない。

証明　もし，natural あるいは exit であつたとする。その時0は trap になるから，

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

第Ⅱ章 不連続係数を持つ拡散過程の正則点

―― self-adjoint の場合 ――

§1. Green kernel によるMarkov processの構成-1(resolvent)

R^dのdomain Ω (R^d自身でもよい) 上に，次のkernel $G(x, dy)$が与えられたとする。

i) GはC$_K$からC$_0$へのlinear operator である。即ち$f(x) \in C_K$ならば，$\int_\Omega G(x, dy) f(y) \in C_0$ ここに$C_K = \{\Omega$上の連続函数でcompact support を持つもの全体$\}$，(*) $C_0 = \{\Omega$上の連続函数で $\varepsilon > 0$に対して，compact set Fが存在して，$\sup_{x \notin F} f(x) < \varepsilon$をみたすもので，$\| f \| = \sup_{x\ \Omega} f(x)$ のノルムをいれたBanach space$\}$

ii) Gはpositive operator 即ち$f \geqq 0$ならば$Gf(x) = \int_\Omega f(y) G(x, dy) \geqq 0$

iii) Gはweak principle of the positive maximum をみたす。即ち$m = \sup_{x\ \Omega} Gf(x)$がstrict に positive ならば，$S = \{ x : f(x) \geqq 0 \}$とおくと

(1.1) $\quad m = \sup_{x\ S} Gf(x)$

その時，G. Lion〔11〕により，resolvent kernel G^λを構成できる。即ち

定理1.1 (Lion) 仮定i)，ii)，iii)をみたすkernel に対してC_0からC 写す。linear positive operator の family$\{G^\lambda\}_{\lambda > 0}$が存在して次の性質を持つ。

(1.1.A) $\quad \| \lambda G^\lambda \| \leqq 1$

(1.1.B) $\quad \lambda, \mu > 0, \quad (\mu - \lambda) G^\lambda G^\mu = G^\lambda - G^\mu$ (resolvent equation)

(1.1.C) $\quad Gf = G^\lambda (Gf + f), \ f \in C_K$
$\qquad\qquad = G^\lambda f + GG^\lambda f$

証明 くわしくは原論文にゆずつて，ここではその概略をのべよう。今，GがC_0上のoperatorとして拡張できたとする。例えば有界operatorの場合（出来ない場合は，多少modify せねばならないが ここでは省略する。）まずG$^\lambda$を次のように定義する。

$$(1.2) \qquad G^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k G^{k+1}, \quad 0 < \lambda < \frac{1}{\| G \|}$$

(*) Ωが有界領域の時は$C_0 = \{ f : f(x) \to 0, \text{ as } \rho(x, \partial\Omega) \to 0 \}$となる。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

明らかにG^{λ}はpositive operator であり，Gがweak principle of the positive maximum をみたすことから次の事が分る。

(1.1.A′) $G^{\lambda}=G(I-\lambda G^{\lambda})=(I-\lambda G^{\lambda})G$

(1.1.B′) $\|\lambda G^{\lambda}\|\leqq 1$

(1.1.C′) G^{λ}はresolvent equation をみたす。

(1.1.D′) G^{λ}はweak principle of the positive maximum をみたす。

(1.1.A′) (1.1.C′) は明らかだから，まず (1.1.D′) を証明しよう。今$x_0\in\Omega$で$G^{\lambda}f(x)$がstrict positive maximum をとったとする。その時，Gがweak principle of the positive maximum をみたすことから，(1.1 A′) より，ある点x'_0 が存在して，$f(x'_0)-\lambda G^{\lambda}f(x'_0)\geqq 0$で，しかも$G^{\lambda}f(x'_0)$ はmの値をとる。従つて，$f(x'_0)<0$とすると矛盾になる。(1.1.B′) を証明するには$\lambda G^{\lambda}1\leqq 1$が言えたら良い。(1.1.A) に注意すると$\lambda G^{\lambda}1=G\{\lambda(1-\lambda G^{\lambda}1)\}$。$\lambda G^{\lambda}1\geqq 0$であるから$G^{\lambda}1$がある点$x_0$でmaximum m をとるとすれば，ある点$x'_0$ が存在して，$1-\lambda G^{\lambda}1(x'_0)\geqq 0$，かつ$\lambda G^{\lambda}1(x'_0)=m$。従つて$m\leqq 1$．

G^{λ}を任意の$\lambda>0$に拡張するには，$0<\mu<2^{n-1}/\|G\|$ が既に定義出来たと仮定して，$0<\lambda<2^{n}/\|G\|$ に対しては

$$(1.3)\qquad G^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^{k}(G^{\mu})^{k+1}$$

と定義する。そうするとG^{λ} ($\lambda>0$) はunique に定まり，再び (1.1.A′) ～ (1.1.D′) を満足する事がいえる。その証明は略する。

§2. Green kernel によるMarkov process の構成－II (semi-group)

この§では，§1で構成したresolvent$\{G^{\lambda}\}$ にある仮定を加えてsemi-group$\{T_t\}$の存在を云う。定理2.2の証明は，Lion〔12〕による。定理2.3は新しい結果である。まず，Hille-Yoshida の定理を，次の形でのべておこう。

<u>定理2.1</u> Bを実数値Banach space $\{G^{\lambda}\}_{\lambda>0}$をBからBへのlinear な連続なoperator で，次の仮定をみたすものとする。

(2.1.A) $\|\lambda G^{\lambda}\|\leqq 1$

(2.1 B) $\lambda,\mu>0\qquad(\mu-\lambda)G^{\lambda}G^{\mu}=G^{\lambda}-G^{\mu}$

その時$\overline{G(B)}=\{$ BのG^{λ}によるimage の closure$\}$とおくと，G (B) 上に，連続で

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

submarkov な semi-group $\{T'_t\}_{t\geqq 0}$が存在して，任意の$f\in \overline{G(B)}$ に対して

(2.1) $\quad G^{\lambda}f=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T'_t f\,dt$

証明 概略だけをのべる。$B_{\nu}=\nu(\nu G^{\nu}-I)$ とおく。更にT'_t を次のように定義する。

(2.2) $\quad T'_t G^{\lambda}G^{\mu}f=\lim_{\nu\to\infty} e^{tB_{\nu}}G^{\lambda}G^{\mu}f$

その limit の存在は，仮定 (2.1.A) 及び (2.1.B) により確められる。このT_t を$G(B)$に拡張する。次にT'_t の定義 (2.2) より

(2.3) $\quad \left[\frac{d}{dt}T'_t G^{\lambda}z\right]_{t=0}=\lambda G^{\lambda}z-z$

となる事に注意すると，$y=G^{\nu}G^{\nu'}x \quad z=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T'_t y\,dt$ とおくと

(2.4) $\quad \left[\frac{d}{dt}T'_t G^{\lambda}z\right]_{t=0}=\left[\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\int_t^{\infty}e^{-\lambda s}T_s y\,ds\right]_{t=0}$

$\qquad =\lambda G^{\lambda}z-G^{\lambda}T_0 y$

(2.2) 式より$T'_0\,y=y$ であるから，(2.4) は

(2.5.) $\quad G^{\lambda}y=\lambda G^{\lambda}z-\left[\frac{d}{dt}T'_t G^{\lambda}z\right]_{t=0}$

となる。従つて (2.3) と (2.5) から (2.1) が言える。

定理2.2 Gをweak principle of the positive maximum をみたす positive kernel とし，更に次の仮定をみたすものとする。

(仮定A) Gの image はΩの2点を分離する。その時，Ω上の bounded measurable function $\hat{f}$ が存在して

(2.6) $\quad \lim_{k\uparrow\infty} kG^k f=\hat{f}, \qquad \forall f\in C_0$

(2.7) $\quad \hat{f}=f \qquad\qquad \forall f\in\overline{G(C_K)}^{(*)}$

証明1) 函数族E_{λ} を次のように定義する。

(2.8) $\quad E_{\lambda}=\{f \quad C_0,\ \text{positive},\ \forall k\geqq 0,\ kG^{k+\lambda}f\leqq f\}$

明らかに$\mu\geqq\lambda$ならば，$E_{\mu}\supset E_{\lambda}$で，$f$，$g$ $\;E_{\lambda}$ならば$f\wedge g\in E_{\lambda}$; 又$E=\bigcup_{\lambda>0}E_{\lambda}$ とおけば，$f\wedge g\in E$である。今，Dを下のように定義すると

(2.9) $\quad D=\{f\in C_0,\ f=f_1-f_2,\ f_i\in E,\ i=1.2\}$

(*) $\overline{G(C_K)}=\{C_K$のG^{λ}による image の closure$\}$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$D \supset G^\lambda(C_0)$ である。なぜならば $f \geqq 0$ とすると resolvent equation より

(2.10) $\quad kG^{k+\lambda}G^\lambda f = G^\lambda f - G^{k+\lambda} \leqq G^\lambda f$

であり，一般の f に対しては，$f = f^+ - f^-$ とかけることから，分る。更にDは réticulé である。というのは $f = f_1 - f_2 \in D$ とすれば，$f^+ = f_1 - f_1 \wedge f_2 \in D$，f，$g \in D$ ならば，$f \vee g = (f-g)^+ + g \in D$ だからである。さて，$Gf = G^\lambda(Gf+f)$ であるから，$G(C_K)$ $G^\lambda(C_0) \subset D$ となることに注意すれば，仮定により $G(C_K)$ が Ω の点を分離するから，Dも Ω の点を分離する。従って Stone-Weierstrass の定理より，Dは C_0 で dense である。即ち

(2.11) $\quad \{G^\lambda(C_0),\quad \lambda \geqq 0\} \subset \underset{\text{dense}}{D \subset} C_0$

2) 函数 f に対して，$\lim\limits_{k \to \infty} kG^k f$ がどうなるか調べてみよう。

$\overline{G(C_K)} \ni f$ の場合。 $f = G^\lambda g$，$\lambda \geqq 0$，$g \in C_K$ の時は

(2.12) $\quad kG^k G^\lambda g = k \cdot \dfrac{1}{k-\lambda}\{G^\lambda g - G^k g\}$

であるから，$kG^k f$ は unifomly に f に収束する。それ故 $f \in G(C_K)$ に対して

(2.13) $\quad \lim\limits_{k} kG^k f = f \quad$ (uniformly)

$D \ni f$ の場合。 $f \in E_\lambda$ として，$k' \geqq k$ ならば

(2.14) $\quad k'G^{k'+\lambda}f - kG^{k+\lambda}f = (k'-k)\,G^{k'+\lambda}(f - kG^{k+\lambda}f) \geqq 0$

であるから，$kG^{k+\lambda}$ は $k \uparrow \infty$ につれて単調に増加だから，ある函数 f があつて

(2.15) $\quad \lim\limits_{k \uparrow \infty} kG^{k+\lambda}f = \hat{f} \quad$ (monotone)

resolvent equation より

(2.16) $\quad kG^k f = kG^{k+\lambda}f + \lambda kG^k G^{k+\lambda} f$

であるから

(2.17) $\quad \lim\limits_{k \uparrow \infty} kG^k f = f$

従って，$f \in D$ に対しても，(2.17) がなりたつ。

$C_0 \ni f$ の場合。 Dは到る所 C_0 で dense かつ $\|kG^k\| \leqq 1$ であるから

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(2.18)\quad \lim kG^k f(x) = \hat{f}(x) \leqq \sup_{x \in \Omega} f(x)$$

定理 2.3　Gは定理 2.2.の仮定の外に，次の仮定をみたすものとする。

(仮定B) $G(x, dy)$ はLebesgue measure dy に関してdensity $G(x, y)$ を持つ。

(仮定C) Ωに含まれる任意のcompact set Kに対して，Kのみにdependする定数 $C_1, C_2 > 0$ があって，全ての $x_1, x_2 \in K$ について

$$(2.19)\quad C_1 \phi(|x_1 - x_2|) > G(x_1, x_2) > C_2 \phi(|x_1 - x_2|)$$

但し，$\phi(\cdot)$ は第I章定理4.1に定義したものである。

(仮定D) 任意の閉球Eに対して，compact set F が存在して

$$(2.20)\quad \sup_{\substack{x \in \Omega - F \\ y \in E}} G(x, y) < \infty$$

その時，全ての $f \in C_0$ について

$$(2.21)\quad f = \hat{f}\text{，即ち} \lim_{k \uparrow \infty} kG^k f(x) = f(x),\quad \forall x \in \Omega$$

注意1　Gが仮定B，仮定Cをみたすならば，必然的に仮定Aはみたされる。ω_n を半径 r_n の球，ω'_n を半径 $2r_n$ の同心球とおいて連続函数 g_n を次の値をとるように定める。

$$(2.22)\quad g_n(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \overline{\omega}_n \\ 0 < g_n(x) < 1 & , x \in \omega'_n - \overline{\omega}_n \\ 0 & , x \in \Omega - \omega'^{c}_n \end{cases}$$

その時，$\int_\Omega G(x, y) g_n(y)\, dy$ なる形の函数全体は，Ωの点を分離する。というのは，今，任意の点 x, y，$|x - y| = r > 0$ をとってきて，x, y を含む十分大きいcompact set Kをえらび固定する。更に x を中心とする十分小さい半径 r_n の球 ω_n を $2r_n < r$ となるようにすれば

$$(2.23)\quad \int_\Omega G(y, z) g_n(z)\, dz \leqq C_1 \phi(r - 2r_n)\, |\omega'_n|$$

$$(2.24)\quad \int_\Omega G(x, z) g_n(z)\, dz \geqq C_2 \phi(2r_n)\, |\omega_n|$$

但し，$|\omega_n|$，$|\omega'_n|$ はそれぞれ ω_n，ω'_n の体積とする。

さて，任意の ω_n に対して，nにindependentな定数 $C > 0$ が定まって

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(2.2 5) $\quad \dfrac{|\omega_n'|}{|\omega_n|} \leqq C$

となる事に注意すれば，r_nを十分小さくとる事によって

(2.2 6) $\quad \dfrac{\phi(2r_n)}{\phi(r-2r_n)} \geqq \dfrac{C_1 |\omega_n'|}{C_2 |\omega_n|}$

とする事が出来る。従つて

(2.2 7) $\quad \int_\Omega G(x, z) g_n(z)\, dz > \int_\Omega G(y, z) g_n(z)\, dz$

これからみて明らかなように，$\{\omega_n\}$をΩのbase となるものをとれば，Ωの2点を分離するものとして，可算個のものがとれる。

定理の証明1）定理2.2より，$\lim_{k\uparrow\infty} kG^k f(x)$は$C_0$上のlinear functionalと考える事ができて，従つて，(たとえばDynkin [1] lemma 2.8) あるtotal massが1以下のmeasure $\mu(x, dy)$が存在して

(2.2 8) $\quad \lim_{k\uparrow\infty} kG^k f(x) = \int_\Omega f(y)\mu(x, dy)$

と表現出来る。($kG^k 1 \leqq 1$とG^kがpositive operator であるのに注意) 定理を証明するために，次のlemma を用いよう。

LEMMA 2.1 全ての$x \in \Omega$に対して$\mu(x, A) = 0$となる集合Aが存在して，$x \in \Omega - A$ならば全ての$f \in C_0$に対して

(2.2 9) $\quad f = f$

証明 まず，$f \in E_\lambda$を考える。$f > f$は明らかであり

$$(2.3\,0) \quad \int_\Omega f(y)\mu(x, dy) = \lim_{k\uparrow\infty} k\int G^k f(y)\mu(x, dy)$$

$$= \lim_{k\uparrow\infty} kG^k f(x)$$

(2.7) より

$$= \int_\Omega f(y)\mu(x, dy)$$

従つて

(2.3 1) $\quad \int | f(y) - f(y) | \mu(x, dy) = 0$

これは，勿論Dでもなりたち，従つてC_0でもなりたつ。今，$\{f_n\}$をC_0でdenseな可算個の函数族とし，A_nを$f_n(y) \neq f_n(y)$なる点yの全体とする。その時，明らかに

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(2.3 2) $\mu(x, A_n)=0$

であり，$A=\bigcup_n A_n$ とおけば $\mu(x, A)=0$ である。しかも $\{f_n\}$ は C_0 で dense であるから

(2.3 3) $f=\hat{f} \qquad \forall f\in C_0 \quad \text{in } \Omega-A$

定理の証明に戻ろう。今，ある点 $x_0\in\Omega$ が存在して，$x_0\in A$ であつたとする。x_0 を含む十分広い compact set K を固定すると，仮定Cにより，Kのみに depend する定数 C_1，$C_2>0$ があつて，

(2.3 4) $C_1\phi(|x_1-x_2|)\geqq G(x_1, x_2)\geqq C_2\phi(|x_1-x_2|)$，$x_1, x_2\in K$

このKに対して，十分小さい半径 r の x_0 の球近傍 $U(x_0)$ が存在して

(2.3 5) $\frac{1}{3}C_2\phi(r)>\sup_{\substack{x\in\Omega-K\\ y\in U(x_0)}} G(x, y)$

となるように出来る。なぜなら左辺は $r\downarrow 0$ につれて，無限大になり，右辺は単調に減少するからである。（仮定Dに注意）更に lemma 2.1 より $\mu(x_0, \{x_0\})=0$ であるから，任意の $\varepsilon<\frac{1}{3}$ に対して，$U(x_0)$ を

(2.3 6) $\mu(x_0, U(x_0))<\frac{C_2}{C_1}\frac{\varepsilon}{M}$ （Mは次元のみに dependする定数 (2.4 1) 式をみよ。）

となるようにとる事が出来る。以後，これらのK，$U(x_0)$ を固定する。

さて，g_n を (2.2 2) の値をとる C_K に属する函数とすれば

(2.3 7) $\sup_{K-U(x_0)\ni x}\int_\Omega G(x, y)g_n(y)dy<\frac{1}{3}\int_\Omega G(x_0, y)g_n(y)dy$

となるように，g_n をえらぶ事ができる。それは，ω_n として x_0 を中心とする十分小さい半径 r_n の球とする。（$2r_n<r$ となるようにとる）その時

(2.3 8) $\sup_{x\in K-U(x_0)}\int_\Omega G(x, y)g_n(y)dy<C_1\phi(r-2r_n)|\omega'_n|$

(2.3 9) $\int_\Omega G(x_0, y)g_n(y)dy\geqq C_2\phi(2r_n)|\omega_n|$

(2.2 5) 式に注意すれば，r_n を十分小さくとる事によって

(2.4 0) $\frac{1}{3}C_2\phi(2r_n)|\omega_n|>C_1\phi(r-2r_n)|\omega'_n|$

が成りたつようにできる。即ち，(2.3 7) 式が得られた。次に次元にのみ depend する定数Mがあつて

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(2.4\,1)\quad \frac{\sup_{x\in U(x_0)}\int_\Omega G(x,y)\,g_n(y)\,dy}{\int_\Omega G(x_0,y)\,g_n(y)\,dy}<\frac{C_1}{C_2}M$$

となる事を証明する。なぜなら

$$(2.4\,2)\quad 左辺<\frac{C_1\sup_{x\in U(x_0)}\int_\Omega \phi(|x-y|)\,g_n(y)\,dy}{C_2\int_\Omega \phi(|x_0-y|)\,g_n(y)\,dy}$$

$$\leqq\frac{C_1\ \sup_{x\ U(x_0)}\ \ _{\omega_n'}\phi(|x-y|)\,dy}{C_2\ \ _{\omega_n}\phi(|x_0-y|)\,dy}=\frac{C_1\int_{\omega_n'}\phi(|x_0\,y|)\,dy}{C_2\int_{\omega_n}\phi(|x_0-y|)\,dy}$$

$$\leqq\frac{C_1}{C_2}M$$

(2.3 5), (2.3 7) 及び (2.4 1) 式より

$$(2.4\,3)\quad \int_\Omega\int_\Omega G(x,y)\,g_n(y)\,dy\,\mu(x_0,dx)=\int_{U(x_0)}\int_\Omega G(x,y)\,g_n(y)\,dy\,\mu(x_0,dx)$$

$$+\ _{K-U(x_0)}\ \ _\Omega G(x,y)\,g_n(y)\,dy\,\mu(x_0,dx)+\int_{\Omega-K}\int_\Omega G(x,y)\,g_n(y)\,dy\,\mu(x_0,dx)$$

$$<\frac{C_1}{C_2}\,M\cdot\frac{C_2}{C_1}\,\frac{\varepsilon}{M}\int_\Omega G(x_0,y)\,g_n(y)\,dy+\frac{1}{3}\int_\Omega G(x_0,y)\,g_n(y)\,dy$$

$$+\frac{1}{3}\,C_2\phi(r)\int_\Omega g_n(y)\,dy$$

$$<\frac{1}{3}\int_\Omega G(x_0,y)\,g_n(y)\,dy+\frac{1}{3}\int_\Omega G(x_0,y)\,g_n(y)\,dy$$

$$+\frac{1}{3}\int_\Omega G(x_0,y)\,f_n(y)\,dy$$

$$=\int_\Omega G(x_0,y)\,g_n(y)\,dy$$

この事は，定理 2.2 (2.7) に矛盾する。従って $A=\phi$ である。

<u>定理 2.4</u>　G^λ の値域は，$\underline{C_0}$ で dense である。(C_0―ノルムの意味で)

<u>証明</u>　$f\in E_\lambda$ とする。(2.1 5) より，$kG^{k+\lambda}f$ は単調に $\hat{f}$ に収束し，$kG^{k+\lambda}f\in C_0$，定理 2.3 より $f=\hat{f}\in C_0$ だから Dini の定理より，Ω で一様に

$$(2.4\,4)\quad \lim_{k\uparrow\infty} kG^{k+\lambda}f=f\quad \text{(uniformly)}$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

従つて

(2.45) $\lim_{k\uparrow\infty} kG^k f = \lim_{k\uparrow\infty} \frac{k}{k-\lambda}(k-\lambda)G^k f = f$ (uniformly)

それ由， $f\in D$に対しても，一様に収束する。DがC_0でdense である事に注意すれば，結論がでる。

定理2.4が言えると，Hille-Yoshidaの定理より，C_0 上の強連続でsubmarkovなsemi-group$\{T_t\}_{t>0}$ が存在して，

(2.46) $G^\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f\, dt$

であり，T_tはC_0をC_0にうつす。従つて，Dynkin〔1〕lemma 2.10より，transition probability $P(t, x, \Gamma)$ (これの存在はT_tがC_0上のlinear functional である事から明らかである) は確率連続，即ち

(2.47) $\lim_{t\downarrow 0} P(t, x, U) = 1$， U open set， $x\in U$

それ由，Dynkin〔1〕定理3.7より，path は右連続，左極限を持つ有界 (*)Markov process が構成出来る。更にDynkin〔1〕定理3.10より，強Markov 性を持つ事が分り，従つて，同上〔1〕定理3.13よりguasi-left-continuityが導かれる。これらの事をあわせて，(その他に，Borel field Mt についての多少の注意を要するが) 次の事が分る。

<u>定理2.5</u> (Dynkin〔1〕定理3.14) BをΩ上のtopological Borel field とした時，上の$P(t, x, \Gamma)$ をtransction probability とする (Ω, B) 上のstandard process $X = (x_t, \zeta, M_t, P_x)$ が構成出来る。

§3. canonical diffusionprocess の dual process の構成

Ωを十分なめらかな境界を持つ有界領域とする。第I章でのべたように，stopped canonical diffusion prpcess X^Ωが構成できて，ΩでのGreen 函数が存在する。ここでは，§1〜§2の方法を用いて，ある条件の下で，X^Ωのdual processを構成しよう。$G^\Omega(x, y)$ のdual kernel $G_*^\Omega(x, y)$ を，次のように定義する。

(*) Markov process $X = (x_t, \zeta, M_t, P_x)$ が有界であるとは， $u\in[0, \zeta(\omega))$ に対して，$x_t(\omega)$ $(0<t<u)$ はあるcompact set に含まれていることである。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(3.1) $\quad G_*^{\Omega}(x,y)=G^{\Omega}(y,x) \qquad x,y \quad \Omega$

$G_*^{\Omega}(x,y)$が§1～§2の諸条件をみたす事が言えればよい。即ち，

定理3.1 　は（1.1.A）～（1.1.C）の条件をみたす，（1.1）の形の微分作用素とする。更に $C(x)=0$ とし，すべてのcompact support を持つ，非負 C^2 −函数vに対して

仮定（3.1）$\quad -\int_{\Omega} \mathcal{L} v(x)\,dx>0$

とする。その時，$G_*^{\Omega}f(x)=\int_{\Omega} G_*^{\Omega}(x,y)f(y)\,dy$ とおけば

i） G_*^{Ω}はC_KからC_0へのlinear operator である。

ii） G_*^{Ω}はpositive operator である。

iii） G_*^{Ω}はweak principle of the positive maximum をみたす。

iv） $G_*^{\Omega}(C_K)$ はΩの2点を分離する。

v） Ωに含まれる任意のcompact set Kに対して，Kのみにdepend する定数 C_1，$C_2>0$ があって，第I章定理4.1のϕに対し

(3.2) $\quad C_1\phi(|x_1-x_2|)>G_*^{\Omega}(x_1,x_2)>C_2\phi(|x_1-x_2|), \quad x_1,x_2\in K$

vi） 任意の閉球Eに対して，compact set F が存在して

(3.3) $\quad \sup\limits_{\substack{x\in\Omega-F \\ y\in E}} G_*^{\Omega}(x,y)<\infty$

証明　ii）は明らかであり，vi）は$G_*^{\Omega}(x,y)$が$x=y$で2変数に関して連続，従って$G_*^{\Omega}(x,y)$をそうであるから明らかであり，v）は第I章定理4.1そのものである。従って定理2.3注意1から，iv）が導かれる。v）と$G_*^{\Omega}(x,y)$が2変数に関して連続な事から，任意の$f\in C_K$ に対して$G_*^{\Omega}f$は連続で（例えばソボレフ〔26〕），更に(*) $\lim\limits_{x\to a} G_*^{\Omega}(x,y)=0$，$a\in\partial\Omega$ となる事を用いると，i）が証明できる。残りはiii）だけである。iii）は次のW・Littman の定理から導かれる。それは

定理3.2（Littman）$\mathcal{L}$は定理3.1のものとし，仮定3.1をみたすものとする。Dを有界Dirichlet 領域（∂Dが に関し，regular point のみからなる領域）とする。もし，locally integrable in D な函数uが，Dでcompact support を持つ，$C^2(D)$ に属する全てのnon−negative な函数vに対して

(3.4) $\quad \int_D u(x)\mathcal{L}v(x)>0$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

をみたすならば，更にDのあるcompact subdomain D_λ に対して

(3.5) $$0<M=\underset{x}{\mathrm{ess}}\cdot\sup_{D} u(x)=\underset{x}{\mathrm{ess}}\cdot\sup_{D_\lambda} u(x)$$

が言えるならば

(3.6) $u=M$ almost everywhere

この証明は，長いので原論文〔14〕にゆずる事にして，省略する。さてiii）の証明に戻ろう。任意の$f\in C_K$に対して，$u(x)=\int_\Omega C_*^\Omega(x,y)f(y)dy$ を考える。$S=\{x;f(x)>0\}$とおく。$\Omega-S$に含まれる任意のDirichlet 領域D'をとり，D'でcompact support を持ち，$C^2(\Omega)$に属する全ての非負函数vに対して

(3.7) $$\int_{D'}\int_\Omega G_*^\Omega(x,y)f(y)dy\,\mathcal{L}v(x)dx$$
$$=\int_\Omega\int_\Omega G_*^\Omega(x,y)f(y)dy\,\mathcal{L}v(x)=\int_\Omega f(y)dy\int_\Omega G^\Omega(y,x)\mathcal{L}v(x)dx$$
$$=-\int_\Omega f(y)v(y)dy=-\int_{D'}f(y)v(y)dy>0$$

$m=\sup_{x\in S}G_*^\Omega f(x)$とおけば，仮定3.1と（3.7）より，$u(x)-m$は（3.4）をみたすから，もし，$\Omega-S$で$G_*^\Omega f(x)$がmより大きくなるなら，その点を含む任意のDirichlet領域D'でmより大きくなる。D'として$\partial\Omega$を境界とするものがとれるから，これは矛盾する。

注意1 仮定（3.1）は，もし係数が十分なめらかならば， のdual operator *

(3.8) $$\mathcal{L}_u^*=(b_{ij}u)_{x_ix_j}+(b_iu)_{x_i}-C\cdot u$$

を

(3.9) $$\mathcal{L}^*u=a'_{ij}u_{x_ix_j}+b'_iu_{x_i}-C'u$$

とかきなおした時，$C'>0$を意味する。

§4. 不連続係数を持つ拡散過程の構成－I（微分方程式論からの準備）

ΩをR^d（$d>2$）の十分になめらかな境界を持つ有界領域とする。今，Ω上定義された次の微分作用素 を考えよう。

(*) $G^\Omega(x,y)=G(x,y)-E_x^\Omega G(x_{\tau_\Omega},y)$ であるから，第I章§5（5.21）から $\lim_{y\to a}G^\Omega(x,y)=0$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$\text{(4.1)}^{(*)} \qquad \mathcal{Q}u = -\sum_{i\cdot j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

ここに，$a_{ij}=a_{ji}$ で実数値有界可測函数とする。さらにuniformly ellipticを仮定する。即ち，正定数$\lambda>1$が存在して

$$\text{(4.2)} \qquad \lambda^{-1}|\xi|^2 \leqq \sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqq \lambda|\xi|^2, \quad |\xi| = \xi_1^2+\xi_2^2+\cdots\xi_d^2$$

この§では，W.Littman, G.Stampacchia, F.Weinberger〔13〕に従って，前§の条件をみたすGreen kernel が存在する事をのべ，それによってMarkov process を構成する。尚，この場合は連続なpath を持つものが作れる。

Ωに対して，$\partial\Omega$をその境界，$\overline{\Omega}=\Omega\vee\partial\Omega$とする。（以下の論義は$\partial\Omega$はなめらかと限らなくともよい）

(4.3) $C(\overline{\Omega})=\{\overline{\Omega}$上の実数値連続函数$\}$

$C^1(\overline{\Omega})=\{\Omega$上1回連続的微分可能な函数で$C(\overline{\Omega})$に属するもの，その偏導函数は$\overline{\Omega}$上連続に拡張できる$\}$

$C_0^1(\overline{\Omega})=\{C^1(\overline{\Omega})$に属する函数で$\rho(x,\partial\Omega)\to 0$につれて0になるもの$\}$

$H^{1,P}(\Omega)=\{C^1(\overline{\Omega})$を，ノルム$\|\cdot\|_{H^{1,P}(\Omega)}$でcompletionしたもの$\}$

但し，$\|u\|_{H^{1,P}(\Omega)}=\|u\|_{L^P(\Omega)}+\sum_{i=1}^{d}\|u_{x_i}\|_{L^P(\Omega)}$ $(P>1)$

$H_{loc}^{1,P}(\Omega)=\{u\ ;\ \ \Omega',\ \overline{\Omega'}\subset\Omega,\ u\in H^{1,P}(\Omega')\}$

$H_0^{1,P}(\Omega)=\{C_0^1(\overline{\Omega})$の$H^{1,P}(\Omega)$におけるclosure$\}$

$H^{-1,P'}(\Omega)=\{H_0^{1,P}(\Omega)$のdual space$\}$ 但し$P>1$，$\frac{1}{P}+\frac{1}{P'}=1$

注意1 $H^{-1,P'}(\Omega)$は次の形のdistribution 全体からなる。

$$\text{(4.4)} \qquad T=-\sum_{i=1}^{d}(f_i)_{x_i}, \quad \text{但し} f_i\in L^{P'}(\Omega)$$

(附録参照)。$H_0^{1,P}(\Omega)$はreflexive Banach space である。

定義4.1 $f_0, f_1, \cdots, f_d$ $L^2(\Omega)$が与えられた時，$u(x)\in H^{1,2}(\Omega)$が，(4.5)式の解であるとは

(*) 場合に応じて，断りなしにΩの外では$a_{ij}=\delta_{ij}$とおく事によって，R^d全体の作用素として考える事もある。こうおいても(4.2)はみたされている事に注意。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(4.5) $\quad \mathcal{L}u = f_0 - \sum_{i=1}^{d}(f_i)_{x_i}$

全ての$\phi \in H_0^{1,2}(\Omega)$に対して，次の(4.6)式がみたされる事である。

$$(4.6) \qquad \int_\Omega \sum^{d} a_{ij}\, u_{x_i}\, \phi_{x_j}\, dx = \int_\Omega \left(f_0 \phi + \sum_{i=1}^{d} f_i\, \phi_{x_i}\right) dx$$

特に，u $H_0^{1,2}(\Omega)$の場合，uは$\partial\Omega$でvanish するという。

解uに対して，次の定理がなりたつ。いずれも証明は附録を参照せられたい。

定理4.1 $f_i \in L^2(\Omega)$ $(i=1,2,\cdots,d)$ 及び$h \in H^{1,2}(\Omega)$が与えられたとせよ。その時，次の(4.7)及び(4.8)式をみたす唯一の解が存在する。

(4.7) $\qquad u = (f_i)_{x_i} \qquad (i=1,2,\cdots,d)$

(4.8) $\qquad u - h \in H_0^{1,2}(\Omega)$

定理4.2 今，Ωを球とする。その時$f_i \in L^P(\Omega)$ $(i=1,\cdots,d)$ と$h \in H^{1,P}(\Omega)$，$P>d$に対して，(4.7)及び(4.8)をみたす解は$\bar{\Omega}$でHölder 連続である。

定理4.3 $f_i \in L^P(\Omega)$ $(P>d)$ に対して$\partial\Omega$でvanish する(4.7)の解は

(4.9) $\qquad \max_{\Omega} |u(x)| < C\lambda\, [\mathrm{meas}\ \Omega]^{1/d - 1/P} \|f_i\|_{L^P(\Omega)}$

ここにCはpとdのみにdepend する。

定義4.2 函数$u(x) \in H_{loc}^{1,2}(\Omega)$が$\mathcal{L}u=0$の$\Omega$におけるlocal solution であるとは，全ての$\phi \in C^1(\bar{\Omega})$でcompact support を持つものに対して，(4.10)式がなりたつ事である。

$$(4.10) \qquad \int_\Omega \sum a_{ij}\, u_{x_i}\, \phi_{x_j}\, dx = 0$$

local solution に対して，次の事がなりたつ。

定理4.4 Ωにおける$\mathcal{L}u=0$のlocal solution に対して，次の不等式が成立する。

$$(4.11) \qquad \sum_{i=1}^{d} \int_{S(y,\rho)} u_{x_i}^2\, dx < \frac{4\lambda^2}{(R-\rho)^2} \int_{S(y,R)} u^2\, dx$$

ここにλは(4.2)の定数λで，$S(y,\rho)$及び$S(y,R)$はそれぞれ半径ρ及びRのyを中心とする球で$\rho<R$，$\bar{S}(y,R) \subset \Omega$

定理4.5 Ωにおける$\mathcal{L}u=0$の任意の(*)positive local solution に対して，

(*) ここでいうpositive とは，>0の事であり，§1～§3で用いたpositiveと異なる。§1～§3までの用法に従えばstrict に positive ということである。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$\overline{\Omega'} \subset \Omega$ なる Ω' で

(4.12) $\max_{x \in \Omega'} u(x) < C \min_{x \in \Omega'} u(x)$

ここにCは λ, Ω, Ω' のみに depend する定数

定理4.6 Ω における $\mathcal{L}u=0$ の local solution は Ω の中の任意の compact subdomain で Hölder continuous である。即ち，任意の Ω', $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ に対して定数 $K=K(\lambda, \Omega', \Omega)$, $\alpha=\alpha(\lambda, \Omega', \Omega)$ が存在して，任意の x', $x'' \in \Omega'$ に対して

(4.13) $|u(x')-u(x'')| < K \|u\|_{L^2(\Omega)} |x'-x''|^{\alpha}$

これらの定理の証明も，附録を参照の事。

定義4.3 $u(x) \in H^{1,2}(\Omega)$ が Ω で $\mathcal{L}$-subsolution であるとは

(4.14) $\int_{\Omega} \sum_{i \cdot j=1}^{d} a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j} \leqq 0$

が全ての non-negative function $\phi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ に対して，みたされることである。Ω においてuが $\mathcal{L}$-supersolution であるとは，$-u$ が $\mathcal{L}$-subsolution である事を意味する。次の定理は maximum principle の一つである。

定理4.7 もし，$u(x) \in H^{1,2}(\Omega)$ が，$\partial\Omega$ で，$H^{1,2}(\Omega)$ の意味で non-positive な $\mathcal{L}$-subsolution ならば，$u(x)$ は Ω 上殆んど到る所，non-positive である。

$H^{1,2}(\Omega)$ の意味で，$\partial\Omega$ 上 non-positive とは $C^1(\overline{\Omega})$ に属する函数列 $\{u_m\}$ で i) $u_m \leqq 0$ on $\partial\Omega$ ii) $u_m \to u$ in $H^{1,2}(\Omega)$ をみたすものが存在する事である。これを証明するために，次の lemma を準備する。

Lemma 4.1 $u(x) \in H^{1,P}(\Omega)$ が，$H^{1,P}(\Omega)$ の意味で $\partial\Omega$ 上 non-positive ならば，任意の $k>0$ に対して

(4.15) $u(x) - \{u(x)\}^k$

は $H_0^{1,P}(\Omega)$ に属する。但し $\{u\}^k$ とは，$u<k$ の時uと一致し，$u>k$ の時kの値をとる函数である。

証明 仮定により，$C^1(\overline{\Omega})$ に属する函数列 $\{u_m\}$ で定理4.7の i)，ii) をみたすものがとれる。その時 $\{u_m\}^k$ は $H^{1,P}(\Omega)$ に属し，

(4.16) $\lim_{m\to\infty} \|\{u_m\}^k - \{u\}^k\|_{L^P(\Omega)} \leqq \lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{L^P(\Omega)} = 0$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(4.17) $\lim_{m\to\infty}\sup\|\{u_m\}^k\|_{H^{1,P}(\Omega)} \leqq \|u\|_{H^{1,P}(\Omega)}$.

であるから，subsequence $\{u_m\}^k$ が存在して，$H^{1,P}(\Omega)$ でweakly に$\{u\}^k$ に収束する。従って，Banach-Saks の定理によって，$\{u_m\}^k$の適当なconvex 1次結合 v_m をとってきて（それは明らかに$H^{1,P}(\Omega)$ に属する）$\{u\}^k$に$H^{1,P}(\Omega)$ の意味で収束（強い意味で）させる事ができる。その由(*)$v_m - v_m$は$\partial\Omega$でvanishする$H^{1,P}(\Omega)$ に属する函数であり，$u-\{u\}^k$ はそれの$H^{1,P}(\Omega)$ の意味での極限である事が上の事から分って，lemma が証明される。

定理4.7の証明 $u(x)$ を定理の仮定をみたすものとすると，任意の$\varepsilon>0$に対して，$u(x)-\{u(x)\}^\varepsilon$は$\Omega$でnon-negative であり，lemma 4.1より$H_0^{1,2}(\Omega)$ に属する。

(4.14) 式で，ϕとして，$u-\{u\}^\varepsilon$をとれば，ϕ_{x_j}はu $(x)<\varepsilon$の範囲で0 である事に注意すると

$$(4.18)\quad \int_\Omega \sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}\,(u_{x_i}-\{u\}^\varepsilon_{x_j})\,\phi_{x_j}\,dx = \int_{\{u(x)\geqq\varepsilon\}} \sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}\,u_{x_i}\phi_{x_j}\,dx$$

$$= \int_{\{u(x)\geqq\varepsilon\}} \sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}\,(u_{x_i}-\{u\}^\varepsilon_{x_j})\,\phi_{x_j}\,dx = \int_\Omega \sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}\,\phi_{x_i}\phi_{x_j}\,dx$$

であるから

$$(4.19)\quad \int_\Omega \sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}\,\phi_{x_i}\phi_{x_j}\,dx \leqq 0$$

(4.2) に注意すれば，$\phi_{x_i}=0$ $(i=1,2,\cdots,d)$ a・e 従って$u(x)=\{u(x)\}^\varepsilon$ a・e ε任意であるから$u(x)\leqq 0$ a・e

定義4.4 Ωは開球とする。Ω上の有界変動なmeasure μに対して，$u\in L^1(\Omega)$ が，(4.20)式の$\partial\Omega$でvanish するweak solution であるとは

(4.20) $\mathcal{A}u=\mu$

全ての$\phi\in H_0^{1,2}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$，$\mathcal{A}\phi\in C(\overline{\Omega})$ に対して

$$(4.21)\quad \int_\Omega u\mathcal{A}\phi\,dx = \int_\Omega \phi\,d\mu$$

(*) $v_h=\sum_{e=h}^{e_h} C_{he}\{u_e\}^k$，$C_{he}\geqq 0$，$\sum_{e=1}^{e_h} C_{he}=1$ の時 $\hat{v}_h=\sum_{e=h}^{e_h} C_{he}\{u_e\}$ と定義する。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

がみたされる事である。

まず，このようなweak solution が唯一つ存在する事を証明しよう。

定理4.8 $\partial\Omega$でvanish する$\mathcal{L}u=\mu$のweak solutionが，唯一つ存在し，すべての$p'<{}^{d}/_{d-1}$ に対して$H_0^{1,P'}(\Omega)$ に属する。

証明 定理4.1から，$T\in H^{-1,2}(\Omega)$に対して，$G(T)=u$が$\mathcal{L}u=T$の$H_0^{1,2}(\Omega)$ の unique な解となるような，$H^{-1,2}(\Omega)$ から$H_0^{1,2}(\Omega)$ へのlinear operator Gが存在する事が分る。（定理4.1において，$h=0$とする。）更に定理4.2から，このoperator Gは$P>n$に対して，$H^{-1,P}(\Omega)$ から$C(\bar{\Omega})$ の中へ写し，定理4.3によって，Gの$H^{-1,P}(\Omega)$ でのrestriction は，連続作用素となる。特に$\psi\in C(\bar{\Omega})$ に対して

$$(4.22)\qquad \max_{\bar{\Omega}}|G\psi|\leq C\lambda\,[\mathrm{meas}\ \Omega]^{\frac{1}{d}-\frac{1}{P}}\|\psi\|_{H^{-1,P}}{}^{(*)}\qquad P>n$$

従って，uが$\partial\Omega$でvanish する$\mathcal{L}u=\mu$のweak solution であるためには全ての$\psi\in C(\bar{\Omega})$ に対して

$$(4.23)\qquad \int_\Omega u\psi\,dx=\int_\Omega G(\psi)\,d\mu$$

をみたす事が必要にして十分である。今，$H^{-1,P}(\Omega)$ のsubspace $G(H^{-1,P}(\Omega))$ 上のlinear functional lを考えると，(4.22) より，$H^{-1,P}(\Omega)$上のlinear functional と考える事ができて，従って任意の$\psi\in H^{-1,P}$に対して

$$(4.24)\qquad l(G(\psi))=\int_\Omega\psi(x)\,\phi(x)\,dx,\ \exists\,\phi(x)\in H_0^{1,P'},\ \frac{1}{P}+\frac{1}{P'}=1$$

一方，$G(H^{-1,P}(\Omega))$ $C(\Omega)$ であるから，$G(H^{-1,P}(\Omega))$のdual space は有界変動なmeasure μを含む。それ由，(4.23) の解が存在する。($C(\Omega)$ ($H^{-1,P}(\Omega)$) unique である事は，右辺が$C(\bar{\Omega})$ 上のlinear functional である事から明らかである。

注意2 もし，$u\in H_0^{1,2}(\Omega)$ が

$$(4.25)\qquad \int_\Omega\sum_{i\cdot j=1}^{d}a_{ij}u_{x_i}\phi_{x_j}\,dx=\int_\Omega\phi\,d\mu$$

(*) $\int C(\bar{\Omega})$ は$H^{-1,P}(\Omega)$ でdense

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

をみたすなら， $u=\mu$ の，$\partial\Omega$ でvanish するweak solution である。というのは $\psi\in C(\overline{\Omega})$，$\phi=G(\psi)$ とおけば定義より

(4.26) $$\int_\Omega u\psi\,dx=\int_\Omega \sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}\,\phi_{x_i}u_{x_j}\,dx=\int_\Omega \phi\,d\mu$$

注意3 (4.23) の解をuとすると，(4.22) より，任意の $\psi\in C(\Omega)$

(4.27) $$\int_\Omega u\psi\,dx<C\lambda\,[\text{meas }\Omega]^{\frac{1}{d}-\frac{1}{P}}\int_\Omega|d\mu|\,\|\psi\|_{H^{-1,P}(\Omega)}$$

従って $C(\Omega)$ が $H^{-1,P}(\Omega)$ でdense だから

(4.28) $$\|u\|_{H_0^{1,P'}(\Omega)}<C\lambda\,[\text{meas }\Omega]^{\frac{1}{d}-\frac{1}{P}}\int_\Omega|d\mu|$$

次に，weak solution は，なめらかな係数を持つ方程式のweak solution によって近づける事が出来ることを示そう。次の性質を持つ函数族 $\{\alpha_k(x)\}$ を考える。

(1) $\alpha_k(x)\in C^\infty(R^d)$

(2) $\alpha_k(x)\leqq 0$

(3) $\alpha_k(x)=0$，$|x|>\frac{1}{k}$

(4) $\int_{R^d}\alpha_k\,dx=1$

approximating operator $\mathcal{D}^k u=-\sum_{i\cdot j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ を次のように定義する。

(4.29) $$a_{ij}^{(k)}(x)=\int_{R^d}a_{ij}(y)\,\alpha_k(x-y)\,dy$$

(a_{ij} は Ω の外では δ_{ij} として拡張しておく。)

(4.30) $$a_{ij}^{(k)}\xi_i\xi_j=\int_{R^d}a_{ij}(y)\,\xi_i\xi_j\alpha_k(x-y)\,dy$$

となるから，uniformly elliptic である。更に $a_{ij}^{(k)}\in C^\infty(R^d)$ である。

定理4.9 Ω を球とする。Ω 上の任意の有界変動のmeasure μ に対して，$\mathcal{D}^k u^{(k)}=\mu$ のweak solution $u^{(k)}$ は，任意の $p'<d/_{d-1}$ をとると，$H_0^{1,P'}(\Omega)$ でweaklyに $\mathcal{D}u=\mu$ のweak solution uに収束する。従って，任意の $q<d/_{d-2}$ をとると L^q でstrongly に収束する。(*)

(*) 証明からみて分るように $\frac{1}{q}>\frac{1}{P'}-\frac{1}{d}$ を満足するqをとれば L^q －収束する。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

証明 最初に$d\mu=\psi dx$, $\psi\in C(\overline{\Omega})$の場合に証明する。その時，weak solution $u^{(k)}$は，$H_0^{1,2}(\Omega)$に属する解である。即ち，全ての$\phi\in H_0^{1,2}(\Omega)$について

$$(4.31)\quad \int_\Omega \sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}^{k}\, u_{x_i}^{(k)}\, \phi_{x_j}\, dx=\int_\Omega \psi\phi\, dx$$

(4.28)により，$\|u^{(k)}\|_{H^{1,2}(\Omega)}$はuniformly founded であり，定理4.2より$u^{(k)}$は$\overline{\Omega}$でuniformly Holder 連続($u^{(k)}\in H_0^{1,2}(\Omega)$に注意)。従ってsubsequence k_ν が存在して$u^{(k_\nu)}$は$H_0^{1,2}$でweaklyに，$\overline{\Omega}$でuniformlyにHolder 連続函数uに収束する。a_{ij}^{k} は，全ての$L^{\gamma}(\Sigma)$でstrongly に収束するから，全てのcompact support を持つ$C^{\infty}(\overline{\Omega})\ni\phi$に対して

$$(4.32)\quad \int_\Omega \sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}\, u_{x_i}\, \phi_{x_j}\, dx=\int_\Omega \psi\phi\, dx$$

それ由，全ての$\phi\in H_0^{1,2}(\Omega)$に対して，(4.32)がなりたつ。定義によって$u\in H_0^{1,2}(\Omega)$は $\mathcal{D}u=\psi$の解である。この解はunique であるから，$u^{(k)}$は$H_0^{1,2}(\Omega)$でweakly にuに収束する。

次に一般の場合を考えよう。$\mathcal{D}^k u^{(k)}=\mu$のweak solution $u^{(k)}$を考えると，任意の$\psi\in C(\overline{\Omega})$に対して，$\phi^{(k)}\in H_0^{1,2}(\Omega)$を$\mathcal{D}^k\phi^{(k)}=\psi$の解とすれば

$$(4.33)\quad \int_\Omega u^{(k)}\psi\, dx=\int_\Omega \phi^{(k)}\, d\mu$$

を満足する。一方，前にのべた事より$\phi^{(k)}$はuniformlyに，$\mathcal{D}\phi=\psi$の解ϕに収束する。又(4.28)より$\|u^{(k)}\|_{H^{1,P'}(\Omega)}$はuniformly founded であるからsubsequence $k_i\to\infty$が存在して，$u^{(k_i)}$はweakly に$u\in H_0^{1,P'}(\Omega)$に収束する。従って(4.33)から，$\mathcal{D}\phi=\psi$となるような$\psi\in C(\overline{\Omega})$と$\phi\in H_0^{1,2}$について

$$(4.34)\quad \int_\Omega u\psi\, dx=\int_\Omega \phi\, d\mu$$

それ由，uは$\mathcal{D}u=\mu$のweak solution である。$L^q(\Omega)$での収束はSobolev の定理によって，$u^{(k_i)}$が$H_0^{1,P'}(\Omega)$でweakly にuに収束するならば$\frac{1}{q}>\frac{1}{P'}-{}^1\!/_d$ を満足する全てのqに対して，あるsubsequence があって，$L^q(\Omega)$でstrongly に収束させる事ができ，weak solution uがunique であることから$u^{(k_i)}$が$L^q(\Omega)$でstrongly に収束するからである。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

§5. 不連続係数を持つ拡散過程の構成－II (Green 函数)

この§では，(4.1) の$\mathscr{D}$に関連するGreen 函数を定義し，それが§1でとり扱つたkernel Gの性質を持つ事を証明する。以後，断りなしにΩはR^dにおける開球とする。

定義5.1 δ_yをyにおけるDirac measure とする。Ωでvanish する $g=\delta_y$ のweak solution $G(x, y)$を，$\mathscr{D}$のΩにおけるGreen 函数という。

$G(x, y)$の性質を，係数が十分なめらかな場合のGreen 函数の性質から導くのであるが，その前に次の事を注意しておく。

注意1 $\bar{\Omega}$で1回連続的微分可能な函数$f(x)$，($f\in C^1(\bar{\Omega})$) は，$\bar{\Omega}$でuniformly Lipshity continuous である。即ち，定数$M>0$が存在して，任意のx, y $\bar{\Omega}$について

$$(5.1)\qquad |f(x)-f(y)|<M|x-y|$$

なぜならば，$x_0=(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$，$y=(y_1, y_2, y_3)\in\bar{\Omega}$ とすると（簡単の為，3次元の時を考える。)

$$(5.2)\qquad f(y)-f(x_0)=\int_{x_0}^{y}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial x_3}\cos\gamma\right\}ds$$

ここに，α, β, γは$\overrightarrow{x_0 y}$とx_1軸，x_2軸，x_3軸とのなす角，積分路はx_0 y を結ぶ線分，sはx_0からの長さとする。$f\in C^1(\bar{\Omega})$ であるから，$\bar{\Omega}$で$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$はbounded。従って (5.1) がなりたつ。)

注意2. 特に，$a_{ij}\in C^2(\bar{\Omega})$ の時，(4.1) の に対して－ をgeneratorとして持つcanonical diffusion process X^{Ω} が構成出来る。(上の注意1及び第I章§2参照) 第I章§4でのべたようにGreen 函数$G^{\Omega}(x, y)$が存在するが，それは定義5.1によるGreen 函数である。$G^{\Omega}(x, y)=\int_0^{\infty}P^{\Omega}(t, x, y)\,dt$ であるから$P^{\Omega}(t, x, y)=P^{\Omega}(t, y, x)$ ($-\mathscr{D}$のself－adjoint性) に注意すると$G^{\Omega}(x, y)\fallingdotseq G^{\Omega}(y, x)$。従って，Dynkin [1] T | 3.2 | よりΩでHolder 連続な函数ϕに対して

$$(5.3)\qquad f(y)=\int_{\Omega}-\mathscr{D}G^{\Omega}(y, x)f(x)\,dx=-\int_{\Omega}\mathscr{D}G^{\Omega}(x, y)f(x)\,dx$$

$G(x, y)$ の性質をのべる前に，以下の事実を注意しておく。

定義5.2 －capacity* $C_{\mathscr{F}}(E)$。Eをclosed sed⊂Ωとする。

(*) $\mathscr{F}$－capacity と名づけたのは，Frostman流のcapacityという意味である。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(5.4) $$D_{\mathcal{D}}(\phi) \equiv \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\phi_{x_i}\phi_{x_j}\,dx$$

と定義した時，$\mathcal{F}$ − capacity $C_{\mathcal{F}}(E)$ とは

(5.5) $$C_{\mathcal{F}}(E) = \inf_{\substack{\phi \in H_0^{1,2}(\Omega) \\ \phi \geq 1 \text{ on } E \\ \text{in the sense} \\ \text{of } H_0^{1,2}}} D_{\mathcal{D}}(\phi)$$

のこととする。その時

定理5.1 $H_0^{1,2}(\Omega)$ に属し，E上，$H_0^{1,2}(\Omega)$ の意味で，$u(x) \geqq 1$ なるunique 函数 $u(x)$ が存在して

(5.6) $$C\ (E) = D\ (u)$$

さらにE上，$H_0^{1,2}(\Omega)$ の意味で $u=1$ であり，∂E にconcentrateするnon-negative measure μ が unique に定まつて

(5.7) $$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\mu(dy)$$

である。又，$\mu(E) = C_{\mathcal{F}}(E)$

証明 i) unique な函数 $u(x)$ の存在；$\phi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ でE上 $H_0^{1,2}$ の意味で $\phi \geqq 1$ な函数全体はclosed convex set をなす。更に $H_0^{1,2}(\Omega)$ はHilbert 空間であるから，そのunique な存在が言えて，(5.6) をみたす。

ii) E上，$H_0^{1,2}(\Omega)$ の意味で $u=1$ である事；これは

(5.8) $$D\ (\{u\}^1) < D_{\mathcal{D}}(u)$$

であるから，次のlemma が言えればよい。

LEMMA 1. $u(x) \in H_0^{1,P}(\Omega)$ でE上，$H_0^{1,P}(\Omega)$ の意味で $u(x) \geqq 1$ とする。その時 $\{u(x)\}^1 = 1$ がE上，$H_0^{1,P}(\Omega)$ の意味でなりたつ。

証明 $\{u_m\}$ はE上 $u_m \geqq 1$ で $H_0^{1,P}(\Omega)$ でuに収束する函数列とすれば，$\{u_m\}^1$ のsubsequence があつてweakly に収束する。従つてBanack−Saks の定理によつて $\{u_m\}^1$ の凸1次結合がstrong に $\{u\}^1$ に収束し，E上1に等しい。

(**) $H_0^{1,2}$ の意味でEで $\phi \geqq 1$ とは $\phi - 1$ がEで $H_0^{1,2}(\Omega)$ の意味でnon-negative という事，即ち $\{u_m\} \in M_0 = \{\text{Lipshitz function in } \overline{\Omega}\}$ i) $u_m > 0$ on E ii) $u_m \to u$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

iii) (5.7) 式の証明；まず，上のuに対し，次の事がなりたつ。

LEMMA 2. 任意の$\phi\in H_0^{1,2}(\Omega)$でE上$H_0^{1,2}(\Omega)$の意味でnon-negative な函数$\phi$に対して

$$(5.9)\qquad \int_\Omega \sum_{i\cdot j}^{d} a_{ij}u_{x_i}\phi_{x_j}dx\geqq 0$$

証明 任意の$\varepsilon>0$に対して，$u+\varepsilon\phi$を考えよう。その時

$$(5.10)\qquad D\ (u+\varepsilon\phi)\geqq D\ (u)$$

であるから

$$(5.11)\qquad \frac{d}{d\varepsilon}D_L(u+\varepsilon\phi)\ |_{\varepsilon=0}>0$$

さて，次に$C^\infty(\overline{\Omega})\cap C_K(\overline{\Omega})$上のcontinuous linear functional

$$(5.12)\qquad \int_\Omega \sum_{i\cdot j}^{d} a_{ij}u_{x_i}\phi_{x_j}dx$$

を考えよう。するとL. Schwartz [25] P17 Th Ⅲより，unique な measure $d\mu$が定まって

$$(5.13)\qquad \int_\Omega \sum^{d} a_{ij}u_{x_i}\phi_{x_j}dx=\int_\Omega \phi\, d\mu$$

更に，(5.9) から$d\mu$はE上にconcentrate するnon-negative measure であり，E上$H_0^{1,2}(\Omega)$の意味で$u=1$だから，$\partial\Omega$上にconcentrate する事が分る。§4注意2より，uは$\partial\Omega$でvanish する$\mathcal{D}u=\mu$のweak solution であるから，次の定理5.2が言えれば (5.7) 式が導かれる。即ち

定理5.2 全ての有界変動のmeasure μ に対して

$$(5.14)\qquad u(x)\equiv\int_\Omega G(x,y)\,d\mu(y)$$

は存在し，$a\cdot e$でfinite で，$\partial\Omega$でvanish する$\mathcal{D}u=\mu$のweak solutionである。

証明 一般性を失う事なしにμはnon-negative measureとする事ができる。今，non-negative function $\psi\in C(\Omega)$をとり，ϕを$\mathcal{D}\phi=\psi$の$H_0^{1,2}(\Omega)$での解とする。定理4.2より$\phi\in C(\overline{\Omega})$で定理4.7よりnon-negative である。更に

$$(5.15)\qquad \phi(y)=\int G(x,y)\psi(x)\,dx$$

は明らかだからFubini の定理より

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(5.16)\quad \int \phi(y)\,d\mu(y) = \iint G(x,y)\psi(x)\,dx\,d\mu(y) = \int \psi(x)\,u(x)\,dx$$

これは，任意$\psi\in C(\Omega)$と$\mathcal{A}\phi=\psi$となる$H_0^{1,2}(\Omega)\ni\phi$に対してなりたつのだから，定義より，(5.14) の$u(x)$はweak solution である。

iv) $\mu(E)=C_{\mathcal{A}}(E)$ の証明；$u\in H_0^{1,2}(\Omega)$ で，E上$H_0^{1,2}(\Omega)$ の意味で$u=1$だから$\{\phi^s\}$が存在して，$\phi^s\in M_0$，$\phi^s\to u$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$，かつ$\phi^s=1$ onE。(5.13) 式を考えると左辺は$C_{\mathcal{A}}(E)$ に収束し，右辺は任意のsに対して$\mu(E)$ である。従つて証明ができた。(*)

次の定理は，第I章定理4.1と類似のものであるが，その時きまる定数C_1，C_2はa_{ij} にdepend していたのに反し，今の場合はellipticity constant λにのみdepend させてとる事が出来る事を示している。

定理5.3　§4で定義した$\mathcal{A}^k$を考える。Ωに含まれる任意のcompact set Kに対して，K及びellipticity constant CのみにdependするC$_1$，$C_2>0$があって

$$(5.17)^{(*)}\quad C_1\phi(|x-y|)\geqq G(x,y)\geqq C_2\phi(|x-y|),\quad x,y\in K$$

証明　係数が滑らかな時，第I章の結果より，$x\neq y$で$G(x,y)$ は2変数に関して連続で，$\lim_{x\to y} G(x,y)=+\infty$である。従つて，任意の$y\in\Omega$をfix して

$$(5.18)\quad J_a=\{x \mid G(x,y)\geqq a\}$$

を考えると，yはJ_aの内点にある。J_aに対して，定理5.1できまるuは，unique なmeasure ν_aが定まつて (5.7) のように表現できて，ν_aは∂J_aにconcentrate している事からuはyで連続それ故

$$(5.19)\quad 1= {}_{\Omega}\,G(x,y)\,d\nu_a(x)$$

このことは

$$(5.20)\quad C_{\mathcal{A}}(J_a)=\frac{1}{a}$$

Ω_γ $(0<\gamma<1)$ をyに関してΩをuniform dilatiation して得られた領域とする。

$$(5.21)\quad a=\min_{x\ \partial\Omega_\gamma} G(x,y)$$

とおけば，Gはsuperharmonic function (第I章§4注意2) であるから，

(*) $C^\infty(\Omega)\cap C_K(\overline{\Omega})$ で$H_0^{1,2}(\Omega)$ でdenseだから，(5.13) は$H_0^{1,2}(\Omega)\ni\phi$に対してもなりたつ。

(*) $\phi(\cdot)$は，第I章定理4.1でのべたもの

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(5.22) $\overline{\Omega}_\gamma \subset J_a$

従つて，$E \subset F$ ならば $C_{\mathcal{F}}(E) < C_{\mathcal{F}}(F)$ に注意すると

(5.23) $C_{\mathcal{F}}(\overline{\Omega}_\gamma) < C_{\mathcal{F}}(J_a) = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\min\limits_{\partial\Omega_\gamma} G(x, y)}$

同様に

(5.24) $D = \max\limits_{\partial\Omega_\gamma} G(x, y)$

とおけば，$G(x, y)$ は $\Omega - \overline{\Omega}_\gamma$ で harmonic に注意すれば

(5.25) $C_{\mathcal{F}}(\overline{\Omega}_\gamma) > C_{\mathcal{F}}(J_b) = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{\max\limits_{\partial\Omega_\gamma} G(x, y)}$

(5.23)と(5.25)をあわせると，

(5.26) $\min\limits_{\partial\Omega_\gamma \ni x} G(x, y) \leqq C(\overline{\Omega}_\gamma)^{-1} \leqq \max\limits_{\partial\Omega_\gamma \ni x} G(x, y)$

しかるに $G(x, y)$ は $\Omega - y$ で harmonic で，§3注意5より $\Omega - y$ で positive local solution であるから，定理4.4から，λ と γ のみに depend する定数 C があつて，

(5.27) $\max\limits_{\partial\Omega_\gamma \ni x} G(x, y) \leqq C \cdot \min\limits_{x \in \partial\Omega_\gamma} G(x, y)$

一方，$\min\limits_{\partial\Omega_\gamma} G$ は γ が大きくなるにつれて小さくなり，$\max\limits_{\partial\Omega_\gamma} G$ は γ が大きくなるにつれて大きくなるから，C は γ の函数として non-decreasing である。従つてある $\gamma_0 < 1$ を固定する事によつて，$\gamma < \gamma_0 < 1$ に対して，C を γ に independed にとる事ができる。それ故，$x \in \partial\Omega_\gamma$ で

(5.28) $C^{-1} C_{\mathcal{F}}(\overline{\Omega}_\gamma)^{-1} \leqq G(x, y) \leqq C\, C_{\mathcal{F}}(\overline{\Omega}_\gamma)^{-1}$

同様に Laplace operator (Brown 運動) に対しても，ellipticity constant は同じ λ とみなせるから(*)，$\gamma \leqq \gamma_0$ に対して，$x \in \partial\Omega_\gamma$ で

(5.29) $C^{-1} C^B_{\mathcal{F}}(\overline{\Omega}_\gamma)^{-1} < G^B(x, y) < C\, C^B_{\mathcal{F}}(\overline{\Omega}_\gamma)^{-1}$

他方，定義5.2から明らかに，任意の closed set E に対して

(5.30) $\lambda^{-2} C^B_{\mathcal{F}}(E) < C_{\mathcal{F}}(E) < \lambda^2 C^B_{\mathcal{F}}(E)$

(*) 頭文字のBはBrown 運動の意味

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

従つて $x \in \partial\Omega_{\gamma}$ で

(5.31) $C^{-2}\lambda^{-2}G(x,y) \leq G(x,y) \leq \lambda^{2}C^{2}G(x,y)$

それ故，第I章定理4.1を証明したのと同様にして，(5.17) がいえる。

<u>定理5.4</u> $\mathscr{D}$ のGreen 函数 $G(x,y)$ は次の性質を持つ。

i) $G(x,y)$ は x に関し，$\Omega-y$ でHolder 連続

ii) $G(x,y) \geqq 0$

iii) $G(x,y)=G(y,x)$

iv) $\lim_{x \to a} G(x,y)=0$, $a \in \partial\Omega$

v) $\Omega \supset K$ compact set をとれば，Kと λ にのみdepend する定数 $C_1, C_2>0$ が存在して，

(5.32) $C_1\phi(|x_1-x_2|) \geqq G(x_1,x_2) \geqq C_2\phi(|x_1-x_2|)$, $x_1, x_2 \in K$

<u>証明</u> i) の証明 $\mathscr{D}^{k}$ に対するGreen 函数を $G^k(x,y)$ とする。その時 $\Omega-y$ でcompact support を持つ $C^1(\overline{\Omega}) \ni \phi$ に対して

(5.33) $$\int_{\Omega} \sum_{i \cdot j}^{d} a_{ij}^{(k)} G_{x_i}^{k}(x,y)\phi_{x_j}dx=0$$

この事は，第1章§4注意2と第I章§3注意5より明らかである。定理5.3より，$G^{(k)}$ は $\Omega-y$ に含まれる任意のcompact set 上でuniformly boundedであり，(5.33) から，$G^{(k)}$ は $\Omega-y$ で $\mathscr{D}^{(k)}u=0$ のlocal solutionであるから，定理4.4 (4.11) が使えて，$\Omega-y$ 上の任意のcompact set C で $\|G^k\|_{H^{1,2}(C)}$ はuniformly bounded 従って $H^{1,2}(C)$ に関してweakly に収束するsubsequenceがとれて，定理4.9より G^k は $H^{1,2}(C)$ でweakly にGに収束する。更に $a_{ij}^{(k)}$ は a_{ij} に L^2 −収束するのだから (5.4) より，$\Omega-y$ にcompact support を持つ $C^1(\overline{\Omega}) \ni \phi$ に対して

(5.34) $$\int_{\Omega} \sum_{i \cdot j}^{d} a_{ij} G_{x_i}\phi_{x_j}dx=0$$

即ち，Gは $\Omega-y$ における $\mathscr{D}u=0$ のlocal solution である。従つて，$\Omega-y \supset \overline{D}$, D でのlocal solution でもあるから，定理4.6 より，i) が証明出来る。

ii) ~iv) の事は，G^k についてはなりたち，定理4.9 と i) の $G(x,y)$ の連続性の結果を用いれば分る。

v) の証明 定理5.3の C_1, C_2 が λ とKのみにdepend する事と，$G^k \to G$ に L^q− 収束する事から導かれる。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

§6. 不連続係数を持つ拡散過程の構成－Ⅱ（正則点）

この§では，§4及び§5の結果を用いて，§1～§2の方法によって$\mathcal{L}$のGreen函数$G(x,y)$からMarkov processを構成する。更に正則点について証明する。

作用素Gfを，$Gf(x)=\int_\Omega G(x,y)f(y)dy$と定義すれば

定理6.1 Gは　　Gは§1～§3の全ての条件をみたす作用素である。即ち

ⅰ）GはC_KからC_0へのlinear operatorである。

ⅱ）Gはpositive operatorである。

ⅲ）Gはweak principle of the positive maximumをみたす。

ⅳ）$G(C_K)$はΩの2点を分離する。

ⅴ）Ωに含まれる任意のcompact set Kに対して，Kのみにdependする定数C_1, $C_2>0$があって，(*)

$$(6.1)\qquad C_1\phi(|x_1-x_2|)\geqq G(x_1,x_2)\geqq C_2\phi(|x_1-x_2|),\quad x_1,x_2\in K$$

ⅵ）任意の閉球Eに対して，compact set Fが存在して

$$(6.2)\qquad \sup_{\substack{x\in\Omega-F\\ y\in E}} G(x,y)<+\infty$$

証明 ⅰ）の証明 $\forall f\in C(\Omega)$に対して，$Gf(x)$は，$\mathcal{L}Gf(x)=f$の$H^{1,2}_{00}(\Omega)$での解である。従って定理4.2より$Gf(x)$は$C(\overline{\Omega})$で，定理5.4より，ⅰ）の主張が証明できる。

ⅱ）は明らかである。

ⅲ）の証明 $Gf(x)$は上にのべたように$\mathcal{L}Gf(x)=f$の解であるから

$$(6.3)\qquad \int_\Omega \sum_{i,j}^{d} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}Gf(x)\cdot\phi_{x_j}dx=\int f\cdot\phi\ dx \qquad \forall\phi\in H_0^{1,2},\ f\in C_K(\Omega)$$

従って，$S=\{x\,;\,f(x)\geqq 0\}$とおき，ϕとして$\Omega-S$でnon-negativeで$\phi\in H_0^{1,2}(\Omega-S)$をとれば（Sでは$H_0^{1,2}(\Omega)$の意味で0とする）

$$(6.4)\qquad \int_\Omega \sum_{i\cdot j}^{d} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}Gf(x)\cdot\phi_{x_j}dx=\int_{\Omega-S}\sum_{i\cdot j}^{d} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}Gf(x)\cdot\phi_{x_j}dx$$

であるから，(6.3)とあわせて

(*) 勿論，Gは固定して考えるので，ellipticity constantにdependしていても差支えない。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

(6.5) $$\int_{\Omega-S}\sum_{i\cdot j}^{d} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}Gf(x)\cdot\phi_{x_j}dx=\int_{\Omega}f(x)\cdot\phi(x)dx$$

$$=\int_{\Omega-S}f(x)\cdot\phi(x)dx<0$$

従ってGfは$\Omega-S$で$\mathcal{D}$−subsolution である。

(6.6) $$m=\sup_{x\in S} Gf(x)$$

とおいて$Gf(x)-m$に定理4.7を適用すれば，明らかに$\partial(\Omega-S)$ではnon−positive non−positive だから，$\Omega-S$でnon−positive である。即ち

(6.7) $$m\geqq Gf(x),\ \forall x\in\Omega$$

iv）は§3注意1からv）が言えればよいが，v）は定理5.4のv）そのものであるから明らかである。

vi）は，定理5.4のiv）を用いれば，$f\in C_K$に対して，$Gf\in H_0^{1,2}$ から分る。

従って，§2の結果よりΩ上のstandard process $X=(x_t, \zeta, M_t, P_x)$が構成出来る。以後断りなしにこのprocess Xを考える事にする。

さて，第I章§5でのべたRieszの表現定理に類する事が，このprocessについてもなりたつ事を証明しよう。まず$G(x,y)$が対称である事から，meyer の意味でのXのdual process X（たとえば近藤〔9〕）は，Xそれ自身である事に注意すると

LEMMA 6.1 Eをnearly analytic set とすれば，全てのx，$y\in\Omega$に対して

(6.8) $$\int_{\Omega}H_E(x,dz)G(z,y)=\int_{\Omega}G(x,z)H_E(y,dz)$$

但し$H_E(x,dy)=P_x(\sigma_E\in dy)$

この証明は，たとえば近藤〔9〕P97をみられたい。

定理6.2 Eをcompact closure を持つ，analytic set とすれば，Eにconcentrate するfinite measure μ_E が一意的に定まつて

(6.9) $$P_x(\sigma_E<\zeta)=\int G(x,y)\mu_E(dy)$$

この定理の証明をHunt〔8〕に従って，証明しよう。

LEMMA 6.2 KをΩに含まれるcompact set とする。その時

(6.10) $$P_x(x_t(\omega)\notin K,\ \text{for all sufficiently large } t)=P_x(\zeta=\infty)$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

証明　まず，任意のcompact set Kに対して，open set K' が存在して，ある$\alpha>0$に対し，

(6.11)　$P_x(x(t)\quad H,\quad 0<t\leqq\alpha)\geqq\alpha,\quad x\quad H$

を証明しよう。今C_Kに属する$f(x)>0$を固定し，

(6.12)　$Gg(x)=\frac{1}{\sup_{x\ \Omega} Gf(x)}\cdot Gf(x)\leqq 1$

を考える。$Gg\quad C_0$であり，T_tはC_0上の強連続なsemi-groupであるからある$\rho>0$が存在して，$Gg(x)>\ \delta>0,\quad x\quad K$に注意すると

(6.13)　$T_\rho Gg(x)\geqq\delta,\quad x\quad K$

とできる。今

(6.14)　$H'=\{x\,;\,Gg(x)\geqq\frac{\delta}{2}\}$

とおけば

(6.15)　$$T_\rho Gg(x)=E_x(Gg(x_\rho),\sigma_{H}'<\rho)+E_x(Gg(x_\rho),\sigma_{H}'\geqq\rho)$$
$$\leqq P_x(\sigma_{H}'<\rho)+\frac{\delta}{2}P_x(\sigma_{H}'\geqq\rho)$$

(6.13)とあわせると

(6.16)　$P_x(\sigma_{H'}>\rho)\geqq\frac{\delta}{2}\qquad \forall x\in K$

それ故　H'^{c}とおけば，δを適当にえらぶ事によつて，(6.11)がいえる。

今 markov time Tn を次のように定めると，(6.11)のαをもつてきて)

(6.17)　$T_1=\sigma_K,\ T_{n+1}=T_n+\alpha+\sigma_K(\omega^+_{T_n+\alpha}),$

(6.18)　$$\int_H G(x,y)\,dy=E_x\Bigl(\int_0^\infty\chi_H(x_t)\,dt\Bigr)$$
$$\geqq\sum_n E_x\Bigl(\int_{T_n}^{T_n+1}\chi_H(x_t)\,dt\Bigr)\geqq\sum_n E_x\Bigl(E_{x_{T_n}}\int_0^\alpha\chi_H(x_t)\,dt\Bigr)$$
$$\geqq\alpha^2\sum_n P_x(T_n<\infty)$$

(6.1)より，$\int_H G(x,y)\,dy<\infty,\ \forall x$であるから，Borel–Cantelliのlemmaより，あるn_0より大きなnに対し，$T_n=\infty$　それ故，lemma が証明された。

<u>LEMMA 6.3</u>　あるpotential の列$\{G\mu_n\}\,(=\int G(x,y)\,\mu_n(dy))$が存在して

(6.19)　$G\mu_n(x)\uparrow 1$　(各点収束)

証明　$G^\alpha\ (\alpha>0)$ の場合には，たとえば近藤〔9〕にもあるが，Gの時は多少注意を要するのでHunt〔8〕に従つて証明しておく。compact set の列$\{F_k\}$を$F_k\uparrow\Omega$ となるようにとつておく。函数列$\{g_k\}$及び$\{\varphi_k\}$を次のようにきめておくと

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$$(6.20)\quad g_k = k\cdot\chi_{F_k},\ \varphi_k = \min(Gg_k(x),\ 1)$$

明らかに

$$(6.21)\quad \varphi_k \uparrow 1 \quad (\text{各点収束})$$

一方，

$$(6.22)\quad T_t\varphi_k(x) \leqq T_t G g_k(x) = E_x\left(\int G(x_t, y)\, g_k(y)\, dy\right)$$
$$\leqq k\, E_x\left(\int_{F_k} G(x_t, y)\, dy\right)$$

右辺は，lemma 6.2よりt $\uparrow\infty$につれて0にいく。従って

$$(6.23)\quad f_{t,k} = \frac{1}{t}(\varphi_k - T_t\varphi_k)$$

とおいて，$Gf_{t,k}(x)$ を調べると，任意のt_0を固定すれば

$$(6.24)\quad \int_0^{t_0} \frac{1}{t}(T_s\varphi_k - T_s T_t\varphi_k)\, ds$$
$$= \frac{1}{t}\int_0^t T_s\varphi_k\, ds - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} T_s\varphi_k\, ds$$

であるから，$t_0\uparrow\infty$とすれば，(6.22) より右辺の第2項$\downarrow 0$，その後で$t\downarrow 0$とすれば，(6.21) とあわせて (6.19) が得られる。

これらのlemma を用いて，定理を証明しよう。lemma 6.3の$G\mu_n$を考えると，lemma 6.1から

$$(6.25)\quad H_E G\mu_n(x) = \int G(x, y)\int H_E(z, dy)\,\mu_n(dz) \uparrow H_E 1$$

さて，

$$(6.26)\quad \nu_n(dy) = \int H_E(z, dy)\,\mu_n(dz)$$

を考えると，Xがstandard processであるから，ν_nは$\bar{E}$にconcentrate し，

$$(6.27)\quad H_E G\mu_n(x) \leqq 1$$

から，ν_nはuniformly bounded であるから，$\bar{E}$にconcentrateするbounded measure ν に弱収束する部分列$\{\nu_n\}$がえらべて，しかも

$$(6.28)\quad G\nu_n \uparrow G\nu$$

なぜならば，compact support を持つ，bounded measurable function f

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

を選ぶと，Gfは連続である事が証明できるから

(6.29) $\int \nu_n(dy)\int f(z)G(z,y)\,dy \to \int \nu(dy)\int f(z)G(z,y)\,dz$

従って

(6.30) $G\nu_n \uparrow G\nu \quad a.e$

両辺共excessive function である事に注意すれば，(6.30) は到る所でなりたつ。又，measure はそのpotential によってきまるからすべてのν_nで$\nu_n \to \nu_0$ それ由，定理が証明できた。

Rieszの表現定理がなりたつから，第I章§6注意3から，第I章§6の方法が使えて，結局

定理6.3 Aをcompact closure を持つanalytic set とした時，点xが，今構成したprocess X についてAのregular point ならば，Broun運動についてもAのregular point である。逆もなりたつ。

§7. 不連続係数る持つ拡散過程の構成IV (pathの連続性)

この§では前§で構成した，(3.1)の$\mathcal{D}$に対応する球Ω上のstandard process X $=(x_t, \xi, M_t, P_x)$ のpath の連続性について論ずる。まずharmonic measure (確率論的な意味で) が境界のみにmass を持つ事をのべ，四月セミナーで近藤氏が行ったようにしてpathの連続性を導くわけだが，一般には，$E_x f(x_{\tau_G})$ とGでのDirichlet問題の解との関係はpath の連続性が無い時には，明らかではないので，たとえDirichlet 問題の解が存在したとしても，harmonic measure (確率論的な意味で) が境界上にのみmassを持つ事はすぐにはいえない。従って多少細工を弄する。まず，Dynkinの公式はpathの連続性無しになりたつ事に注意する。即ち，

LEMMA 7.1 $u=Gf$，τをmarkov time とする。その時

(7.1) $E_x u(x_\tau) - u(x) = -E_x\int_0^\tau f(x_t)\,dt$

証明は，たとえばDynkin〔1〕P191を参照

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

LEMMA 7.2 DをΩに含まれる球とする。$\overline{D}$で連続な函数uに対して，§3で定義したapproximating operator$\mathscr{D}^{(k)}$に対応するprocess $X^{(k)}$を考えると

$$(7.2)\qquad u^{(k)}=E_x^{(k)}u(x_{\tau_D})$$

は，$\overline{D}$上uniformly に，$\overline{D}$で連続な函数u^*に収束し，

$$(7.3)\qquad \mathscr{D}u^*(x)=0 \qquad \text{in } D$$

$$u^*(x)=u(x) \quad \text{on } \partial D$$

である。しかも境界∂Dにconcentrate するmeasure $\mu(x,dy)$があつて

$$(7.4)\qquad u(x)=\int u(z)\mu(x,dy)$$

証明 明らかに$u^{(k)}$は境界∂D上でuの値をとる，

$$(7.5)\qquad \mathscr{D}^{(k)}u^{(k)}=0$$

の解である。従つて，任意の$\phi\in H_0^{1,2}(D)$に対して

$$(7.6)\qquad \int_D \sum_{i\cdot j}^{d} a_{ij}^{(k)} u_{x_i}^{(k)} \phi_{x_j}\,dx=0$$

となる。それ故，定理4.7の証明中の議論と全く，同様にして，$u^{(k)}$は$\overline{D}$で連続な函数u^*に$\overline{D}$上一様収束して，任意の$\phi\in H_0^{1,2}(D)$に対して

$$(7.7)\qquad \int_D \sum_{i\cdot j}^{d} a_{ij} u_{x_i}^{*} \phi_{x_j}\,dx=0$$

がなりたつので，(7.3)式がいえる。(7.4)は$P_x^{(k)}(x_{\tau_D}\in dy)$は$\partial D$にのみmass を持ち，一様有界である事に注意すれば導かれる。

さて，球Dのharmonic measure $H_{D^c}(x,dy)=P_x(x_{\tau_D}\in dy)$, $\tau_D=\inf(t\geqq 0,\ x_t\notin D)$，が$\partial D$上にconcentrate する事を証明しよう。そのために次の函数$F_a(G_y(x))$を考える。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

$G(x,y)=G_y(x)$ とおいて，y_0 を固定し

$$(7.8)\quad F_a(G_{y_0}(x))=\begin{cases} G_{y_0}(x), & G_{y_0}(x)\leqq a \\ G_{y_0}(x)-\dfrac{1}{4a}(G_{y_0}(x)-a)^2, & a\leqq G_{y_0}(x)\leqq 3a \\ 2a, & G_{y_0}(x)\geqq 3a \end{cases}$$

とおけば，$F_a(G_{y_0}(x))\in H_0^{1,2}(\Omega)$ で，$\partial\Omega$ で vanish する，(79)式の解である。

$$(7.9)\quad \mathscr{D}F_a(G_{y_0}(x))$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{2a}\displaystyle\sum_{i\cdot j=1}^{d} a_{ij}\,G_{x_i}G_{x_j}, & a\leq G_{y_0}(x)\leq 3a \\ 0, & \text{その他で} \end{cases}$$

従って，(7.9)式の右辺を $g(x)$ とおけば，$g(x)$ は有界可測函数であり，$F_a(G_{y_0}(\cdot))$ は $\mathscr{D}F_a(G_{y_0}(\cdot))=g$ の weak solutionと考えてよいから

$$(7.10)\quad F_a(G_{y_0}(x))=\int G(x,y)\,g(y)\,dy$$

と表現出来る。

<u>定理7.1</u>　Dを球とする。その時

$$(7.11)\quad H_{D^c}(x,\partial D)=1$$

<u>証明</u>　今，D ∌ y_0 なる点 y_0 を中心とするいかなる半径 r_n の球 Q にも，$H_{D^c}(x,Q)>0$ とする。次に，D と y_0 を含む十分広い compact set K をとり固定すれば，第I章定理4.1 より，定数 $C_1>0$ が存在して，r を y_0 と D とのきよりとすれば，

$$(7.12)\quad C_1\phi(r)>G(x,y_0),\quad \forall x\in\overline{D}$$

がなりたつ。従って，$a\geqq C_1\phi(r)$ なる a をえらぶと $F_a(G_{y_0}(x))$ は，(7.9)式より，D で

$$(7.13) \qquad \mathscr{D} F_a(G_{y_0}(x)) = 0$$

であるから，D で

$$(7.14) \qquad g(x) = 0$$

従つて，lemma 7.1 を用いる事によつて，

$$(7.15) \qquad E_x F_a(G_{y_0}(x_{\tau_D})) = F_a(G_{y_0}(x))$$

一方，

$$(7.16) \qquad u_a^{(k)}(x) = E_x^{(k)} F_a(G_{y_0}(x_{\tau_D}))$$

を考えると，lemma 7.2 より $\overline{D}$ 上，連続函数 u_a^* に一様収束し，u_a^* は，次の解である。

$$(7.17) \qquad \begin{cases} \mathscr{D} u_a^* = 0 & \text{in } D \\ u_a^*(x) = F_a(G_{y_0}(x)) , & x \in \partial D \end{cases}$$

従つて，解の一意性より，

$$(7.18) \qquad u_a^*(x) = F_a(G_{y_0}(x)) , \quad x \in D$$

(7.15) と (7..4) より

$$(7.19) \qquad E_x F_a(G_{y_0}(x_{\tau_D})) = \int_{\partial D} F_a(G_{y_0}(z))\,\mu(x, dz)$$

さて，$a' > 3a$ なる，a' をえらぶと

$$(7.20) \qquad F_{a'}(G_{y_0}(x)) - F_a(G_{y_0}(x))$$
$$= \begin{cases} 0 & G_{y_0}(x) \leq a \\ \frac{1}{4a}(G_{y_0}(x) - a)^2 , & a \leq G_{y_0}(x) \leq 3a \\ G_{y_0}(x) - 2a , & 3a \leq G_{y_0}(x) \leq a' \\ G_{y_0}(x) - \frac{1}{4a'}(G_{y_0}(x) - a')^2 - 2a , & a' \leq G_{y_0}(x) \leq 3a' \\ 2a' - 2a , & 3a' \leq G_{y_0}(x) \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

であるから, $G_{y_0}(x) \leq a$ の点を除いて

$$(7.21) \qquad F_{a'}(G_{y_0}(x)) > F_a(G_{y_0}(x))$$

(7.19)式は任意の $a > C_1\phi(r)$ についてなりたち,
明らかに任意の $a' > a > C_1\phi(r)$ について

$$(7.22) \qquad \int_{\partial D} F_a(G_{y_0}(z)\ \mu(x, dz) = \int_{\partial D} F_{a'}(G_{y_0}(z))\ \mu(x, dz)$$

であるから, harmonic measure $H_{D^c}(x, dy)$ が y_0 を中心とする任意の球 Q に mass を持つ事はできない。

さて,定理7.1を用いて, path の連続性を示そう。近藤氏のそれに従つて,概略をのべることにする。今 $r > 0$ を fix して,

$$(7.23) \qquad 6(\omega) = \begin{cases} \inf\{t\ ;\ |x_t(\omega) - x_0(\omega)| \geq r\} \\ \zeta(\omega) \qquad \text{if not exist} \end{cases}$$

とおくと, $6(\omega)$ は Markov time となり,

$$(7.24) \qquad P_x(6(\omega) = 6_{U_r(x)^c}(\omega)) = 1$$

となる。更に $6_1(\omega) = 6(\omega)$ とおいて, $6_n(\omega)$を帰納的に

$$(7.25) \qquad 6_n(\omega) = 6_{n-1}(\omega) + 6(\theta_{6_{n-1}}\omega)$$

と定義すれば

$$(7.26) \qquad 0 < 6_1(\omega) < 6_2(\omega) < \cdots\cdot < \zeta(\omega)$$
$$6_n(\omega) \uparrow \zeta(\omega)$$

となる。というのは,もし 6_n が $\zeta(\omega) > \ell$ なる ℓ に収束するとすれば, quasi-left continuity より, $x_{6_n(\omega)}(\omega)$ は Ω の内点 x_0 に収束する。従つて, x_0 の十分小さい近傍 U_{x_0} をとれば,ある n_0 があつて $n > n_0$ に対して $x_{6_n} \in U_{x_0}$ となる。これは矛盾。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

さて，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$(7.27) \qquad \tau_\varepsilon(\omega)=\begin{cases}\inf\{t\geqq 0,\ |x_{t-}(\omega)-x_t(\omega)|\geqq\varepsilon\} \\ \zeta(\omega)\end{cases}$$

とおけば，Markov time となり，更に

$$(7.28) \qquad P_x(\tau_\varepsilon=\zeta)=1$$

が言える。なぜなら（7.23）において，$r=\frac{\varepsilon}{2}$ としたものを6の定義とすれば，harmonic measure が境界の上にある事から，明らかに

$$(7.29) \qquad P_x(0\leq\tau_\varepsilon\leq 6)=0$$

しかるに

$$(7.30) \qquad \{\tau_\varepsilon(\omega)<\zeta(\omega)\}\leq\bigcup_n\{6_n(\omega)<\tau_\varepsilon(\omega)\leq 6_{n+1}(\omega)\}$$

であるから，強 Markov 性より，（7.28）が導かれる。 ε は任意であるので path の連続性が証明される。

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

文 献 表

〔1〕 E. B. Dynkin ; МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ (本)

〔2〕 ———————— ; Theory of Merkov processes. (本)

〔3〕 D. Girbary, J. Serrin ; On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations, Jowmal d'Analyse Math. 4. (1954~1955) .

〔4〕 R. M. Herve ; Recherches axiomatique sur la theorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst, Fourier, Grenoble 12.(1962)P415~p571.

〔5〕 K. Ito, H.P. Mckean; Diffusion processes and sample peths(本).

〔6〕 K. Ito; Tata の Lecture note.

〔7〕 伊藤 清; 確率過程Ⅰ，Ⅱ（現代応用数学講座）

〔8〕 G.A.Hunt; Markoff processes and potentials Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ Ill.J.Math.1(1957),2(1958)

〔9〕 近藤亮司; Markov 過程と Potential, Sem. on Prob vol11

〔10〕 Ilin, Kalashnikov, Oleinik; Second order linear equatjons of parabolic type （綜合報告）

〔11〕 Lamperti;; Wiener's test and markov chains ; Journal of Math. Analysis. and appl.6(1963)

〔12〕 Lion ; Theoreme de representation d'un noyau par l'integrale d'un. semi-group ; Seminaire Brelot-Choquet-Deny(theorie du Potentiel)(1962)

〔13〕 W.Littman, G. Stampacchia, H.F. Weinberger, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients ; Ann.Sc. Nom Sup. Pisa,(1963)

〔14〕 W.Littman, Generalized subharmonic functions ;

[15] E. Magenes, G. Stampacchia ; I. problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellicttico, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 12(1958)p247~358

[16] P.A. Meyer;; Brelot's axiomatic theony of the Dirichlet problem and Hunt's theory.

[17] C.B. Morrey ; Second order elliptic equations is several variables and Holder continuity, Math.
Zei Zeit 72 p146~164(1959)

[18] J. Moser ; A new proof of De. Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pura. Appl. Math vol 13. P457~468(1960)

[19] J. Moser ; On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. pure. Appl. Mata. vol XIV p577~591(1961)

[20] J. Nash ; Continuity of the solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. J. Math. 80 p931~954(1958)

[21] 国田寛・野本久夫：markov 過程に関するConpact 化の方法とその応用：Semi on Prob. Vol 14

[22] O.A. Oleinik; On the Dirichlet prohlem for equations of elliptic type(Russ). Math. Sb. N.S.24(66) (1949) p3~14

[23] W.Puschel ; Die erste Randwertaufgabe der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung fur beliebige Gebiete , Math. Zeit.34(1931), p535~553

[24] D. Ray ; Resolvent, transition functions, and strongly Markovian processes. Ann. of Math. 70 (1959)

[25] L. Schwartz ; 超函数の理論 (本)

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

[26] ソボレフ；； 物理数学の方程式 I，II（本）

[27] G. Stampacchia ; Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del second ordine ellittiche, Annale Scuola Normale Superiore di pisa. S III vol×II (1958)

[28] Tonaka. H ; Existence of diffusions with continuous coefficients, Mem. Fac. Sci, Kyushu Univ. vol 18, No.1, 1964

[29] G. Tautz ;Zour Theorie der ersten Randwertaufgabe, Math. Nachr. 2 (1949)

[30] N. Wiener ; The Dirichlet problem. J. Math. and phys. vol 3 (1924)

[31] ———— : Certain notions in potential theory, I. Math. and Phys. vol 3 (1924)

[32] M.P. Шур ; Harmonic and superharmonic function, connected with diffusion processes; Сиб matem.ж (1960)

[33] ———— : Граница Мартина для линейного эллиптического оператора второго порядка. Изв. АН СССР 27. (1963)

[34] 竹内順治．山田俊雄．渡辺信三 ； 安定程程 —Riesz ポランシヤル・ path の性質 Semi. on Prob. vol 13

[35] K. Ito. H.P. Mckean – potential and random walk. Ill Journal of math. 1960

Sem. on Probab.
Vol.21 1965年
P1-87

1965. 7. 発行 確率論セミナー