Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 25 − Ⅰ

分枝マルコフ過程の諸問題

櫃田倍之・福島正俊・池田信行・河野敬雄
長沢正雄・野本久夫・小倉幸雄・白尾恒吉
山田俊雄・渡辺藤逸

1966

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

はじめに

確率論セミナーの1966年4月セミナーは九州大学で行なわれ，主テーマとしては分枝過程が取り上げられた。その際関係者の間で，その折の話を中心に分枝過程の諸問題を *Seminar on Probability* の1冊としてまとめることを話し合った。

分枝過程については国際的にも多くの研究が早くから行なわれ，*Harris* の本が出て以来ますます盛んになるようである。*Moyal* や *Skorohod* の仕事以来，そのマルコフ過程としての定式化が進み，基礎の部分は一般論としても整備されて来ている。ところがその上にどのような展開が行なわれるかについては，現在多くの試みが行なわれているように思える。わが国でもそのような試みを何人かの研究者が個々に進めている。このような段階で，統一的な形式で一冊を書き上げることにはいくつかの難点があるようにわれわれには思えた。そこで関係者が今回のセミナーで発表したことに，これまでに確率論セミナーその他で発表したいくつかを併せて，個々のテーマ毎に独自にまとめて，全体としてはそれらを並列する方針をとった。本来ならば1つの考えと形式でおし通すべきかもしれないが，研究の段階によっては現在の形式も1つの有効な方法であると思う。記号，用語は出来る範囲内で *Seminar on Probability Vol. 23* に揃えたが，それはあくまで目標にしただけで，各章は独立したものになっている。従って，記号，用語等は必要な範囲内で各章毎に説明した。各章は他の章と独立にその1章だけ取り出して読めるようになっている。従って章の順序もそれほど意味があるわけではない。内容的には執筆者自身の研究が大部分であるが，全体として筋を読み易くするために，いくつかの点については既知のことを加え説明してある。

内容については各章のはじめに説明があるが，つぎに簡単な概観をしよう。1章，2章は分枝マルコフ過程が吸収されて行く割合の変化に関

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

する問題で，古くから研究されていることの発展である。このうち1章は渡辺(藤)が4月セミナーで発表したものとは違うが，最近考えていることの一部分をまとめたもので，*Sevastyanov* や *S. Watanabe* の研究に続くものである。

2章は4月セミナーで山田が発表した，渡辺(信)－山田が共同で得た結果の一部分である。生き残る割合の時間的変化の状態を具体的に調べる問題である。

3章は4月セミナーで発表したものではないが，河野が確率論セミナーの1964年4月セミナーで *Ito-McKean* の研究に関連して発表したものの続きである。当時は一般論の定式化がわが国では現在ほど定着していなかったので，形式はやゝ異なっていたものを，形式を揃え，さらに関連する結果を追加した。

4章も今年度の4月セミナーで発表したものでなく，1965年のP.S.G.サマー・セミナーで野本，池田が報告したものである。内容的には分枝過程論が対象としている応用の問題に関連しており，そこで用いられている考えは分枝過程の一般的定式化に一定の影響を持っていたと思われるので，こゝで取り上げた。対象としては *Wing* 等が研究しているいわゆる輸送問題とその拡散近似が取り扱われている。

5章の内容は，それ自身分枝過程を直接的に取り扱っていない部分もあるが，*Harris* の本の分枝過程の平均過程についての予想に関連した極限定理を一般的に定式化して考察したものである。この内容は福島・櫃田が今年の4月セミナーで報告した。また，4章とも密接に関連している。

6章は4月セミナーで小倉が発表したものにその後の研究結果をつけ加えたものである。分枝過程の研究で固有値問題の考えは，しばしば重要な役割を持っている。例えば，1章，2章でもその一端がうかがわれる。その傾向は今後もますます増大することは確かであると思われるが，それを正面から取り上げて系統的に研究しているものとしては *Karlin-McGregor* の *Galton-Watson process* についての一連の研究があ

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ　1966年
P1-104

るが，それ以外にはあまり多くはない。*Karlin-McGregor* は *multi-type* の *Galton-Watson process* の場合にも研究していると伝えられるが，その場合については少くとも印刷されたものとしてはその具体的結果は発表されていないようである。こゝでのべるのは *Galton-Watson process* についての *Karlin-McGregor* の既に発表されたものを参考にして，得られた結果の一部である。

7章はこれまでとやゝ異なった方向で，分枝過程の基礎や解析の諸問題の確率論的取り扱い等に新しい方法を持ち込むものである。内容の大部分は4月セミナーで白尾－長沢によって報告された。これによって，*Kolmogorov-Petrovsky-Piscounoff* によって取り扱われた *semi-linear parabolic equation* の確率過程論的取り扱い，また，ある種の *semi-linear equation* の解の爆発の確率論の立場からの取り扱いが可能になって来る。こゝでは種々の都合で要約のみにとどめた。

これらの他に，4月セミナーでは長沢が分枝マルコフ過程の一般論についての解説的な報告を行なったが，それらの多くは，既に *Seminar on Probability Vol.23* にまとめられているので，ここでは省略する。この他にも分枝過程に関しては多くの問題があるにもかかわらず，ここでふれることが出来なかったのは残念であるが，頁数の制限もあり，また，日本で研究されていることに限りがある実情からしてこのようなものになった。

全体の編集には池田が当ったが，その立場から特別のことは考えず，先にも述べた通り，各執筆者が個々に書いたものを並列することにし，修正は印刷の形式等ごく一部分に限った。

最後に，印刷の面で大変お世話になった九州の確率論セミナーの皆さんにわれわれ一同の心からの感謝ののべさせて貰いたい。

執　筆　者　一　同

（文責　池田信行，1966，8，21）

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.25- I　1966年
P1-104

分枝マルコフ過程の諸問題

第1章　分枝拡散過程の消滅確率について

近年，マルコフ過程論の立場から分枝過程の一般的取り扱い，すなわち，定義附け，一般的性質等が与えられ，また，他の分野，特に準線型微分方程式論との関連についても明らかにされてきた。これらについては，池田，長沢，渡辺(信)[1]に詳しく述べられている。ここでは分枝過程の一つのトピックスとして，*B. A. Sevastyanov* [3]，*S. Watanabe* [4] によって研究された粒子の消滅問題を再び考えてみる。

§1. 準　備

分枝マルコフ過程の定義，性質，存在定理等については[1]に既に詳しく述べられているので，ここでは，これから扱う分枝マルコフ過程のみを定める。

1°　Dをn次元ユークリッド空間R^nの滑らかな境界∂Dをもつ有界領域とし$\overline{D}=D\cup\partial D$とおき，$\overline{D}$上で次のような微分作用素を考える。

$a^{ij}(x)$，$b^i(x)$を$\overline{D}$上でなめらかな函数として

$$(1.1)\qquad Au(x)\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\sqrt{a(x)}\frac{\partial u}{\partial x^j}(x)\right)+\sum_{j=1}^{n}b^j(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}(x)$$

ここで　$\sqrt{a(x)}=det\,(a^{ij}(x))$

$(a_{ij}(x))$は *positive definite*

$\mu(x)$，$\gamma(x)$は∂D上非負な滑らかな函数，$\frac{\partial}{\partial n}$を$(a^{ij}(x))$から決まる内向き法線微分として

$$(1.2)\qquad Lu(x)\equiv\gamma(x)u(x)+\mu(x)\frac{\partial}{\partial n}u(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-I 1966年
P1-104

(6)

ここで γ, μ は

$$\mu(x) - \gamma(x) > 0 \quad on\ \partial D$$

かつ $\mu(x) \equiv 0$ 又は $\mu(x) > 0$ on ∂D

を満たすとする。

そのとき，

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = Au(t,x) & x \in D \quad t > 0 \\ Lu(t,x) = 0 & x \in \partial D \quad t > 0 \end{cases}$$

の基本解を $P(t,x,y)$ とおけば，$P(t,x,y)\,m(dy)$ を推移確率にもつ $\bar{D}$ 上の連続な path をもつマルコフ過程 $\tilde{x} = (\tilde{x}_t, \tilde{\zeta}, \tilde{P}_x)$ が存在する。これを $\bar{D}$ 上の (A,L)-diffusion と呼ぶ。

ここで $dm(x) = \sqrt{a(x)}\,dx^1 dx^2 \cdots dx^n$.

次に $k(x)$ を $\bar{D}$ 上非負有界連続函数とし，multiplicative functional

$$(1.4) \quad \alpha_t(\omega) = \exp\left\{ -\int_0^t k(x_u)\,du \right\}$$

と定め，(A,L)-diffusion $\tilde{x}_t$ の α_t-subprocess を $x^\circ = (x^\circ_t, \zeta^\circ, P^\circ_x)$ と書くことにする。

そのとき

$$(1.5) \quad A^\circ u(x) = Au(x) - k(x)u(x)$$

としたとき，方程式

$$(1.6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = A^\circ u(t,x) & x \in D, \quad t > 0 \\ Lu(t,x) = 0 & x \in \partial D, \quad t > 0 \end{cases}$$

の基本解を $P^\circ(t,x,y)$ とすると，やはり $P^\circ(t,x,y)\,m(dy)$ を推移確率にもつ $\bar{D}$ 上の連続なマルコフ過程（(A°, L)-diffusion）が存在する．そして上で定めた (A,L)-diffusion の α_t-subprocess x° と同値であることがわかる。よって，以後この二つを区別せず同じ記号 $x^\circ = (x^\circ_t, \zeta^\circ, P^\circ_x)$ と表現する。（詳しいことは K. Sato, T. Ueno [6] 参照）

2° $S = \bar{D}$ とし，$S^{(n)}$ を S の n 重直積空間 S^n を permutation relation で classify して得られる剰余空間。（$(x_1, \cdots, x_n) \in S^n$ から適当な per-

Sem. on Probab.
Vol.25-I 1966年
P1-104

mutationで $(x'_1,\cdots,x'_n)\in \mathcal{S}^n$ となったとき $(x_1,\cdots,x_n)\sim(x'_1,\cdots,x'_n)$ とおけばこれは同値関係となる。この同値関係から得られる剰余空間。)

$\mathcal{S}^0=\{\partial\}$: ∂は$\mathcal{S}=\bar{D}$ の extra point.

$S=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^n\cup\{\Delta\}$; Δは $\bigcup_{n}^{\infty}\mathcal{S}^n$ の一点コンパクト化の点。

次に

$C(\mathcal{S})=\{\ \mathcal{S}$上有界連続函数の全体の作る空間$\}$

(norm は sup-norm)

$C^*(\mathcal{S})=\{f\in C(\mathcal{S})\ ;\ \|f\|\leq 1\}$

とおく。$\mathcal{S}$上の函数 $f\in C^*(\mathcal{S})$ からS上の函数を次のような操作で定める。

$$(1.7)\quad \begin{cases} \bar{x}=\Delta\in S \text{ ならば} & \hat{f}(\bar{x})=0 \\ \bar{x}=\partial\in S \quad〃 & \hat{f}(\bar{x})=1 \\ \bar{x}\in\mathcal{S}^n(\subset S) \text{ のとき } \bar{x}\text{の代表元を}(x_1,\cdots,x_n)\in\mathcal{S}^{(n)}\text{と表わさ} \\ \text{れるならば} & \hat{f}(\bar{x})=f(x_1)\cdots f(x_n) \end{cases}$$

3° 今，2°で定めたSの上の右連続な強マルコフ過程を $X=(X_t,\zeta,P_{\bar{x}},\bar{x}\in S)$ とおく。

$Z_t=n \quad \text{if} \quad X_t\in\mathcal{S}^n$ (t時刻での個数)

$T=\inf\{t:\ Z_t\neq Z_0\}$ (first branching time)

($\inf\{\phi\}$ は ∞ とおく。)

$T_0=0$

$T_k=T_{k-1}+\theta_{T_{k-1}}T$ (k-th branching time)

$e_0=\inf\{t:\ Z_t=0\}$ (extinction time)

($\inf\{\phi\}=\infty$)

$X^0=(X_t^0,\zeta^0,P_x^0)$; Tで killing して得られるXの subprocess

即ち $\zeta^0=\zeta\wedge T=\min(\zeta,T)$

$X_t^0=X_t \quad \text{if} \quad t<\zeta^0$

$P_x^0=P_x$

とおいて得られる subprocess。

$X_{T-}(\omega)=\lim_{t\uparrow T}X_t(\omega)$

$\{P_n\}_{n=0,1,2\cdots}$; $P_n\geq 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$P_1=0\ ,\quad P_0\neq 1$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} nP_n < +\infty$$ なる数列。

以上の如く，夫々を定めると，そのとき，次のような性質をもった S 上の右連続な強マルコフ過程 $X=(X_t,\ \zeta,\ P_{\bar{x}},\ \bar{x}\in S)$ が存在する。

i) X の *semi-group* を T_t としたとき，

$$(1.8)\qquad T_t\hat{f}(\bar{x}) - \widehat{T_t\hat{f}|_S}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \bar{x}=\partial \\ \prod_{i=1}^{n} T_t\hat{f}(x_i) & \text{if } (x_1,\cdots,x_n)\in\bar{x}\in S^n \\ 0 & \text{if} \quad \bar{x}=\Delta \end{cases}$$

（ S 上への制限を $\cdot|_S$ とかくことにする。）

ii) $X^\circ|_S$ （X° の S への制限）と (A°, L)-*diffusion* x_t° は同値。

iii) 任意の $x\in\bar{S}$ に対して

$$(1.9)\qquad P_x(X_T\in S^n / X_{T-}=y) = \begin{cases} P_n & \text{if} \quad y\in D \\ 0 & \text{if} \quad y\in\partial D, \quad n\neq 0 \\ 1 & \text{if} \quad y\in\partial D, \quad n=0 \end{cases}$$

S 上の，この *process* $X=(X_t,\ \zeta,\ P_x)$ が，これから考えようとしているもので（境界で分裂するときは消滅する）分枝拡散過程と呼ぶことにする。

4°. 3°での（境界で分裂するときは消滅する）分枝拡散過程を直観的に言えば次のようになる。

$x\in S$ から出発した粒子 $X_t(\omega)$ の *path* は，分裂するまでは (A°, L)-*diffusion* $x^\circ=(x_t^\circ,\ \zeta^\circ,\ P_x^\circ)$ に従い，分裂する場所 (X_{T-}) が D 内ならば，P_n の確率で n 個に分裂，境界 ∂D 上ならば消滅する（ 0 個に別れる すなわち *path* は点 $\{\partial\}$ へ行く），分裂した子粒子は同じ場所から互いに独立に行動する。子粒子の各々はまた，(A°, L)-*diffusion* の法則に従う。ただし，消滅した場合は永久に点 $\{\partial\}$ にとどまる。

5°. 注意　　3°(ii) での $X^\circ|_S$ と同値となる (A°, L)-*diffusion* が吸収壁をもつ *diffusion* すなわち境界条件が $Lu(x)=u(x)=0$ $(x\in\partial D)$ であるときは，右連続となるような S 上のマルコフ過程（分枝マルコフ過程）は存在しない。そのため x_t° が吸収壁をもつ *diffusion* であるときは境界点は *trap point* であるように *process* を修正すれば 3°, (ii) を満たす右

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

連続なマルコフ過程（分枝マルコフ過程）の存在性が示され得る。よって吸収壁の場合は，上のようにして得られた *process* を考えることにする。このとき，*extinction time* を

$$e_0(\omega) = \inf\{t;\ X_t(\omega) \in \{\partial\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\overbrace{\partial D \times \cdots \times \partial D}^{i コ}\}$$

$$(\inf \phi = \infty)$$

と置き変えて考える。（[1]，第二章参照）

こうした修正は以下の議論には全く影響を与えない。

§2. 消 滅 問 題

1°. 問　題

「どのような場合に分枝過程は有限時間に消滅するか」

これを，§1 で定めた分枝拡散過程に対してもう少し弛めた形で考えてみる。すなわち，

「消滅確率 $P_x(Z_t \longrightarrow 0) = P_x(e_0 < +\infty)$ $(x \in S)$ はどのようなとき恒等的に 1 か」

B. A. Sevastijanov [3]，*S. Watanabe* [4] と同様に恒等的に 1 となる条件を求める。

2° 定　義

全ての $x \in \overline{D}$ に対して消滅確率 $P_x(e_0 < +\infty) \equiv 1$ のとき，分枝拡散過程 X_t は *self-degenerating*。そうでないとき，*non-self-degenerating* であると呼ぶ。

定理 2.1　（[4]，定理 1 参照）

$u_1(x) = P_x(e_0 < +\infty)$ $(x \in \overline{D})$ は次の方程式の最小解である。

$$(2.1) \qquad \begin{cases} v(x) = h(x) + \int_D F(v(y))\, K(x,y)\, k(dy) & (a.e.) \\ 0 \leq v \leq 1 & (a.e.) \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I　1966年
P1-104

ここで　$F(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n \xi^n \qquad (|\xi|\leq 1)$

(2.2)
$$h(x)=P_x(X_{T-}\in\partial D)=P_x^\circ(x_{\zeta^\circ-}^\circ\in\partial D)$$
$$=1-\int_0^\infty\int_D p^\circ(t,x,y)\,k(dy)\,dt\ .$$

$$K(x,y)=\int_0^\infty P^\circ(t,x,y)\,dt$$

$$k(dy)=k(y)\,m(dy)$$

(a.e. すなわち almost every where は $k(dx)$ measure について almost every where の意味。)

証明

$x\in D$，$dy\subset D$　に対して

$$P_x(X_{T-}\in dy,\ T\in dt)=P_x^\circ(x_{\zeta^\circ-}^\circ\in dy,\ \zeta^\circ\in dt)$$
$$=P^\circ(t,x,y)\,k(dy)\,dt$$

であることに注意する。

$$u(t,x)=P_x(e_0<t)$$
$$=P_x(T<t,\ e_0<t,\ X_{T-}\in\partial D)+P_x(T<t,\ e_0<t,\ X_{T-}\in D)$$
$$=P_x(T<t,\ X_{T-}\in\partial D)+E_x[P_{X_T}(e_0<t-T):\ T<t,\ X_{T-}\in D]$$
$$=P_x(T<t,\ X_{T-}\in\partial D)+\int_0^t\int_D F(u(t-s,y))\,P_x(T\in ds,\ X_{T-}\in dy)$$

ここで　$t\to\infty$　とすれば，$u_1(x)$　は(2.1)の解であることがわかる。
次に

$u^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{k} P_x(T_i=e_0\ ,\ T_i<+\infty)$　とおけば，明らかに

$$u^{(0)}(x)=P_x(T_0=e_0)\equiv 0$$
$$u^{(k)}(x)\uparrow u_1(x) \qquad (k\longrightarrow\infty)$$

更に

$$u^{(k)}(x)=P_x[\sum_{i=0}^{k}\{T_i=e_0\};\ T_i<+\infty\}]$$
$$=P_x[\bigcup_{i=0}^{k}\{T_i=e_0,\ T_i<+\infty\};\ X_{T-}\in D]$$
$$+P_x[\bigcup_{i=0}^{k}\{T_i=e_0,\ T_i<+\infty\};\ X_{T-}\in\partial D]$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

ところが，もし $X_{T-}\in\partial D$ ならば，$T_1=e_0$，$T_i=\infty$ $(i\geqq 2)$ であるから

$$\text{第二項} = P_x(X_{T-}\in\partial D,\ T<\infty) = h(x)$$

第一項に対しては強マルコフ性により

$$\text{第一項} = E_x[P_{X_T}\{\bigcup_{i=0}^{k-1}(T_i(\omega)=e_0(\omega);\ T_i<+\infty)\};\ X_{T-}\in D]$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} E_x[[P_{X_{T-}}(\bigcup_{i=1}^{k-1}\{T_i=e_0,\ T_i<+\infty\})]^n;\ X_{T-}\in D,\ X_T\in\delta^n]$$

$$= \int_D F(u^{(k-1)}(y))\ P_x(X_{T-}\in dy)$$

$$= \int_D F(u^{(k-1)}(y))\ K(x,y)\,k(dy)$$

よって

$$u^{(k)}(x) \leqq h(x) + \int_D F(u^{(k-1)}(y))K(x,y)\,k(dy)$$

いま，$v(x)$ を方程式 (2.1) の他の解とおけば，

$$u^{(0)}(x) \equiv 0 \leqq v(x) \qquad (a.e.)$$

上で得た不等式より帰納的に

$$u^{(k)}(x) \leqq v(x) \qquad (a.e.)$$

故に

$$u_1(x) = \lim_{k\to\infty} u^{(k)}(x) \leqq v(x) \qquad (a.e.)$$

すなわち，$u_1(x)$ は最小解である。

q.e.d.

注意

$$h(x) + \int_D K(x,y)\,k(dy) = 1 \quad \text{より}$$

1 は方程式 (2.1) の解である。

Corollary self-degenerating であるための必要十分条件は方程式 (2.1) の解が一意的に定まることである。

証明

定理及び注意よりただちにわかる。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

§3. Self-degeneracy の判定

1°

Proposition 3.1.

$F'(1)=\frac{\partial}{\partial\xi}F(\xi)\Big|_{\xi=1}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n<1$ ならば self-degenerating.

証明

$u(x)$ を方程式 (2.1) の解とする。

$$1-u(x)=\int_D K(x,y)\,[F(1)-F(u(y))]\,k(dy)$$

$$\leq F'(1)\int_D K(x,y)\,[1-u(y)]\,k(dy)$$

$\delta=\underset{D\ni x}{\mathrm{ess.\,sup}}\,|1-u(x)|$ とおけば

$$1-u(x)\leq F'(1)\,\delta\int_D K(x,y)\,k(dy)$$

$$\leq F'(1)\,\delta$$

$\therefore\quad \delta=\mathrm{ess\text{-}sup}\,|1-u(x)|\leq F'(1)\,\delta$

仮定 $F'(1)<1$ より $\delta=0$ i.e. $u\equiv 1$ (a.e.)

よって，方程式 (2.1) の解は一意的である。

Lemma 1 ([3], Lemma 参照) u, v を次のような函数とする。

$0\leq u(x)\leq v(x)\leq 1$

$u\not\equiv v$

D のある点 x_0 で

$$(3.1)\qquad \begin{cases} u(x_0)\geq\int_D K(x_0,y)F(u(y))\,k(dy)+h(x_0) \\ \\ v(x_0)\geq\int_D K(x_0,y)F(v(y))\,k(dy)+h(x_0)\end{cases}$$

そのとき，

(3.2) 全ての $w_t(x)=u(x)+t[v(x\cdot)-u(x)]$ $(1>t>0)$

に対して

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

(3.3) $\omega_t(x_0) > \int_D K(x_0, y) F(\omega_t(y)) k(dy) + h(x_0)$

証明

$$\varphi(t) = \int_D K(x_0, y) F(\omega_t(y)) k(dy) + h(x_0) - \omega_t(x_0)$$

とおけば　$\varphi(0) \leqq 0$　,　$\varphi(1) \leqq 0$

かつ　$\varphi(t)$ が $0<t<1$ で strictly convex となることより

$\varphi(t) < 0$　$(0<t<1)$

すなわち，不等式(3.3)である。

Lemma 2.（参照[3]，定理3）　Non-self-degenerating であるための必要かつ十分条件は次のような函数 $\alpha(x)$ が存在することである。

$$\alpha(x) \fallingdotseq 0 \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 1$$

(3.4) $1-\alpha(x) > \int_D K(x,y) F(1-\alpha(y)) k(dy) + h(x)$　(a.e.)

証明　必要性

lemma 1 での

u として　定理2.1での $u_1(x)\ (= P_x(e_0 < +\infty))$

v として　1

を取れば，non-self-degenerating であることから $u_1 \fallingdotseq 1$，$0 \leqq u_1 \leqq 1$

よって lemma 1 より

$$\alpha(x) = 1 - \omega_t(x) = (1-t)(1-u_1(x)) \qquad (0<t<1)$$

とおけば，求める α になることが容易にわかる。

十分性

$u^{(0)}(x), \cdots, u^{(k)}(x), \cdots$ を定理2.1証明中での函数とすれば

$$u^{(0)}(x) \equiv 0 \leqq 1-\alpha(x) \qquad (a.e.)$$

更に

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x) &\leqq h(x) + \int_D F(u^{(k-1)}(y)) K(x,y)\, k(dy) \\ &\leqq h(x) + \int_D F(1-\alpha(y)) K(x,y)\, k(dy) \\ &\leqq 1-\alpha(x) \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

故に $u_1(x) = \lim_{k} u^{(k)}(x) \leqq 1 - \alpha(x) \neq 1$
すなわち non-self-degenerating である。

q. e. d.

Lemma 3. 任意の非負有界函数 $\alpha(x)$ に対して

(3.5) $$\alpha(x) < F'(1) \int_D K(x,y)\alpha(y)\, k(dy) \qquad (a.e.)$$

が成り立たないならば self-degenerating

証明

lemma 2 より non-self-degenerating ならば
$\alpha(x)$; $\alpha(x) \neq 0 \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1$

$$\alpha(x) < \int_D [F(1) - F(1-\alpha(y))]\, K(x,y)\, k(dy) \qquad (a.e.)$$

なる α が存在する。（§2, 注意「$1 = h(x) + \int_D K(x,y)\, k(dy)$」を参照）。
ところが $1 - F(1-\xi) \leqq F'(1)\xi \quad (0 \leqq \xi \leqq 1)$
であるから

$$\alpha(x) < \int_D [F(1) - F(1-\alpha(y))]\, K(x,y)\, k(dy)$$

$$\leqq F'(1) \int_D K(x,y)\alpha(y)\, k(dy) \qquad (a.e.)$$

よって，対偶をとれば証明は終る。

q. e. d.

2°

ここで仮定をもうける。

(3.6) 「$K(x,y)$ は対称」

(3.7) 「$\int_D \int_D K(x,y)\, k(dx)\, k(dy) < +\infty$」

この仮定の下で Hilbert 空間の一般論から導かれる結果を必要な形に直して，それを proposition として述べる。

注意

1、微分作用素 A が自己共役ならば仮定(3.6)は成立。一次元ならば常に成立。

2、$\min_{x \in \bar{D}} k(x) > 0$ ならば(3.7)が成立。

Sem. on Probab.
Vol.25- I　1966年
P1-104

(3.8)　　$Kf(x)=\int_D K(x,y)f(y)k(dy)$

とおけば，Kは Hilbert space

(3.9)　　$L^2=\{f:\|f\|_2=\int_D|f(y)|^2k(dy)<+\infty\}$

（内積は　$(f,g)=\int_D f(y)g(y)k(dy)$）

から，自分自身 L^2 の中への線型対称，完全連続な正作用素となる。従って

Proposition 3.2

(3.10)　　$\|K\|=\sup_{\|f\|_2=1}\|Kf\|_2$

とおけば，

(3.11)　　$\|K\|=\sup_{\|f\|_2=1}|(Kf,f)|$

証明　　[5] 定理 20.1　を参照。

注意

この proposition はKが線型対称でありさえすれば成立。

Proposition 3.3　　$\|K\|\varphi=K\varphi$ となる $\varphi\in L_2$ が存在する。すなわち $\|K\|$ はKの固有値になる。

証明　　[5]，定理 20.2　を参照。

注意

Kの対称かつ完全連続性より導かれる。

Proposition 3.4.　　次のような正数（固有値）及び函数（固有函数）φ が存在する。

i)　　|他の固有値| $\leq\rho$

ii)　　φ は有界非負　（$\rho\varphi=K\varphi$）

注意

$\lambda\varphi=K\varphi$ となる λ，$\varphi\in L^2$ を夫々Kの固有値及び λ に対するKの固有函数と呼ぶ。

証明　　次の Frobenius の定理（参照 [2]）よりわかる。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

Frobenius の定理

「Tを Banach 空間EからEへの線型，完全連続な作用素Fを $\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$: α_i 実数 $x_i \in F\}$の closure がEと一致する convex set とする。そのとき

もし， $TF \subset F$

かつ 0でないTの固有値が存在するならば，次のような固有値ρ及び固有函数 $x \in F$ が存在する。

i) $\rho \geqq |$他の固有値$|$

ii) $x \in F \quad x \neq 0 \quad \rho x = Tx$ 」

この定理で operator T としてK，Banach space E として L_2，convex set Fとして $\{f \in L^2 ;\ f$は非負有界函数$\}$ とおけば，Kが正作用素であること，Prop. 3.3 と合わせれば Prop. 3.4 の結論が導かれる。

注意

この ρは実は $\|K\|$ に等しい。（参照 [2] ）

3°

定理 3.1 ρを Prop. 3.4 での固有値とする。

そのとき $\dfrac{1}{\rho} \geqq F'(1) \left(= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n\right)$ ならば self-degenerating

証明 $\alpha(x)$ を任意の（a. e.）非負有界函数とする。

$$\alpha_0(x) = \frac{\alpha(x)}{\|\alpha\|_2} \quad \text{とおけば}$$

Prop. 3.2 より $\|\alpha_0\|_2 = 1$ に注意すれば

$$(K\alpha_0, \alpha_0) = \int_D\int_D K(x,y)\alpha_0(x)\alpha_0(y)k(dx)k(dy) \leqq \|K\| = \rho$$

故に

$$\frac{1}{\rho}\int_D\int_D K(x,y)\alpha(x)\alpha(y)k(dx)k(dy) \leqq \int_D \alpha(x)^2 k(dx)$$

書きかえれば

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$\int_D \alpha(x)\left[\alpha(x) - \frac{1}{\rho}\int_D K(x,y)\alpha(y)k(dy)\right] k(dx) \geqq 0$$

従って

$$k\left[\left\{x\,;\ \alpha(x) \geqq \frac{1}{\rho}\int_D K(x,y)\alpha(y)k(dy)\right\}\right] > 0$$

更に，仮定 $\frac{1}{\rho} \geqq F'(1)$ より

$$k\left[\left\{x:\ \alpha(x) \geqq F'(1)\int_D K(x,y)\alpha(y)\,k(dy)\right\}\right] > 0$$

よって *Lemma* により *self-degenerating* となる。

q.e.d.

定理 3.2. ρ, φ を *Prop.* 3.4 での固有値及び固有函数とする。
そのとき，

もし $\frac{1}{\rho} < F'(1)$ ならば *non-self-degenerating*.

証明

ε, η', θ を次のように選ぶ。

$$1 > \varepsilon > 0 \quad ; \quad \frac{1}{\rho} < F'(1-\varepsilon) < F'(1)$$

$$\eta' \quad ; \quad \eta < \eta' < F(1-\varepsilon)$$

$$\theta > 0 \quad ; \quad \theta - \operatorname*{Ess.sup}_{x\in\bar{D}} |\varphi(x)| \cdot \leqq \varepsilon$$

そのとき，

$$\begin{aligned} 1 - F(1-\theta\varphi(x)) &\geqq F'(1-\varepsilon)\,\theta\varphi(x) \\ &> \eta'\,\theta\varphi(x) \qquad (a.e.) \end{aligned}$$

故に $\quad F(1-\theta\varphi(x)) < 1 - \eta'\theta\varphi(x) \qquad (a.e.)$

一方，φ は ρ に対応する固有函数であったから

$$\varphi(x) = \frac{1}{\rho}\int_D K(x,y)\,\varphi(y)\,k(dy)$$

故に $\quad \varphi(x) - \eta'\int_D K(x,y)\,\varphi(y)\,k(dy) = -\left(\frac{\eta'}{\eta} - 1\right)\varphi(x)$

このことより

$$1 - \theta\varphi(x) = \int_D K(x,y)\left[1 - \eta'\theta\varphi(y)\right] k(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ　1966年
P1-104

$$+h(x)+\left(\frac{\eta'}{\eta}-1\right)\theta\varphi(x)$$

$$>\int_D K(x,y)\,F(1-\theta\varphi(y))\,k(dy)+h(x)$$

以上より Lemma 2 での $\alpha(x)$ として $\theta\varphi(x)$ をとれば，non-self-degenerating．

q.e.d.

§4. 例

1° （B.A.Sevastyanov [3]，S.Watanabe [4] 参照）

(4.1)　$$A^0u(x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x)-cu(x)=(\Delta-c)\,u(x)\qquad (x\in D)$$

（c は正の定数）

(4.2)　$$Lu(x)=u(x)\qquad (x\in\partial D)$$

としたとき，$x^0=(x_t^0,\ \zeta^0,\ P_x^0)$ として (A^0, L)-diffusion，すなわち，吸収壁をもつ Brown 運動を取れば，そのとき，Prop. 4 での固有値，固有函数は次のものであることが容易にわかる．

固有値問題

$$\begin{cases}(\Delta+\lambda)\,\varphi(x)=0 & x\in D\\ \lim\limits_{x\to\partial D}\varphi(x)=0\end{cases}$$

の固有値を $(0<)\ \lambda_1<\lambda_2\leqq\lambda_3\ \cdots\cdots$
各々に対する固有函数を $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ とすれば，

(4.3)　$$\rho=\frac{c}{\frac{1}{2}\lambda_1+c}$$

$$\varphi=\varphi_1\ (>0)$$

よって，定理 3.1，3.2 の結果より

(4.4)　$$F'(1)\leqq\frac{\frac{1}{2}\lambda_1+c}{c}\ \text{ならば}\quad P.\,(e_0<+\infty)=1$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$F'(1) > \frac{\frac{1}{2}\lambda_1 + c}{c} \quad ならば \quad P.(e_0 < +\infty) < 1 .$$

2°

(4.5) $\quad A^\circ u(x) = (\Delta - c)\, u(x) \qquad x \in D$

(4.6) $\quad L\, u(x) = \dfrac{\partial}{\partial n} u(x) \qquad x \in \partial D$

で定まる *diffusion*. すなわち，反射壁をもつ Brown 運動を $x^\circ = (x_t^\circ, \zeta^\circ, P_x^\circ)$ とおけば，1° と同様に，

$$\rho = 1$$
$$\varphi \equiv 1$$

であることがわかる。よって

$$F'(1) \leq 1 \quad ならば \quad P.(e_0 < +\infty) = 1$$
$$F'(1) > 1 \quad ならば \quad P.(e_0 < +\infty) < 1 .$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

参　考　文　献

[1] 池田，長沢，渡辺(信)；"分枝マルコフ過程の基礎"
Sem. on Prob. Vol. 23, 1966.

[2] M.G. Krein and M.A. Rutman; "Linear operator leaving invariant a cone."
T.A.M.S. Vol. 10, 1962.

[3] B.A. Sevastyanov; "Branching stochastic processes for particles diffusing in a bounded domain with an absorbing boundary."
Th. of Prob. & its App. Vol. 3, No. 2, 1958.

[4] S. Watanabe; "On the Branching processes for Brownian particles with an absorbing boundary."
J. Math. Kyoto Univ. Vol. 4, No. 2, 1965.

[5] 吉田耕作；"積分方程式論"
岩波書店，1961。

[6] K. Sato and T. Ueno; "Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary."
J. of Math. Kyoto Univ. Vol. 4, No. 3, 1965.

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

第２章 吸収壁をもつ分枝Brown運動の生き残り確率の漸近的性質

§1. 準　備

DをN次元ユークリッド空間R^Nの十分なめらかな境界∂Dをもつ有界領域とする。$\bar{D}$をDの一点compact化，$\bar{D}=D\cup\{\delta\}$とし，$\mathscr{S}=\bar{D}$とする。

x_tをDに於ける，∂D（Dの境界）を吸収壁としてもつBrownian motionとし，$\dot{x}_t$を次のように定める。

$$\dot{x}_t=\begin{cases} x_t : & t<\sigma_{\partial D} \\ \delta & t\geq \sigma_{\partial D} \end{cases} \quad ここに\ \sigma_{\partial D}=inf\{s: x_{s-}\in\partial D\}$$

Non branching partを$\dot{x}_t$のe^{-ct} subprocessとし，branching systemを，$\pi(x,d\bar{y})=\sum P_n\,\delta_{\underbrace{(x\cdots x)}_{n個}}(d\bar{y})$　$x\in\bar{D}$　$\bar{y}\in S$

$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$　但し，$P_0=P_1=0$

とするS上のMarkov processを$X_t=(x_t^{(1)},\cdots,x_t^{(\xi_t)})$（ここに$\xi_t$は$X_t$の個数）と書く。$X_t$を吸収壁をもつbranching Brownian motionと呼ぶ。

この章で我々は，X_tの個数ξ_tそのものでなく，X_tが$\{\delta\}$及びそのproduct $\{\delta\times\delta\}$，$\{\delta\times\delta\times\delta\}$‥　以外のところに存在する"個数"に興味をもつので，X_tの"個数"ξ_t'をあらためて次のように定義する。

$$\xi_t'=\sum_{i=1}^{\xi_t}\chi_D(x_t^{(i)})$$

次にX_tの消滅時刻（extinction time）e_∂を，

$$e_\partial=\begin{cases} inf\{t\,;\ \xi_t'=0\} \\ +\infty :\quad もし\ inf\{\phi\} \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

で定義する。

さて，$P_x(e_\partial \geq t)$；$x \in D$ は，直観的には x から出発した X_t が時刻 t に於て"生き残っている"確率を与えているが，この章での興味の中心は，この $P_x(e_\partial \geq t)$ が $t \to \infty$ のとき，どのような振舞いをするか，その漸近的性質を調べることにある。

この目的のために，次に $P_x(e_\partial \geq t)$ のみたすべき方程式，及び後の証明に於て使用される平均個数のみたすべき方程式，及びその性質をあげておこう。

$u(t,x) = P_x(e_\partial \geq t) \quad x \in D,\ t > 0$ は次の semi-linear parabolic equation をみたす。 ［1参照］

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,x) - cf(1-u(t\cdot x)) \\ u(0+,\ x) = 1 \\ u(t,x)\Big|_{x \to \partial D} = 0 \end{cases}
$$

ただし，c は e^{-ct} subprocess をつくったときの killing constant c，である。又，$f(x) = F(x) - x = \sum P_n x^n - x$.

平均個数 $M(t,x) = E_x[\xi'_t]$ のみたすべき方程式は

$$
(1.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial M(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta M(t,x) + cf'(1)M(t\cdot x) \\ M(0+,\ x) = 1 \\ M(t,x)\Big|_{x \to \partial D} = 0 \end{cases}
$$

である。

(1.2) の基本解 $m(t,x,y)$ は次のように表現されることが知られている。

$$
(1.3) \qquad m(t,x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{(cf'(1) - \frac{1}{2}\lambda_i)t}\varphi_i(x)\varphi_i(y)
$$

従って

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$(1.4) \qquad M(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty} e^{(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)t}\varphi_i(x)\int_D \varphi_i(x)\,dx \ .$$

ここに λ_i, φ_i は

$$\begin{cases} (\Delta+\lambda)\varphi(x)=0 & x\in D \\ \varphi(x)\Big|_{x\to\partial D}=0 \end{cases}$$

という固有値問題の固有値，及び固有函数であり，

$$\begin{cases} 0<\lambda_1<\lambda_2\leq\lambda_3\leq\cdots \\ \varphi_1(x)>0 \end{cases}$$

なることはよく知られている。

さて [1] で知られているように

$cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1\leq 0$ のとき $\quad P_x(e_\partial<+\infty)=1$

$cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1>0$ のとき $\quad P_x(e_\partial<+\infty)<1$

なのであるが，前者の場合の $P_x(e_\partial\geq t)$ の $t\to\infty$ のときの様子を調べるのが以下の課題である。なお，以下 $f''(1)<+\infty$ を仮定する。

§2. $P_x(e_\partial\geq t)$ の漸近的性質；$cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1<0$ の場合

この場合，平均個数の表現 (2.4) が利用できる。まずユークリッド空間 R^N の次元 N に無関係に次の定理が成りたつ。

Theorem 1. t 及び x に無関係な $c_1>0$; $c_2>0$ が存在して，十分大なる t に対して

$$(2.5) \qquad c_1\exp[(cf'(1)-\tfrac{1}{2}\lambda_1)t]\varphi_1(x)<P_x(e_\partial\geq t)<c_2\exp[(cf'(1)-\tfrac{1}{2}\lambda_1)t]\varphi_1(x)$$

がなりたつ。

この定理の証明のためいくつかの Lemma を用意しよう。最初の Lemma は，上から $P_x(e_\partial\geq t)$ を評価する方に関係している。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

Lemma 1.

ある $\gamma>0$ と $T>0$ が存在して

$$(2.1)\qquad P_x(e_\partial \geq t) < \gamma \exp[(cf'(1)-\tfrac{1}{2}\lambda_1)t] \; ; \quad T \leq t$$

がなりたつ。

（証明） (2.4) 式より

$$P_x(e_\partial \geq t) \leq E_x(\xi_t') = \sum_{i=1}^{\infty} \exp[(cf'(1)-\tfrac{1}{2}\lambda_i)t]\varphi_i(X)\int_D \varphi_i(y)dy$$

$$= \exp[(cf'(1)-\tfrac{1}{2}\lambda_1)t]\varphi_1(X)\int_D \varphi_1(y)dy$$

$$+\sum_{i=2}^{\infty} \exp[(cf'(1)-\tfrac{1}{2}\lambda_i)t]\varphi_i(x)\int_D \varphi_i(y)dy \qquad (*)$$

ここで $\gamma' = \sup_{x\in D} \varphi_1(x)\int_D \varphi_1(y)dy$ とおいて

$$(*) \leq \gamma' \exp[(cf'(1)-\tfrac{1}{2}\lambda_1)t]\Big(1+\frac{1}{\gamma'}\sum_{i=2}^{\infty}\exp[\tfrac{1}{2}(\lambda_i-\lambda_1)t]|\varphi_i(x)|\Big|\int_D \varphi_i(y)dy\Big|\Big)$$

さて，括弧内の $\sum_{i=2}^{\infty}$ の項は，x に関して絶対且つ一様収束するから $\gamma>0$ と $T>0$ が（x に無関係に）存在して

$$P_x(e_\partial \geq t) < \gamma \exp[(cf'(1)-\tfrac{1}{2}\lambda_1)t] \; ; \quad T\leq t$$

がなりたつ。［Lemma 1. の証明終り］

ここで Theorem 1 の $P_x(e_\partial \geq t)$ を上から押える方を証明しよう。
Lemma 1. の証明途中の (*) を次のような評価をする。

$$P_x(e_\partial \geq t) \leq \exp[(cf'(1)-\tfrac{1}{2}\lambda_1)t]\varphi_1(x)\int_D \varphi_1(y)dy$$

$$\times\Big(1+\frac{1}{\varphi_1(X)\int_D \varphi_1(y)dy}\sum_{i=2}^{\infty}\exp[\tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_i)t]|\varphi_i(X)|\Big|\int_D \varphi_i(y)dy\Big|\Big)$$

この評価により

$$c_2 = \int_D \varphi_1(y)dy + \varepsilon \quad （\varepsilon \text{ は一つの正数}） \quad \text{とおくと}$$

x に関係する可能性があるが，$T_x>0$ が定まり

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$P_x(e_\partial \geq t) < C_2 \exp\left[\left(cf'(1) - \tfrac{1}{2}\lambda_1\right)t\right]\varphi_1(x) : \qquad T_x \leq t$$

がなりたつ。［Theorem 1：の上からの評価の部分証明終り］

Theorem 1の下から評価する方を示すために parabolic equation に関する弱い意味の最大値の原理をあげておく。

Lemma 2. ［2 参照］

$g(t,x)$ を有界函数（$t\cdot x$ について）とし，$f(t\cdot x) \geq 0$ とする。

$u(t\cdot x)$ が

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t\cdot x)}{\partial t} = \Delta u(t\cdot x) + g(t\cdot x)u(t\cdot x) + f(t\cdot x) \\ u(0+, x) = 0 \\ u(t\cdot x)\Big|_{x\to\partial D} = 0 \end{cases}$$

をみたせば $u(t\cdot x) \geq 0 : t \in (0\ \infty)$, $x \in D$ である。

さて，Theorem 1 の下からの評価を証明しよう。

$P_x(e_\partial \geq t) = u(t\cdot x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\varphi_i(x)$ と展開しておく。

(1.1) より

$$\frac{\partial u(t\ x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u(t\cdot x) + cf'(1)u(t\cdot x) - \frac{c}{2}f''(\xi(t\cdot x))u^2(t\cdot x)$$

$t \geq T$ とすると，Lemma 1と $f''(x)$ の単調増加性により，

$$(2.3)\qquad \frac{\partial u(t\cdot x)}{\partial t} \geq \frac{1}{2}\Delta u(t\cdot x) + cf'(1)u(t\cdot x) - \frac{c}{2}f''(1)\gamma\exp\left[\left(cf'(1) - \tfrac{1}{2}\lambda_1\right)t\right]u(t\cdot x)$$

がなりたつ。ここで $T \leq t$ で

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega(t\cdot x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta\omega(t\cdot x) + cf'(1)\omega(t\cdot x) - \dfrac{c}{2}f''(1)\gamma\exp\left[\left(cf'(1) - \tfrac{1}{2}\lambda_1\right)t\right]\omega(t\cdot x) \\ \omega(T, x) = u(T\cdot x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(T)\varphi_i(x) \\ \omega(t\cdot x)\Big|_{x\to\partial D} = 0 \end{cases}$$

を考える。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

(2.3), (2.4) により, $u(t\cdot x)-\omega(t\cdot x)$ について (2.5) がなりたつ。

$$(2.5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(u(t\cdot x)-\omega(t\cdot x))}{\partial t} \geq \dfrac{1}{2}\Delta(u(t\cdot x)-\omega(t\cdot x))+(cf'(1) \\ \qquad -\dfrac{c}{2}f''(1)\gamma\, exp[(cf'(1)-\dfrac{1}{2}\lambda_1)t])(u(t\cdot x)-\omega(t\cdot x)) \\ (u(T\cdot x)-\omega(T\cdot x))=0 \\ (u(t\cdot x)-\omega(t\cdot x))\Big|_{x\to\partial D}=0 \end{cases}$$

Lemma 2 により $T\leq t$ で $\omega(t\cdot x)\leq u(t\cdot x)=P_x(e_\partial\geq t)$ がなりたつ。

(2.4) 式を利用して $\omega(t\cdot x)$ を評価しよう。

$\omega(t\cdot x)=\sum g_i(t)\varphi_i(x)$ と展開して (2.4) を用いると,

$i=1$ のとき

$$\begin{cases} \dfrac{dg_1(t)}{dt}=(cf'(1)-\dfrac{1}{2}\lambda_1)g_1(t)-\dfrac{c}{2}f''(1)\gamma\, exp[(cf'(1)-\dfrac{1}{2}\lambda_1)t]g_1(t) \\ g_1(T)=f_1(T) \end{cases}$$

$\therefore$ $cf'(1)-\dfrac{1}{2}\lambda_1\equiv\alpha$ とおいて $(\alpha<0)$

$$\begin{aligned} g_1(t) &= c_1'\, exp[\int(\alpha-\frac{c}{2}f''(1)\gamma\, exp[\alpha t])dt] \\ &= c_1'\, exp[\alpha t-\frac{c}{2}f''(1)\frac{\gamma}{\alpha}\, exp[\alpha t]] \\ &= c_1'\, exp[\alpha t]\, exp[-\frac{c}{2}f''(1)\frac{\gamma}{\alpha}\, exp[\alpha t]] \end{aligned}$$

ここに c_1' は $f_1(T)$ によりきまる。

$i\geq 2$ について

$$\begin{cases} \dfrac{dg_i(t)}{dt}=(cf'(1)-\dfrac{1}{2}\lambda_i)g_i(t)-\dfrac{c}{2}f''(1)\gamma\, exp[\alpha t]g_i(t) \\ g_i(T)=f_i(T) \end{cases}$$

$$g_i(t)=c_i\, exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)t]\, exp[-\frac{c}{2}f''(1)\frac{\gamma}{\alpha}\, exp[\alpha t]]$$

c_i は $f_i(T)$ によりきまる。

故に $t\geq T$ で

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

(2.6) $P_x(e_\partial \geq t) \geq \omega(t\cdot x)$

$$=\exp\left[-\frac{c}{2}f''(1)\frac{\gamma}{cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1}\exp[f'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]\right]$$

$$\times\left(c_1'\varphi_1(X)\exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]+\sum_{i=2}^{\infty}c_i\varphi_i(X)\exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)t]\right)$$

t：十分大のとき $\exp\left[-\frac{c}{2}f''(1)\frac{\gamma}{cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1}\exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]\right]$

は十分 1 に近い。

又，(　)内を書き変えて

$$c_1'\varphi_1(X)\exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]\left(1+\frac{1}{c_1'\varphi_1(X)}\sum_{i=2}^{\infty}c_i\varphi_i(X)\exp[\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_i)t]\right)$$

以上により $C_1>0$ と T_x（xに関係する可能性あり）が存在して

$P_x(e_\partial \geq t) > C_1\varphi_1(X)\exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]$: $T_x \leq t$ がなりたつ。以上によって *Theorem* 1 は証明された。

$N=1$ のときには，更に詳しい評価を与えることができる.

Theorem 2. $N=1$ のとき，

$$P_x(e_\partial \geq t) \sim k\varphi_1(x)\exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t] : \quad (t\to\infty)$$

がなりたつ．ここに k はある正の常数．

(証明)

$P_x(e_\partial \geq t) = u(t\cdot x) = \sum_{i=1}^{\infty}f_i(t)\varphi_i(x)$ と展開しておく．

簡単のため $D=(0,\pi)$ としておく．

このとき，$\lambda_n = n^2$，　$\varphi_n(x) = \sin nx$ である。

(1.1) と *Lemma* 1. 及び (1.1) が

$$\frac{\partial u(t\cdot x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u(t\cdot x) + cf'(1)u(t\cdot x) - \frac{c}{2}f''(\xi(t\cdot x))u^2(t\cdot x)$$

$(0<\xi(t\cdot x)<1)$ となることを用いて

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

(28)

$$\frac{df_1(t)}{dt}=\left(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1\right)f_1(t)-\frac{c}{2}\int_D f''(\xi(t\cdot x))\,u^2(t\cdot x)\,\varphi_1(x)\,dx$$

及び

$$\left|\frac{c}{2}\int_D f''(\xi(t\cdot x))\,u^2(t\cdot x)\,\varphi_1(x)\,dx\right|\le\frac{c}{2}f''(1)\int_D\varphi_1(x)\,dx\,\gamma^2 exp[2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]$$

を得る。

$\frac{c}{2}f''(1)\gamma^2\int_D\varphi_1(X)\,dx=a$ とおく。$a>0$ である。

ここで，$\varepsilon>0$ を一つ固定して，T を Lemma 1 をみたし，更に，

$\varepsilon>\left|\frac{a}{cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1}exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]\right|$ ： $T\le t$ がなりたつようにとっておく。

$f_1(t)$ は以上により次の式 (2.7) 及び (2.8) をみたす； ($T\le t$)

(2.7) $$\frac{df_1(t)}{dt}\ge(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)f_1(t)-a\,exp[2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]$$

(2.8) $$\frac{df_1(t)}{dt}\le(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)f_1(t)+a\,exp[2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]$$

ここで次の (2.9)，(2.10) 式を考える。((2.7)，(2.8) の不等号を等号におきかえたもの)

(2.9) $$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)u(t)-a\,exp[2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]\\ u(T)=f_1(T)\end{cases}$$

(2.10) $$\begin{cases}\dfrac{dv(t)}{dt}=(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)v(t)+a\,exp[2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]\\ v(T)=f_1(T).\end{cases}$$

(2.9)，(2.10) をみたす $u(t)$，$v(t)$ 及び $f_1(t)$ ： $T\le t$ の間には

(2.11) $v(t)\le f_1(t)\le u(t)$ の関係がなりたつ。

$cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1=\alpha$ とおいて，実際に (2.9) を解くと，

$$u(t)=exp[\alpha t]\left(-a\int_T^t exp[\alpha s]\,ds+C_1\right)$$

$$=C_1\,exp[\alpha t]+\left[-\frac{a}{\alpha}exp[\alpha t]+\frac{a}{\alpha}exp[\alpha T]\right]exp[\alpha t]$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$= C_1 \exp[\alpha t] - \frac{a}{\alpha}\exp[2\alpha t] + \frac{a}{\alpha}\exp[\alpha T]\exp[\alpha t]$$

ここに $C_1 \exp[\alpha T] = f_1(T)$ で C_1 をきめる。

$$v(t) = C_1 \exp[\alpha t] + \frac{a}{\alpha}\exp[2\alpha t] - \frac{a}{\alpha}\exp[\alpha T]\exp[\alpha t]$$

さて，仮定より $\left|\frac{a}{\alpha}\exp[\alpha T]\right| < \varepsilon$ がなりたっている。

$$\therefore\ (C_1+\varepsilon)\exp[\alpha t] + \left|\frac{a}{\alpha}\right|\exp[2\alpha t] \geq f_1(t)$$

(2.11)

$$\geq (C_1-\varepsilon)\exp[\alpha t] - \left|\frac{a}{\alpha}\right|\exp[2\alpha t] \ .$$

次に $i \geqq 2$ について評価をしよう。

$$\frac{df_i(t)}{dt} = (cf'(1) - \frac{1}{2}\lambda_i) f_i(t) - \frac{c}{2}\int f''(\xi(t\cdot x))\, u^2(t\cdot x)\, \varphi_i(x)\, dx \ .$$

ここで $\left|\frac{c}{2}\int_D f''(\xi(t\cdot x))u^2(t\cdot x)\varphi_i(x)dx\right| \leq \frac{c}{2}f''(1)\gamma^2 \exp[\alpha t]\,|D|$

であるが，$\frac{c}{2}f''(1)\gamma^2|D| = b > 0$ とおく。

$i = 1$ のときと同様に $T < t$ で

$$(*)\qquad \frac{df_i(t)}{dt} \leq (cf'(1) - \frac{1}{2}\lambda_i) f_i(t) + b\exp[2\alpha t]$$

$$(**)\qquad \frac{df_i(t)}{dt} \geq (cf'(1) - \frac{1}{2}\lambda_i) f_i(t) - b\exp[2\alpha t]$$

がなりたつ。

$i = 1$ のときと同様に

$$(*)'\qquad \begin{cases} \dfrac{du_i(t)}{dt} = (cf'(1) - \frac{1}{2}\lambda_i)\, u_i(t) + b\exp[2\alpha t] \\ u_i(T) = f_i(T) \end{cases}$$

$$(**)'\qquad \begin{cases} \dfrac{dv_i(t)}{dt} = (cf'(1) - \frac{1}{2}\lambda_i)\, v_i(t) - b\exp[2\alpha t] \\ v_i(T) = f_i(T) \end{cases}$$

をみたす $u_i(t)$ と $v_i(t)$ 及び $f_i(t)$ の間に次の関係がなりたつ。

$$(2.12)\qquad v_i(t) \leq f_i(t) \leq u_i(t) \ : \qquad (T \leq t)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$\therefore \qquad |f_i(t)| \leq max(|u_i(t)|, |v_i(t)|)$$

実際に $v_i(t)$, $u_i(t)$を解こう。

$$u_i(t) = exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)t]\left(b\int_T^t exp[\{2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)+(\frac{1}{2}\lambda_i-cf'(1))\}s]\,ds+C_i\right)$$

$$= C_i\,exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)t] + \frac{b}{cf'(1)+\frac{1}{2}(\lambda_i-2\lambda_1)}\,exp[2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]$$

$$-\frac{b}{cf'(1)+\frac{1}{2}(\lambda_i-2\lambda_1)}\,exp[\{cf'(1)+\frac{1}{2}(\lambda_i-\lambda_1)\}T]\,exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)t]$$

又，$v_i(t)$ は，$u_i(t)$ の b のある項の符号を変えたものに等しい

ここに $C_i\,exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)T] = f_i(T)$ である.

以上により

$$(2.13)\qquad |f_i(t)| \leq |C_i|\,exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)t]$$

$$+\frac{b}{cf'(1)+\frac{1}{2}(\lambda_i-2\lambda_1)}\,exp[2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]$$

$$+\frac{b}{cf'(1)+\frac{1}{2}(\lambda_i-2\lambda_1)}\,exp[(cf'(1)+\frac{1}{2}(\lambda_i-\lambda_1))T]\,exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]$$

(2.11) と (2.13) により

$$P_x(e_\partial \underset{(\geq)}{\geq} t) \leq (C_1 \underset{(-)}{+} \varepsilon)\,exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]\,\varphi_1(x)$$

$$\underset{(-)}{+}\frac{a}{cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1}\,exp[2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]\,\varphi_1(x)$$

$$\underset{(-)}{+}\sum_{i=2}^{\infty}|C_i|\,exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)t]\,|\varphi_i(x)|$$

$$\underset{(-)}{+}\sum_{i=2}^{\infty}exp[2(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)t]\frac{b}{|cf'(1)+\frac{1}{2}(\lambda_i-2\lambda_1)|}\,|\varphi_i(x)|$$

$$\underset{(-)}{+}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{b}{|cf'(1)+\frac{1}{2}(\lambda_i-2\lambda_1)|}\,exp[(2cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1)T]\,exp[(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_i)$$

$$\times(t-T)]\,|\varphi_i(\ )|$$

$\varphi_n(x) = sin\,nx$, $\lambda_n = n^2$ に注意して

以上の計算により

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$^\forall \varepsilon > 0$ に対して，$^\exists C_1$：
十分大なるtに対して

$$(C_1-\varepsilon)\varphi_1(x)\exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1\right)t\right] < P_x(e_\partial \geq t)$$

$$\leq (C_1+\varepsilon)\varphi_1(X)\exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1\right)t\right]$$

$\therefore$ $^\exists k > 0$ で

$$P_x(e_\partial \geq t) \sim k\exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1\right)t\right]\varphi_1(x)$$

とできる。[*Theorem* 2の証明終り]。

§3. $P_x(e_\partial \geq t)$の漸近的性質；$cf'(1)-\frac{1}{2}\lambda_1 = 0$ の場合

ここでは　$N=1$，$D=(0,\pi)$ とする。多次元の場合は今のところほどんど何もわかっていない。

Theorem 3.　$D=(0,\pi)$ とする。このとき，常数 $\gamma_1>0$，$\gamma_2>0$ が存在して，十分大なるtに対して

$$(3.1)\qquad \gamma_1\frac{1}{t}\sin x < P_x(e_\partial \geq t) < \gamma_2\frac{1}{t}\sin x$$

がなりたつ。

証明のため，いくつかの *lemma* を用意しよう。

Lemma 3.　$P_x(e_\partial \geq t)$：$x\in[0,\pi]$，は，tを固定すると，xの函数として，$0\leq x\leq\pi$ で *Concave function* であり，又　$x=\frac{\pi}{2}$ に関して対称である。

（証明）　$x=\frac{\pi}{2}$ に関して対称なことは明らか。
$u(t\cdot x)=P_x(e_\partial \geq t)$ とおくと，$u(t\cdot x)$ はtに関して単調減少であり，又，次の方程式をみたす。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$\frac{\partial u(t\cdot x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t\cdot x) - cf(1-u(t\cdot x))$$

$$\frac{\partial u(t\cdot x)}{\partial t} \leq 0 \text{ と } f(x) \leq 0 \text{ より } \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t\cdot x) \leq 0$$

∴ $P_x(e_\partial \geq t)$ は，tを固定すると，xの函数として $0 \leq x \leq \pi$ で Concave function である。［Lemma 3の証明終り］

Lemma 4

$$u(t\cdot x) = P_x(e_\partial \geq t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\varphi_i(x) \text{ とおく。}$$

このとき，$M_1 > 0$，$M_2 > 0$ とTが存在して，$T \leq t$で

(3.2) $$\frac{df_1(t)}{dt} \leq -M_1(f_1(t))^2 \qquad (T \leq t)$$

(3.3) $$\frac{df_1(t)}{dt} \geq -M_2(f_1(t))^2 \qquad (T \leq t)$$

がなりたつ。

（証明）

(3.2)の方を先に示そう。この証明は，$N=1$ であるという特殊性は用いずに出来る。

$$\frac{df_1(t)}{dt} = (cf'(1) - \frac{1}{2}\lambda_1)f_1(t) - \frac{c}{2}\int_D f''(\xi(t\cdot x))u^2(t\cdot x)\varphi_1(x)\,dx \;.$$

tを十分大にとって，$0 < \eta \leq \xi(t\cdot x) \leq 1$ なるηを一つ定める。

$cf'(1) - \frac{1}{2}\lambda_1 = 0$，及び $f''(x)$ の単調増大性により

$$\frac{df_1(t)}{dt} \leq -\frac{c}{2} f''(\eta)\int_D u^2(t\cdot x)\varphi_1(x)\,dx \;.$$

一方，$(f_1(t))^2 = \left(\int_D u(t\cdot x)\varphi_1(x)dx\right)^2 = \left(\int_D u(t\cdot x)\sqrt{\varphi_1(x)}\sqrt{\varphi_1(x)}\,dx\right)^2$

$$\leq \left(\int_D u^2(t\cdot x)\varphi_1(x)\,dx\right)\left(\int_D \varphi_1(x)\,dx\right)$$

故に　$^\exists M_1 > 0$：

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$\frac{df_1(t)}{dt} \leq -M_1(f_1(t))^2 \qquad T \leq t$$

とできる．これで(3.2)は示せた。

次に(3.3)を示そう。この証明には $Lemma$ 3を用いる。

$$\frac{df_1(t)}{dt} \geq -\frac{c}{2} f''(1) \int_0^{\pi} u^2(t\cdot x)\sin x\, dx$$

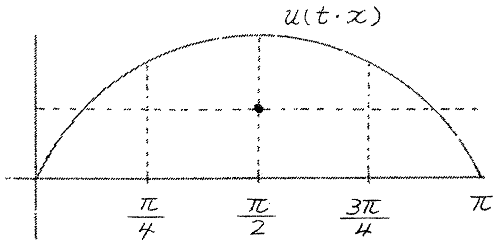
ここで　$\{x : u(t\cdot x) \geq \frac{1}{2} u(t\cdot \frac{\pi}{2})\} \supset [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$

なることが，$u(t\cdot x)$ が $concave$ であることよりいえる。［図(3.1)参照］

$$f_1(t) = \int_0^{\pi} u(t\cdot x)\sin x\, dx$$

$$\geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} u\left(t\cdot \frac{\pi}{2}\right) \sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} u\left(t\cdot \frac{\pi}{2}\right) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x\, dx$$



(図3・1)

$$\therefore \quad (f_1(t))^2 \geq \frac{1}{4} u^2\left(t\cdot \frac{\pi}{2}\right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin x\, dx\right)^2$$

一方　$\displaystyle\int u^2(t\cdot x)\sin x\, dx \leq u^2\left(t\cdot \frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\pi} \sin x\, dx$

$$\therefore \quad \exists M_2' > 0 :$$

$$M_2'(f_1(t))^2 \geq \int u^2(t\cdot x)\sin x\, dx \ .$$

$$\therefore \quad \exists M_2 > 0 \ .$$

(3.3)　$\displaystyle\frac{df_1(t)}{dt} \geq -M_2(f_1(t))^2$　がなりたつ。［$Lemma$ 4の証明終り］

<u>*Lemma* 5.</u>　各 x に対して，$C_x' > 0$ と $C_x > 0$ が存在して，ある T（x に無関係）より大なる t に対して

(3.4)　$\displaystyle C_x' \frac{1}{t} < P_x(e_\partial \geq t) < C_x \frac{1}{t}$　がなりたつ。

<u>（証明）</u>

Sem. on Probab.
Vol.25- I　1966年
P1-104

(3.2) により　$\dfrac{df_1(t)}{dt} \le -M_1 (f_1(t))^2 \qquad T \le t$

$$\therefore \quad -\frac{f_1'(t)}{(f_1(t))^2} \ge M_1$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f_1(t)}\right) \ge M_1$$

$\therefore$　${}^{\forall}t_0 \ge T$　に対して

$$\frac{1}{f_1(t_0)} - \frac{1}{f_1(T)} \ge M_1(t_0 - T)$$

これより，$C_1 > 0$： $T_1 > 0$　が存在して，

(3.5)　　$f_1(t) < C_1 \dfrac{1}{t} \qquad T_1 \le t$　　がなりたつ。（ここまでの議論は多次元の場合にもなりたつ）．

(3.3)より同様にして，$C_2 > 0$ と $T_2 > 0$ が存在して

(3.6)　　$f_1(t) > C_2 \dfrac{1}{t}$ ；　$T_2 \le t$　を示すことができる。

さて，$P_x(e_\partial \ge t) < C_x \dfrac{1}{t}$　を示そう。ここで又，$P_x(e_\partial \ge t)$ が concave であることを用いる。

$P_x(e_\partial \le t) = u(t \cdot x) \le u(t \cdot \frac{\pi}{2})$　であるから

$$u\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) < C_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}$$　を示せば十分である。

$max(T_1, T_2) = T$　と更めておいて　$T \le t$ に対して

$$C_1 \frac{1}{t} > f_1(t) = \int_0^{\pi} u(t \cdot x) \sin x \, dx \ge \frac{1}{2} u\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \, dx$$

$$\therefore \quad {}^{\exists}C_{\frac{\pi}{2}} > 0 : \quad C_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} > u\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) : \quad T \le t$$

がなりたつ。

最後に　$C_x' \dfrac{1}{t} < P_x(e_\partial \ge t)$　を示そう。

(3.6) より，$T \le t$　で

$$C_2 \frac{1}{t} < \int_0^{\pi} u(t \cdot y) \sin y \, dy < \int_0^{\pi} u\left(t \cdot \frac{\pi}{2}\right) \sin y \, dy$$

Sem. on Probab.
Vol.25-I 1966年
P1-104

$$< \frac{\pi}{2}\frac{1}{x}\, u(t\cdot x)\int_0^{\pi} \sin y\, dy$$

$$\therefore\ \exists C_x' > 0: \quad C_x' \frac{1}{t} < P_x(e_\partial \geq t) \quad T \leq t$$

がなりたつ。［$Lemma$ 5証明終り］

次の$Lemma$で(3.1)の$P_x(e_\partial \geq t)$を下から評価する方を証明しよう．

<u>$Lemma$ 6.</u>　$\gamma_1 > 0$ と，$T > 0$ が存在して

$$\gamma_1 \frac{1}{t} \sin x < P_x(e_\partial \geq t) \ : \quad T \leq t$$

がなりたつ。

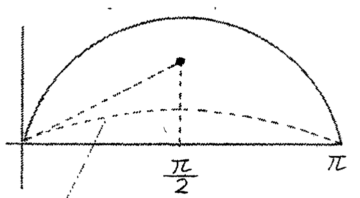
<u>(証明)</u>　$Lemma$ 5により　$\exists T > 0$: $\exists C'_{\frac{\pi}{2}} > 0$:

$$C'_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} < P_{\frac{\pi}{2}}(e_\partial \geq t) \quad T \leq t \quad \text{である。}$$

$P_x(e_\partial \geq t)$: concave より

$$\frac{C'_{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} \sin x < P_x(e_\partial \geq t) : \ T \leq t$$

ここで　$\dfrac{C'_{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}} = \gamma_1$　とおけばよい。



［$Lemma$ 6証明終り］

<u>$Lemma$ 7.</u>　$\gamma_2 > 0$ と $T > 0$ が存在して

$$\gamma_2 \frac{1}{t} \sin x > P_x(e_\partial \geq t) : \quad T \leq t \quad \text{がなりたつ。}$$

<u>(証明)</u>

$P_x(e_\partial \geq t) = u(t\cdot x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin nx$ の展開で　$f_n(t)$: $n \geq 2$　のときの評価をしよう。($u(t\cdot x)$が$x = \frac{\pi}{2}$に関して対称なことと，$\sin nx$の性質により　nが偶数のときは $f_n(t) \equiv 0$ であることがわかる)。

$$\frac{df_n(t)}{dt} = (cf'(1) - \frac{1}{2}n^2) f_n(t) - \frac{c}{2}\int_0^{\pi} f''(\xi(t\cdot x))\, u^2(t\cdot x) \sin nx\, dx$$

$Lemma$ 5により　$T \leq t$ で　$u(t\cdot x) < C_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}$　であるから

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$\left|\frac{c}{2}\int_0^{\pi} f''(\xi(t\cdot x))\, u^2(t\cdot x)\sin nx\, dx\right|$$

$$\leq \frac{c}{2} f''(1)\, C^2_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^2}\int_0^{\pi}|\sin nx|\,dx \quad \text{ここで} \quad a=\frac{c}{2}f''(1)\,C^2_{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}|\sin nx|\,dx$$

とおくと　$a>0$（nに無関係）

$\therefore$

(*) $$\frac{df_n(t)}{dt} \leq \left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right) f_n(t) + a\frac{1}{t^2}$$

(**) $$\frac{df_n(t)}{dt} \geq \left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right) f_n(t) - a\frac{1}{t^2}$$

ここで例によって (*)，(**)より次の方程式を考える。（固有値 $\lambda_n = n$）

(3.7) $$\begin{cases} \dfrac{du_n(t)}{dt} = \left(cf'(1)-\dfrac{1}{2}n^2\right) u_n(t) - a\dfrac{1}{t^2} \\ u_n(T) = f_n(T) \qquad\qquad (T\leq t) \end{cases}$$

(3.8) $$\begin{cases} \dfrac{dv_n(t)}{dt} = \left(cf'(1)-\dfrac{1}{2}n^2\right) v_n(t) - a\dfrac{1}{t^2} \\ v_n(T) = f_n(T) \qquad\qquad (T\leq t) \end{cases}$$

このとき，(3.7)，(3.8)をそれぞれみたす。$u_n(t)$ と $v_n(t)$ 及び $f_n(t)$ の間に次の関係がある。

(3.9) $$v_n(t) \leq f_n(t) \leq u_n(t) \;:\quad T\leq t$$

$u_n(t)$ を実際に解いてみよう。

$$u_n(t) = \exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right)t\right]\left(a\int_T^t \exp\left[\left(\frac{1}{2}n^2-cf'(1)\right)S\right]\frac{dS}{S^2} + C_n\right)$$

（　　）内を変形して

$$(\qquad) = a\,\frac{1}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}\exp\left[\left(\frac{1}{2}n^2-cf'(1)\right)t\right]$$

$$-a\,\frac{1}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}\exp\left[\left(\frac{1}{2}n^2-cf'(1)\right)T\right]\frac{1}{T^2}$$

$$+2a\int_T^t \frac{\exp\left[\left(\frac{1}{2}n^2-cf'(1)\right)S\right]}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}\,\frac{1}{S^3}\,dS + C_n \;(*)$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

Tを更めて $\dfrac{exp[(\frac{1}{2}n^2-cf'(1))S]}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}\dfrac{1}{S^3}$ が $T\leq S$ で増加函数になるように十分大きくとっておく。(nに無関係にとれる).

このとき

$$(*)\leq a\frac{1}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}exp\left[\left(\frac{1}{2}n^2-cf'(1)\right)t\right]\frac{1}{t^2}$$

$$-a\frac{1}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}exp\left[\left(\frac{1}{2}n^2-cf'(1)\right)T\right]\frac{1}{T^2}$$

$$+2a\frac{exp\left[\left(\frac{1}{2}n^2-cf'(1)\right)t\right]}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}\frac{(t-T)}{t^3}+C_n\ .$$

$\therefore$

$$(3.10)\qquad u_n(t)\leq\frac{a}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}\frac{1}{t^2}+\frac{2a}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}\frac{(t-T)}{t^3}$$

$$-\frac{a}{T^2}\frac{1}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right)(t-T)\right]$$

$$+C_n\ exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right)t\right]$$

ここに C_nは, $C_n\ exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right)T\right]=f_n(T)$ できまる。

同様にして

$$(3.11)\qquad v_n(t)\geq\frac{-a}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}\frac{1}{t^2}-\frac{2a}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}\frac{(t-T)}{t^3}$$

$$+\frac{a}{T^2}\frac{1}{\frac{1}{2}n^2-cf'(1)}exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right)(t-T)\right]$$

$$+C_n\ exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right)t\right]$$

(3.9), (3.10) 及び (3.11) を用いて

$$P_x(e_\partial\geq t)=u(t\cdot x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\ \sin nx$$

$$\leq C_{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t}\sin x+\Sigma|f_n(t)||\sin nx|$$

$$\leq C_{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t}\sin x$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$+ \sum_{\substack{n:\text{odd.}\\ n\geq 3}} |C_n| \exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right)t\right] |\sin nx|$$

$$+ \frac{1}{t^2} \sum_{\substack{n:\text{odd}\\ n\geq 3}} \frac{a}{\frac{1}{2}n^2 - cf'(1)} |\sin nx|$$

$$+ \frac{(t-T)}{t^3} \sum_{\substack{n:\text{odd}\\ n\geq 3}} \frac{2a}{\frac{1}{2}n^2 - cf'(1)} |\sin nx|$$

$$+ \frac{1}{T^2} \sum_{\substack{n:\text{odd}\\ n\geq 3}} \frac{a}{\frac{1}{2}n^2 - cf'(1)} \exp\left[\left(cf'(1)-\frac{1}{2}n^2\right)(t-T)\right] |\sin nx|$$

以上により $^{\exists}\gamma_2 > 0$： 及び $^{\exists}T_x$ （x に関係するかも知れぬ）で $T_x \leq t$ に対して

$$P_x(e_\partial \geq t) < \gamma_2 \frac{1}{t} \sin x \ : \quad T_x \leq t$$

以上で *Theorem 3* は証明できた。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

文　献　表

[1] Watanabe, S.: *On the branching process for Brownian particles with an absorbing boundary.*
(*Jour. Math. Kyoto Univ. Vol. 4, 385-398. 1965.*)

[2] Ilin. A.M., Kalashnikov, A.S., Oleinik, O.A.: *Linear equations of the second order of parabolic type.*
(*Uspehi Mat. Nauk. 17: 3, 3-146, 1962.*)

[3] Sevastyanov, B.A.: *Branching stochastic processes for particles diffusing in a bounded domain with absorbing boundaries.*
(*Th. Prob. Appl. 3. 111-126, 1958.*)

[4] 池田, 長沢, 渡辺(信): 分枝マルコフ過程の基礎
(*Seminar. on Probability, Vol. 23* (I)～(II), *1966.*)

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

第3章 Branching process の個数の平均について

Branching process の平均個数についての一般論は *Sem. on Prob. Vol. 23-I* §3.5 で述べてあるが，この章では§1で適当な条件を満たす *process* を *non-branching part* にもつ *branching process* の平均個数は,ある *conservative* な *Markov process* でそれを適当に吸収したものが *non-branching part* になるようなものの *functional* の平均として表わされることを示す。

§2で，一次元 *Brown* 運動の場合に平均個数の収束発散の *criterion* を与え，§3で，それが *parabolic differential equation* の唯一の正の解であることを示す。§2，§3は *Ito-McKean* [3] の拡張である。

$\mathcal{S}$ を *compact Hausdorff space* とする。$\mathcal{S}^n$ を $\mathcal{S}$ の n 個の直積空間を *permutation* による *equivalent relation* で割った空間とすると，自然な位相を入れることによって $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^n$ は *locally compact Hausdorff space* となる。この空間に一点 $\{\Delta\}$ をつけ加えて *compact* 化した空間を S と書く。すなわち

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^n \cup \{\Delta\}$$

[1] に従って S 上に *branching process* を考えるわけであるが，各§毎に $\mathcal{S}$ に一定の条件をつけ加える。

§1. 平均個数

平均個数を論ずる際に重要な働きをする *operator* "$\smile$" を [1] とは少し異なる定義をする。

<u>*Definition*</u>　$\mathcal{S}$ 上の非負有界可測関数 $f(x)$ に対し S 上の可測関数 $\check{f}(\mathbf{x})$ を次の式で定義する。

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$\check{f}(\bar{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) , & \text{if } \bar{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in S^n , \\ 0 , & \text{if } \bar{x} = \{\partial\} = S^0 , \\ +\infty , & \text{if } \bar{x} = \{\Delta\} , \end{cases}$$

§1 では $S = R \cup \{\delta\}$, $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$,
と表わされることを仮定する。ここで K^n は compact Hausdorff separable space で $K_n \subset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たす。$\{\delta\}$は R の一点compact 化。

今R上の conservative standard process $\tilde{X} = (x_t, +\infty \tilde{\mu}_t, P_x)$を考える。さらに φ_t を $\tilde{X}$ の非負, 右連続, 有限, homogeneous additive functional とする。R上では $\tilde{X}$ の $e^{-\varphi_t}$-subprocess, $\{\delta\}$ では trap とした S 上の Markov process を non branching part に持ち, branching system として $q_2(x) = 1$ $(x \in R)$, $q_i(x) = 0$, $i = 0, 2, 3, \cdots$ $\pi_2(x, d\bar{y}) = \delta_{(x,x)}(d\bar{y})$ $(x \in R)$ をもつS上の branching process を $X = (X_t, +\infty, \mu_t, P_{\bar{x}})$ とする。[2]. 直観的に言えば, $\tilde{X}$ の $e^{-\varphi_t}$ subprocess が死んだ瞬間にその場で2個に分裂するような branching process である。但し $(\delta, \cdots, \delta)$ は trap.

Xによる平均を $M_\circ[\cdot]$, $\tilde{X}$による平均を $E_\circ[\cdot]$ で表わす。

この§では process X と$\tilde{X}$に次の仮定をおく。

<u>仮定1</u>　conservative standard process $\tilde{X}$ は R の任意の open set に対し, 任意の時間内に正の確率で hit する。

<u>仮定2</u>　S上の任意の非負, 有界可測関数 $F(\bar{x})$ に対し, $M_x[F(X_t)]$ は R 上の関数として連続関数。

仮定2は process $\tilde{X}$ と additive functional φ_t の与え方から示される場合が多い。

Branching process X は強マルコフ, quasi-left continuity を満た

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

す conservative マルコフ過程である。[2]

Lemma 1　　$\bar{x} \in R^2$ の時

$$M_{\bar{x}}[\check{f}(X_t);\ \tau_r \leq t < \tau_{r+1}]$$
$$= \sum_{j=0}^{r} M_{x_1}[\check{f}(X_t);\ \tau_{r-j} \leq t < \tau_{r+1-j}] \cdot P_{x_2}[\tau_j \leq t < \tau_{j+1}]$$
$$+ \sum_{j=0}^{r} M_{x_2}[\check{f}(X_t);\ \tau_{r-j} \leq t < \tau_{r+1-j}] \cdot P_{x_1}[\tau_j \leq t < \tau_{j+1}],$$
$$\bar{x} = (x_1, x_2) \quad , \quad (1-1),$$

ここで　τ は path が初めて branch する時間。

$\tau_n = \tau_{n-1} + \theta_{\tau_{n-1}} \tau$,　$\tau_1 = \tau$,　$\tau_0 \equiv 0$.

証明　　[1] p.61 , Lemma 2.8 によって　$\bar{x} = (x_1, x_2)$　の時

$$M_{\bar{x}}[\hat{f}(X_t);\ \tau_r \leq t < \tau_{r+1}]$$
$$= \sum_{j=0}^{r} M_{x_1}[\hat{f}(X_t);\ \tau_j \leq t < \tau_{j+1}] \cdot M_{x_2}[\hat{f}(X_t);\ \tau_{r-j} \leq t < \tau_{r-}$$

ここで　$f(x) = e^{\lambda g(x)}$ とおくと　$\bar{x} \in \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$　の時

$\hat{f}(\bar{x}) = e^{\lambda \check{g}(\bar{x})}$　（$g(x)$ は S 上の非負有界可測関数の全体 B^+

従って

$$M_{\bar{x}}[e^{\lambda \check{g}(X_t)};\quad \tau_r \leq t < \tau_{r+1}]$$
$$= \sum_{j=0}^{r} M_{x_1}[e^{\lambda \check{g}(X_t)};\ \tau_j \leq t < \tau_{j+1}] \cdot M_{x_2}[e^{\lambda \check{g}(X_t)};\ \tau_{r-j} \leq t < \tau_{r-j+1}$$

$t < \tau_{r+1}$ であれば　$\check{g}(\bar{x})$ は有界，従って積分は有限確定で λ について両辺を微分することができて，微分と積分の順序が交換できる。しかる後 $\lambda = 0$ とおくと，求める式 (1-1) を得る。

Theorem 1　　$f \in B^+(S)$ に対し，R 上の関数 $M_x[\check{f}(X_t)]$ は次の積分方程式を満たす。$M_x[\check{f}(X_t)]$ が発散する場合は $+\infty = +\infty$　の意味で等号が成立つ。

$$u_t(x) = \int_R K(x, t, dy) f(y) + 2\int_0^t \int_R K(x, ds, dy) u_{t-s}(y) \qquad (1-2)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-I 1966年
P1-104

ここで

$$K(x, ds, dy) = E_x[e^{-\varphi_s}\varphi(ds;\ x_s \in dy)]$$

$$= (P_x^o[\zeta^o \in ds,\ X^o_{\zeta^o_-} \in dy]),\quad ([1]\ p.68)$$

$$K(x, t, dy) = E_x[e^{-\varphi_t};\ x_t \in dy]$$

証明　τ_r は Markov time だから（[1] p.34）X の強マルコフ性を使って　$r \geqq 1$ の時

$$M_x[\check{f}(X_t);\ \tau_r \leq t < \tau_{r+1}]$$

$$= \int_0^t M_x[\tau \in ds;\ M_{X_\tau}[\check{f}(X_{t-s});\ \tau_{r-1} \leq t-s < \tau_r]|_{s=\tau}]$$

branching system の仮定から　$s = \tau$ の時　$X_\tau = (x_s, x_s)$。さらに

$$P_x[\tau \in ds,\ X_s \in d\bar{y}] = E_x[e^{-\varphi_s}\varphi(ds);\ x_s \in dy] \quad (d\bar{y} = (dy, dy))$$

従って，Lemma 1により

$$= \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) \cdot 2\sum_{j=0}^{r-1} M_y[\check{f}(X_{t-s});\ \tau_{r-1-j} \leq t-s < \tau_{r-j}] \times$$

$$\times P_y[\tau_j \leq t-s < \tau_{j+1}]$$

両辺を $r = 0$ から $+\infty$ まで加える。[1] p.39 によって

$$P_{\bar{x}}[\lim_{n\uparrow+\infty} \tau_n = e_\Delta,\ \lim_{n\uparrow+\infty}\tau_n < +\infty] = P_{\bar{x}}[\lim_{n\uparrow+\infty}\tau_n < +\infty]$$

ここで　$e_\Delta = \inf\{t;\ X_t = \Delta\}$

だから

$$M_x[\check{f}(X_t);\ e_\Delta > t]$$

$$= \int_R K(x, t, dy) f(y) + 2\int_0^t \int_R K(x, ds, dy) M_y[\check{f}(X_{t-s});\ e_\Delta > t-s] \times$$

$$\times P_y[e_\Delta > t-s]\ . \qquad (1-3)$$

$P_x[e_\Delta > t]$ は次の二つの場合に分けられる。

i)　$P_x[e_\Delta > t] = 1$　の時

$$P_x[e_\Delta > t] = M_x[P_{X_s}[e_\Delta > t-s];\ e_\Delta > s]$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

（e_Δ は Markov time [1] p.39）

$s<t$ であるかぎり $P_x[e_\Delta>s]=1$ だから $P_y[e_\Delta>t-s]$ は $K(x,\cdot,dy)$-measure 0 の集合を除いて 1 に等しい。

従って（1－3）式は

$$M_x[\check{f}(X_t)]=\int_R K(x,t,dy)f(y)+2\int_0^t\int_R K(x;ds,dy)\,M_y[\check{f}(X_{t-s})]$$

となる。従って $M_x[\check{f}(X_t)]$ は（1－2）式を満たす。

ii）$P_x[e_\Delta>t]<1$ の時

"$\smile$" operatorの定義から

$$M_x[\check{f}(X_t)] = +\infty$$

さらに $P_x[e_\Delta>t]=M_x[\hat{1}(X_t)]$ だから，仮定２からxについて連続。従って，xのある近傍Uで $P_y[e_\Delta>t]<1$，従って，$y\in U$の時 $M_y[\check{f}(X_t)]=+\infty$。仮定１から（1－2)式の右辺は$+\infty$。故に $M_x[\check{f}(X_t)]$ は $+\infty=+\infty$ の意味で（1－2）式を満たす。 (q.e.d)

次に $P_x[e_\Delta\leq t]=0$ となる十分条件を与える。

<u>Lemma 2</u>

$E_x[e^{\varphi_t}]<+\infty$ ならば $P_x[e_\Delta\leqq t]=0$。但し $x\in R$

<u>証明</u> $\bar{x}=(x_1,\ x_2)$ $x_i\in R$ の時

$$P_{\bar{x}}[\tau_r\leq t<\tau_{r+1}]=\sum_{j=0}^{r}P_{x_1}[\tau_j\leq t<\tau_{j+1}]\cdot P_{x_2}[\tau_{r-j}\leq t<\tau_{r-j+1}]$$

（[1] p.61）

を用いて $P_x[\tau_r\leq t<\tau_{r+1}]$ を強マルコフ性を使って変形する。$r\geqq 1$ の時

$$P_x[\tau_r\leq t<\tau_{r+1}]=\int_0^t M_x[\tau\in ds,\ M_{x_\tau}[\tau_{r-1}\leq t-s<\tau_r]|_{s=\tau}]$$

$$=\int_0^t\int_R K(x,ds,dy)\sum_{j=0}^{r-1}P_y[\tau_j\leqq t-s<\tau_{j+1}]\,P_y[\tau_{r-1-j}\leq t-s<\tau_{r-j}]$$

従って

$$P_x[t<\tau_n]=\sum_{r=0}^{n-1}P_x[\tau_r\leq t<\tau_{r+1}]$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$= E_x[e^{-\varphi_t}] + \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{r-1} P_y[\tau_j \le t-s < \tau_{j+1}] \times$$
$$\times P_y[\tau_{r-j-1} \le t-s < \tau_{r-j}]$$
$$= E_x[e^{-\varphi_t}] + \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) \sum_{j=0}^{n-2} P_y[\tau_j \le t-s < \tau_{j+1}] P_y[t-s < \tau_{n-1}$$

従って

$$P_x[t \ge \tau_n] = 1 - E_x[e^{-\varphi_t}] - \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) \sum_{j=0}^{n-2} P_y[\tau_j \le t-s < \tau_{j+1}](1 - P_y[t-s \geqq \tau_{n-1-j}])$$
$$= E_x[1 - e^{-\varphi_t}] - \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) P_y[t-s < \tau_{n-1}]$$
$$+ \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) \sum_{j=0}^{n-2} P_y[\tau_j \le t-s < \tau_{j+1}] P_y[t-s \geqq \tau_{n-1-j}]$$

ここで，第1項と第2項を計算する。

$$E_x[1 - e^{-\varphi_t}] - \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) P_y[t-s < \tau_{n-1}]$$
$$= E_x[1 - e^{-\varphi_t}] - \int_0^t \int_R K(x, ds, dy)[1 - P_y[t-s \geqq \tau_{n-1}]])$$
$$= E_x[1 - e^{-\varphi_t}] - \int_0^t E_x[e^{-\varphi_s} \varphi(ds)] + \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) P_y(t-s \geqq \tau_{n-1})$$
$$= \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) P_y[t-s \geqq \tau_{n-1}]$$

従って

$$P_x[t \ge \tau_n] = \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) P_y[t-s \geqq \tau_{n-1}]$$
$$+ \int_0^t \int_R K(x, ds, dy) \sum_{j=0}^{n-2} P_y[\tau_j \le t-s < \tau_{j+1}] P_y[t-s \geqq \tau_{n-1-j}]$$

ここで任意の $\varepsilon > 0$ をとると正整数 m がとれて

$$\int_0^t \int_{K_m^c} K(x, ds, dy) \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる．次に仮定により $P_y[\tau_j \le t-s < \tau_{j+1}]$ は y と s について連続だから $y \in K_m$ と $s < t$ に無関係に正整数 M がとれて n に無関係に

$$\sum_{j=M}^{n-2} P_y[\tau_j \le t-s < \tau_{j+1}] \le \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる．さらに $P_y[t-s \geqq \tau_n] \downarrow P_y[e_\Delta < t-s]$ $(n \to \infty)$ で，それぞれ y と s の連続関数（仮定２）だから正整数 N がとれて任意の $n \ge N$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$y \in K_m$, $s < t$, $j \leq M$ について一様に

$$\frac{\varepsilon}{3} + P_y[t-s \geq \tau_{n-1}] \geqq P_y[t-s \geq \tau_{n-1-j}]$$

とできる。

従って

$$\begin{aligned} P_x[t \geq \tau_n] \leqq & \int_0^t\int_R K(x,ds,dy)\, P_y[t-s \geq \tau_{n-1}] \\ & + \int_0^t\int_{K_m} K(x,ds,dy) \sum_{j=M}^{n-2} P_y[\tau_j \leq t-s < \tau_{j+1}] \\ & + \int_0^t\int_{K_m} K(x,ds,dy) \sum_{j=0}^{M-1} P_y[\tau_j \leq t-s < \tau_{j+1}]\, P_y[t-s \geq \tau_{n-1-j}] \\ & + \int_0^t\int_{K_m^c} K(x,ds,dy) \sum_{j=0}^{n-2} P_y[\tau_j \leq t-s < \tau_{j+1}] \quad . \end{aligned}$$

従って

$$P_x[t \geq \tau_n] \leqq 2\int_0^t\int_R K(x,ds,dy)\, P_y[t-s \geqq \tau_{n-1}] + \varepsilon \quad .$$

$P_x[t \geq \tau_n] \downarrow P_x[e_\Delta \leq t]$ $(n \to \infty)$ だから $\lim$ と積分の順序交換ができて

$$P_x[e_\Delta \leq t] \leqq 2\int_0^t\int_R K(x,ds,dy)\, P_y[t-s \geqq e_\Delta] + \varepsilon$$

ε は任意だったから

$$P_x[e_\Delta \leqq t] \leqq 2\int_0^t\int_R K(x,ds,dy)\, P_y[e_\Delta \leqq t-s] \qquad (1-4)$$

明らかに $P_x[e_\Delta \leqq t] \leqq 1$ 従ってこれを(1-4)の右辺に代入すると

$$P_x[e_\Delta \leqq t] \leqq 2E_x[1-e^{-\varphi_t}] = 2E_x[e^{-\varphi_t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\varphi_t)^j}{j!}]$$

従って今 $P_x[e_\Delta \leqq t] \leqq 2^n E_x[e^{-\varphi_t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\varphi_t)^j}{j!}]$
が満たされているとして(1-4)に代入すると

$$\begin{aligned} P_x[e_\Delta \leqq t] & \leqq 2^{n+1}\int_0^t\int_R K(x,ds,dy)\, E_y[e^{-\varphi_{t-s}} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\varphi_{t-s})^j}{j!}] \\ & = 2^{n+1}\int_0^t E_x[e^{-\varphi_s}\varphi(ds)\, E_{x_s}[e^{-\varphi_{t-s}} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\varphi_{t-s})^j}{j!}]] \\ & = 2^{n+1}\int_0^t E_x[e^{-\varphi_t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\varphi_t^s)^j}{j!}\varphi(ds)] \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I　1966年
P1-104

ここで　$$\int_0^t E_x\left[\frac{(\varphi_t^s)^j}{j!}\varphi(ds)\right] = E_x\left[\int_0^t \frac{(\varphi_t-\varphi_s)^j}{j!}\ \varphi(ds)\right]$$

$$= E_x\left[\frac{-(\varphi_t-\varphi_s)^{j+1}}{(j+1)!}\Big|_{s=0}^{t}\right]$$

$$= E_x\left[\frac{(\varphi_t)^{j+1}}{(j+1)!}\right]$$

従って

$$P_x[e_\Delta \leq t] \leqq 2^{n+1} E_x\left[e^{-\varphi_t}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi_t)^j}{j!}\right]$$

$$\leqq E_x\left[e^{-\varphi_t}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(2\varphi_t)^j}{j!}\right]$$

上の不等式は任意のnについて成立つ。ところが

$$e^{-\varphi_t}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(2\varphi_t)^j}{j!} \leqq e^{\varphi_t}$$

仮定から　$E_x[e^{\varphi_t}] < +\infty$

だから　$\lim_{n\to\infty} E_x\left[e^{-\varphi_t}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(\varphi_t)^j}{j!}\right] = 0$

従って　$P_x[e_\Delta \leqq t] = 0$

この§で考えている branching process はR上の点から出発する限り，点(δ, ……)には到達しない。従ってR上の点から出発する path を考える限り，$\mathcal{S}$ 上の関数の代りに，R上の関数を考えれば十分である。このことに注意すると，この§の主定理に到達する。

Theorem 2　$f \in \mathbb{B}^+(R)$ であって

$$f(x) \geqq \delta > 0$$

を満たす定数δが存在する時

$$M_x[\check{f}(X_t)] = E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)]$$

一方が発散する時は他方も発散し $+\infty = +\infty$ の意味で等号が成立つ。

証明　まず $E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)]$ が積分方程式(1-2)を満たす正の解の中で

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

最小な解であることを示す。

$$u_t^{(0)}(x) \equiv \int_R K(x; t, dy) f(y) = E_x[e^{-\varphi_t} f(y)]$$

とおき，帰納的に

$$u_t^{(n+1)}(x) = u_t^{(0)}(x) + 2\int_0^t \int_R K(x, ds, dy)\, u_{t-s}^{(n)}(y)$$

と定義する。

今，$$u_t^{(n)}(x) = E_x\Big[e^{-\varphi_t} \sum_{j=0}^{n} \frac{(2\varphi_t)^j}{j!} f(x_t)\Big]$$

が成立つと仮定する。少くとも n 0 の時は正しい。

$$u_t^{(n+1)}(x) = E_x[e^{-\varphi_t} f(x_t)] + 2\int_0^t E_x\Big[e^{-\varphi_s}\varphi(ds) E_{x_s}\Big[e^{-\varphi_{t-s}} \sum_{j=0}^{n} \frac{(2\varphi_t)^j}{j!} f(x_{t-s})\Big]\Big]$$

$$= E_x[e^{-\varphi_t} f(x_t)] + 2\int_0^t E_x\Big[e^{-\varphi_t} \sum_{j=0}^{n} \frac{(2\varphi_t^s)^j}{j!} f(x_t)\varphi(ds)\Big]$$

ここで $$\int_0^t E_x\Big[\frac{2^j(\varphi_t - \varphi_s)^j}{j!}\varphi(ds)\Big] = 2^j E_x\Big[\frac{-(\varphi_t - \varphi_s)^{j+1}}{(j+1)!}\Big|_{s=0}^{t}\Big]$$

$$= 2^j E_x\Big[\frac{(\varphi_t)^{j+1}}{(j+1)!}\Big]$$

従って

$$u_t^{(n+1)}(x) = E_x\Big[e^{-\varphi_t} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(2\varphi_t)^j}{j!} f(x_t)\Big]$$

よって，仮定はすべての n に対して成立つ。

明らかに $u_t^{(n)}(x) \leqq u_t^{(n+1)}(x)$ $\quad n = 0, 1, 2, \cdots$

従って $$\lim_{n\to\infty} u_t^{(n)} = E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)]$$

は積分方程式（1−2）の解である。さらに（1−2）を満たす任意の正解を $v_t(x)$ とすると，明らかに

$$u_t^{(0)}(x) \leqq v_t(x)$$

従って $u_t^{(1)}(x) \leqq v_t(x)$

以下同様にして

$$u_t^{(n)}(x) \leqq v_t(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

従って $\lim_{n\to\infty} u_t^{(n)}(x) = E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)] \leqq v_t(x)$

一方，*Theorem* 1 によって $M_x[\check{f}(X_t)]$ は（1-2）の正の解である。従って

$$E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)] \leqq M_x[\check{f}(X_t)]$$

次に *Theorem* 1 の証明で用いた漸化式により容易に不等式

$$M_x[\check{f}(X_t);\ t<\tau_n]$$
$$\leqq E_x[e^{-\varphi_t} f(x_t)] + 2\int_0^t E_x[e^{-\varphi_s}\varphi(ds) M_{x_s}(\check{f}(X_{t-s}))](t-s)<\tau_n$$

を得る。

$$M_x[\check{f}(X_t);\ t<\tau_1] = E_x[e^{-\varphi_t} f(x_t)] = u_t^{(0)}(x)$$

だから

$$M_x[\check{f}(X_t);\ t<\tau_2] \leqq u_t^{(1)}(x)$$

以下同様にして

$$M_x[\check{f}(X_t);\ t<\tau_{n+1}] \leqq u_t^{(n)}(x)$$

従って $n\to\infty$ として

$$M_x[\check{f}(X_t);\ e_\Delta > t] \leqq E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)]$$

を得る。従って

$$M_x[\check{f}(X_t);\ e_\Delta > t] \leqq E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)] \leqq M_x[\check{f}(X_t)]$$

が示された．ところが，仮定から $f(x) \geqq \delta > 0$ だから

$E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)] < +\infty$ ならば $E_x[e^{\varphi_t}] < +\infty$

従って，*Lemma* 2 から

$E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)] < +\infty$ ならば $P_x[e_\Delta \leqq t] = 0$

従って，$E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)] < +\infty$ ならば

$$M_x[\check{f}(X_t);\ e_\Delta > t] = E_x[e^{\varphi_t} f(x_t)] = M_x[\check{f}(X_t)]$$

以上のことから *Theorem* 2 の結論を得る．　(q.e.d)

§2. 分裂するBrown運動の平均個数の収束，発散

この§では，§1の R として実数軸，*conservative standard process* $\tilde{X}$ として一次元 *Brown* 運動，*additive functional* φ_t として $\varphi_t = \int_0^t k(x_s)\,ds$ と表

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

わされる場合を考える。Rから出発する$path$を考える限り$k(x)$はR上の関数と考えてよい。後でさらに$k(x)$に一定の条件をつけ加える。

§1の一般論から $M_x[\xi_t]$(個数の平均)$=M_x[\check{1}(X_t)]=E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds}]$ と表わされる。無限次元の積分 $E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds}]$ の収束発散を，$k(x)$に一定の条件をつけた上で一次元の積分の収束，発散で評価することを考える。そのために二，三の定義をする.

$$T=T(x)=sup\{t;\ E_x[e^{\varphi_t}]<+\infty\}$$

とおく。$T(x)$が $x\in R$ の範囲でxに$depend$ しないことをいうために次の$lemma$を証明する。

Lemma 3.

i) $E_x[e^{\varphi_t}]<+\infty$ ($x\in R$) ならば $E_x[e^{\varphi_s}]$はsについて$[0,t]$で連続。

ii) $z(\in R)$があって $E_z[e^{\varphi_t}]<+\infty$ ならば任意の$s(<t)$に対し$E_x[e^{\varphi_s}]$はR上の，有限な値をとる関数である。

証明 i) $s\leq t$ ならば $\varphi_s\leq\varphi_t$ より明らか。

ii) ある $x\in R$ と $s<t$ があって $E_x[e^{\varphi_s}]=+\infty$ と仮定する。

$$E_z[e^{\varphi_t}]=E_z[e^{\varphi_t};\ \sigma_x<t-s]+E_z[e^{\varphi_t};\ \sigma_x\geq t-s]$$
$$(\sigma_x=inf\{t;\ x_t=x\})$$
$$=E_z[e^{\varphi_{\sigma_x}}E_x[e^{\varphi_{t-\sigma_x}}];\ \sigma_x<t-s]$$
$$+E_z[e^{\varphi_t};\ \sigma_x\geq t-s]$$

集合$\{\sigma_x<t-s\}$の上では $\varphi_{t-\sigma_x}\geqq\varphi_s$ だから

$$\geqq E_z[e^{\varphi_{\sigma_x}};\ \sigma_x<t-s]E_x[e^{\varphi_s}]$$
$$+E_z[e^{\varphi_t};\ \sigma_x\geq t-s]$$

ところが，$E_z[e^{\varphi_{\sigma_x}};\ \sigma_x<t-s]>0$ だから，仮定より 右辺$=+\infty$ で矛盾。 (q.e.d)

従って，Tは $x\in R$ に$depend$しない。しかも，$t<T$に対しては，常に

Sem. on Probab.
Vol.25-I 1966年
P1-104

$E_x[e^{\varphi_t}]<+\infty$。

上記のことから $k(x)$ を T によって次の三つの class に分けることができる。

$$A_0=\{k(x)\ ;\ T=0\}$$

$$A_f=\{k(x)\ ;\ 0<T<+\infty\}$$

$$A_i=\{k(x)\ ;\ T=+\infty\}$$

次に

$$T'=\sup\{t\ ;\ E_x[e^{tk(x_t)}]<+\infty\}$$

とおく。T' は $x\in R$ に depend しない。なぜならば，Lemma 3 の ii) と同様にして，

まず $s<t$ ならば $E_x[e^{sk(x_s)}]\leq E_x[e^{tk(x_t)}]+A$ （A は x に depend するが有限な数）に注意すると

$$\begin{aligned}E_z[e^{tk(x_t)}] &\geqq E_z[e^{tk(x_t)}\ ;\ \sigma_x\leq t-s]\\ &=E_z[E_{\sigma_x}[e^{tk(x_{t-\sigma_x})}]\ ;\ \sigma_x\leq t-s]\\ &\geqq P_z[\sigma_x\leq t-s]\,E_x[e^{sk(x_s)}]+A'\end{aligned}$$

（A' は x に depend するが有限な数）

従って，$k(x)$ を T' によって次の三つの class に分けることができる。

$$B_0=\{k(x)\ ;\ T'=0\}$$

$$B_f=\{k(x)\ ;\ 0<T'<+\infty\}$$

$$B_i=\{k(x)\ ;\ T'=+\infty\}$$

この §では $k(x)$ に次の仮定をおいて考察する。

i) $k(x)$ は実軸上の非負連続関数。

ii) さらに $k(x)$ が $x>0$ で有界でないならば $x_0>0$ があって $x\geq y\geq$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

x_0 を満たす任意の x, y に対し $k(x) \geqq k(y)$.

iii) $k(x)$ が $x<0$ で有界でないならば $x_1>0$ があって $x \leq y \leq -x_1$ を満たす任意の x, y に対し $k(x) \geqq k(y)$.

仮定 ii), iii) は $k(x)$ が有界でない時は単調に増大することを要求している。

Theorem 3. $k(x)$ に対する仮定 i) ~ iii) の下で

i) $A_0 = B_0$

ii) $A_f = B_f$

iii) $A_i = B_i$

証明 $g(t, x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ とおく。

T, T' は path の出発点に depend しないから，原点から出発すると仮定して一般性を失わない。

$$E_0[e^{\varphi_t}] = E_0[e^{\varphi_{\frac{t}{2}}} E_{x_{\frac{t}{2}}}[e^{\varphi_{\frac{t}{2}}}]]$$

$$\geqq E_0[E_{x_{\frac{t}{2}}}[e^{\varphi_{\frac{t}{2}}}]]$$

$$\geqq E_0[E_{x_{\frac{t}{2}}}[e^{\varphi_{\frac{t}{2}}}]; \ |x_{\frac{t}{2}}| \geq max(x_0, x_1)]$$

$$\geqq E_0[E'_{x_{\frac{t}{2}}}[e^{\varphi_{\frac{t}{2}}}; \ |x'_u - x_{\frac{t}{2}}|_{0<u<\frac{t}{2}} < \delta]; \ |x_{\frac{t}{2}}| \geq max(x_0, x_1)]$$

仮定 ii) iii) より

$$= E_0[e^{\frac{t}{2}k(x_{\frac{t}{2}}-\delta)}; \ x_{\frac{t}{2}} \geq max(x_0, x_1)] \cdot P$$

$$+ E_0[e^{\frac{t}{2}k(x_{\frac{t}{2}}+\delta)}; \ x_{\frac{t}{2}} \leq -max(x_0, x_1)] \cdot P$$

ここで $P = P_u[|x_s - u| < \delta \ \ 0<s<\frac{t}{2}] = constant > 0$

$$= P \cdot (E_\delta[e^{\frac{t}{2}k(x_{\frac{t}{2}})}] + E_{-\delta}[e^{\frac{t}{2}k(x_{\frac{t}{2}})}]) + C$$

Cは有限な定数（δ, t に depend するが発散することはない）。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

従って $\frac{t}{2} > T'$ とすると

$$E_\delta[e^{\frac{t}{2}k(x_{\frac{t}{2}})}] = +\infty,\quad E_{-\delta}[e^{\frac{t}{2}k(x_{\frac{t}{2}})}] = +\infty$$

従って $E_0[e^{\int_0^t k(x_s)ds}] = +\infty$ 故に $t > T$

すなわち $T \leq 2T'$ (2-1)

次に，逆の評価式を与える。

$$E_0[e^{\int_0^t k(x_s)ds}] \leqq c' + E_0[e^{\int_0^t k(x_s)ds},\ \max_{0<s<t}|x_s| \geqq \max(x_0, x_1)]$$

c' は t に depend するが有界な定数

$$\leqq c' + \int_0^\infty E_0[e^{tk(y)};\ \max_{0<s<t} x_s \in dy]$$

$$+ \int_{-\infty}^0 E_0[e^{tk(y)};\ \min_{0<s<t} x_s \in dy]$$

$$= c' + 2\int_{-\infty}^\infty e^{tk(y)}\, g(t,y)\, dy$$

$$\left(P_0[\max_{0<s<t} x_s \in dy] = 2g(t,y)\,dy \quad [3]\ p.27 \right)$$

$$= c' + 2E_0[e^{tk(x_t)}]$$

従って $t < T'$ とすると $E_0[e^{tk(x_t)}] < +\infty$ 従って $E_0[e^{\int_0^t k(x_s)ds}] < +\infty$ すなわち $t < T$． 故に

$$T \geq T' \qquad (2-2)$$

(2-1) と (2-2) から Theorem 3 の結論を得る． (q.e.d)

Remark. 上の証明からわかるように $T' \leq T \leq 2T'$ なる関係は $k(x)$ に depend しないで成立つ。

Carrier が compact な連続関数 $f(x)$ ($\geqq 0$) に対し

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$\widetilde{T} = \sup\{t\,;\ E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds} f(x_t)] < +\infty\}$$

とおく。$\widetilde{T}$ は T と T' の場合と同様な考察によって $x \in R$ に depend しないことがわかる。定義より明らかに $T \leqq \widetilde{T}$ である。$k(x)$ を $\widetilde{T}$ によって次の三つの class に分ける。

$$\widetilde{A}_0 = \{\,k(x)\ ;\ \widetilde{T} = 0\,\}$$

$$\widetilde{A}_f = \{\,k(x)\ ;\ 0 < \widetilde{T} < +\infty\,\}$$

$$\widetilde{A}_i = \{\,k(x)\ ;\ \widetilde{T} = +\infty\,\}$$

とおく。

<u>Corollary.</u> Theorem 3 と同じ仮定の下で

$$\begin{cases} \widetilde{A}_0 = A_0 \\ \widetilde{A}_f = A_f \\ \widetilde{A}_i = A_i \end{cases}$$

<u>証明</u>

$$\begin{aligned} E_0[e^{\varphi_t} f(x_t)] &= E_0[e^{\varphi_s} E_{x_s}[e^{\varphi_{t-s}} f(x_{t-s})]] \\ &\geqq E_0[E_{x_s}[e^{\varphi_{t-s}} f(x_{t-s})]] \\ &\geqq \int_{x_0}^{\infty} g(s,y)\, E_y[e^{\varphi_{t-s}} f(x_{t-s})]\,dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-x_1} g(s,y)\, E_y[e^{\varphi_{t-s}} f(x_{t-s})]\,dy \end{aligned}$$

$r < t-s$ として

$$\geqq \int_{x_0}^{\infty} g(s,y) E_0[e^{rk(y-\delta)} f(x_{t-s}+y)\,;\ |x_u| \leq \delta,\ 0<u<r]\,dy$$

$$+\int_{-\infty}^{-x_1} g(s,y) E_0[e^{rk(y+\delta)} f(x_{t-s}+y)\,;\ |x_u| \leq \delta,\ 0<u<r]\,dy$$

$$=\int_{x_0}^{\infty} g(s,y)\, e^{rk(y-\delta)} E_0[E_{x_r}[f(x_{t-s-r}+y)]\,;\ |x_u| \leq \delta,\ 0<u<r]\,dy$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$+\int_{-\infty}^{\infty} g(s,y)\,e^{rk(y+\delta)} E_0\left[E_{x_r}[f(x_{t-s-r}+y)];\ |x_u|\leq\delta,\ 0<u<r\right] dy$$

$$=E_0\left[\int_{x_0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,y-\delta)e^{rk(y)} g(t-s-r,\, z-x_r) f(z+y-\delta)\,dz\,dy;\ |x_u|\leq\delta, 0<u<r\right]$$

$$+E_0\left[\int_{-\infty}^{-x_1}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,y+\delta)e^{rk(y)} g(t-s-r,\, z-x_r) f(z+y+\delta)\,dz\,dy;\ |x_u|\leq\delta, 0<u<r\right]$$

$$=E_0\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_0}^{\infty} g(s,y+\delta) g(t-s-r,\, z-x_r-y+\delta) e^{rk(y)}dy\, f(z)\,dz;\ |x_u|\leq\delta, 0<u<r\right]$$

$$+E_0\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{-x_1} g(s,y-\delta) g(t-s-r,\, z-x_r-y-\delta) e^{rk(y)}dy\, f(z)\,dz;\ |x_u|\leq\delta, 0<u<r\right]$$

従って　$r=\dfrac{s(t-s-r)}{t-r}$ を満たすように r と s を定めることができるから

$$\geqq C\int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2r}} e^{rk(y)}dy + C'\int_{-\infty}^{-x_1} e^{-\frac{y^2}{2r}} e^{rk(y)}dy$$

従って　$r>T'$ ならば　$t>\tilde{T}$

従って　Theorem 3 から結論を得る。

上の証明から $\tilde{T}$ が $f(x)$ には depend しないことがわかる。（$\equiv 0$ でなければ）.

Example [3] 5章

$k(x)=|x|^r$ の時，$|x|^r$ は仮定 i) ii) を満たす。この時，$r>\tau$ ならば $T=0$，$0\leq r<\tau$ ならば $T=+\infty$，$r=\tau$ の時は $T=\frac{\pi}{\tau\sqrt{\tau}}$，$\tilde{T}=\frac{\pi}{\sqrt{\tau}}$ である。

Remark.　ある関数 $K(x)$ に対し，A_f に属する $k(x)$ があって，十分大きな $|x|$ に対し　$K(x)\geqq k(x)$ が成り立てば　$t>T$ で $E_x[e^{\int_0^t K(x_s)ds}]=+\infty$。

又は A_f に属する $k(x)$ があって十分大きな $|x|$ に対し $K(x)\leqq k(x)$ が成り立てば　$t<T$ で $E_x[e^{\int_0^t K(x_s)ds}]<+\infty$。

§3. 平均個数の満たす微分方程式

Branching process として §2で取り扱ったのと同じ場合を考える。$k(x)$ は §2 の仮定を満たしているとする。§1 より　$f\in \mathbb{C}^+(R)$ に対し

$$M_x[\check{f}(X_t)]=E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds} f(x_t)] \qquad (x\in R)$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

が成立つ。§2の Theorem 3 の corollaryより $f \geqq \delta > 0$ という仮定は不要であることに注意する。

この関係式によって $e^{-\varphi_t}$ subprocess の semi-group $E_x[e^{-\varphi_t}f(x_t)]$ の代りに $-\varphi_t$ を形式的に φ_t に置き替えた $E_x[e^{\varphi_t}f(x_t)]$ が確率論的意味を持っていることが明らかになった。この§では $E_x[e^{\varphi_t}f(x_t)]$ の解析的性質について論ずる。結果は $e^{-\varphi_t}$-subprocess の場合に成立つ関係式で killing function を形式的に負にしたものに一致するが，より深い結果については知られていないことが多いように思われる。

<u>Lemma 4.</u> $E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds}f(x_t)]$ は $t<T$ で x について連続（$x \in R$, $f \in \mathcal{C}^+(R)$）.

<u>証明</u> Brown運動は spacial homogeneous だから

$$E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds}f(x_t)] = E_0[e^{\int_0^t k(x_s+x)ds}f(x_t+x)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_0[e^{\int_0^t k(x_s+x)ds}f(x_t+x);\, n < \max_{0<s<t}|x_s| \leqq n+1] \qquad (3-1)$$

集合 $\{n < \max_{0<s<t}|x_s| \leq n+1\}$ の上では $e^{\int_0^t k(x_s+x)ds}f(x_t+x)$ は有界で $k(x)$, $f(x)$ 共に連続関数。従って

$$E_0[e^{\int_0^t k(x_s+x)ds}f(x_t+x);\ n < \max_{0<s<t}|x_s| < n+1]$$

は x について連続。さらに $k(x)$ は§2の仮定から十分大きな $|x|$ に対しては単調であるから，級数（3-1）は x について一様収束する。従って結論を得る。

$$e(t,x,y) = E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds} \mid x_t = y]\, g(t, x-y)$$

とおくと

$$E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds}f(x_t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e(t,x,y)f(y)\,dy$$

と書ける。Brown 運動においては $P_x[\cdot \mid x_t = y]$ と $P_y[\cdot \mid x_t = x]$ は identical in law であるから

$$e(t,x,y) = e(t,y,x)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

Lemma 4 から $e(t,x,y)$ は x, y について連続と考えてよい。(t についての連続性は§1の積分方程式(1-2)から従う)。

<u>Theorem 4.</u> $e(t,x,y)$ は parabolic differential equation

$$\text{i)}\quad \frac{\partial v_t(x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_t(x)}{\partial x^2} + k(x)v_t(x) \tag{3-2}$$

$$\text{ii)}\quad \lim_{t\downarrow 0} v_t(x) = f(x) \qquad f\in C^+(R)$$

$$\text{iii)}\quad v_t(x) \geqq 0 \qquad (t\geq 0,\ x\in R)$$

の基本解である。($t<T$)

<u>証明</u>

$$E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds} f(x_t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e(t,x,y)f(y)dy \equiv H_t f(x)$$

とおくと,マルコフ性から

$$H_{s+t}f(x) = H_s(H_t f)(x) \quad .$$

従って,$H_{s+t}f(x)$ は§1の(1-2)式で f の代りに $H_t f(x)$ を代入した積分方程式を満たす。故に

$$H_{s+t}f(x) = E_x[e^{-\int_0^s k(x_u)du} H_t f(x_s)] + 2\int_0^s E_x[e^{-\int_0^u k(x_v)dv} k(x_u)H_{t+s-u}(x_u)du]$$

従って

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{H_{t+\Delta t}f(x) - H_t f(x)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{E_x[e^{-\int_0^{\Delta t}k(x_s)ds}H_t f(x_{\Delta t})] - H_t f(x)\right\}$$

$$+ \lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{2\int_0^t E_x[e^{-\int_0^u k(x_s)ds}k(x_u)H_{t+\Delta t-u}f(x_u)]du\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_t f(x) - k(x)H_t f(x)\right\} + 2k(x)H_t f(x)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_t f(x) + k(x)H_t f(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

さらに $t<T$ ならば（$f(x)$ が carrier compact ならば $t<T'$）

$$\lim_{t\downarrow 0} H_t f(x) = \lim_{t\downarrow 0} E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds} f(x_t)] = f(x)$$

$$H_t f(x) = E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds} f(x_t)] \geqq 0 \quad .$$

(q. e. d)

次に方程式（3-2）の uniquness を論ずる。

<u>Lemma 5.</u>　（3-2）を満たす任意の解を $v_t(x)$ とすると

$$v_t(x) \geqq H_t f(x) \qquad (t < \sup\{t;\ v_t(x) < +\infty\})$$

<u>証明</u>

$$e^n(t,x,y)dy = E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds};|x_s| \leq n,\ s \leq t,\ x_t \in dy] \quad (|x|<n)$$

とおくと，$e^n(t,x,y)$ は次の性質をもつ。

(i) $\lim_{x\to\pm n} e^n(t,x,y) = 0$

(ii) $\lim_{t\downarrow 0}\int_{-n}^{n} e^n(t,x,y)f(y)dy = f(x) \qquad f \in C^+(R)$

(iii) $e^n(t,x,y) \uparrow e(t,x,y) \qquad (n\uparrow +\infty)$

(iv) $e^n(t,x,y) = e^n(t,y,x)$

(v) $e^n(t,x,y) = e(t,x,y) - \int_0^t E_x[e^{\int_0^s k(x_u)du}\, e(t-s,x_s,y);\ \sigma_n \in ds]$

$$(\sigma_n = \inf\{s>0;\ |x_s| \geq n\})$$

性質 iv) と v) と Theorem4 より $e^n(t,x,y)$ は

$$\begin{cases} \text{(i)} & \dfrac{\partial v_t(x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} v_t(x) + k(x) v_t(x) \\ \text{(ii)} & v_t(x)\big|_{x=\pm n} = 0 \qquad (t>0) \\ & \lim_{t\downarrow 0} v_t(x) = f(x) \qquad (f(x) \in C^+(R)) \\ \text{(iii)} & v_t(x) \geqq 0 \qquad (t>0,\ |x| \leq n) \end{cases}$$

の基本解である。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

従って $v_t(x)$ を (3-2) を満たす任意の解とすると

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{-n}^{n} e^n(t-s,x,y)\,v_s(y)\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-n}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y^2}e^n(t-s,x,y)\,v_s(y)\,dy-\int_{-n}^{n}k(y)e^n(t-s,x,y)\,v_s(y)\,dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-n}^{n}e^n(t-s,x,y)\frac{\partial^2 v_s(y)}{\partial y^2}\,dy+\int_{-n}^{n}k(y)e^n(t-s,x,y)\,v_s(y)\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}e^n(t-s,x,y)\cdot v_s(y)\Big|_{y=-n}^{n}\geqq 0 \qquad (3-3)$$

従って $\int_{-n}^{n}e^n(t-s,x,y)\,v_s(y)\,dy$ は s の関数として $(0,t)$ で単調増加だから,

$$0\leqq v_t(x)-\int_{-n}^{n}e^n(t-s,x,y)\,v_s(y)\,dy$$

$s\downarrow 0$ とすると

$$0\leqq v_t(x)-\int_{-n}^{n}e^n(t,x,y)\,f(y)\,dy$$

$n\uparrow+\infty$ として $e^n(t-s,x,y)$ についての性質 (iii) を用いると

$$0\leqq v_t(x)-\int_{-\infty}^{\infty}e(t,x,y)\,f(y)\,dy$$

故に $v_t(x)\geqq\int_{-\infty}^{\infty}e(t,x,y)\,f(y)\,dy=H_tf(x)$

<u>*Theorem* 5</u>　(3-2) を満たす解は *unique* である。

<u>証明</u>　*Lemma* 5 より $v_t(x)-H_tf(x)\equiv\omega_t(x)$ とおくと, $\omega_t(x)$ は,

$$\begin{cases}\text{(i)} & \dfrac{\partial\omega_t(x)}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\omega_t(x)}{\partial t}+k(x)\omega_t(x)\\[2mm]\text{(ii)} & \lim\limits_{t\downarrow 0}\omega_t(x)=0\\[2mm]\text{(iii)} & \omega_t(x)\geqq 0\end{cases}$$

を満たす。従って $\omega_t(x)\leqq 0$ $(t<\sup\{t;\ v_t(x)<+\infty\},\ x\in R)$ をいえばよい。そのためにまず次の *lemma* を用意する。

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

Lemma 6.

(i) $z_s(n) \leqq C\, e^{\frac{4n^2}{t-s}} z_t(0)$

(ii) $\left| \frac{\partial}{\partial y} e^n(t, x, y)\Big|_{y=\pm n} \right| \leqq \frac{2(n-x)}{t}\, g(t, n-x)\, e^{t k(n)}$

ここで

$$z_t(x) = \int_0^t \Big[\omega_s(x) + 2\int_0^x dy \int_0^y k(z)\,\omega_s(z)\,dz\Big] ds$$

$$+ \int_0^t \Big[\omega_s(-x) + 2\int_0^{-x} dy \int_0^y k(z)\,\omega_s(z)\,dz\Big] ds$$

証明 i)

$$\frac{\partial z_t(x)}{\partial t} \geqq \omega_t(x) + \omega_t(-x)$$

$$= \int_0^t \Big[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega_s(x) + k(x)\,\omega_s(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega_s(-x) + k(-x)\,\omega_s(-x)\Big] ds$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z_t(x)}{\partial x^2} \geqq 0 \qquad (\because\ \omega_t(x) + \omega_t(-x) \geqq 0 \text{ だから})$$

$z_t(x) \geqq 0$ かつ $\lim_{t \downarrow 0} z_t(x) \equiv 0$ だから，

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{-n}^{n} g(t-s,\, x-y)\, z_s(y)\, dy$$

$$\geqq \int_{-n}^{n} \Big\{-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} g(t-s,\, x-y),\ z_s(y) + g(t-s,\, x-y)\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} z_s(y)\Big\} dy$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} g(t-s, x-y)\cdot z_s(y)\Big|_{y=-n}^{n} + \frac{1}{2} g(t-s, x-y)\,\frac{\partial}{\partial y} z_s(y)\Big|_{y=-n}^{n}$$

$\geqq 0$ （$|x| \to +\infty$ の時 $z_t(x)\uparrow$ の部分だけ考えればよい）

従って

$$z_t(0) \geqq \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s,\, y)\, z_s(y)\, dy$$

$$\geqq \int_n^{2n} g(t-s,\, y)\, z_s(y)\, dy$$

$$> \frac{1}{c}\, e^{-\frac{4n^2}{t-s}}\, z_s(n)$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I　1966年
P1-104

ii) $e^n(t,x,y)$ の定義より

$$e^n(t,x,y) \leqq e^{tk(n)} P_x[x_s \leqq n,\ s \leqq t \mid x_t = y]\, g(t, x-y)$$

従って

$$-\left.\frac{\partial e^n(t,x,y)}{\partial y}\right|_{y=n} \leqq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{e^{tk(n)}}{\varepsilon}\left[\frac{e^{-\frac{(n-x-\varepsilon)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} - \frac{e^{-\frac{(n-x+\varepsilon)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\right]$$

$$= e^{tk(n)}\,\frac{2(n-x)}{t}\, g(t, x-n)$$

$y=-n$ の時も同様である。　　(q.e.d)

Theorem 5 の証明を続ける。

再び (3-3)式を $\omega_t(x)$ について適用すると

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{-n}^{n} e^n(t-s,x,y)\,\omega_s(y)\,dy = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} e^n(t-s,x,y)\,\omega_s(y)\Big|_{y=-n}^{n}$$

$\lim_{t \downarrow 0} \omega_t(x) \equiv 0$ だから

$$\omega_t(x) = \int_0^t -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} e^n(t-s,x,y)\cdot\omega_s(y)\Big|_{y=-n}^{n} ds$$

Lemma 6 より

$$\omega_t(x) \leqq e^{tk(n)}\frac{4n}{t}\, g\left(t,\frac{n}{2}\right)\int_0^t \{\omega_s(n) + \omega_s(-n)\}\,ds$$

$$\leqq e^{tk(n)}\frac{4n}{t}\, g\left(t,\frac{n}{2}\right) z_t(n)$$

$$\leqq e^{tk(n)}\frac{4n}{t}\, g\left(t,\frac{n}{2}\right) C\, e^{\frac{4n^2}{t'-t}}\, z_{t'}(0) \qquad (t' > t) \qquad (3-4)$$

$k(n)$ は仮定から，充分大きな n に対し単調増加 ($k(n) < k(-n)$ の時は $k(n)$ の代りに $k(-n)$ を用いて評価すればよい)。さらに $\int_{-\infty}^{\infty} e^{tk(x)} g(t,x)\,dx < +\infty$ だから，(3-4)の右辺の $n \to \infty$ とした時の下極限は 0 となる。従って

$$\omega_t(x) \equiv 0 \qquad t < t' < \sup\{t;\ v_t(x) < +\infty\}$$

この操作を続けてゆけば，結局

$$\omega_t(x) \equiv 0 \qquad t < \sup\{t;\ v_t(x) < +\infty\} \qquad (q.e.d)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

Remark 1. §2，§3で得られた結果は例えば $k(x)=k(|x|)$ と表わされて $k(|x|)$ が§2の仮定を満たせば容易に多次元の場合に拡張される。

証明の要点は不等式

$$P_0^N[x_s^N \in \Gamma_b;\ 0<s<t] - P_0^N[x_s^N \in \Gamma_a,\ 0<s<t]$$
$$\leqq N P_0\left[\max_{0<s<t} |x_s| \in \frac{b-a}{2}\right]$$

にある。

ここで (x_t^N, P_0^N) は N 次元Brown運動，Γ_b は原点を中心とした一辺 b の立方体。

Remark 2. Ikebe-Kato [4] に依れば

$$E_x[e^{\int_0^t k(x_s)ds}] < +\infty \quad \text{ならば} \quad L = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + k(x)$$

は *essential self-adjoint operator* であるが逆は成りたたない。

文　献　表

[1] 池田．長沢．渡辺(信)； *Sem. on Prob. Vol. 23-Ⅰ.*

[2] 〃 ； 〃 *Vol. 23-Ⅱ.*

[3] Ito-McKean ; *Diffusion processes and their sample paths. Springer (1965).*

[4] Ikebe-Kato ; *Uniquness of the self-adjoint extention of singular elliptic differential operator. Rational Mechanics and Analysis (1962).*

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

第4章 Branching Transport Processes

§1. はじめに

ある媒体の中を運動する粒子を考えよう。粒子は運動中あるメカニズムによって吸収，衝突，散乱乃至分裂等を行ない，そのエネルギー，速度，個数等に変化を生ずるものとしよう。このような運動の変化の過程は確率法則に支配されるものと考えられている。よく知られた例として，運動粒子の衝突間隔が指数分布に従う場合が典型的である。例えば，直線上を等速度運動する粒子を考えよう。粒子は指数分布に従う時間での後死滅し，直ちに反対方向に同じ速さで進む新しい粒子を発生し以下同じように運動を続けるものとする。これは死滅した場所で衝突による方向転換乃至散乱したと考えることもできる。この型の運動は，*Gelfand*, *Florov*, *Chenzov* [4] で電信方程式のモンテカルロ法による解法と関連して考察された。時刻 t における粒子の位置 X_t は確率過程を定めるが，さらに t での粒子の運動方向をあらわす変数 θ_t を導入して運動の状態を (X_t, θ_t) と記述することにより *Markov* 過程として定式化できることが既に [18] で示された。また同じ型の運動を考え，粒子が死滅した場所で左および右方向に進む新粒子が各々1個ずつ生まれる場合，すなわち2個の粒子に分枝する場合には2粒子型の *branching transport process* として [10] で定式化された。このように所謂 *transport problem* に関連した粒子の運動は *Markov* 過程の枠組の中で把えられる場合が多く，*transport problem* へのこのような立場からのアプローチの可能性を与えているように思われる。

このノートでは主として上記 *Gelfand*, *Florov*, *Chenzov* [4] で扱われた場合の運動を中心として *Markov* 過程としての *transport process* の解析を行なう。主たる目標は，§5の *branching transport process* であるが，そのための準備と，またそれ自体の興味もあって，分枝しない *transport process* について §§.2-4 で幾分くわしい結果をのべる。

§2では，与えられた *cross section* をもって等速度運動をする粒子の散乱現象を一般的に定式化し，とくに1次元の運動（*Rod model*）の場合について *Boltzmann* の方程式を *Markov* 過程論の立場からみちびく。この節の終りには典型的な場合の例をあげたが，これからもわかるように§2での定式化によって本質的には *Wing* [19] で取扱われている *Time-dependent transport*

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

の場合は統一的にとらえることができる。しかし個々の場合のより進んだ性質の解析に関しては Wing [19]またはそこにあげられた文献を参照されたい。なおこの節での定式化は境界条件はないものとした。

§3では，§5で non-branching part となる transport process を考え，Gelfand, Florov, Chenzov [4] で取扱われた電信方程式との関係をくわしくのべる。

§4では，極限的な粒子の状態すなわち速さが ∞ に，mean free path が 0 に収束する場合の transport process が Markov 過程論的には Brown 粒子であることを示す。またこのような事実によって熱方程式の初期値問題の解の近似法の一つがみちびかれる。

§5では，2粒子型の branching transport process の極限移行によって Brown 粒子の同じ型の分枝が得られることを示す。この節の極限定理は最も弱い形のものであるが，何らかの意味でより強い収束が云えることが望ましい。この例から一般に branching Markov processes の系列が再び branching Markov process へ収束する一般的な極限定理を考える時に考慮すべき一端の事情がわかるであろう。

§2. Non-branching transport processes.

n 次元 Euclid 空間 R^n の点 x から出発し速度 $V(\theta)$ $(\neq 0)$ で R^n 内を等速度運動している粒子を考えよう。粒子は指数分布をするあるランダムな時間 τ の後，分布 $\Pi(\theta, d\theta')$ に従って θ' を定め，速度を $V(\theta)$ から $V(\theta')$ に変え，点 $x+\tau V(\theta)$ から新に出発して前と同じように運動を続けるものとする。従ってこの型の運動では粒子の分枝はなくその散乱のみが考えられている。この節ではこの型の粒子の運動を記述する Markov 過程を考えて，それを Non-branching transport process と呼ぶことにする。

以下に用いる Markov 過程の一般論については Dynkin [2] を参照されたい。また次のような記号は断わりなく用いる。

S を位相空間とするとき，

- $\mathcal{B}(S)$ ： S の位相的 Borel 集合体。
- $\mathbb{B}(S)$ ： $\mathcal{B}(S)$ 可測な有界実函数の全体。
- $\mathbb{C}(S)$ ： S 上の有界連続函数の全体。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$B(S) \ni f$ に対してそのノルムを $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$ と定義すれば $\mathbb{B}(S), \mathbb{C}(S)$ はいずれもノルム $\| \ \|$ に関して Banach 空間となる。

2.1. 構成. non-branching transport process の構成を考えよう。そのために次の一般論を用意しておこう。

$X = (x_t, +\infty, N_t, P_x)$ を semi-compact な state space $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の右連続な強 Markov 過程とする。$A_t = A_t(w)$ を R^n の値をとる X の右連続なベクトル値 additive functional:

(i) $0 \le t$, $\Lambda \in \mathcal{B}(R^n) \Rightarrow \{\omega; A_t(w) \in \Lambda\} \in N_t$,

(ii) ${}^\forall x \in S$ に対して $P_x(\tilde{\Omega}) = 1$ なる basic space Ω の可測集合 $\tilde{\Omega}$ がとれて, $\omega \in \tilde{\Omega}$ ならば

$$A_t(\omega) + \theta_t A_s(\omega) = A_{t+s}(\omega)^{1)}, \quad 0 \le s, t,$$

(iii) $\omega \in \tilde{\Omega}$ に対して $A_t(\omega)$ は t について右連続とする。

$E = R^n \times S$, $\mathcal{B}(E)$: E の位相的 Borel 集合体とし, $a \in R^n$, $x \in S$ に対して

$$(2.1) \qquad \mathfrak{z}_t^{(a)} = (a + A_t, x_t) \ (\in E)$$

$$(2.2) \qquad P(t, (ax), \Gamma) = P_x\{\mathfrak{z}_t^{(a)} \in \Gamma\}, \quad t \ge 0, \quad \Gamma \in \mathcal{B}(E)$$
$$= P^{\mathfrak{z}}(B)$$

とおく。ただし

$$\mathfrak{z} = (a, x) \qquad B = \{\omega;\ \mathfrak{z}_t^{(a)} \in \Gamma\}$$

である。

Lemma 2.1 σ を有限値をとる X の Markov time とすれば

$$(2.3) \qquad P^{\mathfrak{z}}\{\mathfrak{z}_{t+\sigma}^{(a)} \in \Gamma / N_\sigma\} = P(t, \mathfrak{z}_\sigma^{(a)}, \Gamma)$$
$$= P^{\mathfrak{z}}\{\mathfrak{z}_{t+\sigma}^{(a)} \in \Gamma / \mathfrak{z}_\sigma^{(a)}\}, \quad (a.e.\ P_x)$$

である.

(証明) $N_\sigma \ni A$ とすれば, X の強 Markov 性より

---

1) θ_t は X の shift operator.

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$P^{\mathfrak{z}}\{\mathfrak{z}^{(a)}_{t+\sigma}\in\Gamma, A\}=P_x\{(a+A_\sigma+\theta_\sigma A_t, \theta_\sigma x_t)\in\Gamma, A\}$$

$$=\int_{b\in R^n}P_x\{\theta_\sigma\mathfrak{z}^{(b)}_t\in\Gamma,\ a+A_\sigma\in db,\ A\}$$

$$=\int_{b\in R^n}E_x\{P_{x_\sigma}(\mathfrak{z}^{(b)}_t\in\Gamma);\ a+A_\sigma\in db,\ A\}$$

$$=\int_E P_y(\mathfrak{z}^{(b)}_t\in\Gamma)\,P_x\{\mathfrak{z}^{(a)}_\sigma\in d(b,y), A\}$$

$$=E_x\{P(t,\mathfrak{z}^{(a)}_\sigma,\Gamma);\ A\}$$

となり始めの等号がなりたち，他も同様であるから証明が終る。

$s\geqq 0$ とし，(2.3) で $\sigma=s$ とすれば

$$P^{\mathfrak{z}}\{\mathfrak{z}^{(a)}_{t+s}\in\Gamma/N_s\}=P(t,\mathfrak{z}^{(a)}_s,\Gamma)=P^{\mathfrak{z}}\{\mathfrak{z}^{(a)}_{t+s}\in\Gamma/\mathfrak{z}^{(a)}_s\}\quad(a.e.\ P_x)\tag{2.4}$$

を得る。よって Dynkin [2] §3.1 により次がなりたつ。

<u>Proposition 2.1</u>　$P(t,(a,x),\Gamma)$ は E 上の推移確率で，system

$$Z^{\mathfrak{z}}=(\mathfrak{z}^{(a)}_t, +\infty, N_t, P^{\mathfrak{z}}),\quad \mathfrak{z}=(a\,x)\in E$$

は Dynkin の意味の Markov family of random functions である。さらにこの system の定める Markov 過程を $Z=(\mathfrak{z}_t, +\infty, M_t, P_{\mathfrak{z}})$ とするとき，Z は有限値をとる Markov time に対して強 Markov 性をもつ。

さて，以下では上で述べた X, A_t として特に次のようなものをえらぶ。

$\Theta=(\theta_t, +\infty, N_t, P_\theta)$ は semi-compact $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の Markov step process で次をみたすものとする。

(Θ_1).　各 $\theta\in S$ は stable state すなわち

$$\tau_0=\inf\{t;\ \theta_t\neq\theta_0\}\tag{2.5}$$

とおくとき，$P_\theta(\tau_0>t)=e^{-\lambda_\theta t}$ であるが，$0<\lambda_\theta<+\infty$ をみたす。さらに $\lambda_\theta=\lambda(\theta)$ は θ 可測とする。

(Θ_2).　θ_t は有限時間に有限回しか jump をしない。

(Θ_3).　$\Pi(\theta,\Gamma)=P_\theta(\theta(\tau_0)\in\Gamma)$,　$\Gamma\in\mathcal{B}(S)$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

とおくとき，Γについては確率分布，θについて可測である。

次に

$$\nabla(\theta)=(\nabla^1(\theta),\cdots,\nabla^n(\theta)):\ S\ni\theta\to\nabla(\theta)\in R^n-\{0\}$$

なる可測写像をとり，Θの連続なR^n値 *additive functional* を

$$(2.6)\qquad X_t=\int_0^t\nabla(\theta_s)\,ds\quad(\in R^n)$$

で定義する。さらに

$$(2.7)\qquad X_t^{(x\theta)}=x+X_t=x+\int_0^t\nabla(\theta_s)\,ds\ ,\qquad x\in R^n$$

$$(2.8)\qquad z^{(x\theta)}=(X_t^{(x\theta)},\ \theta_t)$$

とおけば，*Proposition* 2.1 より $E=R^n\times S$ 上の *Markov family of random functions*

$$Z^z=(z^{(x\theta)},\ +\infty,\ N_t,\ P^z),\qquad z=(x,\theta)$$

からE上の右連続な有限値 *Markov time* に対して強 *Markov* 性をもつ *Markov* 過程 $Z=(z_t,+\infty,M_t,P_z)$ が定まる。これを（速度$\nabla(\theta)$の）n次元 *transport process* と呼ぶ。

Markov 過程Zはこの節の始めに述べた運動の模型で，今粒子の速度を粒子の"*type*"と呼ぶことにすれば，θ_tによって時刻tにおける *type* とその散乱法則$\pi(\theta,d\theta')$，散乱と散乱の時間間隔が決まる。$X_t^{(x\theta)}$は *type* θの粒子がxから出発したときの，tでの位置をあらわす。

2.2. Characteristic operator　n次元 *transport process* $Z=(z_t,+\infty,M_t,P_z)$ の *characteristic operator* $\mathfrak{A}$ を求めよう。

$(x,\theta)\in E$とし，$x\in R^n$を通る直線をℓ_θ: $x+\lambda\nabla(\theta)$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$とし，$\left(\frac{\partial f}{\partial \ell_\theta}\right)_x$で$f(x)$の，$x$における$\ell_\theta$方向の微分係数を表わす。また$|\nabla(\theta)|$はベクトル$\nabla(\theta)$の$R^n$でのノルムとする。このとき次がなりたつ。

Proposition 2.2　$f(x,\theta)\in\mathbb{B}(E)$が各$\theta$を固定するとき，$x$について$C^1$級ならば

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$(2.9)\qquad \mathfrak{A}f(x,\theta)=|\nabla(\theta)|\left(\frac{\partial f}{\partial \ell_\theta}\right)_x-\lambda(\theta)f(x,\theta)+\lambda(\theta)\int_S f(x,\varphi)\Pi(\theta,d\varphi)$$

である。

（証明）。 (x,θ) の近傍を $U_\varepsilon=\nabla_\varepsilon\times\overline{W}_\varepsilon$ とする。ここに ∇_ε, $\overline{W}_\varepsilon$ は R^n, S のそれぞれ距離に関する x,θ の ε 近傍である。τ_0 を(2.5)で定義された θ_t の first jumping time, τ_ε を Z の U_ε からの first exit time とする。Z の path が R^n の折れ線であることより，

$$(2.10)\qquad \tau_\varepsilon=\inf\{t\,|\,z_t^{(x,\theta)}\notin U_\varepsilon\}$$

$$=\inf\left\{t\,\middle|\,X_t^{(x,\theta)}\notin\left(x-\varepsilon\frac{\nabla(\theta)}{|\nabla(\theta)|},\ x+\varepsilon\frac{\nabla(\theta)}{|\nabla(\theta)|}\right)^{2)}\right\}$$

$$=\begin{cases}\tau_0 & \tau_0<\varepsilon/|\nabla(\theta)|\\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{|\nabla(\theta)|} & \tau_0\geqq\varepsilon/|\nabla(\theta)|\end{cases}$$

となる．従って

$$(2.11)\qquad z^{(x,\theta)}(\tau_\varepsilon)=\begin{cases}(x+\tau_0\nabla(\theta),\ \theta(\tau_0)) & \tau_0<\varepsilon/|\nabla(\theta)|\\[2ex] (x+\varepsilon\nabla(\theta),\ \theta) & \tau_0\geqq\varepsilon/|\nabla(\theta)|\end{cases}$$

となり，つぎの結果がえられる．

$$\mathfrak{A}f(x,\theta)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{E_{(x\theta)}\{f(z(\tau_\varepsilon))\}-f(x,\theta)}{E_{(x\theta)}\{\tau_\varepsilon\}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{f(x+\varepsilon\nabla(\theta),\theta)e^{-\lambda_\theta\,\varepsilon/|\nabla(\theta)|}-f(x,\theta)+\int_S\int_0^{\varepsilon/|\nabla(\theta)|}f(x+t\nabla(\theta),\varphi)\lambda_\theta e^{-\lambda_\theta t}\Pi(\theta,d\varphi)}{\int_0^{\varepsilon/|\nabla(\theta)|}\lambda_\theta t e^{-\lambda_\theta t}dt+\frac{\varepsilon}{|\nabla(\theta)|}e^{-\lambda_\theta\,\varepsilon/|\nabla(\theta)|}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}|\nabla(\theta)|\frac{1}{\varepsilon}\Big[\{f(x+\varepsilon\nabla(\theta),\theta)-f(x,\theta)\}e^{-\lambda_\theta\,\varepsilon/|\nabla(\theta)|}$$

$$+f(x\theta)\{e^{-\lambda_\theta\varepsilon/|\nabla(\theta)|}-1\}+\lambda_\theta\int_S\int_0^{\varepsilon/|\nabla(\theta)|}f(x+t\nabla(\theta),\varphi)e^{-\lambda_\theta t}\Pi(\theta,d\varphi)\Big]$$

---

2) ( )は ℓ_θ 上の開区間をあらわす。

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$= |\nabla(\theta)| \left(\frac{\partial f}{\partial \ell_\theta}\right)_x - \lambda_\theta f(x,\theta) + \lambda_\theta \int_S f(x,\varphi)\Pi(\theta, d\varphi) \qquad (終)$$

2.3. *Infinitesimal operator.* Zを1次元の transport process とし次の記号を導入する。

T_t : Zの半群,

G_α : Zの resolvent

A : T_t の Hille-Yosida の意味の infinitesimal operator (generator),

$\mathcal{D}_A$: Aの定義域

$\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}(E)$, $\mathbb{B}_0 = \{f \in \mathbb{B}(E);\ s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} T_t f = f\}$[3] とおけば $\overline{\mathcal{D}}_A$[4]$= \mathbb{B}_0$ 。さらに次の仮定をもうける。

(A_1) $c > 0$ が存在して

(2.12) $\qquad c(\theta) \equiv |\nabla(\theta)| \geq c, \qquad \theta \in S$.

(A_2) $\lambda > 0$ が存在して

(2.13) $\qquad 0 < \lambda_\theta \leq \lambda, \qquad \theta \in S$.

なお, $\lambda(\theta)$, $\Pi(\theta, \Gamma)$, $\nabla(\theta)$ はθに関する可測性が仮定されている。(c.f (Θ_1), (Θ_3),).

このとき次がなりたつ。

Theorem 2.1 $\quad \mathcal{D}^0 = \mathcal{D}_A \cap G_\alpha(\mathbb{C}(E))$ とおき, $g \in \mathcal{D}^0$ とする. すなわち, $g = G_\alpha f$, $f \in \mathbb{C}(E) \cap \mathbb{B}_0$ かつ $g \in \mathcal{D}_A$ ならば

(2.14) $$Ag(x\ \theta) = \nabla(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}(x,\theta) - \lambda(\theta) g(x,\theta) + \lambda(\theta)\int_S g(x,\varphi)\Pi(\theta, d\varphi)$$

である.

証明は長くなるので, いくつかに分けて行なう. 次の Lemma が基本的である。

Lemma 2.2.

(i) $f \in \mathbb{B}(E)$ならば $G_\alpha f(x,\theta)$ はxについて有界連続である。

---

3) $s\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$

4) $\overline{\mathcal{D}}_A = \mathcal{D}_A$ の $\|\cdot\|$ による閉包.

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

(ii) $f(x,\theta)$ が x について有界連続ならば $g(x,\theta)=G_\alpha f(x,\theta)$ は x について C^1 級で，$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x\ \theta)$ は x について有界連続である。

このLemmaを仮定すれば次の結果がなりたつ。

Theorem 2.2. S を高々可算集合とし，位相は離散位相とする。このとき

(i) T_t は $\mathbb{C}(E)$ を不変にする。

(ii) A' を T_t の C-infinitesimal operator とすれば $g\in\mathcal{D}_{A'}$ に対して (2.14) がなりたつ。

Remark. T_t を $C(E)$ 上の半群とみたときの Hille-Yosida の infinitesimal operator を C-infinitesimal operator という。

（Theorem 2.2 の証明）。 1°. $f\in\mathbb{C}(E)$ とする。(2.7)，(2.8) より

$$T_t f(x,\theta)=E_\theta\{f(x+X_t,\ \theta_t)\}$$

であり，S の位相は離散的であるから，$T_t f\in\mathbb{C}(E)$，すなわち T_t は $\mathbb{C}(E)$ 上の半群である。

2°. $(E,\mathcal{B}(E))$ は semi-compact で Z は右連続であるから，Dynkin [2]，Theorem 5.5 より $A'\subseteq\mathfrak{A}$ である。今 $g\in\mathcal{D}_{A'}$ とすれば，$g=G_\alpha f$，$f\in\mathbb{C}(E)$ とかけ，Lemma 2.2 (ii) より $g(x,\theta)$ は x について C^1 級である。よって $A'g(x\ \theta)=\mathfrak{A}\,g(x\ \theta)$ に Proposition 2.2 を用いて，1次元のときには $|\nabla(\theta)|\left(\dfrac{\partial g}{\partial l_\theta}\right)_x=\nabla(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\theta)$ であることに注意すれば，$A'g$ に対して (2.14) が得られる。（終）

さて，Lemma 2.2 の証明を考えよう。そのために uniform motion に関する性質が必要なので，Dynkin [2]，§2.15 の結果を次に要約しておこう。

(a) speed $c>0$ の right (left) uniform motion の resolvent を $R_\alpha=R_\alpha^+(R_\alpha^-)$，$A=A^+(A^-)$ をその Hille-Yosida の意味の infinitesimal operator とする。$\mathcal{D}_{A^+}(\mathcal{D}_{A^-})$ をその定義としよう。$R_\alpha^\pm(x,\Gamma)=R_\alpha^\pm\chi_\Gamma(x)$ ($\chi_\Gamma=\Gamma$ の特性函数）とおけば

$$R_\alpha^\pm(x,\Gamma)=\int_\Gamma r_\alpha^\pm(x,y)\,dy \tag{2.15}$$

$$r_\alpha^+(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}e^{-\frac{\alpha}{c}(y-x)} & y>x\\ 0 & y\leqq x\end{cases} \tag{2.16}$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$(2.17)\qquad r_\alpha^-(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{c}e^{-\frac{\alpha}{c}(x-y)} & x>y\\ 0 & x\leq y\end{cases}$$

したがって

$$(2.18)\qquad r_\alpha^+(y,x)=r_\alpha^-(x,y)$$

$$(2.19)\qquad R_\alpha^+f(x)=\int_{R^1}r_\alpha^+(x,y)f(y)dy=\frac{1}{c}e^{\frac{\alpha}{c}x}\int_x^{+\infty}f(y)e^{-\frac{\alpha}{c}y}dy$$

$$R_\alpha^-f(x)=\int_{R^1}r_\alpha^-(x,y)f(y)dy$$

で

$$(2.20)\qquad R_\alpha^\pm:\ \mathbb{B}(R^1)\longrightarrow\mathbb{C}(R^1),$$

$$R_\alpha^\pm:\ \mathbb{C}(R^1)\longrightarrow\mathbb{C}'(R^1)\equiv\{f\in\mathbb{C}(R^1);\ f\text{ は }C^1\text{級},\ f'\text{ は有界}\}$$

である。

$$(2.21)\qquad \mathcal{D}_{A^\pm}=\{f;\ f\text{ は有界一様連続かつ }f'\text{ が存在して有界一様連続}\}$$

で

$$(2.22)\qquad \mathcal{D}_{A^\pm}\ni f\implies A^\pm f(x)=\pm cf'(x)$$

(b).

$$(2.21)\qquad c_\theta=|\nabla(\theta)|$$

とおき，*speed* c_θ の *right* (*left*) *uniform motion* に対する *Green density* (2.16) ((2.17)) を $r_\alpha^+(x,y\,|\,\theta)$ ($r_\alpha^-(x,y\,|\,\theta)$) であらわし，

$$(2.22)\qquad r_\alpha(x,y\,|\,\theta)=\begin{cases}r_\alpha^+(x,y\,|\,\theta), & \nabla(\theta)>0\\ r_\alpha^-(x,y\,|\,\theta), & \nabla(\theta)<0\end{cases}$$

とおく。さらに

$$(2.23)\qquad \tilde{r}_\alpha^{(1)}(x,y\,|\,\theta)\equiv\tilde{r}_\alpha(x,y\,|\,\theta)=r_{\lambda(\theta)+\alpha}(x,y\,|\,\theta)$$

$$\tilde{r}_\alpha^{(2)}(x,y\,|\,\theta_0,\theta_1)=\int_{R^1}\tilde{r}_\alpha^{(1)}(x,z\,|\,\theta_0)\tilde{r}_\alpha(z,y\,|\,\theta_1)dz$$

$$\tilde{r}_\alpha^{(n+1)}(x,y\,|\,\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_n)=\int_{R^1}\tilde{r}_\alpha^{(n)}(x,z\,|\,\theta_0,\cdots,\theta_{n-1})\tilde{r}_\alpha(z,y\,|\,\theta_n)dz$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$=\int_{R^1}\tilde{r}_\alpha(x,z|\theta_0)\tilde{r}_\alpha^{(n)}(z,y|\theta_1,\cdots,\theta_n)\,dz \qquad (n\geq 1),$$

とおく。定義より

$$(2.24)\qquad r_\alpha(x,y|\theta)\leq\frac{1}{c(\theta)}$$

$$(2.25)\qquad \int r_\alpha(x,y|\theta)\,dy=\int r_\alpha(x,y|\theta)\,dx=\frac{1}{\alpha}$$

となるので,

$$(2.26)\qquad \int\tilde{r}_\alpha^{(n)}(x,y|\theta_0,\cdots,\theta_{n-1})\,dy=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+\lambda(\theta_i)}$$

$$\tilde{r}_\alpha^{(n)}(x,y|\theta_0,\cdots,\theta_{n-1})\leq\frac{1}{c(\theta_{n-1})}\prod_{i=0}^{n-2}\frac{1}{\alpha+\lambda(\theta_i)}$$

が得られる。

(c) τ_0 を θ_t の first jumping time とする (cf.(2.5))。 $f\in\mathbb{B}(E)$ とすれば強Markov性より,

$$(2.27)\qquad G_\alpha f(x,\theta_0)=E_{\theta_0}\left\{\int_0^{\tau_0}e^{-\alpha s}f(x+s\nabla(\theta_0),\theta_0)\,ds\right\}$$

$$+E_{\theta_0}\left\{e^{-\alpha\tau_0}G_\alpha f(x+\tau_0\nabla(\theta_0),\theta(\tau_0))\right\}$$

この右辺は τ_0 の分布が, $P_{\theta_0}(\tau_0>t)=e^{-\lambda_{\theta_0}t}$, $(\tau_0,\theta(\tau_0))$ の同時分布が $P_{\theta_0}\{\tau_0\in dt,\ \theta(\tau_0)\in d\theta_1\}=\lambda_{\theta_0}e^{-\lambda_{\theta_0}t}\cdot\Pi(\theta_0,d\theta_1)$ となることより容易に計算されて

$$(2.28)\qquad G_\alpha f(x,\theta_0)=\int_{R^1}\tilde{r}_\alpha(x,y|\theta_0)f(y,\theta_0)\,dy$$

$$+\lambda_{\theta_0}\int_{y\in R^1}\int_{\theta_1\in S}\tilde{r}_\alpha(x,y|\theta_0)G_\alpha f(y,\theta_1)\,dy\,\Pi(\theta_0,d\theta_1)$$

となる. この第2項の $G_\alpha f(y,\theta_1)$ を (2.28) の右辺であらわして整理すれば,

$$G_\alpha f(x,\theta_0)=\int_{R^1}\tilde{r}_\alpha(x,y|\theta_0)f(y,\theta_0)\,dy$$

$$+\lambda_{\theta_0}\int_{R^1\times S}\int\tilde{r}_\alpha^{(2)}(x,z|\theta_0,\theta_1)f(z,\theta_1)\,dz\,\Pi(\theta_0,d\theta_1)$$

$$+\lambda_{\theta_0}\int\int_{R^1\times S\times S}\tilde{r}_\alpha^{(2)}(x,z|\theta_0,\theta_1)\lambda_{\theta_1}G_\alpha f(z,\theta_2)\,dz\,\Pi(\theta_0,d\theta_1)\Pi(\theta_1,d\theta_2)$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

以下同様にして

$$G_\alpha f(x,\theta_0)=\int_{R^1}\tilde{r}_\alpha(x,y\,|\,\theta_0)f(y,\theta_0)\,dy$$

$$+\sum_{K=1}^{n-1}\int\cdots\int_{R^1\times\underbrace{S\times\cdots\times S}_{K}}\tilde{r}_\alpha^{(K+1)}(x,y\,|\,\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_K)f(y,\theta_K)\Big[\prod_{i=0}^{K-1}\lambda(\theta_i)\Big]\times$$

$$\times dy\cdot\Pi(\theta_0,d\theta_1)\cdots\Pi(\theta_{K-1},d\theta_K)$$

$$+\int\cdots\int_{\underbrace{S\times\cdots\times S}_{n}}\tilde{r}_\alpha^{(n)}(x,y\,|\,\theta_0,\cdots,\theta_{n-1})G_\alpha f(y,\theta_n)\Big[\prod_{i=0}^{n-1}\lambda(\theta_i)\Big]dy\cdot\Pi(\theta_0,d\theta_1)\cdots\Pi(\theta_{n-1},d\theta_n)$$

が得られる．(2.26) と仮定 (A_1)，(A_2) より

上式右辺第3項の絶対値

$$\leq\frac{1}{\alpha}\|f\|\int\cdots\int_{\underbrace{S\times\cdots\times S}_{n}}\frac{1}{c(\theta_{n-1})}\Big[\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda(\theta_i)}{\alpha+\lambda(\theta_i)}\Big]\Pi(\theta_0,d\theta_1)\cdots\Pi(\theta_{n-1},d\theta_n)$$

$$\leq\frac{1}{\alpha}\|f\|\frac{1}{c}\Big(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\Big)^n\qquad(\downarrow 0,\ \text{as}\quad n\uparrow\infty)$$

と評価できる。すなわち $\sum$ の部分は $n\uparrow\infty$ のとき，x, θ_j について一様収束する。よって次の結果が得られた。

$f\in\mathbb{B}(E)$ ならば

(2.29) $$g(x,\theta)\equiv G_\alpha f(x,\theta)$$

$$=\int_{R^1}\tilde{r}_\alpha(x,y\,|\,\theta)f(y,\theta)\,dy$$

$$+\sum_{K=1}^{\infty}\int\cdots\int_{\underbrace{S\times\cdots\times S}_{K}}\tilde{r}_\alpha^{(K+1)}(x,y\,|\,\theta,\theta_1,\cdots,\theta_K)f(y,\theta_K)\Big[\lambda(\theta)\prod_{i=1}^{K-1}\lambda(\theta_i)\Big]dy\cdot\Pi(\theta,d\theta_1)\cdots\Pi(\theta_{K-1},d\theta_K)$$

でこの右辺は x, θ_j について一様収束している。

(*Lemma* 2.2. (i) の証明)。 (2.29) の右辺各項は x について連続であるから，$g(x,\theta)$ は x について連続である。

(d) *Lemma* 2.2 (ii)，(iii) を示す。先ず，次に注意しよう。

$\nabla(\theta)>0$ のとき $f\in\mathbb{C}(E)$ とすれば，(a) より

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$\frac{\partial}{\partial x}\int \tilde{r}_\alpha(x,y\,|\,\theta)f(y,\theta)\,dy$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{C(\theta)}e^{\frac{\lambda(\theta)+\alpha}{C(\theta)}x}\int_x^\infty e^{-\frac{\lambda(\theta)+\alpha}{C(\theta)}y}f(y,\theta)\,dy\right]$$

$$=\frac{\lambda(\theta)+\alpha}{C(\theta)}\int \tilde{r}_\alpha(x,y\,|\,\theta)f(y,\theta)dy-\frac{1}{C(\theta)}f(x,\theta)$$

$\nabla(\theta)<0$ のときは，上の計算で C_θ を $C_{-\theta}$ とすることにより同様な結果が得られ，

$$(2.30)\quad \frac{\partial}{\partial x}\int \tilde{r}_\alpha(x,y|\theta)f(y,\theta)dy=\frac{\lambda(\theta)+\alpha}{\nabla(\theta)}\int \tilde{r}_\alpha(x,y|\theta)f(y,\theta)dy-\frac{1}{\nabla(\theta)}f(x,\theta)$$

となる。同様に

$$(2.31)\quad \frac{\partial}{\partial x}\tilde{r}_\alpha^{(K+1)}(x,y\,|\,\theta,\theta_1,\cdots,\theta_K)$$

$$=\frac{\lambda(\theta)+\alpha}{\nabla(\theta)}\tilde{r}_\alpha^{(K+1)}(x,y\,|\,\theta,\theta_1,\cdots,\theta_K)-\frac{1}{\nabla(\theta)}\tilde{r}_\alpha^{(K)}(x,y|\theta_1,\cdots,\theta_K),\quad (K\geqq 1)$$

となる。よって (2.29) で $f\in\mathcal{C}'(E)$ のとき，右辺を項別微分したものは (2.30) と (2.31) によって

$$\frac{1}{\nabla(\theta)}\Big[(\lambda(\theta)+\alpha)g(x,\theta)-f(x,\theta)-\lambda(\theta)\sum_{K=1}^{\infty}\int\cdots\int\tilde{r}_\alpha^{(K)}(x,y|\theta_1,\cdots,\theta_K)f(y,\theta_K)\Big[\prod_{i=1}^{K-1}\lambda(\theta_i)\Big]\times$$

$$\times\, dy\,\Pi(\theta,d\theta_1)\cdots\Pi(\theta_{K-1},d\theta_K)\Big]\qquad(\theta_0=\theta)$$

この形と (c) での評価から，(2.29)の右辺を項別微分したものは再び x,θ_j について一様収束し，その和は上の無限級数の部分をまとめることにより

$$\frac{1}{\nabla(\theta)}\Big[(\lambda(\theta)+\alpha)g(x,\theta)-f(x,\theta)-\lambda(\theta)\int_S g(x,\varphi)\Pi(\theta,d\varphi)\Big]$$

とあらわされる。すなわち，*Lemma* 2.2 (ii) に対応する次が示されたことになる。

$f\in\mathcal{C}(E)$ とし，$g(x,\theta)=G_\alpha f(x,\theta)$ とおけば $g(x,\theta)$ は x について微分可能で $\frac{\partial g}{\partial x}$ は (2.29)の右辺の項別微分によって得られ，

$$(2.32)\quad \nabla(\theta)\frac{\partial g}{\partial x}(x,\theta)=(\lambda(\theta)+\alpha)g(x,\theta)-f(x,\theta)-\lambda(\theta)\int_S g(x,\varphi)\Pi(\theta,d\varphi),\quad f\in\mathcal{C}(E)$$

がなりたつ。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

一方，(2.29) から g は x について有界連続であるから，(2.32) から $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\theta)$ は x について有界連続である。これで Lemma 2.2 が証明された。

(e) (Theorem 2.1 の証明). $f\in \mathbb{C}(E)\cap \mathbb{B}_0$, $g=G_\alpha f$ とすれば，$g\in \mathcal{D}_A$ で，infinitesimal operator に関する性質より

$$Ag=\alpha g-f$$

しかるに f, g については (2.32) がなりたつから，この関係と上式よりただちに (2.14) がえられる。

Remark. $f\in \mathbb{C}(E)$, $g=G_\alpha f\in \mathcal{D}_A$ ならば $Ag(x,\theta)$ は x について有界連続である。

2.4. Adjoint infinitesimal operator と Boltzmann の方程式 Z を1次元の transport process とし，その adjoint な半群の generator を求めることにより Boltzmann の transport equation を導びこう。

先ず，Z process に対して§2.3の仮定 (A_1), (A_2) の他に次の仮定をおく。$\Pi(\theta,d\varphi)$ は (Θ_3) で与えられる S 上の確率測度とする.

(A_3) S 上に σ-finite な measure dm が存在して，$\Pi(\theta,d\varphi)$ は $m(d\varphi)$ に関して絶対連続で

(2.33) $$\Pi(\theta,d\varphi)=\Pi(\theta,\varphi)m(d\varphi)$$

しかも $\Pi(\theta,\varphi)$ は (θ,φ) の有界可測函数である。

さて，(2.23) で定義した $\tilde{\gamma}_\alpha^{(K)}(\cdot,\cdot|\cdots)$ を用いて

(2.34) $$h_\alpha(x,\theta,y,\varphi)=\tilde{\gamma}_\alpha^{(2)}(x,y|\theta,\varphi)\lambda(\theta)\Pi(\theta,\varphi)$$

$$+\sum_{K=2}^{\infty}\underbrace{\int\cdots\int}_{\substack{S\times\cdots\times S\\ K-1}}\tilde{\gamma}_\alpha^{(K+1)}(x,y|\theta,\theta_1,\cdots,\theta_{K-1},\varphi)\left[\lambda(\theta)\prod_{i=1}^{K-1}\lambda(\theta_i)\right]\times$$

$$\times\Pi(\theta,\theta_1)\Pi(\theta_1,\theta_2)\cdots\Pi(\theta_{K-1},\varphi)\,dm(\theta_1)\cdots dm(\theta_{K-1})$$

とおく。さらに

(2.35) $$d\beta(y,\varphi)=dy\cdot dm(\varphi)$$

とおく。このとき，次が容易にわかる.

(*) $\left\{\right.$ S が高々可算集合で，$m(d\varphi)$ が counting measure のとき，Green measure $G_\alpha((x,\theta),\Gamma)$ は $d\beta$ に関して絶対連続で，その density は

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$\begin{cases} g_\alpha(x,\theta,y,\varphi) = \tilde{r}_\alpha(x,y|\varphi)\,\delta(\theta,\varphi) + h_\alpha(x,\theta,y,\varphi) \\ \text{で与えられる (cf. (2.29))} \end{cases}$$

このことより adjoint な infinitesimal operator $\tilde{A}$ は $L^1(E, d\beta)$ で考えることができる (c.f. Dynkin [2] §2.14). S が可算でないときには (*) は (2.29) から直接にはわからないので対応する結果をみちびくためには若干の準備が必要である。

はじめに次の記号を導入する。

$\mathbb{V}$: E 上の finite な set functions の全体とする。$\mathbb{V} \ni \mu$ に対してそのノルムを $\|\mu\|$ = "μ の全変動" と定義すれば $\mathbb{V}$ はノルム $\|\cdot\|$ に関して Banach 空間となる。

$\tilde{T}_t$: T_t の adjoint な半群で

$$(2.35)\qquad \tilde{T}_t\mu(\Gamma) = \int_E P(t,(x\theta),\Gamma)\,d\mu(x,\theta), \qquad \mu \in \mathbb{V}$$

で定義される $\mathbb{V}$ 上の半群である。

$\mathbb{V}_0 = \{\mu \in \mathbb{V} \mid s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} \tilde{T}_t\mu = \mu\}$,

$\mathbb{V}_\beta = \{\mu \in \mathbb{V} \mid d\mu$ は $d\beta$ に関して絶対連続$\}$

$\tilde{\mathbb{V}}_0 = \mathbb{V}_0 \cap \mathbb{V}_\beta$

$W = L^1(d\beta)$

$\tilde{A}$: adjoint infinitesimal operator, すなわち $\tilde{T}_t$ の Hille-Yosida の意味の generator とする。

$\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$: $\tilde{A}$ の定義域.

このとき (*) に対応するものは次の性質である。

<u>Lemma 2.3</u> α 次の Green measure を $G_\alpha((x,\theta),\Gamma)$ とする。
$\beta(\Gamma) = 0$ ならば

$\forall x \in R^1$ に対して, $G_\alpha((x,\theta),\Gamma) = 0$ (a.e. θ, dm).

(証明) $\Gamma_\theta = \{y \mid (y,\theta) \in \Gamma\}$ とおく。仮定より

$$0 = \beta(\Gamma) = \int_S meas(\Gamma_\varphi)\,m(d\varphi), \quad meas(\Gamma_\varphi) = \Gamma_\varphi \text{ の Lebesgue measure}$$

$$\therefore \quad meas(\Gamma_\theta) = 0 \qquad (a.e.\ \theta,\ dm)$$

一方, (2.24), (2.29) と h_α の定義 (2.34) より

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$G_\alpha((x,\theta),\Gamma)=\int_{\Gamma_\theta}\tilde{\gamma}_\alpha(x,y|\theta)\,dy+\int_\Gamma h_\alpha(x,\theta,y,\varphi)\,d\beta(y,\varphi)$$

$$=\int_{\Gamma_\theta}\tilde{\gamma}_\alpha(x,y|\theta)\,dy\leq\frac{1}{c(\theta)}\,meas(\Gamma_\theta)=0\qquad(a.e.\ \theta)\ \text{for all } x$$

となり証明が終る。

さて，定義より $\widetilde{\nabla}_0$ は ∇ で *strongly closed* で，対応

$$W\ni f\longleftrightarrow\mu_f(\Gamma)=\int_\Gamma f\,d\beta$$

によって W と ∇_β は同一視されるから $\widetilde{\nabla}_0\subseteq W$ とみなしてよい。この対応による $\widetilde{\nabla}_0$ の W における像を $\widetilde{W}$ としよう。$\nu\in\widetilde{\nabla}$ の $d\beta$ に関する *density* を f として

$$\mu(\Gamma)\equiv\int_E G_\alpha((x,\theta),\Gamma)\,d\nu(x,\theta)=\int_E G_\alpha((x,\theta),\Gamma)f(x,\theta)\,d\beta(x,\theta)\tag{2.36}$$

とおく。$\widetilde{A}$ の定義によって，$\mu\in\mathfrak{D}_{\widetilde{A}}$ で，*Lemma* 2.3 より $d\mu<d\beta$（絶対連続）であるから，$\mu\in\nabla_\beta$ である。このことは，(2.36) で与えられる対応

$$\widetilde{\nabla}_0\ni\nu\longrightarrow\mu\in\nabla_\beta$$

による $\widetilde{W}\equiv\widetilde{\nabla}_0$ の像を $\widetilde{\mathfrak{D}}$ とすると

$$\widetilde{\mathfrak{D}}\subseteq\mathfrak{D}_{\widetilde{A}}\cap\widetilde{W}\tag{2.37}$$

であることを示す。一方，$\widetilde{A}$ の定義によって

$$\widetilde{A}\mu=\alpha\mu-\nu\tag{2.38}$$

である。したがって，$\widetilde{\nabla}_0$ と $\widetilde{W}$ とを *identify* していることから (2.38) は

$$\widetilde{A}g=\alpha g-f\,,\tag{2.39}$$

ただし，g, f はそれぞれ $d\mu$, $d\nu$ の $d\beta$ による *Radon-Nikodym* の意味の微分である：

$$g=\frac{d\mu}{d\beta}\,,\qquad f=\frac{d\nu}{d\beta}$$

このとき次が成り立つ。

<u>*Theorem* 2.3</u>　仮定 (A_1), (A_2) および (A_3) をみたす 1 次元 *transport process* の *adjoint* な半群の *infinitesimal operator* を $\widetilde{A}$ とする。$\widetilde{A}$ の $\widetilde{\nabla}_0$ への制限は函数空間

$$\widetilde{\mathfrak{D}}=\left\{g\,\middle|\,g=\frac{d\mu}{d\beta},\ \mu(\Gamma)=\int G_\alpha((x,\theta),\Gamma)\,d\nu(x,\theta),\ \nu\in\widetilde{\nabla}_0\right\}\subseteq\widetilde{\nabla}_0$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

に作用すると考えてよく, $g\in\widetilde{\mathfrak{D}}$ ならば

(2.40) $$\widetilde{A}g(y,\varphi)=-\nabla(\varphi)\frac{\partial}{\partial y}g(y,\varphi)-\lambda(\varphi)g(y,\varphi)$$

$$+\int_S g(y,\psi)\lambda(\psi)\pi(\psi,\varphi)dm(\psi)^{5)}$$

である. とくに S が可算ならば, $\widetilde{\mathfrak{D}}=\widetilde{\mathfrak{D}}_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{\nabla}_0=\nabla_0$ である。

<u>Remark</u> $\lambda(\varphi)=\lambda$ (定数), $\pi(\theta,\varphi)\equiv\pi(\varphi,\theta)$ (対称) のときは $\widetilde{A}$ は A で $\nabla(\theta)$ を $-\nabla(\theta)$ としたものと同じ形である。

証明は次のように数段階に分けて行なう。

(a) $f\in L^1(d\beta)$ に対して

(2.41) $$\widetilde{g}(y,\varphi)=\int_{R^1}\widetilde{r}_\alpha(x,y|\varphi)f(x,\varphi)dx$$

$$+\int_E h_\alpha(x,\theta,y,\varphi)f(x,\theta)\,d\beta(x,\theta)$$

とおけば, $\widetilde{g}(y,\varphi)$ は y に関して絶対連続で,

(2.42) $$\widetilde{g}\in L^1(d\beta),\quad \frac{\partial\widetilde{g}}{\partial y}\in L^1(d\beta)$$

である。

(証明) $\widetilde{g}\in L^1(d\beta)$ は定義から容易にわかる。

次に (2.30), (2.31)に対応して

(2.42) $$\frac{\partial}{\partial y}\int_{R^1}\widetilde{r}_\alpha(x,y|\varphi)f(x,\varphi)dx=-\frac{\lambda(\varphi)+\alpha}{\nabla(\varphi)}\int_{R^1}\widetilde{r}_\alpha(x,y|\varphi)f(x,\varphi)dx$$

$$+\frac{1}{\nabla(\varphi)}f(y,\varphi)\qquad(\text{cf. 脚注 5})).$$

(2.43) $$\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{r}_\alpha^{(K+1)}(x,y|\theta,\theta_1,\cdots,\theta_{K-1},\varphi)$$

$$=-\frac{\lambda(\varphi)+\alpha}{\nabla(\varphi)}\widetilde{r}_\alpha^{(K+1)}(x,y|\theta,\theta_1,\cdots,\theta_{K-1},\varphi)+\frac{1}{\nabla(\varphi)}\widetilde{r}_\alpha^{(K)}(x,y|\theta,\theta_1,\cdots,\theta_{K-1})$$

---

5) この小節 2.4 では $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial\beta}$, ….. 等は *Radon-Nikodým* の意味でとり, 等号は a.e. でなりたつことを示す.

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

このことより，(2.34) を考慮して，§2.3 (d) と同様に，(2.40) を y で微分することにより

(2.44) $$\nabla(\varphi)\frac{\partial}{\partial y}\tilde{g}(y,\varphi) = -(\lambda(\varphi)+\alpha)\tilde{g}(y,\varphi)+f(y,\varphi)+\int_S \tilde{g}(y,\psi)\lambda(\psi)\pi(\psi,\varphi)\,dm(\psi)$$

が得られる。これより $\frac{\partial}{\partial y}\tilde{g}$ が存在して $\in L^1(d\beta)$ であることがわかる。

(b) 次の Lemma がなりたつ。

Lemma 2.4 $\nu \in \tilde{V}_0$ とし，μ を (2.36) で定義する。

$f = \frac{d\nu}{d\beta}$, $g = \frac{d\mu}{d\beta}$ とおき，f に対して (2.41) で $\tilde{g}$ を定義すれば

(2.45) $$g = \tilde{g}$$

である。

(証明) (a) より $\tilde{g} \in L^1(d\beta)$ だから

$$\tilde{\mu}(\Gamma) = \int_\Gamma \tilde{g}\,d\beta$$

として $\mu = \tilde{\mu}$ を云えばよい。$u \in \mathcal{B}(E)$ とする。

(2.41) と (2.34), (2.35) より

$$\int u\,d\tilde{\mu} = \int u\tilde{g}\,d\beta$$

$$= \int \tilde{r}_\alpha(x,y\,|\,\varphi)\,f(x,\varphi)\,u(y,\varphi)\,dx\cdot dy\,dm(\varphi)$$

$$+\int \tilde{r}_\alpha^{(2)}(x,y\,|\,\theta,\varphi)\lambda(\theta)\pi(\theta,\varphi)f(x,\theta)u(y,\varphi)\,dx\,dm(\theta)\,dy\,dm(\varphi)$$

$$+\sum_{K=2}^{\infty}\int \tilde{r}_\alpha^{(K+1)}(x,y\,|\,\theta,\theta_1,\cdots,\theta_{K-1},\varphi)\left[\lambda(\theta)\pi(\theta,\theta_1)\prod_{i=1}^{K-1}\lambda(\theta_i)\right]\times$$

$$\times\pi(\theta,\theta_1)\cdots\pi(\theta_{K-1},\varphi)f(x,\theta)u(y,\varphi)\,dm(\theta_1)\cdots dm(\theta_{K-1})\,dx\,dm(\theta)\,dy\,dm(\varphi)$$

一方，(2.29) より

$$\int u\,d\mu = \int G_\alpha u(x,\theta)\,f(x,\theta)\,dx\,dm(\theta)$$

をかきかえれば上式右辺となり，$\int u\,d\tilde{\mu} = \int u\,d\mu$ となるから $\mu = \tilde{\mu}$ である。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ　1966年
P1-104

(c)　*Theorem* 2.3 の証明　　*Lemma* 2.4 の f, g に対しては (2.39) がなりたつ：

$$\tilde{A}g = \alpha g - f$$

しかるにこの *Lemma* より $g = \tilde{g}$ で $\tilde{g}$ については (2.44) が得られているから，これを用いて $\tilde{A}g$ は (2.40) の右辺で与えられる。

(d)　S が可算で，dm が *counting measure* のときは (*) がなりたつから，*Dynkin* [2] §2.14の結果を用いて $\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ が得られる (終)。

Theorem 2.3 と同じ仮定をおく。

$g \in \tilde{\mathfrak{D}}$　とし

(2.46)　　$u(t, y, \varphi) = \tilde{T}_t g(y, \varphi)$ 6)

とおけば，半群の一般論より

(2.45)　　$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, y, \varphi) = -\nabla(\varphi)\frac{\partial}{\partial y}u(t, y, \varphi) - \lambda(\varphi)u(t, y, \varphi)$$

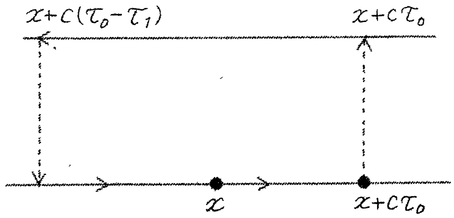
$$+ \int_S \lambda(\psi)\, u(t, y, \psi)\, \Pi(\psi, \varphi)\, dm(\psi)$$

$$\| u(t, y, \varphi) - g(y, \varphi) \|_{L^1(d\beta)} \longrightarrow 0 \qquad (t \to 0)$$

となる。これは *Boltzmann* の *transport equation* と呼ばれる。(*Wing* [19] 参照)。

2.5. *Examples.*

[1] 図のような運動をする粒子を考える。すなわち，右(左)に *speed* c で進み，指数分布をする時間 τ_0 ののち消滅し (または方向を変え)，その瞬間左(右)に同じ *speed* c で運動をする粒子を生ずる。この粒子は τ_0 とは独立な同じ分布をもつ τ_1 時間だけ運動を続ける。以下同様にして進



---

6)　$\tilde{T}_t g$ は g からきまる測度に対して (2.35) の意味で $\tilde{T}_t$ を施し，その ($d\beta$ に関する) *density* をとったものである。

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

むものとする。この運動を Markov 過程としてとらえるには，図のように２本の直線を用意して，運動方向によって別々の直線上にあるとみればよい。§2.1 の定式化に従えば次のような transport process である。

$$S=\{-1,1\},\quad \pi(1,-1)=1=\pi(-1,1)$$
$$\pi(1,1)=0=\pi(1,1)$$

$\lambda_\theta=\lambda,\ c_\theta=c\ (\theta=\pm1)$，すなわち $\nabla(1)=c,\ \nabla(-1)=-c$．

で Θ-process は two state の Markov 過程である。このとき，(2.14) から

$$(2.46)\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x,\theta)=c(\theta)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x,\theta)-\lambda u(t,x,\theta)+\lambda u(t,x,-\theta)$$

$$u(0+,x,\theta)=f(x,\theta),\qquad (\theta=\pm1)$$

ただし $u(t,x,\theta)=T_tf(x,\theta),\quad f\in\mathbb{C}(E)$ (cf. Theorem 2.2)

また Boltzmann equation は次の形になる。

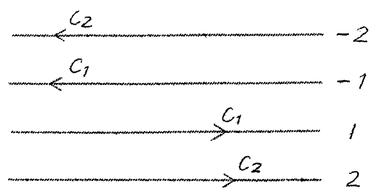
$$(2.47)\quad \frac{\partial v}{\partial t}(t,y,\varphi)=-c(\varphi)\frac{\partial v}{\partial y}(t,y,\varphi)-\lambda v(t,y,\varphi)+\lambda v(t,y,-\varphi)$$

$$v(0+,y,\varphi)=g(y,\varphi),\qquad (\varphi=\pm1)$$

ただし $g\in\widetilde{\mathcal{D}},\quad v(t,y,\varphi)=\widetilde{T}_tg(y,\varphi)$ (cf. (2.45))

この例については以下の節でくわしくのべる。

[2]. speed が２種類ある場合の例として図のように運動する粒子を考える。矢印と c_i は運動方向と speed をあらわす。このとき Θ-process は $S=\{\pm1,\pm2\}$ 上の Markov 過程で



$$\begin{cases}\lambda(\theta)=\lambda_1\ (\theta=\pm1),\ \lambda(\theta)=\lambda_2\ (\theta=\pm2)\\ c(\theta)=c_1\ (\theta=\pm1),\ c(\theta)=c_2\ (\theta=\pm2)\\ (\pi(i,j))\ (i,j=\pm1,\pm2)\ \text{は任意の}\ \pi(i,i)=0\ \text{なる stochastic matrix},\end{cases}$$

からきまる．Theorem 2.2 の C-infinitesimal operator A' は次のようにかける。

$$D=\begin{pmatrix} c_1\frac{\partial}{\partial x} & & & \\ & c_2\frac{\partial}{\partial x} & & \\ & & -c_1\frac{\partial}{\partial x} & \\ & & & -c_2\frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$B = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1\Pi(1,2) & \lambda_1\Pi(1,-1) & \lambda_1\Pi(1,-2) \\ \lambda_2\Pi(2,1) & -\lambda_2 & \lambda_2\Pi(2,-1) & \lambda_2\Pi(2,-2) \\ \lambda_1\Pi(-1,1) & \lambda_1\Pi(-1,2) & -\lambda_1 & \lambda_1\Pi(-1,-2) \\ \lambda_2\Pi(-2,1) & \lambda_2\Pi(-2,2) & \lambda_2\Pi(-2,-1) & -\lambda_2 \end{bmatrix}$$

今 $f(x,\theta) \in \mathbb{C}(E)$, $u(t,x,\theta) = T_t f(x,\theta)$ とおき，これらを

$$f_\theta(x) = f(x,\theta), \quad u_\theta(t,x) = u(t,x,\theta) \qquad \theta \in S$$

とおいてベクトル形式

$$\mathfrak{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_{-1}(x) \\ f_{-2}(x) \end{bmatrix} \qquad \mathfrak{u}(t,x) = \begin{bmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \\ u_{-1}(t,x) \\ u_{-2}(t,x) \end{bmatrix}$$

であらわせば，連立方程式

$$(2.48) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{u}(t,x) = D\mathfrak{u}(t,x) + B\mathfrak{u}(t,x)$$

$$\mathfrak{u}(0+,x) = \mathfrak{f}(x)$$

が得られる。

Boltzmann の方程式は

$$(2.49) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{v}(t,y) = -D\mathfrak{v}(t,y) + B'\mathfrak{v}(t,y)$$

である。ただし B' は B の *transposed matrix* とする。(*Wing* [19] *chapter* 4 参照)

[3]. $S \equiv S^2 = R^3$ の単位球面

$$dm(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \quad 0 \le \vartheta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$$\Pi(\theta, d\theta') \equiv \Pi((\vartheta,\varphi),(\vartheta',\varphi'))\, dm(\vartheta',\varphi')$$

ここに $\theta = (\vartheta, \varphi)$, $\theta' = (\vartheta', \varphi')$

$$\nabla(\vartheta,\varphi) = (c(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\cos\varphi,\ c(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\sin\varphi,\ c(\vartheta,\varphi)\cos\vartheta)$$

の場合は $\nabla(\vartheta,\varphi)$ が R^3 値であるため，§2.3，§2.4 の結果からは直接には基本方程式は得られないが，本質的には同じ計算によって，例えば (2.14) に関連して次が得られる。

$$(2.50) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y,z,\vartheta,\varphi) = c(\vartheta,\varphi)\left[\sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y} + \cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$-\lambda(\vartheta,\varphi)u+\lambda(\vartheta,\varphi)\int_0^{\pi}\sin\vartheta' d\vartheta'\int_0^{2\pi}u(t,x,y,z,\vartheta',\varphi')\pi(\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi')\,d\varphi'$$

この運動は次のようなものである。出発点(x,y,z)において speed $c(\vartheta,\varphi)$ と運動方向 $\vec{\nabla}(\vartheta,\varphi)$ は球面上の点(ϑ,φ)で与えられる。指数分布$P_{(\vartheta,\varphi)}(\tau_0>t)=e^{-\lambda(\vartheta,\varphi)t}$ に従う時間τ_0の間等速度で運動したのち，方向(ϑ',φ')を分布$\pi(\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi')\,dm(\vartheta',\varphi')$で定め，新たに speed $c(\vartheta',\varphi')$ で運動を続ける……。とくに isotropic case

$$c(\vartheta,\varphi)\equiv c>0,\quad \lambda(\vartheta,\varphi)\equiv\lambda>0,\quad \pi(\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi')=1/4\pi$$

について考えよう。(2.50)で $c(\vartheta,\varphi)$ を $-c(\vartheta,\varphi)$ としたものが Boltzmann equation である。その解$u(t,x,y,z,\vartheta,\varphi)$ は時刻tで点(x,y,z)を(ϑ,φ)方向に運動している粒子の flux の density を与えている。今この flux の z 方向における density のみに注目して，それのみたす Boltzmann equation を上のような isotropic case についてみちびこう。それには，

$$\nabla(\theta)=\nabla(\vartheta,\varphi)=c\cdot\cos\vartheta=c\mu,\quad \mu=\cos\vartheta$$

ととれば，(2.45)より次の Boltzmann equation が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z,\mu)=-c\mu\frac{\partial}{\partial z}u(t,z,\mu)-\lambda u(t,z,\mu)$$

$$+\lambda\int_0^{\pi}\sin\vartheta' d\vartheta'\int_0^{2\pi}u(t,z,\mu')\frac{1}{4\pi}\,d\varphi',\qquad \mu'=\cos\vartheta'$$

すなわち

$$(2.51)\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,z,\mu)=-c\mu\frac{\partial}{\partial z}u(t,z,\mu)-\lambda u(t,z,\mu)+\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}u(t,z,\mu')\,d\mu'$$

となる。粒子の運動領域が $D=\{(x,y,z);-a<z<a\}$ (infinite slab) でDの外が真空であれば，∂Dで粒子は消滅すると考え，上の方程式を境界条件

$$\begin{cases} u(t,a,\mu)=0, & \mu<0 \\ u(t,-a,\mu)=0, & \mu>0 \end{cases}$$

と初期条件 $u(0+,z,\mu)=f(z,\mu)$ の下で解いて $u(t,z,\mu)$ が求まることになる。この例については Wing [19], Chapter 8 で slab model として $u(t,z,\mu)$ の固有函数展開が論ぜられている。

§3. 1次元の non-branching transport process.

この節では

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

§2.5 の例 [I] についてくわしく述べ，電信方程式との関係についても考える。

3.1. 定式化　　§2.5 の例 [I] は次のようなものであった。

$\Theta=(\theta_t, +\infty, \mathcal{N}_t, P_\theta)$ は $S=\{-1, 1\}$ 上の対称な Markov 過程で，その推移確率は

$$(3.1)\qquad \begin{cases} P(t,1,1)=P(t,-1,-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \\ P(t,1,-1)=P(t,-1,1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \end{cases}$$

であり，かつ $\nabla(\theta)$ は

$$\nabla(\theta)=c\theta=\begin{cases} c & \theta=1 \\ -c & \theta=-1 \end{cases}$$

である．Θ の basic space は S 値右連続な函数 $w=w(\cdot)$ からなるものとし，shift を $w_t^+(\cdot)=w(\cdot+t)$ とかくことにし，その jumping time $\tau_0, \tau_1, \cdots$ を次のように定義する。

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \tau_0=\inf\{t;\ \theta_t \neq \theta_0\}, & \sigma_0(w)=\tau_0(w), \\ \sigma_n(w)=\sigma_{n-1}(w)+\sigma_0(w^+_{\sigma_{n-1}}), & n\geqq 1 \\ \tau_n(w)=\sigma_n(w)-\sigma_{n-1}(w)=\tau_0(w^+_{\sigma_{n-1}}), & n\geqq 1 \end{cases}$$

さて，上の $\nabla(\theta)$ によって θ_t に associate される連続な additive functional は (2.7) より

$$(3.3)\qquad X_t^{(x,\theta)}=x+c\int_0^t \theta_s\,ds$$

であり，この右辺は (3.2) の τ_n を用いると

$$(3.3')\qquad X_t^{(x,\theta)}=x+\sum_{K=0}^{\mathcal{N}_t}(-1)^K\theta_0\cdot\tau_K-\left(\sum_0^{\mathcal{N}_t}\tau_K-t\right)\theta(\mathcal{N}_t)$$

とあらわすことができる。ここに

$$(3.4)\qquad \mathcal{N}_t=\inf\{k\,|\,\tau_0+\cdots+\tau_k>t\}$$

で，$\tau_0, \tau_1 \cdots$ が独立で同一分布をすることより，$\mathcal{N}_t$ は Poisson 過程である。

3.2. 推移確率　　先ず $c=1$ の場合について考える。

$$(3.4)\qquad X_t\equiv\int_0^t\theta_s\,ds=X_t^{(0,\theta)},\quad c=1$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

とおく。$\mathfrak{z}_t^{(0,\theta)}=(X_t,\theta_t)\in R^2$ とみて，その分布の Fourier 変換をつくろう。

$$(3.5)\qquad \varphi_\theta(\alpha,\beta)=E_\theta(e^{i\beta X_t+i\alpha\theta_t})$$

$$=e^{i\alpha}E_\theta(e^{i\beta X_t};\ \theta_t=1)+e^{-i\alpha}E_\theta(e^{i\beta X_t}:\ \theta_t=-1)$$

とおく。

$\theta=1$ のとき

$$\{w:\ \theta_t(w)=1\}=\sum_{n=0}^{\infty}\{w;\ N_t(w)=2n\}$$

に注意すれば

$$(3.6)\qquad E_1(e^{i\beta X_t}:\ \theta_t=1)=\sum_{n=0}^{\infty}E_1(e^{i\beta X_t}:\ N_t=2n)$$

(3.3)′ より

$$=e^{i\beta t}e^{-\lambda t}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\beta t}E_1\left[e^{-2i\beta(\tau_1+\tau_3+\cdots+\tau_{2n-1})}:\ N_t=2n\right]$$

今

$$\begin{cases} X=\tau_0+\tau_2+\cdots+\tau_{2n-2}\\ Y=\tau_1+\tau_3+\cdots+\tau_{2n-1}\\ Z=\tau_{2n}\end{cases}$$

とおけば，X, Y, Z は互いに独立で，独立に同じ指数分布をする n 個の確率変数の和の分布は

$$\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}dx$$

の形で与えられるから，

$$(3.7)\qquad E_1(e^{-2i\beta(\tau_1+\tau_3+\cdots+\tau_{2n-1})}:\ N_t=2n)$$

$$=E_1(e^{-2i\beta Y}:\ X+Y<t<X+Y+Z)$$

$$=\int_{\substack{x+y<t<x+y+z\\ x>0,\ y>0}}e^{-2i\beta y}\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\frac{\lambda^n y^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda y}\cdot\lambda e^{-\lambda z}dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{\lambda^{2n}e^{-\lambda t}}{[(n-1)!]^2}\int_0^t e^{-2i\beta y}y^{n-1}dy\int_0^{t-y}x^{n-1}dx$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$= \frac{\lambda^{2n} e^{-\lambda t}}{(n-1)!\,n!} \int_0^t e^{-2i\beta y}\, y^{n-1}(t-y)^n\, dy$$

$$= \frac{\lambda^{2n} e^{-\lambda t}}{(n-1)!\,n!} \cdot \frac{1}{2} e^{-i\beta y} \int_{-t}^{t} e^{-i\beta x} \frac{t-x}{\sqrt{t^2-x^2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2-x^2}\right)^{2n-1} dx$$

従って，この式で $x \to -x$ としてからまとめると

(3.8) $$E_1(e^{i\beta X_t} : \theta_t = 1) = e^{-\lambda t} e^{i\beta t} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \int_{-t}^{t} e^{-i\beta t} \frac{t-x}{\sqrt{t^2-x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!\,n!} \left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{t^2-x^2}\right)^{2n-1} dx$$

$$= e^{-\lambda t} e^{i\beta t} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \int_{-t}^{t} e^{+i\beta x} \frac{t+x}{\sqrt{t^2-x^2}} I_0'(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\, dx$$

ここで

$$\begin{cases} I_0(x) = J_0(ix) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ I_0'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!\,n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} = I_1(x) \end{cases}$$

は変形 Bessel 函数をあらわす（cf.[14]）。

同様に

(3.9) $$E_1(e^{i\beta X_t} : \theta_t = -1) = \sum_{n=0}^{\infty} E_1\left[e^{2i\beta(\tau_0+\tau_2+\cdots+\tau_{2n})};\ N_t = 2n+1\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \int_{-t}^{t} e^{i\beta x} I_0(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\, dx$$

である。よって

(3.10) $$\varphi_1(\alpha,\beta) = e^{i\alpha}\left[e^{i\beta t} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \int_{-t}^{t} e^{i\beta x} \frac{t+x}{\sqrt{t^2-x^2}} I_0'(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\, dx\right]$$

$$+ e^{-i\alpha} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \int_{-t}^{t} e^{i\beta x} I_0(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\, dx$$

今迄は speed $c=1$ としたが，speed c で点 a から出発した場合には，上より

(3.11) $$E_1(e^{i\alpha\theta_t + i\beta(a+cX_t)})$$

$$= e^{i\alpha} e^{-\lambda t}\left[e^{i\beta(a+ct)} + \frac{\lambda}{2c} \int_{a-ct}^{a+ct} e^{i\beta x} \frac{ct+(x-a)}{\sqrt{c^2t^2-(x-a)^2}} I_0'\left(\frac{\lambda}{c}\sqrt{c^2t^2-(x-a)^2}\right) dx\right]$$

$$+ e^{-i\alpha} \frac{\lambda}{2c} e^{-\lambda t} \int_{a-ct}^{a+ct} e^{i\beta x} I_0\left(\frac{\lambda}{c}\sqrt{c^2t^2-(x-a)^2}\right) dx$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

となる。θの対称性から

(3.12) $\varphi_{-1}(\alpha,\beta)=\varphi_1(-\alpha,-\beta)$

に注意して(3.11)を反転すれば，transport process の推移確率は

(3.12) $P(t,(a,\theta),d(x,\varphi))$

$$=e^{-\lambda t}\pi(-\theta,\varphi)\Big[\delta_{a+ct\theta}(dx)+\frac{\lambda}{2c}\frac{ct+\theta(x-a)}{\sqrt{c^2t^2-(x-a)^2}}I_0'\Big(\frac{\lambda}{c}\sqrt{c^2t^2-(x-a)^2}\Big)dx\Big]$$
$$+\frac{\lambda}{2c}e^{-\lambda t}\pi(\theta,\varphi)I_0\Big(\frac{\lambda}{c}\sqrt{c^2t^2-(x-a)^2}\Big)dx$$

となる。従ってその半群は

(3.13) $$T_tf(a,\theta)=e^{-\lambda t}\Big[f(a+ct\theta,\theta)+\frac{\lambda}{2c}\int_{a-ct}^{a+ct}f(x,\theta)\frac{ct+\theta(x-a)}{\sqrt{c^2t^2-(x-a)^2}}I_0'\Big(\frac{\lambda}{c}\sqrt{c^2t^2-(x-a)^2}\Big)dx\Big]$$
$$+\frac{\lambda}{2c}e^{-\lambda t}\int_{a-ct}^{a+ct}f(x,-\theta)\,I_0\Big(\frac{\lambda}{c}\sqrt{c^2t^2-(x-a)^2}\Big)dx$$

で与えられる。

<u>3.3. 電信方程式</u>　§3.1 で与えた transport process の $e^{-Kt}(K>0)$ sub-process の C-infinitesimal operator (cf. Theorem 2.2)を$\tilde{A}$，その半群を$\tilde{T}_t$ とすれば，一般論より

(3.14) $\mathcal{D}_{\tilde{A}}=\mathcal{D}_A$， $\tilde{A}=A-k$， $\tilde{T}_t=e^{-Kt}T_t$

である。このとき次がなりたつ。

Theorem 3.1.　$f(a,\theta)\in\mathcal{D}_{\tilde{A}}$ が θに無関係で $f(a,\theta)\equiv f(a)$ が aについて C^2 級ならば

(3.15) $$u(t,a)=\frac{1}{2}\Big[\tilde{T}_tf(a,1)+\tilde{T}_tf(a,-1)\Big]$$

は電信方程式

(3.16) $$\frac{\partial^2u}{\partial a^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{2k+2\lambda}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{k(2\lambda+k)}{c^2}u=0$$

の初期値問題 $u(0+,a)=f(a)$ の解である。

<u>Remark.</u>　Aは C-infinitesimal operator である。
$u(t,a)$ の具体的な形は (3.13) を用いて表わすことができる。

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

(証明)

$$(3.17)\qquad \begin{cases} u(t,a,\theta)=\widetilde{T}_t f(a,\theta) \\ u_i(t,a)=u(t,a,i) \qquad i=\pm 1 \\ \widetilde{u}(t,a)=u_1(t,a)+u_{-1}(t,a) \end{cases}$$

とおく。$f\in \mathcal{D}_{\widehat{A}}$ であるから (3.14) と Theorem 2.2 より

$$(3.18)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}(t,a)=c\frac{\partial u_1}{\partial a}-\lambda u_1+\lambda u_{-1}-Ku_1$$

$$(3.19)\qquad \frac{\partial u_{-1}}{\partial t}(t,a)=-c\frac{\partial u_{-1}}{\partial a}+\lambda u_1-\lambda u_{-1}-Ku_{-1}$$

である。辺々相加えて (3.17) を用いれば

$$(3.20)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial a}=\frac{1}{2c}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial a}+\frac{k}{2c}\widetilde{u}$$

が得られる。これを (3.18) に代入して

$$(3.21)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}+\frac{c}{2}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial a}+\left(\frac{k}{2}+\lambda\right)\widetilde{u}-(2\lambda+k)u_1$$

$f(a)$ は a について C^2 級だから (3.13) の形より $\frac{\partial u_i(ta)}{\partial t}$, $\frac{\partial u_i}{\partial a}(t,a)$ はそれぞれ a, t について微分可能である。(3.20)を t で, (3.21)を a で微分して等しいとおけば $\widetilde{u}$ は (3.16) をみたしていることがわかる。$\widetilde{u}(0+,a)=2f(a)$. よって $u=\frac{1}{2}\widetilde{u}$ は定理の条件をみたす。(終)

§4. 1次元 transport process の拡散近似

この節では §3 で考えた transport process において, 粒子の speed c, mean free path $c/\lambda\to 0$ のときの状態についてのべる。電信方程式 (3.16) において $c^2/\lambda=1$, $c\to\infty$ とすると, 形式的な極限として, 吸収のある heat equation

$$(4.1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}-Ku$$

が得られる。このことからみて, transport process の $c^2/\lambda=1$, $c\to\infty$ のときの極限状態は Brown 運動に関係のあることが予想される。

4.1. 中心極限定理

Theorem 4.1. 1次元 transport process の半群を T_t とするとき, 次

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

が成り立つ.

(i) $$\lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\, c\to\infty} T_t f(a,\theta)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{2t}(x-a)^2}\left[f(x,1)+f(x,-1)\right]dx,\quad f\in\mathbb{B}(E)$$

(ii) 電信方程式(3.16)の初期値問題 $u(0+,a)=f(a)$ ($f\in\mathcal{D}_A\cap C^2(R^1)$) に対する Theorem 3.1 の解を $u(t,a;c)$ とすれば, $c^2/\lambda=1$, $c\to\infty$ のとき $u(t,a;c)$ は $u(t,a;\infty)$ に収束し, これは (4.1) の $u(0+,a;+\infty)=f(a)$ に対する解である。

<u>Theorem 4.2</u> $c^2/\lambda=1$, $c\to\infty$ のとき各 t に対して $X_t^{(a,\theta)}$ (cf. (3.3)) の分布は正規分布 $N(a,t)$ に法則収束する。

(Theorem 4.1 の証明)

1°. 変形 Besel 函数のよく知られた性質

$$I_\nu(x)=e^x\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left[1+O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right]\qquad x\uparrow\infty.$$

(cf [14]) より, $c^2=\lambda$ のとき,

(4.2) $$F_\nu(x,t;c)\equiv\frac{\lambda}{2c}e^{-\lambda t}I_\nu\left(\lambda t\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{ct}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{\lambda}{2c}e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda t}}e^{\lambda t\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{ct}\right)^2\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda t}\left(1-\left(\frac{x-a}{ct}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\right.$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{2t}(x-a)^2}\left[1+O\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1}{|x-a|}}\right)\right],\quad c\uparrow\infty,\quad \nu=0,1$$

である。次に (3.13) より

(4.3) $$T_t f(a,1)=\int_{a-ct}^{a+ct}f(x,1)\frac{1+\frac{x-a}{ct}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{ct}\right)^2}}F_1(x,t;c)\,dx\int_{a-ct}^{a+ct}f(x,-1)F_0(x,t;c)\,dx$$

となる。任意に $\varepsilon>0$ をとる。(4.2) より $O\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1}{|x-a|}}\right)$ は $|x-a|>\varepsilon$ のとき x について一様であるから

$$\lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\, c\uparrow\infty}\left[\int_{\substack{a-ct<x<a+ct\\|x-a|>\varepsilon}}f(x,1)\frac{1+\frac{x-a}{ct}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{ct}\right)^2}}F_1(x,t;c)\,dx+\int_{\substack{a-ct<x<a+ct\\|x-a|>\varepsilon}}f(x,-1)F_0(x,t;c)\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{|x-a|>\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}}\left[f(x,1)+f(x,-1)\right]dx$$

次に $e^{-x}\sqrt{2\pi x}\,I_\nu(x)$ は x について一様有界。よって (4.3) の被積分函数は

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$|x-a|<\varepsilon$ で c, x について一様有界となり，c_1 に依存しない M を十分大きくとれば，その $|x-a|<\varepsilon$ での積分の値は $M\varepsilon$ を越えない．$\varepsilon>0$ は任意であったから上のことと合わせて

$$\lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\, c\uparrow\infty} T_t f(a,1)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}}[f(x,1)+f(x,-1)]dx$$

が得られる．$T_t f(a,-1)$ についても同様である．

2°. Theorem の (i) で $f(a,\theta)=f(a)$，$T_t f(a,\theta)$ のかわりに $e^{-Kt}T_t f(a,\theta)=\widetilde{T}_t f(a,\theta)$ とおけば，すでに証明された (i) と Theorem 3.1 より明らかに (ii) が云える。

(Theorem 4.2 の証明)． $f\in\mathbb{C}(R^1)$ を $f\in\mathbb{C}(E)$ とみれば $E_\theta\{f(X_t^{(a,\theta)})\}=T_t f(a,\theta)$ となり，Theorem 4.1. (i) より明らか．

4.2. transport process の収束． $B=(B_t, +\infty, \mathcal{N}_t, \widetilde{P}_x)$ を1次元の Brown 運動とする。

Lemma 4.1 $c^2/\lambda=1$，$c\uparrow\infty$ のとき，transport process の additive functional の part からきまる確率過程 $[X_t^{(a,\theta)};\ t\geqq 0]$ の有限次元分布は 1次元 Brown 運動 $[B_t;\ t\geqq 0;\ \widetilde{P}_a]$ の対応する有限次元分布に収束する。

(証明) 帰納法による。

1°. $X_t=\int_0^t\theta_s ds$ とおけば，$X_t^{(0,\theta)}=cX_t$ で，Theorem 4.2 より

$$\lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\, c\to\infty} E_\theta\{e^{i\beta cX_t}\}=e^{-\frac{t}{2}\beta^2}=\widetilde{E}_0\{e^{i\beta B_t}\}\ . \tag{4.4}$$

2°. $0\leqq t_1<\cdots<t_{n-1}$ に対して

$$\lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\, c\to\infty} E_\theta\{e^{i\alpha_1 cX_{t_1}+\cdots+i\alpha_{n-1}cX_{t_{n-1}}}\}=\widetilde{E}_0\{e^{i\alpha_1 B_{t_1}+\cdots+i\alpha_{n-1}B_{t_{n-1}}}\} \tag{4.5}$$

を仮定して，これが $0\leqq t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n$ についてなりたつことを示す。先ず (3.10) で $\alpha=0$，$\beta\to c\beta$ とし，(3.12) に注意すれば，

$$\lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\, c\to\infty} E_\theta\{e^{i\beta cX_t};\ \theta_t=\varphi\}=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}\beta^2},\quad \theta,\varphi=\pm 1 \tag{4.6}$$

が容易に得られる．次に X_t が additive functional であることより，

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$E_\theta\{e^{i\alpha_1 cX_{t_1}}\cdots e^{i\alpha_n cX_{t_n}}\}$$

$$= E_\theta\left[e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)cX_{t_1}} E_{\theta_{t_1}}\{e^{i\alpha_2 cX(t_2-t_1)}\cdots e^{i\alpha_n cX(t_n-t_1)}\}\right]$$

$$= E_1\{e^{i\alpha_2 cX(t_2-t_1)}\cdots e^{i\alpha_n cX(t_n-t_1)}\} E_\theta\{e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)cX_{t_1}}\,;\ \theta_{t_1}=1\}$$

$$+ E_{-1}\{e^{i\alpha_2 cX(t_2-t_1)}\cdots e^{i\alpha_n cX(t_n-t_1)}\} E_\theta\{e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)cX_{t_1}}\,;\ \theta_{t_1}=-1\}$$

帰納法の仮定 (4.5) と (4.6) より上式は $c^2/\lambda=1$, $c\to\infty$ とするとき次の式に収束する。

$$\tilde{E}_0\{e^{i\alpha_2 B(t_2-t_1)}\cdots e^{i\alpha_n B(t_n-t_1)}\} E_0\{e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)B(t_1)}\}$$

$$= \tilde{E}_0\{e^{i\alpha_1 B_{t_1}}\cdots e^{i\alpha_n B_{t_n}}\}$$

$X_t^{(a,\theta)}$ についても全く同様に証明できる。

<u>*Lemma* 4.2.</u>

(4.7) $$E_{\pm1}\{e^{-\beta X_t}\} = \frac{1}{2a}\left[(a\pm\beta-\lambda)e^{-(\lambda+a)t} + (a\mp\beta-\lambda)e^{-(\lambda-a)t}\right],\ (複号同順)$$

ただし $a=\sqrt{\lambda^2+\beta^2}$ とする。

(証明) $X_t=\int_0^t \theta_s ds$ は $\nabla(\theta)=\theta$ とおけば $X_t=\int_0^t \nabla(\theta_s)ds$ と書ける。

今 θ_t の *resolvent* を R_α とし,

(4.8) $$\hat{R}_\alpha f(\theta) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_\theta\{e^{-\int_0^t \beta\nabla(\theta_s)ds} f(\theta_t)\}dt$$

とおけは, *Kac* の定理より

(4.9) $$\hat{R}_\alpha f(\theta) = R_\alpha f(\theta) - R_\alpha[\beta\nabla\hat{R}_\alpha f](\theta), \qquad \alpha \geqq \beta\|\nabla\| = \beta$$

をみたす。$f\equiv 1$ として

(4.10) $$u(\theta) = \hat{R}_\alpha f(\theta) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_\theta\{e^{-\beta X_t}\}dt$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \beta\sum_{\varphi=\pm1} R_\alpha(\theta,\varphi)\nabla(\varphi)u(\varphi)$$

ただし $R_\alpha(\theta,\varphi) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P(t,\theta,\varphi)dt$

Sem. on Probab.
Vol.25- I　1966年
P1-104

とおく。(4.10) は $u(1)$, $u(-1)$ に関する連立方程式であるから, $R_\alpha(\theta,\varphi)$ を (3.1) より求めて, $u(\pm 1)$ をかくと,

(4.11)　$$u(\pm 1)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}E_{\pm 1}\{e^{-\beta X_t}\}dt=\frac{\alpha+2\lambda\mp\beta}{(\alpha+\lambda)^2-a^2},\quad (\text{複号同順})$$

$$a=\sqrt{\lambda^2+\beta^2}$$

となる. αについて反転すれば (4.7) が得られる。(終)

<u>*Lemma* 4.3.</u>　$\lambda=c^2$ ならば

(4.12)　$$E_{(x,\theta)}[(cX_t-cX_s)^4]\leq 6|t-s|^2$$

である。

(証明)　1°. $\varphi_{\pm 1}(\beta;\lambda,t)=E_{\pm 1}(e^{-\beta cX_t})$ (複号同順) とおけば, $\lambda=c^2$ のとき (4.7) より

(4.13)　$$2e^{\lambda t}\varphi_1(\beta;\lambda t)$$
$$=e^{\lambda t\sqrt{1+\mu\beta^2}}+e^{-\lambda t\sqrt{1+\mu\beta^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\mu\beta^2}}\left[e^{\lambda t\sqrt{1+\mu\beta^2}}-e^{-\lambda t\sqrt{1+\mu\beta^2}}\right]$$
$$-\frac{\sqrt{\mu}\,\beta}{\sqrt{1+\mu\beta^2}}\left[e^{\lambda t\sqrt{1+\mu\beta^2}}-e^{-\lambda t\sqrt{1+\mu\beta^2}}\right],\quad \mu=1/\lambda$$

故にこの右辺をβの巾級数に展開して β^4 の係数をみることにしよう。

(4.14)　$$E_1(cX_t)^4=\frac{d}{d\beta}\varphi_1(\beta;\lambda,t)\Big|_{\beta=0}=\frac{12}{\lambda^2}e^{-\lambda t}(A+B)$$

$$A=\sum_{n\geq 2}(n^2-n)\frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!}=\frac{\lambda^2t^2}{4}\,ch\,\lambda t-\frac{\lambda t}{4}\,sh\,\lambda t,$$

$$B=\sum_{n\geq 2}(n^2-n)\frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{\lambda^2t^2}{4}\,sh\,\lambda t+\frac{3}{4}\,sh\,\lambda t-\frac{3}{4}\lambda t\,ch\,\lambda t$$

が得られる。

これを簡単にすると

$$E_1(cX_t)^4=3t^2+\frac{9}{2\lambda^2}(1-e^{-2\lambda t})-\frac{6t}{\lambda}-\frac{3t}{\lambda}e^{-2\lambda t}$$
$$\leq 6t^2$$

$E_{-1}(cX_t)^4$ についても同様で

(4.15)　$$E_1(cX_t)^4=E_{-1}(cX_t)^4\leq 6t^2$$

Sem. on Probab.
Vol.25- I　1966年
P1-104

となる。

2°. 故に

$$E_{(x,\theta)}[|cX_{t+s}-cX_t|^4]=E_\theta\{E_{\theta_t}(cX_s)^4\}$$
$$\leq 6s^2 \quad ((4.15)による).$$

さて，Cを$w:[0,+\infty)\ni t\to w(t)\in R^1$なる連続函数の全体とする．$C$に広義一様収束の位相を入れると，これは距離

$$\rho(w,w')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\max_{0\leq t\leq n}|w(t)-w'(t)|}{1+\max_{0\leq t\leq n}|w(t)-w'(t)|}$$

で与えられ，(C,ρ)は完備可分な距離空間となる。θ_t（またはz_t）の basic spaceをΩとする．確率過程$[cX_t;\ t\geq 0;\ P_\theta]$の pathは殆んど連続であるから$\Omega$の部分集合$\Omega_0$で$P_\theta(\Omega_0)=1$なるものが存在し$\omega\in\Omega_0$ならば$cX(t,\omega)$は$t$の函数として$C$に入る。この対応$\Omega_0\in\omega\to cX(\cdot,\omega)\in C$を$X_c$とする。$X_c$は可測写像であって

$$\mu_c(A)=P_\theta\{X_c^{-1}(B)\},\qquad B\in\mathcal{B}(C)$$

によって$\mathcal{B}(C)$上に確率分布μ_cが定まる．これを$[cX_t;\ t\geq 0;\ P_\theta]$の分布と呼ぶ。同様にBrown運動$[B_t;\ t\geq 0;\ \widetilde{P}_0]$の分布$\mu_0$が定まる。

<u>定義.</u>　$f(w)$をC上の任意の有界連続函数とするとき

$$\lim_{c_n\to\infty}\int_C f(w)\,d\mu_{c_n}(w)=\int_C f(w)\,d\mu_0(w) \tag{4.16}$$

ならば，確率過程$[c_nX_t;\ t\geq 0;\ P_\theta]$は$c_n\to\infty$のとき確率過程$[B_t;\ t\geq 0;\ \widetilde{P}_0]$に弱収束するという。

<u>Remark 1.</u>　この定義は距離空間(C,ρ)上の分布の列$\{\mu_{c_n}\}$が分布μ_0に弱収束すると云っても同じである。また容易にたしかめられるように，上の定義は次と同値である。

$f(w)$をC上の任意の連続函数とするとき$f(c_nX(\cdot,\omega))$の分布は$f(B(\cdot,\omega))$の分布に収束する。

<u>Remark. 2.</u>　上の定義は吾々の場合の確率過程について述べたが一般の場合についても同様に定式化されている（[5],[13],[15] 等参照）。

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

以上を準備として次の定理がなりたつ。

Theorem 4.3　speed c_n, mean free path c_n/λ_n の transport process の additive functional の part からきまる確率過程 $[c_n X_t;\ t \geqslant 0;\ P_\theta]$ は，$c_n^2 = \lambda_n$ なる関係を保ちながら $c_n \to \infty$ とするとき Brown 運動 $[B_t;\ t \geqslant 0;\ \tilde{P}_0]$ 弱収束する。

Prokhorov [15] の結果より，Lemma 4.1 と Lemma 4.3 から直ちに定理のなりたつことがわかる。なお [5], [17] を参照。

§5 Branching transport process に関する極限定理

§4 では transport process の additive functional の part の極限として Brown 運動を得たが，この節では両者に同じ型の branch を与えた場合に極限を通じての対応がどのように保存されるかについて考える。以下では [10] の記号，用語を用いる。

5.1. 定義　記号

1°) branching Brownian motion ([10] §5,6).

$\mathcal{S} = R^1 \vee \{\delta\}$ (R^1 の一点 compact 化）とし $[B_t^0, +\infty, \tilde{N}_t, \tilde{P}_x]$ を δ を trap とする 1 次元 Brown 運動の e^{-Kt}-subprocess とする。B_t^0 の半群を S_t^0 としよう。

(5.1)
$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^n \vee \{\Delta\}$$

上に

(5.2)　$q_2 = 1$,　$\pi_2(x, d\bar{y}) = \delta_{(x,x)}(d\bar{y})$,　$x \in \mathcal{S}$, $\bar{y} \in S$

を branching measure の system，B_t^0 を non-branching として構成された branching Brownian motion を $\{B_t\}$，その半群を S_t とする。

2°) branching transport process.

§.§ 3 − 4 と記号を変えて Θ-process の state space $S = \{-1, 1\}$ を $\vartheta = \{-1, 1\}$ であらわす。ϑ^n を $\mathcal{S}^n$ と同様に定義する (cf. [10] §2.1)．さらに，$\mathfrak{z} = \mathcal{S} \times \vartheta$ に対して $\mathfrak{z}^n$ をつくれば定義によって

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$\mathfrak{z}^n = (\mathcal{S}\times\vartheta)^n = \mathcal{S}^n \times \vartheta^n$$

で，その点 $\bar{z}=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathfrak{z}^n$ $\quad z_i=(x_i,\theta_i)\in\mathfrak{z}$

は

$$\bar{z}=(z_1,\cdots,z_n)=((x_1,\theta_1),\cdots,(x_n,\theta_n))$$
$$=((x_1,\cdots,x_n),(\theta_1,\cdots,\theta_n))=(\bar{x},\bar{\theta})$$
$$\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathcal{S}^n,\quad \bar{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in\vartheta^n$$

のようにあらわすことができる。

(5.1) の S と同様に

(5.3) $\qquad Z=\bigcup_{n\geqq 0}\mathfrak{z}^n \vee \{\Delta'\}$

をつくる。

このとき，$\mathfrak{z}$ 上の *transport process* の e^{-Kt}-*subprocess* (K は *Brown* 運動のものと同じ) を $\{z_t^\circ\}$， その半群 $\mathring{T}_t^\lambda$ とし，これを *non-branching part* とし，*branching measue* の *system* を

(5.4) $\qquad q_2=1,\quad \pi_2((x,\theta);(x,\theta)(x,-\theta))=1$

としてできる *branching transport process* を $\{Z_t\}$，その半群を T_t^λ としよう。これは §.§.3-4 で考えた粒子の運動で，粒子が方向転換する場所で死滅し，その瞬間その場所で右と左に進む２個の粒子に分裂する場合である。

さて，Z_t は $\neq\Delta'$ のとき

(5.5) $\qquad Z_t=(X_t,\Theta_t)\qquad X_t\in S$,

とあらわせる。

branching transport process の *basic space* の *measure* を $P_\cdot^c$, *branching Brownian motion* の *measure* を $\widetilde{P}_\cdot$ とかく。

5.2. 極限定理 $\quad$ *Theorem* 4.2 に対応して次がなりたつ。

Theorem 5.1 $\quad c^2/\lambda=1,\ c\to\infty$ のとき，各 t に対して X_t (*cf.*(5.5)) の分布は B_t の分布に収束する。

証明は次のいくつかの段階に分けて行なわれる。

(a) ζ，$\tilde{\zeta}$ をそれぞれ *transport process*， *Brown* 運動の *killing time* とする。

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$P_\cdot(\zeta > t \mid \mathcal{M}^\circ) = e^{-Kt} = \widetilde{P}_\cdot(\widetilde{\zeta} > t \mid \widetilde{\mathcal{N}}^\circ)$$

Lemma 5.1　$f(t,x,\theta)$ を (t,x,θ) 可測な有界函数とすれば

(5.8)
$$\lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\ c\to\infty} E^c_{(x,\theta)}\{f(\zeta,\ Z^\circ_{\zeta-})\}$$
$$= \frac{1}{2}\widetilde{E}_x[f(\widetilde{\zeta},\ B^\circ_{\widetilde{\zeta}-},\ 1) + f(\widetilde{\zeta},\ B^\circ_{\widetilde{\zeta}-},\ -1)]$$

である。

（証明）
$$\lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\ c\to\infty} E^c_{(x,\theta)}\{f(\zeta,\ Z^\circ_{\zeta-})\}$$
$$= \lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\ c\to\infty} \int f(t,z)\, P^c_{(x,\theta)}\{\zeta\in dt,\ Z^\circ_{\zeta-}\in dz\}$$
$$= \lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\ c\to\infty} \int_{t=0}^{\infty}\int_{(y,\varphi)\in\mathcal{Z}} f(t,y,\varphi)\, Ke^{-Kt} P^c(t,(x,\theta),d(y,\varphi))$$
$$= \lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\ c\to\infty} \int_0^\infty Ke^{-Kt}\, T_t^c f(t,x,\theta)\,dt^{7)}$$

$\widetilde{S}_t$ を Brown 運動の半群とすれば，Theorem 4.1 (i) より

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty Ke^{-Kt}[\widetilde{S}_t f(t,x,1) + \widetilde{S}_t f(t,x,-1)]\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\widetilde{E}_x[f(\widetilde{\zeta},\ B^\circ_{\widetilde{\zeta}-},\ 1) + f(\widetilde{\zeta},\ B^\circ_{\widetilde{\zeta}-},\ -1)] \qquad \text{(終)}$$

(5.9)
$$K_c((x,\theta);ds,d(y\varphi)) = P^c_{(x\theta)}\{\zeta\in ds,\ Z^\circ_{\zeta-}\in d(y,\varphi)\}$$
$$x,y\in\mathcal{S},\quad \theta,\varphi\in\vartheta$$

(5.10)
$$K(x;ds,dy) = \widetilde{P}_x\{\widetilde{\zeta}\in ds,\ B^\circ_{\widetilde{\zeta}-}\in dy\}$$

とおく。次に τ, $\widetilde{\tau}$ をそれぞれ branching transport process, branching Brownian motion の first branching time として

(5.11)
$$\psi_c(\bar{z};ds,d\bar{z}') = P^c_{\bar{z}}\{\tau\in ds,\ Z_\tau\in d\bar{z}'\}$$

---

7) speed c の transport process に関係する量には c をつけた。

Sem. on Probab.
Vol.25- I 1966年
P1-104

$$(5.12) \qquad \psi(\bar{x}\,;\, dS,\, d\bar{x}') = \widetilde{P}_{\bar{x}}\left\{\tilde{\tau} \in dS\,,\ B_{\tilde{\tau}} \in d\bar{x}'\right\}$$

とおく。

<u>*Lemma* 5.1 の系1</u>　$f(t,y)$ を (t,y) 可測有界函数，$\varphi(=\pm 1)$ を与えられた ϑ の点とする。*Lemma* 5.1 の $f(t,y,\varphi)$ を

$$f(t,y,\theta) = \begin{cases} f(t,y) & \theta = \varphi \\ 0 & \theta = -\varphi \end{cases}$$

ととれば

$$(5.13) \qquad \lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} \int f(t,y,\psi)\, K_c((x,\theta);\, dt,\, d(y,\psi))$$

$$= \frac{1}{2}\int f(t,y)\, K(x;\, dt,\, dy)$$

である.

<u>*Lemma* 5.1 の系2</u>　(x,θ) を固定する。

$$(5.14) \qquad d\mu_c(t,y) = \left[K_c((x,\theta);dS,d(y,1)) + K_c((x,\theta);dS,d(y,-1))\right]$$

なる $([0,\infty)\times\mathcal{S}$ 上の$)$ 確率測度を考える。このとき，$f(t,y)$ なる任意の有界可測函数に対して

$$(5.15) \qquad \lim_{\frac{c^2}{\lambda}=1,\, c\to\infty} \int f(t,y)\, d\mu_c(t,y) = \int f(t,y)\, K(x;\, dt,\, dy)$$

である。

(証明)

$$g(t,y,\varphi) = \begin{cases} f(t,y) & \varphi = 1 \\ 0 & \varphi = -1 \end{cases}, \qquad h(t,y,\varphi) = \begin{cases} f(t,y) & \varphi = -1 \\ 0 & \varphi = 1 \end{cases}$$

とおく。系1より

$$\int f(t,y)\, K(x;dt,dy) = \lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} \int g(t,y,\varphi)\, K_c((x,\theta);dt,d(y,\varphi))$$

$$+ \lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} \int h(t,y,\varphi)\, K_c((x,\theta);\, dt\ d(y\varphi))$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$= \lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} \int f(t,y) K_c((x,\theta);\, dt,\, d(y,1)) + \lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} \int f(t,y) K_c((x,\theta);\, dt, d(y,-1))$$

$$= \lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} \int f(t,y)\, d\mu_c(t,y) \qquad \text{(終)}$$

<u>*Lemma 5.2*</u> $\mathcal{B}_X$ を X 上の σ-algebra, μ_n $(n=1,2,\cdots)$, μ をその上の確率測度で，任意の非負有可測函数 f に対して

$$(5.16) \qquad \lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$$

をみたすとする。このとき一様有界可測函数の列 $\{f_n\}$ と有界可測函数 f において

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (a.e.\ \mu)$$

ならば

$$(5.17) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu_n = \int_X f\, d\mu$$

である。

（証明） *Egoroff* の定理より

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists e \in \mathcal{B}_X$ で $\mu(e) < \varepsilon$ かつ

$$\lim_{n\to n} f_n(x) = f(x) \ \ uniformly\ in\ x \in X - e$$

がなりたつ. 故に

$$\left|\int f_n d\mu_n - \int f d\mu\right| \leq \left|\int (f_n - f) d\mu_n\right| + \left|\int f d\mu_n - \int f d\mu\right|$$

において第2項は(5.16)より $n\to\infty$ のとき 0 に収束する。また

$$\text{第1項} = \left|\int (f_n - f) d\mu_n\right| \leq \left|\int_e (f_n - f)\, d\mu_n\right| + \left|\int_{X-e} (f_n - f)\, d\mu_n\right|$$

$$\leq \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|\, \mu_n(e) + \sup_{x\in X-e} |f_n(x) - f(x)|\, \mu_n(X-e)$$

としてみれば，仮定と e のとり方より容易に結論をみちびくことができる.

(b) §5.1で定義したように，T_t^c および S_t をそれぞれ *branching transport process* Z_t および *branching Brownian motion* B_t の半群とする。次に τ_n, $\tilde{\tau}_n$ をそれぞれ Z_t, B_t の n 番目の *branching time* とし

$$(5.20) \qquad T_t^{(n)c} f(\bar{z}) = E_{\bar{z}}^c [f(z_t);\ \tau_n \leq t < \tau_{n+1}]$$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

(5.21) $$S_t^{(n)}f(\bar{x}) = \widetilde{E}_{\bar{x}}[f(B_t);\ \widetilde{\tau}_n \leqslant t < \tau_{n+1}]$$

$$n \geqslant 0, \quad (\tau_0 \equiv 0 \text{ とする})$$

とおく。[10] *Proposition* 2.12 と *Lemma* 2.2 より

(5.22) $$T_t^c f(\bar{z}) = \sum_{r=0}^{\infty} T_t^{(r)c} f(\bar{z}), \quad \bar{z} \in Z, \quad f \in \mathcal{B}(Z), \quad f(\Delta') = 0$$

(5.23) $$S_t f(\bar{x}) = \sum_{r=0}^{\infty} S_t^{(r)} f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S, \quad f \in \mathcal{B}(S), \quad f(\Delta) = 0$$

および

(5.24) $$T_t^{(n)c} f(\bar{z}) = \int_0^t \int_Z \psi_c(\bar{z}; dv, d\bar{z}')\, T_{t-v}^{(n-1)c} f(\bar{z}'),$$

(5.25) $$S_t^{(n)} f(\bar{x}) = \int_0^t \int_S \psi(\bar{x}; dv, d\bar{x}')\, S_{t-v}^{(n-1)} f(\bar{x}') \qquad n \geq 1$$

がなりたつ。

<u>*Lemma* 5.3</u> $(x, \theta) \in \vartheta$ と t を固定すれば，無限級数

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_t^{(r)c} f(x, \theta)$$

は $c\,(>0)$ について一様に $T_t^c f(x, \theta)$ に収束する。

（証明） 1°. 定義 (5.20) より

$$\left|\sum_{r=n}^{\infty} T_t^{(r)c} f(x, \theta)\right| = \left|\sum_{r=n}^{\infty} E_{(x,\theta)}^c [f(z_t);\ \tau_r \leqslant t < \tau_{r+1}]\right|$$

$$\leqslant \|f\| \sum_{r=n}^{\infty} P_{(x,\theta)}^c \{\tau_r \leqslant t < \tau_{r+1}\} \leq \|f\|\, P_{(x,\theta)}^c \{\tau_n \leq t\}$$

よって $c > 0$ について一様に

$$\lim_{n\to\infty} P_{(x\theta)}^c \{\tau_n \leqslant t\} = 0$$

となることを示せばよい。

2°. Z_t の強 *Markov* 性より

(5.26) $$P_{(x\theta)}^c \{\tau_n \leq t\} = \int_0^t \int_Z P_{(x,\theta)}^c \{\tau_{n-1} \in dv,\ Z_{\tau_{n-1}} \in d\bar{z}\}\, P_{\bar{z}}^c \{\tau_1 \leqslant t - v\}$$

となる。 z_t の *branching measure* の *system* の定義 (5.4) より $(x, \theta) \in$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

∂から（すなわち1個の粒子から）出発するとき，$n-1$ 回の branch の後では粒子は n 個になるので，(5.26) で $Z_{\tau_{n-1}} \in d\bar{z}$ のとき，$\bar{z} \in \mathfrak{z}^n$ としてよい。また $P^c_{(x,\theta)}(\tau_1 > t) = e^{-Kt}$ であったから $\bar{z} \in \mathfrak{z}^n$ ならば

$$P^c_{\bar{z}}(\tau_1 \le t-v) = 1-e^{-nK(t-v)} \qquad \bar{z} \in \mathfrak{z}^n$$

よって (5.26) より

$$(5.27) \qquad P^c_{(x\theta)}(\tau_n \le t) = \int_0^t \left[1-e^{-nK(t-v)}\right] P^c_{(x,\theta)}(\tau_{n-1} \in dv) \quad (n \ge 1)$$

$P^c_{(x\theta)}(\tau_1 > t) = e^{-Kt}$ だから上式より $P^c_{(x\theta)}(\tau_2 \leqq t) = (1-e^{-Kt})^2$, …… 一般に $P^c_{(x\theta)}(\tau_n \leqq t) = (1-e^{-Kt})^n$ となり証明が終る。

$C^*(\mathcal{S})$ を $\|f\| < 1$ なる $\mathcal{S}$ 上の連続函数の全体とする。$f \in C^*(\mathcal{S})$ に対して map $\wedge$ を

$$\wedge : f \to \hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} = \partial = \mathcal{S}^0, \\ \prod_{i=1}^{n} f(x_i), & \bar{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{S}^n, \\ 0, & \bar{x} = \Delta, \end{cases}$$

と定義する。$C^*(\mathfrak{z})$ についても同様である（cf. [10] §2.1 ）。$f \in C^*(\mathcal{S})$ は $f(x,\theta) \equiv f(x)$ として $C^*(\mathfrak{z})$ の元とも考えることにする。このとき
[7] Lemma 3.5 より

$$(5.28) \qquad T_t^{(p)c}\hat{f}(\bar{z}) = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_n=p \\ p_1,\cdots,p_n \ge 0}} \prod_{j=1}^{n} T_t^{(p_j)c}\hat{f}(z_j)$$

$$\bar{z} = (z_1, \cdots, z_n) \in Z, \quad f \in C^*(\mathfrak{z})$$

がなりたつ。これを用いて次を示そう。

<u>Lemma 5.4</u>　$f \in C^*(\mathcal{S})$ ならば

$$(5.29) \qquad \lim_{c^2/\lambda = 1,\, c\to\infty} T_t^{(p)c}\hat{f}(\bar{z}) = S_t^{(p)}\hat{f}(\bar{x}), \qquad p = 0, 1, 2, \cdots$$

である．ただし $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{\theta})$ とし，$\hat{f}(\bar{z})$ は $f \in C^*(\mathfrak{z})$ と考えて $\wedge$ map をほどこしたものとする。

（証明）

1°. $p = 0$ のとき，$\bar{z} = (z_1, \cdots, z_n)$ とすれば
(5.28) より

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$$T_t^{(0)c}\hat{f}(\bar{z}) = \prod_{j=1}^{n} T_t^{(0)c} f(z_j)$$

であるから，*Theorem* 4.1 (i) より正しいことがわかる。

2°. $0 \leqq p \leqq r-1$ なるすべての p について正しいとする。このとき，$\bar{z}=z=(x,\theta)\in\vartheta$ ならば

$$\lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} T_t^{(r)c}\hat{f}(z) = S_t^{(r)}\hat{f}(x) \tag{5.30}$$

を示そう。

(5.24) より

$$T_t^{(r)c}\hat{f}(x,\theta) = \int_0^t\int_Z \psi_c((x,\theta); dv, d\bar{z}')\, T_{t-v}^{(r-1)c}\hat{f}(\bar{z}')$$

(5.4) より

$$= \int_0^t\int_{\mathfrak{z}^2} \psi_c((x,\theta); dv, d(y,\varphi,y-\varphi))\, T_{t-v}^{(r-1)c}\hat{f}(y,\varphi,y,-\varphi)$$

$$= \int_0^t\int_{S} K_c((x,\theta); dv, d(y1))\, T_{t-v}^{(r-1)c}\hat{f}(y,1,y,-1)$$

$$+ \int_0^t\int_{S} K_c((x,\theta); dv, d(y,-1))\, T_{t-v}^{(r-1)}\hat{f}(y,1,y,-1)$$

故に，*Lemma* 5.1，系2 の記号 $\mu_c(dy)$ を用いると

$$T_t^{(r)c}\hat{f}(x,\theta) = \int_0^t\int_S T_{t-v}^{(r-1)c}\hat{f}(y,1,y,-1)\, d\mu_c(t,y)$$

となる。仮定より

$$\lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} T_{t-v}^{(r-1)c}\hat{f}(y,1,y,-1) = S_{t-v}^{(r-1)}\hat{f}(y,y)$$

であるから，(5.15) と *Lemma* 5.2 より

$$\lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} T_t^{(r)}\hat{f}(x,\theta) = \int_0^t\int_S S_{t-v}^{(r-1)}\hat{f}(y,y)\, K(x; dv, dy)$$

$$= \int_0^t\int_S S_{t-v}^{(r-1)}\hat{f}(y,y)\, \psi(x; dv, d(y,y)) = S_t^{(r)}\hat{f}(x)$$

3°. $0 \leq p \leq r-1$ なる p に対して *Lemma* がなりたつとして，$p=r$ のときにもなりたつことを示す。(5.28) で $\bar{z}=(z_1,\cdots,z_n)=((x_1\theta_1),\cdots,(x_n,\theta_n))=$

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

$(\bar{x}, \bar{\theta})$ $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ とすると仮定と(5.30)より

$$\lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} T_t^{(r)c}\hat{f}(\bar{z}) = \lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_n=r\\ r_1,\cdots,r_n\geq 0}} \prod_{j=1}^{n} T_t^{(r_j)c}\hat{f}(z_j)$$

$$= \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_n=r\\ r_1,\cdots,r_n\geq 0}} \prod_{j=1} S_t^{(r_j)}\hat{f}(x_j) = S_t\hat{f}(\bar{x})$$

となり正しいことがわかる。従って1°, 2°および3°より *Lemma* が証明されたことになる。

(c) (*Theorem* 5.1 の証明). $f\in C^*(\mathcal{S})$ とする。Z_t は(5.5)のようにあらわせるから

$$E_{\bar{z}}^c\hat{f}(X_t) \doteq T_t^c\hat{f}(\bar{z})$$

である。先ず $\bar{z}=(x,\theta)\in\mathcal{D}$ のとき(5.22)の分解において $c^2/\lambda=1$ として $c\to\infty$ ならしめれば *Lemma* 5.3 と *Lemma* 5.4 より

$$\lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} T_t^c\hat{f}(x,\theta) = S_t\hat{f}(x,\theta)$$

となることがわかる。次に $\bar{z}=(z_1,\cdots,z_n)=((x_1,\theta_1),\cdots,(x_n,\theta_n))=(\bar{x},\bar{\theta})$, $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ のときは

$$T_t^c\hat{f}(\bar{z})=\prod_{j=1}^{n} T_t^c\hat{f}(z_j), \quad S_t\hat{f}(\bar{x})=\prod_{j=1}^{n} S_t\hat{f}(x_j)$$

であるから上のことより

$$\lim_{c^2/\lambda=1,\, c\to\infty} T_t^c\hat{f}(\bar{z}) = S_t\hat{f}(\bar{x})$$

となる。しかるに[10] *Lemma* 2.1 (iii) から $C^*(\mathcal{S})$ の *linear hull* $\{\sum_1^K c_i\hat{f}_i;\ f_i\in C^*(\mathcal{S}),\ f_i\geq 0\}$ は $C_0(S)=\{f;$ S 上で有界連続かつ $f(\Delta)=0\}$ の中で *dense* だから, X_t の分布は B_t の分布に収束している。

(終)

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

文　献　表

[1] Bellmann, R, Kalaba, R, Milton, G.M, *Invariant imbedding and neutron transport theory V — Diffusion as a limiting case,* J. Math. and Mech., 9 (1960), 933-943.

[2] Dynkin, E.B, *Markov processes.* Springer, 1965.

[3] ————, *Discotinuous Markov process.* Theor. Probability Appl., 3 (1958), 38-56.

[4] Gelfand, M, Florov, A.S, Chenzov, N.N, *Calculations of continual integrals by Monte-Carlo method,* Извeстия высших учебных заведений, 1958.

[5] Гихман, И. М, Скороход, А.В, Введение В., *Теорию случайных процессов,* Наука, 1965.

[6] Harris, T.E, *The theory of branching processes,* Springer, 1963.

[7] Ikeda, N., Nagasawa, M., Watanabe, S., *On branching Markov processes.* Proc. Japan Acad., 41 (1965), 816-821.

[8] ————, *Fundamental equations of branching Markov processes.* Proc. Japan Acad., 42 (1966), 252-257.

[9] ————, *A construction of branching Markov processes.* Proc. Japan Acad., 42 (1966), 380-384.

[10] ————, 分枝マルコフ過程の基礎Ⅰ, Ⅱ. Semi. on Prob., vol. 23, 1966.

[11] Ito, K., H.P. McKean, Jr., *Diffusion processes and their samples paths.* Springer, 1965.

[12] Il'in, A.M., Khas'minskii, R.Z., *On equations of Brownian*

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

motion.
Theor. Probability App., 9 (1964), 421-444.

[13] Maruyama, G., Totoki, H., 確率過程の収束に関する位相解析的方法
Semi. on Prob. Vol. 4, 1960.

[14] Moriguchi, Udagawa, Hitotsumatsu, 数学教室 Ⅲ.
岩波書店, *1964.*

[15] Prohorov, Yu. V., *Convergence of random processes and limit theoremes in probability theory.*
Probability App., 1 (1956), 177-238.

[16] Skorohod, A.V., *Limiting theorems for stochastic processes.*
Theor. Probability App., 1 (1956), 261-290.

[17] Stone, C., *Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals.*
Proc. Amer. Math. Soci., 14 (1963), 694-696.

[18] Watanabe, H., 確率論セミナー第5回シンポジューム討論報告集.
Semi. on Prob. vol. 18, 1964.

[19] Wing, G.M., *An introduction to transport theory.*
Wiley, 1962.

Sem. on Probab.
Vol.25-Ⅰ 1966年
P1-104

1966.10.発行 確率論セミナー