Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 27

Hermite多項式について

河 野 敬 雄

1 9 6 7

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

序　　文

Hermite 多項式は，ふるくから調和振動子の解析等の古典力学における解析に現われていた特殊関数であつたが，確率論においてガウス測度，特に無限次元ガウス測度の重要性が認識されるにつれて，その直交関数系としての Hermite 多項式も新しい角度から見なおされ始めた。Wiener は一貫して確率論の立場から Hermite 多項式を論じた。

このセミナー・ノートでは，I章で一般論として無限次元核型空間の共役空間上に確率測度が定義されるための条件と，その測度と基礎の核型空間上の特性汎関数との対応，いわゆる Minlos の定理を，主として Gelfand–Vilenkin の Generalized Functions IV に沿つて証明し，さらにこのセミナー・ノートで取りあつかう無限次元ガウス測度についての性質，無限次元回転群，無限次元平行移動群，無限次元ラプラシアンを，Y. Umemura [21] をもとにして解説した。II章では主として，Y. Umemura – N. Kôno [23] に従つて，無限次元ガウス測度を球面上の一様分布の射影極限として表わし，それによつて無限次元ラプラシアン，その固有関数としての Hermite 多項式が有限次元のラプラシアン，その固有関数としての球関数（Gegenbauer の多項式）の極限であることを示す。III章は主として，A. Orihara による無限次元運動群の表現をもとにしたHermite 多項式による直和分解，Hermite 多項式の性質等を N. Kôno [11] に従つて解説し，一方それが K. Itô による multiple Wiener integral による分解と一致することを示す。IV章のポアソン white noiseの場合はガウス型の場合ほど群論的性質がよく知られていないが，確率論において連続分布としてのガウス分布と離散分布としてポアソン分布には共通の性質（加法性）があるからIII章における Hermite 多項式の類似性をもとにして Charlier の多項式の性質，直交分解を求める。

このセミナー・ノートを作成するにあたつて事務局の方々をはじめ，関西の確率論セミナーの皆さんに大変お世話になつたことを深く感謝する。

１９６６年１２月２４日　　　　　　　　　　　　　N. Kôno

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

第 I 章　Minlos の定理と無限次元ガウス測度

§ 1. 可算 Hilbert 空間と核型空間

無限次元ガウス測度を定義したいわけであるが，まず有限次元ガウス測度の Fourier 変換を計算してみよう。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e\left[i\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right]\cdot e\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right](2\pi)^{-\frac{n}{2}}dy_1\cdots dy_n \quad {}^{*)}$$

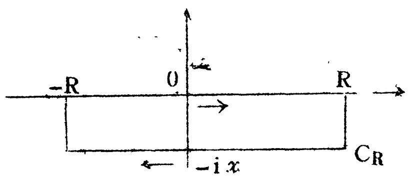
$$=\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e\left[i x_j y_j-\frac{1}{2}y_j^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}dy_j$$

$$=\prod_{j=1}^{n} e\left[-\frac{1}{2}x_j^2\right]\int_{-\infty}^{\infty} e\left[-\frac{1}{2}(y_j-i x_j)^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}dy_j$$

従って $\int_{-\infty}^{\infty} e\left[-\frac{1}{2}(y-ix)^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}dy$ を計算すればよい。

$f(z)=e\left[-\frac{1}{2}z^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ は z について正則だから

$$\int_{C_R} f(z)\,dz=0$$



ところが

$$\int_{C_R} f(z)\,dz=\int_{-R}^{R} e\left[-\frac{y^2}{2}\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}dy+\int_{R}^{-R} e\left[-\frac{1}{2}(y-ix)^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$+\int_{0}^{-x} e\left[-\frac{1}{2}(R+iy)^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}i\,dy+\int_{-x}^{0} e\left[-\frac{1}{2}(-R+iy)^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}i\,dy$$

*)　$\exp x = e[x]$ と書く。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

第3項を評価する。

$$\left|\int_0^{-x} e\left[-\frac{1}{2}(R+iy)^2\right] i\,dy\right| \leqq |x|(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e\left[-\frac{1}{2}R^2\right] \to 0\ (R\to\infty)\ .$$

第4項も同様にして $R\to\infty$ の時0に収束する。従つて

$$0=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty} e\left[-\frac{1}{2}y^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}dy+\int_{\infty}^{-\infty} e\left[-\frac{1}{2}(y-ix)^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}dy$$

従つて $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e\left[-\frac{1}{2}(y-ix)^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}dy=\int_{-\infty}^{\infty} e\left[-\frac{1}{2}y^2\right](2\pi)^{-\frac{1}{2}}dy=1$

故に，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e\left[i\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right]\cdot e\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right](2\pi)^{-\frac{n}{2}}dy_1\cdots dy_n$$

$$= e\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right] \qquad (1-1)$$

Bochner の定理としてよく知られているように，（1－1）を与えると有限次元Euclid空間上の確率測度が一意に定まり，それはガウス測度である。今，（1－1）の関係式を無限次元即ち Hilbert空間に拡張して考えよう。

Hを無限次元 Hilbert空間とし，H上の関数，$\varphi(x)=e\left[-\frac{1}{2}\|x\|^2\right]$ を考えよう。$\varphi(x)$ は次の性質をもつ。

i） $\varphi(0)=1$

ii） $\varphi(x)$ は H 上の連続関数である。　　（1－2）

iii） 任意の複素数 λ_j，任意の元 $x_j\in H$ に対し

$$\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_j\overline{\lambda_k}\,\varphi(x_j-x_k)\geqq 0$$

i）と ii）は明らかであるから iii）を証明しよう。

$\{x_1\cdots x_n\}$ で張られる H の部分空間の base を $\{e_m\}_{m=1}^{n}$ とすると，x_j は $\sum_{m=1}^{n} c_{j,m}\,e_m$ と表わされる。従つて，

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda_k}\ \varphi(x_j - x_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda_k}\ e\left[-\frac{1}{2}\|x_j - x_k\|^2\right]$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda_k}\ e\left[-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} |a_{j,m} - a_{k,m}|^2\right]$$

（1－1）より

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda_k} e\left[i\sum_{m=1}^{n} y_m (a_{j,m} - a_{k,m}) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} y_m^2\right] (2\pi)^{-\frac{n}{2}} dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e\left[i\sum_{m=1}^{n} a_{jm}\right]\right|^2 e\left[-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} y_m^2\right] (2\pi)^{-\frac{n}{2}} dy_1 \cdots dy_n$$

$$\geqq 0$$

ところで，有限次元の場合と同様にして $\varphi(x)$ は $H' = H$ 上の測度の Fourier 変換として表現できるであろうか？ 今，

$$\varphi(x) = \int_H e[i(x,y)]\, dp(y) \qquad (1-3)$$

と表わされたと仮定する。 $\{e_j\}_{j=1,2,\cdots}$ をHの任意の正規直交系とすると

$\sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, y)|^2 \leqq \|y\|^2 < +\infty$ だから $\lim_{j\to\infty} (e_j, y) = 0$, $|e[i(e_j, y)]| \leqq 1$

で，1は可積分だから，

$$\lim_{j\to\infty} \int_H e[i(e_j, y)]\, dp(y) = 1$$

他方 $\lim_{j\to\infty} \varphi(e_j) = \lim_{j\to\infty} e\left[-\frac{1}{2}\|e_j\|^2\right] = e\left[-\frac{1}{2}\right] < 1$ となり，（1－3）のように表わされることは矛盾を導く。

以上のことから有限次元のガウス測度を無限次元に拡張するためには普通の Hilbert 空間では不適当であることがわかつた。

無限次元ガウス測度を得るためには可算 Hilbert 核型空間なるものを定義しなければならない。

定義1－1． 複素数体上の線型空間 Φ （特にことわらないかぎり今後すべて無限次元の場

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

合のみを考える。）が次の条件を満す時，可算 Hilbert 空間と呼ぶ。

Φには可算個の内積 $(\varphi,\varphi)_n$, $n=1,2,\cdots$ が定義され

i） $\forall\varphi\in\Phi$ に対し $n\leq m$ ならば $(\varphi,\varphi)_n\leqq(\varphi,\varphi)_m$

ii） $\Phi=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Phi_n$ ，ここで Φ_n は $\|\varphi\|_n=\sqrt{(\varphi,\varphi)_n}$ による Φ の完備化。

注意． ii）の条件は次の条件と同値である。

ii）′ Φの0の近傍系として， $V_{n,\varepsilon}=\{\|\varphi\|_n<\varepsilon\}$ （n，εを任意に選ぶ）をとつて定まるΦの位相に関しΦが完備であること。

i）を満さない可算個の内積をもつ場合は新たな内積を $(\varphi,\phi)_n'=\sum_{k=1}^{n}(\varphi,\phi)_k$ ととおくことによつて Φ の ii）′ によつて定まる位相を変えることなく条件 i）を満たすようにできる。

$\Phi'=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Phi_n'$ とおく。ここで Φ_n' は Hilbert 空間 Φ_n の線型汎関数の全体。よく知られているように $\Phi_n'\cong\Phi_n$。直ちにわかるように Φ' は ii）′ の位相で連続な線型汎関数の全体と一致する。

さて，Φ は Φ_n で dense であつて，$m\leq n$ ならば $(\varphi,\varphi)_m\leqq(\varphi,\varphi)_n$ だから，写像 $\Phi_n\supset\Phi\ni\varphi\rightarrow\Phi_m\supset\Phi\ni\varphi$ は，Φ_n から Φ_mへの連続な写像へ拡張できる。それを T_m^nと記す。明らかに，$T_m^p=T_m^n\cdot T_n^p$ $(m\leq n\leq p)$。次に核型空間の定義をしよう。

定義1－2． 可算 Hilbert 空間 Φ が核型空間であるとは，任意の m に対し n があつて，$\varphi\in\Phi_n$ に対し

$$T_m^n\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\varphi,\varphi_k)_n\,\phi_k \qquad (1-4)$$

と書ける時をいう。

ここで $\{\varphi_k\}$，$\{\phi_k\}$ はそれぞれ Φ_n，Φ_m の完全正規直交系で，$\lambda_k>0$，$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2<+\infty$。

II 章以下で使うために，具体的な例について述べよう。

Sは直線上の無限回微分可能な関数で，任意の非負整数 p，qに対しある定数 $C_{p,q}$ があつて任意の xに対し $|(1+x^2)^p\varphi^{(q)}(x)|\leq C_{p,q}$ を満すような関数全体を表わすとする。$\varphi,\phi\in S$ に対し

$$(\varphi,\phi)_p=\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^p\sum_{q=0}^{p}\varphi^{(q)}(x)\,\overline{\phi}^{(q)}(x)\,dx \qquad (1-5)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

とおくことにより S は可算 Hilbert 空間となる。(完備性は明らか)。 S が核型空間であることを示そう。

$$(\varphi,\phi)'_p=\sum_{n=1}^{\infty}(1+n^2)^p\int_{-n-1}^{-n}+\int_{n}^{n+1}\sum_{q=0}^{p}\varphi^{(q)}(x)\,\overline{\phi}^{(q)}(x)\,dx \tag{1-6}$$

とおくと，明らかに $\|\varphi\|'_p \geqq \|\varphi\|_p$ ($\forall p$)．さらに任意の q に対し p が存在して，任意の n と任意の $|x|\in[n-1,n]$ に対し $2^q(1+x^2)^p\geqq(1+n^2)^q$ が成立つから，$\|\varphi\|'_q \leqq 2^q\|\varphi\|_p$。従って $\{\|\cdot\|'_p,\ p=0,1,2,\cdots\}$ より定まる位相と $\{\|\cdot\|_p,\ p=0,1,2,\cdots\}$ より定まる位相は一致する。

次に $[n,n+1]$ で定義された無限回微分可能な関数の全体を K(n) で表わす。
$K(n)\ni\varphi,\phi$ に対し

$$(\varphi,\phi)_p=\sum_{q=0}^{p}\int_{n}^{n+1}\varphi^{(q)}(x)\,\overline{\phi}^{(q)}(x)\,dx \tag{1-7}$$

によって内積を定義すると K(n) は可算 Hilbert 空間となる。
ところで，$\phi_k(x)=e[2\pi ikx]$，$(k=0,1,2,\cdots)$ は K(n) の任意の内積に関して完全直交系をなす。従って $\varphi\in K(n)$ は任意の p に対し，

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi,\phi_k)_p\frac{\phi_k}{\|\phi_k\|_p} \tag{1-8}$$

と展開される。従って

$$T_p^{p+1}\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi,\phi_k)_{p+1}\frac{\|\phi_k\|_p}{\|\phi_k\|_{p+1}}\cdot\frac{\phi_k}{\|\phi_k\|_p} \tag{1-9}$$

$$\|\phi_k\|_p^2=\sum_{q=0}^{p}\int_{n}^{n+1}|(e[2\pi ikx])^{(q)}|^2\,dx$$

$$=\sum_{q=0}^{p}(2\pi k)^{2q}$$

従って，

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\phi_k\|_p^2}{\|\phi_k\|_{p+1}^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{0\leq q\leq p} (2\pi k)^{2q}}{\sum_{0\leq q\leq p+1} (2\pi k)^{2q}}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P+1}{P+(2\pi k)^2} < +\infty$$

従つて（1－9）は核型空間の条件（1－4）を満たす。故に K(n) は核型空間である。

さらに $K(S) = \{\overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots); \varphi_{2i} \in K(i), \varphi_{2i-1} \in K(-i+1)$, $i = 1, 2, \cdots$，任意の P に対し

$$\|\overline{\varphi}\|_p^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (1+n^2)^p \|\varphi_n\|_p^2 < +\infty \qquad (1-10)$$

となる$\}$，とおく。

定義から明らかに，K(S) は可算 Hilbert 空間となる。$\phi_n^k = e[2\pi ikx]$，$k=0, 1, 2, \cdots, x \in [n, n+1]$ とおくと $\{\phi_n^k(x)\}$，$k = 0, 1, 2, \cdots$ は K(n) の base である。従つて $\overline{\phi}_n^{kn} = (0, \cdots 0, \phi_n^{kn}, 0, \cdots)$，$k_n = 0, 1, 2, \cdots$，$n = 1, 2, \cdots$ は K(S) の base である。任意の $\overline{\phi} \in K(S)$ に対し，$\overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots)$ と書くと，

$$(T_p^{p+1}\overline{\varphi}, \overline{\phi}_n^{k_n})_p = (1+n^2)^p (T_p^{p+1}\varphi_n, \phi_n^{k_n})_p$$

ここで，

$$m_{n,p} = (1+n^2)^p, \quad \lambda_{k_n} = \|\varphi k_n\|_p / \|\phi k_n\|_{p+1}$$

とおくと，（1－9）から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_n=0}^{\infty} (T_p^{p+1}\overline{\varphi}, \overline{\phi}_n^{k_n})_p^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_n=0}^{\infty} (\lambda_{k_n} m_{n,p} (\varphi_n, \phi_n^{k_n})_{p+1}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_n=0}^{\infty} \lambda_{k_n}^2 \frac{m_{n,p}^2}{m_{n,p+1}^2} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_n=0}^{\infty} (m_{n,p+1} (\varphi_n, \phi_n^{k_n})_{p+1})^2$$

$\sum_{k_n=0}^{\infty} \lambda_{k_n}^2$ は n と無関係だから

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\leqq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{n,p}^2}{m_{n,p+1}^2} \sum_{n=1}^{\infty} (m_{n,p+1} \quad \|\varphi_n\|_{p+1})^2$$

ここで容易にわかるように

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_{n,p}^2 / m_{n,p+1}^2 < +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$$

故に K(S) は核型空間である。 S は K(S) の閉部分空間であるから定義から直ちに S も核型空間であることがわかる。(q. e. d)

§ 2. 核型空間の共役空間上の測度

Φ を可算Hilbert 空間とする。この節では Φ' 上の測度を定義することを目標とする。

定義1－3. 一次独立な元 $\varphi_1, \cdots \varphi_n \in \Phi$ を任意に選び，

$Z = \{ F \in \Phi' ; ((F, \varphi_1), \cdots (F, \varphi_n)) \in A,\ A \in B(R^n) =$ n次元ボレル集合の全体 $\}$。

で定義される Φ'の部分集合を，$\varphi_1, \cdots \varphi_n$と A によつて，もしくは $\varphi_1, \cdots \varphi_n$ で張られる有限次元部分空間 Ψ とボレル集合Aによつて決まる Cylinder set と呼ぶ。

例． strips. $a_k \leq (F, \varphi_k) \leq b_k,\ k = 1, \cdots n$ を満たすFの全体。

Ψ を Φ の有限次元部分空間とする時，

$$\Psi^{\circ} = \{ F \in \Phi', \quad {}^{\forall}\varphi \in \Psi \text{ に対し } (F, \varphi) = 0 \}$$

で定義される Φ' の部分空間を Ψ の annihilator と呼ぶ。

Zを Φ のn次元部分空間 Ψ とボレル集合 $A \in B(R^n)$で決るCylinder set とすると Z は，Φ' から Φ'/Ψ° への自然な写像 I によつて， $Z = I^{-1}(A)$ とかける。
($\Phi'/\Psi^{\circ} \cong R^n$ だから)。

定義1－4. μ が Φ' 上の Cylinder set 測度であるとは，次の条件を満たす時をいう。

ⅰ) $0 \leq \mu(Z) \leq 1$ (任意の Cylinder set Z に対して)

ⅱ) $\mu(\Phi') = 1$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

iii) $Z_n = I^{-1}(A_n)$, $n = 1, 2, \cdots$, $A_n \subset \Phi'/\Psi^\circ$, A_n は互に素なボレル集合とする時，$Z = \bigcup I^{-1}(A_n) = I^{-1}(\bigcup A_n)$ だから Z も又 Cylinder set である。この時

$$\mu(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Z_n) \qquad (1-11)$$

が成り立つ。

Z を Φ の有限次元部分空間 Ψ とボレル集合Aによつて決まる Cylinder set とする時

$$\mu(Z) = \nu_{\Psi}(A) \qquad (1-12)$$

とおけば，$\nu_{\Psi}(\cdot)$ は Φ'/Ψ° 上のボレル測度である。

今二つの有限次元部分空間 $\Psi_1 \subset \Psi_2$ を考える。T を Φ'/Ψ_2° から Φ'/Ψ_1° への自然な写像とすると，$A \subset \Phi'/\Psi_1^\circ$ に対し，

$$\nu_{\Psi_1}(A) = \nu_{\Psi_2}(T^{-1}A) \qquad (1-13)$$

逆に測度の系 $\{\nu_{\Psi}(\cdot)\}$(Ψ は有限次元空間)から Φ' 上の Cylinder set 測度を得るためには条件 (1-13) があれば十分であることは容易にわかる。即ち，

<u>定理1-1</u>　Ψ を可算 Hilbert 空間 Φ の任意の有限次元部分空間とし，$\nu_{\Psi}(\cdot)$ を Φ'/Ψ° 上のボレル測度とする時，$\Psi_1 \subset \Psi_2$ を満たす任意の有限次元部分空間と任意のボレル集合 $A \subset \Phi'/\Psi_1^0$ に対し条件 (1-13) が成り立つならば，(1-12) によつて Φ' 上の Cylinder set 測度 $\mu(Z)$ が定義される。

<u>定義1-5.</u>　条件 (1-13) を測度の系 $\{\nu_{\Psi}\}$ の compatibility condition と呼ぶ。

μ を Φ' 上の Cylinder set 測度とする。$Z_1, \cdots Z_n$ が互に素な Cylinder set ならば，$Z_1, \cdots Z_n$ を定める Φ の部分空間 $\Psi_1, \cdots \Psi_n$ を含む有限次元部分空間 Ψ を考えることによつて，$Z_1 \cdots Z_n$ は部分空間 Ψ によつて定義される Cylinder set と考えられるから (1-11) より，$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} Z_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(Z_k)$ を満たす。しかし Cylinder set 測度は必ずしも可算加法性を満たさない。従つて，次に Cylinder set 測度が可算加法性を満たすための条件を考えよう。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

定義1－6. Cilinder set 測度が連続性の条件を満たすとは，任意の有界連続関数 $f(x_1, \cdots x_n)$ に対し，

$$I(\varphi_1, \cdots \varphi_n) = \int_{\Phi'} f((F, \varphi_1), \cdots (F, \varphi_m))\, d\mu(F)$$

が点列連続即ち，$\lim_{n \to \infty} \varphi_{n,k} = \varphi_k$ (in Φ) に対し，($k=1, 2, \cdots m$)

$$\lim_{n \to \infty} I(\varphi_{n,1}, \cdots \varphi_{n,m}) = I(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \qquad (1-14)$$

を満たす時をいう。

Lemma 1－1. 可算 Hilbert 空間 Φ の共役空間 Φ' 上の Cylinder set 測度 μ が可算加法的であるための必要十分条件は任意の ε に対し，Φ' 上の球，$S_n(R) = \{F ; |(F, \varphi)| \leq R \ \forall \varphi, \|\varphi\|_n \leq 1\}$ があつて $S_n(R)$ と互に素なすべての Cylinder set の測度が ε より小となることである。

証明．μ が可算加法的 Cylinder set 測度であるとすると，測度論の一般論から μ は Cylinder set を含む最小の σ－algebra B (Φ') 上の測度に一意に拡張される。今 $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \in \Phi$ を Φ_n の単位球 $\{\|\varphi\|_n \leq 1\}$ で dense な点集合とする。$A_k = \{F \in \Phi' ; |(F, \varphi_k)| \leq R\}$ とおくと明らかに

$$S_n(R) = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \qquad (1-15)$$

従つて，$S_n(R)$ は B (Φ') に属す。$\Phi' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi'_n$ だから，

$$\Phi' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} S_n(k) \qquad (1-16)$$

さらに，$m \leq n$ ならば $\|\varphi\|_m \leq \|\varphi\|_n$ だから，$S_m(k) \subset S_n(k)$ 従つて $\Phi' = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(n)$，$S_1(1) \subset S_2(2) \subset \cdots$ と表わされる。
仮定から，

$$\lim_{n \to \infty} \mu(S_n(n)) = \mu(\Phi') \qquad (1-17)$$

従つて，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，n があつて $S_n(n)$ の補集合の測度は ε より小となる。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

十分性の証明

測度論の一般論から，$Z_1 \subset Z_2 \subset \cdots, \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k = \Phi'$ を満たす任意の Cylinder set をとる時

$$\lim_{n\to\infty} \mu(Z_n) = \mu(\Phi') \tag{1-18}$$

が成り立つことをいえばよい。さらに $Z_n = I^{-1}(A_n)$ と表わすと，$\nu_{\Psi}(A) = \mu(Z)$ は outer regular であるから，A_n は開集合として一般性を失わない。この時 $Z_k \cap \Phi'_n$ は Φ'_n の弱位相で開集合である。(定義そのもの!) さらに，Φ'_n の球 $S_n(R)$ は弱コンパクトで，仮定から $S_n(R) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(Z_k \cap \Phi'_n)$。従つてある番号 m があつて，$S_n(R) \subset \bigcup_{k=1}^{m}(Z_k \cap \Phi'_n) = Z_m \cap \Phi'_n \subset Z_m$。従つて，$\Phi' - Z_m$ は Cylinder set で $S_n(R)$ と互に素だから，lemma の仮定から，$\mu(\Phi' - Z_m) \leq \varepsilon$。故に (1−18) が成り立つ。(q.e.d)

<u>定理 1−2.</u> 可算 Hilbert 核型空間 Φ の共役空間 Φ' 上の，連続性の条件を満たす任意の Cylinder set 測度は可算加法的である。

定理を証明するためにはいくつかの lemma が必要である。

<u>Lemma 1−2.</u> μ を n 次元ユークリッド空間 R^n 上の，$\mu(R^n) = 1$ を満たすボレル測度とする。$\mu(r, \omega) \equiv \mu(\{x ; (x, \omega) \geq r\})$ とおく。ここで ω は単位ベクトル。原点を中心とする半径 R の球 $S_n(R)$ の測度を $\mu(R)$ と書く。この時

$$1 - \mu(R) \leq C \int_{\Omega_n} \mu(R/\sqrt{n}, \omega)\, d\omega \tag{1-19}$$

が成り立つ。ここで Ω_n は $n-1$ 次元単位球，$d\omega$ はその上の全測度1の一様分布。即ち
$d\omega = 2^{-1}\pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sin^{n-2}\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1}$

C は n, R に無関係な定数。

証明．$f(x, r, \omega)$ を $\{x ; (x, \omega) \geq r\}$ の indicator function とすると，$\mu(r, \omega) = \int_{R^n} f(x, r, \omega)\, d\mu(x)$ と表わされる。従つて，

$$\int_{\Omega_n} \mu(r, \omega)\, d\omega = \int_{\Omega_n}\int_{R^n} f(x, r, \omega)\, d\mu(x)\, d\omega$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$= \int_{R^n}\int_{\Omega_n} f(x, r, \omega)\, d\omega \cdot d\mu(x)$$

$$= \int_{R^n} \varphi(x, r)\, d\mu(x)$$

ここで，$\varphi(x, r) = \int_{\Omega_n} f(x, r, \omega)\, d\omega$

$$= \int_{\Omega_{n-2}} \int_{r/|x| \leq \cos\varphi_1 \leq 1} 2^{-1}\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sin^{n-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \cdot \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\frac{r}{|x|}}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy \qquad r < |x|$$

$$= 0 \qquad\qquad r \geqq |x|$$

従つて，

$$\int_{\Omega_n} \mu(r, \omega)\, d\omega = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{r \leq |x|} d\mu(x) \int_{\frac{r}{|x|}}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{r}^{\infty} \int_{\frac{r}{R}}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy\; d\mu(R)$$

ここで $\mu(R) = \mu(\{x; |x| \leq R\})$。ところで$\int_{\frac{r}{R}}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy$ は R について単調増加関数。従つて任意の$R \geqq r$に対し，

$$\int_{\Omega_n} \mu(r, \omega)\, d\omega \geqq \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1-\mu(R)) \int_{r/R}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy$$

$\frac{r}{R} = n^{-\frac{1}{2}}$ とおけば

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\;\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}(1-\mu(R))\int_1^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{y^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}dy$$

スターリングの公式より，$\Gamma(\frac{n}{2})/\Gamma(\frac{n-1}{2}) \sim \sqrt{n/2}$ を得るから，

$$右辺 \rightarrow \int_1^{\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,e\left[-\frac{y^2}{2}\right]dy > 0$$

従つて，$\inf_n\left\{(n\pi)^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\int_1^{\sqrt{n}}(1-t^2/n)^{\frac{n-3}{2}}dt\right\} = \frac{1}{C} > 0$
とおくと，$C < +\infty$ で，従つて（1－19）を得る。明らかに C は n，R に無関係である。（q．e．d）

<u>Lemma 1－3.</u> $r(\omega)$ を楕円，

$$\frac{x_1^2}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{\lambda_n^2} = 1 \tag{1-20}$$

の接平面への垂直距離とする。この時

$$\int_{\Omega_n} r^2(\omega)\,d\omega = n^{-1}(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2) \tag{1-21}$$

が成り立つ。

証明． 点$(x_1^{(0)}, \cdots x_n^{(0)})$における接平面の方程式は

$$\frac{x_1 x_1^{(0)}}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{x_n x_n^{(0)}}{\lambda_n^2} = 1 \tag{1-22}$$

従つて，$\omega = (\omega_1, \cdots \omega_n)$ と表わすと，$r(\omega)x_k^{(0)}/\lambda_k^2 = \omega_k$ 。

従つて，$r^2(\omega)\sum_{k=1}^n x_k^{(0)2}/\lambda_k^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2\omega_k^2$ ところが $\sum_{k=1}^n x_k^{(0)2}/\lambda_k^2 = 1$

だから，結局 $r^2(\omega) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2\omega_k^2$ を得る。

$$\int_{\Omega_n}\sum_{k=1}^n \omega_k^2\,d\omega = \int_{\Omega_n}d\omega = 1$$

一方，$\int_{\Omega_n}\omega_k^2\,d\omega$ は座標変換に関して不変だから結局，

$$\int_{\Omega_n} \omega_1{}^2 \, d\omega = \cdots = \int_{\Omega_n} \omega_n{}^2 \, d\omega = \frac{1}{n}$$

従つて，（1－21）を得る。（q.e.d）

<u>Lemma 1－4.</u>　μ を R^n 上のボレル測度で，$\mu(R^n) = 1$ とする。Q を（1－20）を満たす楕円とする。Q の任意の接平面の，Q を含まない側の半空間の μ 測度が ε より小ならば，中心を原点とする任意の球 S(R) に対し，

$$\mu(R^n - S(R)) \leq C(\varepsilon + H^2/R^2), \quad H^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k{}^2 \qquad (1-23)$$

ここで C は，lemma 1－2 と同じ定数。

証明．$\Omega_1 = \{\omega \,;\, r(\omega) \geq R/\sqrt{n}\}$，$\Omega_2 = \{\omega \,;\, r(\omega) < R/\sqrt{n}\}$ とおく。（r(ω) は lemma 1—3 と同じ記号）。lemma 1—3 より

$$H^2/n = \int_{\Omega_n} r^2(\omega)\, d\omega \geqq \int_{\Omega_1} r^2(\omega)\, d\omega$$

$$\geqq \omega(\Omega_1) \times R^2/n$$

従つて　　$\omega(\Omega_1) \leqq H^2/R^2$

一方，仮定から，

$$\int_{\Omega_n} \mu(R/\sqrt{n}, \omega)\, d\omega = \int_{\Omega_1} \mu(R/\sqrt{n}, \omega)\, d\omega + \int_{\Omega_2} \mu(R/\sqrt{n}, \omega)\, d\omega$$

$$\leq \omega(\Omega_1) + \varepsilon$$

従つて，lemma 1—2 と合せると（1－23）を得る。（q.e.d）

<u>Lemma 1－5.</u>　μ を可算 Hilbert 空間 Φ の共役空間 Φ' 上の Cylinder set 測度とする。さらに，Q を Φ_n' の楕円，即ち，ある Hilbert—schmidt 型の作用素 T による Φ_n' の単位球の像とする。Q を含まない Φ' の任意の半空間の測度が ε より小さいと仮定する。Q を含む Φ_n' の任意の球 $S_n(R) = \{F \in \Phi_n' \,;\, \|F\|_{-n} \leqq R\}$（$\|\cdot\|_{-n}$ は Φ_n' のノルム）の外にある任意の Cylinder set を Z とする時，

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\mu(Z) \leq C(\varepsilon + H^2/R^2) \qquad (1-24)$$

が成り立つ。ここで C は lemma 1—2 の定数。H^2 は T の固有値の2乗の和。

証明. Z を $S_n(R)$ の外にある任意の Cylinder set とする。$Z = I^{-1}(A)$, $A \subset \Phi'/\Psi^0$ と表わされているとする。任意の $F \in \Phi'$ に対し，$\phi_F \in \Psi$ が存在して，すべての $\varphi \in \Psi$ に対し，$(F, \varphi) = (\varphi, \phi_F)_n$ が成り立つ。F^* を，$\varphi \in \Psi$ に対しては $(F^*, \varphi) = (\varphi, \phi_F)_n$，その他の φ に対しては0とおくと明らかに $F \in \Phi'$ で，$F^0 = F - F^* \in \Psi^0$。従つて F は，$F = F^0 + F^*$ と分解される。$PF = F^*$ と定義すると $F \in \Phi_n'$ に対して P は射影作用素である。$PS_n(R) = S_n^*(R)$, $PQ = Q^*$, $PZ = Z^*$ とおく。さらに Ψ^* を $\Psi^0 \cap \Phi_n'$ の直交補空間として，Ψ^* 上の測度 μ^* を

$$\mu^*(X) = \mu[P^{-1}(X)] = \mu(X + \Psi^0) \qquad (1-25)$$

によつて定義すると Ψ^* は有限次元だから lemma 1—4 が使える。又 Q^* の主軸の2乗の和は H^2 を越えない。一方 Q^* と互に素な Ψ^* の半空間 D^* の μ^* 測度は Q と互に素な Φ' の半空間 $D = D^* + \Psi^0$ の μ 測度に等しいから，μ^*の定義から

$$\mu^*(D^*) = \mu(D^* + \Psi^0) = \mu(D) \leqq \varepsilon .$$

最後に $Q \subset S_n(R)$ だから $Q^* \subset S_n^*(R)$。従つて lemma 1—4 によつて，Z が $S_n(R)$ の外にあれば $PZ = Z^*$ も $S_n^*(R)$ の外にあるから,

$$\mu(Z) = \mu^*(A) \leqq C(\varepsilon + H^2/R^2) . \qquad (q.e.d)$$

さて最後に定理1—2を証明しよう。

まず μ の連続性の条件から，$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ (in Φ) の時，$\lim_{n\to\infty} \mu\{|(F, \varphi_n)| \geq A\} = 0$ である。実際，$f(x)$ を $|x| \geq A$ で1 $f(0) = 0$ なる有界連続関数とすると，連続性から，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Phi'} f((F, \varphi_n))\, d\mu(F) = \int_{\Phi'} f((F, 0))\, d\mu(F) = 0$$

ところが $\int_{\Phi'} f((F, \varphi_n))\, d\mu(F) \geqq \mu\{|(F, \varphi_n)| \geq A\}$ 。 $(A > 0)$

Φは第一可算公理を満たすから，点列極限と Φ の位相の意味での極限は一致する。従つて，

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

任意の ε に対し，Φ の近傍 $U=\{\|\varphi\|_m < a\}$ があつて，任意の $\varphi \in U$ に対し，$\mu\{|(F,\varphi)| \geq A\} < \varepsilon/2C$（C は lemma 1−2の定数）。さらに，半空間 $\{(F,\varphi) \geq A\}$ に対し Φ_n' は Φ' で弱 dense だから $(F,\phi)=\|F\|_{-n}\|\phi\|_n$ なる $F \in \Phi_n'$ がある。従つて，Φ_m' の球 $S_m=\{\|F\|_{-m} \leq A/a\}$ をとると S_m と互に素な Φ' の任意の半空間の μ 測度は $\varepsilon/2C$ より小さい。

Φ は核型空間だからある n があつて，球 S_m は Φ_n' でみれば楕円である。H^2 をこの楕円の主軸の2乗の和とし R を $H^2/R^2 \leqq \varepsilon/2C$ を満たすように十分大きくとれば，lemma 1−5 より Φ_n' の球 $S_n(R)$ があつて $S_n(R)$ と互に交わらない Φ' の Cylinder set の測度は $\mu(Z) \leqq C(\varepsilon/2C+H^2/R^2)=\varepsilon$ を満たす。
従つて lemma 1−1 より μ は可算加法的である。

なお，可算 Hilbert 空間上の Cylinder set 測度が可算加法的であるためには核型空間であることが必要でもある。

§3. Minlos の定理

μ を可算 Hilbert 空間 Φ の共役空間 Φ' 上の Cylinder set 測度で，連続性の条件を満たすとする。

$$L(\varphi)=\int_{\Phi'} e[i(F,\varphi)]\,d\mu(F) \qquad (1-26)$$

とおく。（この積分は Cylinder set $\{(F,\varphi) \leq x\}$ の測度によつて積分可能であり，従つて well defined である。

$L(\varphi)$ は次の条件を満たす。

（L−1） $L(0)=1$

（L−2） $\varphi_n \to 0$ （in Φ）ならば $\lim_{n\to\infty} L(\varphi_n)=1$

（L−3）（正定値性）。任意の複素数 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$ と Φ の要素，$\varphi_1,\cdots\varphi_n$ に対し

$$\sum_{j,k=1}^{n} L(\varphi_j-\varphi_k)\lambda_j\overline{\lambda_k} \geqq 0 \qquad (1-27)$$

実際，（L−1）は明らか。（L−2）は Cylinder set 測度 μ の連続性から明らか。
（L−3）は，$\varphi_1,\cdots\varphi_n$ で張られる Φ の部分空間を Ψ とおくと

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda_k} L(\varphi_j - \varphi_k) = \int_{\Phi'/\Psi^0} \sum_{j,k=1}^{n} e[i(F,\varphi_j) - i(F,\varphi_k)] \lambda_j \overline{\lambda_k} \, d\mu(F)$$

$$= \int_{\Phi'/\Psi^0} \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e[i(F,\varphi_j)] \right|^2 d\mu(F) \geqq 0 \text{ 。}$$

定義1－7. （1－26）で定義された $L(\varphi)$ を Cylinder set 測度 μ の特性汎関数と呼ぶ。

逆に（L－1）－（L－3）を満たす Φ 上の汎関数は，連続性を満たす唯一の Cylinder set 測度 μ の特性汎関数であることを示そう。

Φ の有限次元部分空間を Ψ とする。$L(\varphi)$ は Ψ 上の正定値，$L(0)=1$，連続な関数となるから，Bochner の定理から Ψ の共役空間 Ψ' 上の測度 μ_Ψ の Fourier 変換で表わされる。Ψ' は Φ'/Ψ^0 と同一視できるから，Φ' の Cylinder set 上に測度の系 $\{\mu_\Psi\}$ が定義できる。この系が定理1－1の条件（1－13）を満たすことを示そう。二つの有限次元部分空間 $\Psi_1 \subset \Psi_2$ に対応する $L(\varphi)$ によつて定まる測度をそれぞれ μ_1，μ_2 とする。Q を Φ'/Ψ_2^0 から Φ'/Ψ_1^0 への自然な写像とする。Φ'/Ψ_1^0 の任意のボレル集合 A に対し，

$$\mu_1(A) = \mu_2(Q^{-1}(A)) \qquad (1-28)$$

をいえばよい。ところが，$\varphi \in \Psi_1$ に対し

$$L_1(\varphi) = \int_{\Phi'/\Psi_1^0} e[i(F,\varphi)] \, d\mu_1(F) \qquad (1-29)$$

は Ψ_1 上で $L(\varphi)$ と一致する。さらに，

$$L_2(\varphi) = \int_{\Phi'/\Psi_1^0} e[i(F,\varphi)] \, d\mu_2(Q^{-1}(F))$$

$$= \int_{\Phi'/\Psi_2^0} e[i(F,\varphi)] \, d\mu_2(F) \qquad (1-30)$$

は Ψ_2 上で $L(\varphi)$ と一致する。従つて Ψ_1 上で $L_1(\varphi) = L_2(\varphi) = L(\varphi)$
従つて測度の Fourier 変換の一意性から（1－28）がいえた。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

従つて，定理1－1から $\{\mu_\Psi\}$ は Φ' 上の Cylinder set 測度 μ を定める。 μ が連続性の条件を満たすことを次に示そう。 $\lim_{j\to\infty} \varphi_{jk} = \varphi_k$, $k = 1, 2, \cdots n$ (in Φ) とする。任意の実数 $y_1, \cdots y_n$ に対し，$L(\sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_k) = \int_{\Phi'} e[i\sum_{k=1}^{n} y_k (F, \varphi_k)]\, d\mu(F)$,
$L(\sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_{jk}) = \int_{\Phi'} e[i\sum_{k=1}^{n} y_k (F, \varphi_{jk})]\, d\mu(F)$ とおくと，$L(\varphi)$ の連続性から，$\lim_{j\to\infty} L(\sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_{jk}) = L(\sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_k)$。従つて n 次元の測度 $\mu\{((F, \varphi_{j_1}), \cdots (F, \varphi_{j_n})) \in A\}$, $A \in B(R^n)$ は測度 $\mu(\{((F, \varphi_1), \cdots (F, \varphi_n)) \in A\})$ に弱収束する。以上のことから次の定理を得る。

定理1－3. （L－1）～（L－3）を満たす可算 Hilbert 空間 Φ 上の汎関数は，Φ' 上の連続性の条件を満たす Cylinder set 測度の特性汎関数である。

定理1－2と定理1－3を合わせて，次の定理を得る。

定理1－4（Minlos） 可算 Hilbert 核型空間 Φ 上の，（L－1）～（L－3）を満たす汎関数 $L(\varphi)$ に対し，Φ' の σ－algebra $B(\Phi')$（＝Cylinder set を可測にする最小の σ－algebra）上の測度 μ が一意に存在して

$$L(\varphi) = \int_{\Phi'} e[i(F, \varphi)]\, d\mu(F) \qquad (1-31)$$

と表わされる。

§4. 無限次元ガウス測度

Φ を可算 Hilbert 核型空間とし，一つのノルム $\|\cdot\|_n$ を固定し $\Phi_n \equiv H$, ノルムを $\|\cdot\|$，内積を（，）と略記する。
$G(\varphi) = e[-\frac{1}{2C^2}\|\varphi\|^2]$ とおくと，（1－2）によつて $G(\varphi)$ は（L－1）～（L－3）の性質を満たすことがわかる。従つて定理1－4によつて，$G(\varphi)$ は Φ' 上の測度 μ_c によつて

$$G(\varphi) = e[-\frac{C^2}{2}\|\varphi\|^2] = \int_{\Phi'} e[i(X, \varphi)]\, d\mu_c[X] \qquad (1-32)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

と表わされることがわかつた。

定義1－8 （1－32）によつて定義される測度（Φ'， B（Φ'），μ_c）を分散 $C^2(C>0)$ のガウス測度と呼ぶ。

Φ，H，Φ' の間には定義から

$$\Phi \subset H \cong H' \subset \Phi' \qquad (1-33)$$

なる関係式が成り立つ。ガウス測度はこの関係式に付随した概念である。

次にガウス測度が有限次元のルベック測度や球面上の一様測度と類似な性質をもつことを証明しよう。そのためには，Φ'の平行移動とか，回転という概念を説明しなければならない。

Φ' の上への1対1な変換群 G が一つ与えられたとする。さらに G は B（Φ'）を不変にすると仮定する。 B（Φ'） 上の一つの測度 μ に対し

$$\mu_g(E) = \mu(gE) \quad E \in B(\Phi') \quad g \in G \qquad (1-34)$$

によつて B（Φ'）上の新しい測度 μ_g が定義される。

定義1－9． i） 任意の $g \in G$ に対し，$\mu \gtrsim \mu_g$ （絶対連続）の時，μ は G－quasi-invariant であると呼ぶ。 $\mu = \mu_g$ の時は，μ は G－invariant であると呼ぶ。

ii） G－quasi-invariant な測度の中で恒等的に0でない最小の G－quasi-invariant な測度 μ を G－ergodic であると呼ぶ。即ち，μ' を G－quasi-invariant な任意の測度とする時 $\mu' = 0$ 又は $\mu' \sim \mu$ である。

関係式（1－33）によつて，Φ' の元 F に対し Φ の元 φ を加える演算 $F+\varphi$ は Φ' 上の上への1対1対応で B（Φ'）を不変にする。対応 $F+\varphi_1$ と $F+\varphi_2$ の和を $F+(\varphi_1+\varphi_2)$ と定義することにより変換群となる。この変換群の全体を同じ記号 Φ で表わす。

定義1－10． Φ' 上の変換群 Φ を Φ' の Φ－translation と呼ぶ。

次に Φ' の回転群を定義しよう。

$0(\infty)$を，Hノルムを不変にする Φ の linear homeomorphism の全体とする。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

u_1, $u_2 \in 0(\infty)$ に対し $u_1 \cdot u_2$ も又同じ条件を満たすからこのような変換の全体は群をなす。さらに u^{-1} と Φ' 上の u の共役作用素 u^* を同一視することによって $0(\infty)$ は Φ' 上の変換群とも考えられる。これをやはり同じ記号 $0(\infty)$ と記す。

定義 1−11. $0(\infty)$ を Φ' の回転群と呼ぶ。

次にガウス測度と変換群 Φ, $0(\infty)$ の関係を調べよう。

定理 1−5. ガウス測度 μ_c は次の性質をもつ。

(G−1) μ_c は $0(\infty)$−invariant。

(G−2) μ_c は $0(\infty)$−ergodic。

(G−3) μ_c はΦ−quasi−invariant。$\mu_{c,\varphi}(E) \equiv \mu_c(\varphi+E)$ $E \in B(\Phi')$ とおくと,

$$\frac{d\mu_{c,\varphi}(X)}{d\mu_c(X)} = e\left[-\frac{1}{2C^2}\left(2(X,\varphi)+\|\varphi\|^2\right)\right] \qquad (1-35)$$

証明. (G−1)は任意の $u \in 0(\infty)$ に対し $G(\varphi) = G(u\varphi)$ であつて,特性汎関数は測度と一意に対応することから明らか。

ii) 一般論から,有界な $B(\Phi')$ 可測関数 $F(X)$ に対し,「任意の $u \in 0(\infty)$ に対し $F(X) = F(uX)$ $a.e.\ \mu_c(X)$ ならば $F(X) =$ 定数 $a.e.\ \mu_c(X)$」を示せばよい。ところが,任意の $\varepsilon > 0$ に対し $G(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j C(Z_j)$, ここで Z_j は Cylinder set, $C(\cdot)$ は indicator function −があつて

$$\int_{\Phi'} |F(X) - G(X)|^2 \, d\mu_c(X) \leqq \varepsilon \qquad (1-36)$$

とできる。性質(G−1)から

$$\int_{\Phi'} |F(uX) - G(uX)|^2 d\mu_c(X) = \int_{\Phi'} |F(X) - G(X)|^2 d\mu_c(X) \leqq \varepsilon \qquad (1-37)$$

従つて, $F(X) = F(uX)$ $a.e.\ \mu_c(X)$ と(1−36),(1−37)から

$$\int_{\Phi'} |G(X) - G(uX)|^2 d\mu_c(X) \leqq 2\varepsilon \qquad (1-38)$$

ところで, Cylinder set Z_j, $j = 1, 2, \cdots n$を定義する共通の有限次元部分空

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

間を Ψ とする。(個々の Z_j を定義する有限次元部分空間で張られる部分空間をとればよい。) $\Psi\subset H$ だから，Ψ の H における直交補空間を $\Psi^{\perp}$ とし，$\Psi^{\perp}\cap\Phi$ から独立な元を選びそれらで張られる Φ の部分空間 $\widetilde{\Psi}$ を Ψ と同じ次元となるように選ぶ。ここで u を Ψ と $\widetilde{\Psi}$ を合わせた有限次元空間で Ψ を $\widetilde{\Psi}$ へ写す回転とし，他の部分では恒等写像とした Φ の線型変換とする。容易にわかるように u は $O(\infty)$ に属す。$G(X)$の定義から(1−38)は $\Phi'/(\Psi\cup\widetilde{\Psi})^0$ 上の有限次元ガウス測度による積分で表わされる。ところが有限次元ガウス測度は互に直交した空間上では独立だから(1−38)は

$$\int_{\Phi'/\Psi^0}|G(X)|^2d\mu_c(X)+\int_{\Phi'/\widetilde{\Psi}^0}|G(uX)|^2d\mu_c(X)-2R_e\int_{\Phi'/(\Psi\cup\widetilde{\Psi})^0}G(X)\overline{G(uX)}d\mu_c(X)$$

$$=2\int_{\Phi'/\Psi^0}|G(X)|^2d\mu_c(X)-2Re\int_{\Phi'/\Psi^0}G(X)d\mu_c(X)\int_{\Phi'/\widetilde{\Psi}^0}\overline{G(uX)}\,d\mu_c(X)$$

$$=2\left(\int_{\Phi'}|G(X)|^2d\mu_c(X)-\left|\int_{\Phi'}G(X)\,d\mu_c(X)\right|^2\right),\qquad \text{故に，}$$

$$\int_{\Phi'}\left|G(X)-\int_{\Phi'}G(X)\,d\mu_c(X)\right|^2d\mu_c(X)\leqq\varepsilon$$

従って，

$$\int_{\Phi'}\left|F(X)-\int_{\Phi'}F(X)\,d\mu_c(X)\right|^2d\mu_c(X)$$

$$\leqq\int_{\Phi'}|F(X)-G(X)|^2d\mu_c(X)+\int_{\Phi'}\left|G(X)-\int_{\Phi'}G(X)d\mu_c(X)\right|^2d\mu_c(X)$$

$$+\left|\int_{\Phi'}G(X)\,d\mu_c(X)-\int_{\Phi'}F(X)\,d\mu_c(X)\right|^2\leqq 3\varepsilon$$

ε は任意だつたから $F(X)=\int_{\Phi'}F(X)\,d\mu_c(X)=$ 定数 $a.e.\ \mu_c(X)$。

注意．証明中に述べたことにより，$O(n)$ を n 次元回転群とすると $\bigcup_{n=1}^{\infty}O(n)$ は $O(\infty)$ の部分群と考えられ，この部分群に関しガウス測度が ergodic であることを証明したことになる。一方このような有限次元回転群で表わされないものとして例えば Φ として具体的な関数空間例えば例であげた S をとり，h ; $\varphi(x)\in S\to\varphi(x+h)$ なる推移変換を考えるとよい。この推移変換の全体は $\|\ \|$ ノルムとして $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^2dx$ をとつた時，やはり $O(\infty)$ の部分群となり，ガウス測度はこの推移変換群に関して ergodic であることが multiple Wiener integral の理論(Ⅱ章 §4，〔8〕)から容易にわかる。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

(G－3)の証明。$\varphi \in \Phi$ に対応する測度 $\mu_{c,\varphi}$ の特性汎関数を $G_\varphi(\xi)$ と書くと

$$G_\varphi(\xi) = \int_{\Phi'} e\left[i(X, \xi) \right] d\mu_{c,\varphi}(X) \qquad (1-39)$$

と表わされる。ξ と φ によって張られる2次元の部分空間を Ψ とすると(1－39)は2次元のガウス測度による積分で表わされる。$\varphi = \sum_{i=1}^{2} x_i \varphi_i$, $\xi = y\varphi_1$ と表わすと,

$$G_\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e\left[iyt_1 \right] \cdot e\left[-\frac{1}{2C^2}\left\{ (t_1+x_1)^2 + (t_2+x_2)^2 \right\} \right] (2\pi C^2)^{-1} dt_1\, dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e\left[iyt_1 \right] e\left[-\frac{1}{2C^2}(2t_1x_1 + 2t_2x_2 + x_1^2 + x_2^2) \right] e\left[-\frac{1}{2c^2}(t_1^2 + t_2^2) \right] (2\pi C^2)^{-1} dt_1\, dt_2$$

$$= \int_{\Phi'} e\left[i(X, \xi) \right] e\left[-\frac{1}{2C^2}(2(X, \varphi) + \|\varphi\|^2) \right] d\mu_c(X)$$

従つて $\mu_{c,\varphi}$ は μ_c と絶対連続でその密度関数は(1－35)で表わされる。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

第 II 章　無限次元ラプラシアンと球関数

前章ではガウス測度を抽象可算 Hilbert 核型空間上の特性汎関数によつて定義したが，以下の議論では具体的な空間で考える。即ち前章で可算 Hilbert 核型空間の例として述べた実軸上の L. Schwarz の意味の急減少関数の全体 S で考える。S のノルムは

$$\|\varphi\|_p = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^p \sum_{q=0}^{p} |\varphi^{(q)}(x)|^2 dx \tag{2-1}$$

によつて定義される。さらに，ノルム

$$\|\varphi\|_0 = \|\varphi\| = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx \tag{2-2}$$

によつて S を完備化した Hilbert 空間を H とする。

$S \subset H \subset S'$ によつて定義されるガウス測度は S 上の特性汎関係

$$G(\xi) = e\left[-\frac{c^2}{2}\|\xi\|^2\right] \tag{2-3}$$

によつて与えられる。

注意. 以下の議論においては必ずしも具体的な S である事実を使わないで，ただ抽象核型空間であればよい場合が多い。（特に次章の Hermite 多項式については）。しかし，multiple Wiener integral との関係を説明するためには抽象空間ではできないので統一的に議論するために以下では S を考える。

§1. 無限次元ラプラシアン

$L^2(S', \mu_c)$ をガウス測度 μ_c に関して二乗可積分な S' 上の複素関数の全体からなる Hilbert 空間とし，その内積を $(\quad,\quad)_c$，ノルムを $\|\cdot\|_c$ と記す。

$\xi_1, \cdots \xi_n$ を S の，$\|\cdot\|$ ノルムによる正規直交系（F. O. N. S）とする。

$A_{\xi_1\cdots\xi_n} \equiv \{F(X) \in L^2(S', \mu_c) \; ; \; F(X) = f((X,\xi_1), \cdots (X,\xi_n))$,
ここで $\sqrt{d\mu_c/dx}\; f(x_1, \cdots x_n) \in L^2(R^n, dx)$,
$\sqrt{d\mu_c/dx}\; f''(x_1, \cdots x_n) \in L^2(R^n, dx)$,　$d\mu_c/dx =$
$(2\pi c)^{-n} e[-(2c^2)^{-1}\sum_{k=1}^{n} x_k^2]\}$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

とおく。$T_{\xi_1 \cdots \xi_n}$ を，$f((X, \xi_1), \cdots (X, \xi_n))$ を $f(x_1, \cdots x_n)$へ写す作用素とする。

$$A^\circ = \bigcup_{\text{all F.O.N.S}} A_{\xi_1 \cdots \xi_n} \qquad (2-4)$$

とおくと明らかに A° は $L^2(S', \mu_c)$ で dense である。次に無限次元ラプラシアン $\triangle_c$ を A°の上に定義する。

<u>定義 2－1.</u>　$F(X) \in A_{\xi_1 \cdots \xi_n}$ に対し

$$\triangle_c F(X) = T^{-1}_{\xi_1 \cdots \xi_n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{x_j}{c^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) T_{\xi_1 \cdots \xi_n} F(X) \qquad (2-5)$$

$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{x_j}{c^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ は回転不変だから定義は $F(X)$ の表現の仕方によらないことが直ちにわかる。

無限次元ラプラシアン $\triangle_c$ は次の性質をもつ。

<u>定理 2－1.</u>　$u \in O(\infty)$ と $F(X) \in L^2(S', \mu_c)$ に対し，作用素 O_u を，$O_u F(X) = F(u^{-1} X)$ によって定義すると，

i）　$\triangle_c O_u = O_u \triangle_c$　（$\triangle_c$ は $O(\infty)$－不変性をもつ）

ii）　$F, G \in A^\circ$ に対し

$(F, \triangle_c G)_c = (\triangle_c F, G)$　（対称性）

証明.　i）は $\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{x_j}{c^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ が回転不変作用素であることから明らか。

ii）の証明。$e[i(X, \xi)]$，$e[i(X, \eta)] \in A^\circ$である。$\xi_1$，$\xi_2$ を ξ と η の張る H の部分空間の正規直交系とすると，$\xi = a_1 \xi_1$　$\eta = b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2$ とかけて，$a_1 = \|\xi\|$，$b_1 = (\eta, \xi_1)$，$b_2 = (\eta, \xi_2)$。

$(X, \xi_1) = x_1$，$(X, \xi_2) = x_2$ とおくと，

$$(e[i(X, \xi)], \triangle_c e[i(X, \eta)])_c$$

$$= (e[i a_1 (X, \xi_1)], \triangle_c e[i \sum_{j=1}^2 b_j (X, \xi_j)])_c$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e[i a_1 x_1]\{\sum_{j=1}^{2}(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

$$-\frac{x_j}{C^2}\frac{\partial}{\partial x_j}) e[-i\sum_{j=1}^{2} b_j x_j]\} e[-\frac{1}{2C^2}\sum_{j=1}^{2} x_j^2](\sqrt{2\pi}\,C)^{-2} d x_1\, d x_2$$

簡単な部分積分によつて

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{2}(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-\frac{x_j}{C^2}\frac{\partial}{\partial x_j}) e[i a_1 x_1]\} e[-i\sum_{j=1}^{2} b_j x_j$$

$$-\frac{1}{2C^2}\sum_{j=1}^{2} x_j^2](\sqrt{2\pi}\,C)^{-2} d x_1\, d x_2$$

$$=(\triangle_c\, e[i(X,\xi)],\ e[i(X,\eta)])_c$$

ところで，$\{\sum a_j e[i(X,\xi_j)],\ \xi_j\in S\}$は A°で denseだから任意の $F,G\in A^{\circ}$ に対し ii) が成り立つ。(q.e.d)

さらに，$\{\sum_{j}^{n} a_j e[i(X,\xi_j)],\ \xi_j\in S\}$を含むある部分空間で定義された $0(\infty)$—不変な対称作用素は$\triangle_c$の多項式で任意に近似できることが知られている。〔22〕〔17〕。この意味で有限次元の場合と同様に回転不変な対称作用素は本質的に無限次元ラプラシアン$\triangle_c$に限られる。

<u>定理 2−2</u>．　$\{\xi_j\in S,\ j=1,2,\cdots\}$ を H の完全正規直交系とする。$H_n(x)$ を Hermite 多項式とする。この時 $\prod_{k=1}^{n} H_{l_k}(\frac{(X,\xi_{j_k})}{C\sqrt{2}})$ は $\triangle_c$ の固有値 $-l/C^2$ $(l=l_1+\cdots+l_n)$ に属する固有関数である。(このセミナー・ノートにおけるHermite 多項式の定義はⅢ章で漸化式によつて与えるが，それはよく知られているHermite 多項式と一致するので，Ⅱ章では普通の Hermite 多項式に関する公式は既知とする。。それらは正確にはⅢ章で証明されることである。)

証明．　$(X,\xi_{j_k})=x_k$とおくと，

$$T_{\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_k}}\prod_{k=1}^{n} H_{l_k}(\frac{(X,\xi_{j_k})}{C\sqrt{2}})=\prod_{k=1}^{n} H_{l_k}(\frac{x_k}{C\sqrt{2}}) \qquad (2-6)$$

だから結局

$$(\frac{d^2}{d x_k^2}-\frac{x_k}{C^2}\frac{d}{d x_k}) H_{l_k}(\frac{x_k}{C\sqrt{2}})=-\frac{l_k}{C^2} H_{l_k}(\frac{x_k}{C\sqrt{2}})$$

を示せばよい。 $x_k/C\sqrt{2}=t$ とおくと

$$H''_{l_k}(t)-2t\,H'_{l_k}(t)=-2l_k\,H_{l_k}(t) \qquad (2-7)$$

となる。これは Hermite多項式の満たす微分方程式に外ならない。(Ⅲ章(3−36))
(q.e.d)

§ 2. 球面の一様測度の射影極限

これまでに可算 Hilbert核型空間の共役空間上に，無限次元回転群に関して不変な性質をもつガウス測度，$L^2(S',\mu_c)$ 上の無限次元ラプラシアンを定義した。これらは言葉の上では，丁度有限次元球面上で回転不変な測度である一様測度とそれに関する L^2 空間上のラプラシアン（球面上のラプラシアン）からの類似であつた。無限次元のこれらの解析が真にn次元を無限次元へ拡張した概念，即ち有限次元のこれらの概念の系列の極限として無限次元の概念（測度，ラプラシアン，球関数）が得られることを以下の各節で示そう。なお球関数については古典的に，

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{l}{2}}\,l!\;2^{\frac{l}{2}}\,C_l^{\frac{n}{2}}(x/\sqrt{n})=H_l(x/\sqrt{2}) \qquad (2-8)$$

（$C_l^{\frac{n}{2}}(x)$ は Gegenbauer の多項式でn次元球面の帯球関数） が知られているが，我々の立場からすれば，この式はn次元帯球関数の極限が無限次元帯関数であることを示している。（定理2−5）なお無限次元回転群については有限次元回転群の極限だけではつくされず，構造はあまりよく知られていない。〔30〕

さて，まず無限次元ガウス測度が有限次元球面の一様測度の射影極限と isomorph であることから証明しよう。

Ω_n を中心が原点で半径 $\sqrt{n+1}\,C$ のn次元球面とする。即ち

$$\Omega_n\;:\;x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=(n+1)C^2 \qquad (2-9)$$

P_n を Ω_n 上の一様確率測度とする。 $m<n$ に対し $f_{n,m}$ を，Ω_n から Ω_m への射影とする。即ち $f_{n,m}$ は

$$\omega^{(n)}=(x_1^{(n)},\ \cdots\ x_{n+1}^{(n)})\in\Omega_n$$

を $$\omega^{(m)}=(x_1^{(m)},\ \cdots,\ x_{m+1}^{(m)})\in\Omega_m$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

へ次の関係式で写す。

$$x_i^{(m)} = \frac{\sqrt{m+1}\ C x_i^{(n)}}{\sqrt{x_1^{(n)2} + \cdots + x_{n+1}^{(n)2}}}, \quad 1 \leq i \leq m+1 \qquad (2-10)$$

但し，集合 $\{\omega^{(n)} \in \Omega_n ;\ x_1^{(n)} = \cdots = x_{m+1}^{(n)} = 0\}$ を除く。

極座標で表わせば $(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \Omega_n$ を $(\theta_1, \cdots \theta_m) \in \Omega_m$ へ写すことと同じである。但し各頂点は除いておく。

$f_{n,m}$ は次の条件を満たす。

(f－1) $f_{m,n}$ は除外点を除いて Ω_n から Ω_m への連続な写像である。

(f－2) $l > m > n$ に対し $f_{l,n} = f_{l,m} \cdot f_{m,n}$

(f－3) $P_m(A) = P_n(f_{n,m}^{-1}(A))$ $m < n$，A は Ω_m 上のボレル集合。

従つて Bochner の定理によつて次のような条件を満たす射影極限空間 (Ω, B, P) が存在する。

(P－1) $\Omega \subset \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$

(P－2) $f_m = f_{n,m} \cdot f_n \qquad m < n$

ここで f_n は $\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ から Ω_n への射影を Ω に制限したもの。

(P－3) B は $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(B_n)$ で生成される。ここで B_n は Ω_n のボレル集合の全体。

(P－4) $P(f_n^{-1}(A)) = P_n(A) \qquad A \in B_n$

座標 $x_i^{(n)}$ $(1 \leq i \leq n+1)$ は Ω_n 上の可測関数，従つて Ω 上の可測関数とみなされる。これを $x_i^{(n)}(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ と記すことにしよう。

Lemma 2－1

i) $\int_\Omega X_i^{(n)}(\omega)\, dP(\omega) = 0 \qquad , 1 \leq i \leq n+1, \ \forall n$

ii) $\int_\Omega X_i^{(n)}(\omega) X_j^{(m)}(\omega)\, dP(\omega) = \delta_{ij} C^2 \sqrt{\frac{n+1}{m+1}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\, \Gamma(\frac{m+2}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\, \Gamma(\frac{n+2}{2})}$

(2－11)

ここで $\Gamma(x)$ はガンマ関数。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

証明。(P − 4)から

$$\int_{\Omega} X_i^{(n)}(\omega)\, dP(\omega) = \int_{\Omega_n} x_i^{(n)}\, dP_n = 0$$

同様に (P − 2) と (P − 4) 及び，

$$\int_0^{\pi} (\sin\theta)^p (\cos\theta)^q\, d\theta = \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)$$

を考慮すれば ii) が証明される。

<u>Lemma 2 − 2</u>　$\{ X_i^{(n)}(\omega)\ ;\ n = i,\ i+1,\ \cdots \}$ は $L^2(\Omega,\ P)$ で基本列をなす。

証明。Lemma 2 − 1　から

$$\| X_i^{(n)} - X_i^{(m)} \|_P^2 = 2C^2 - 2C^2 \sqrt{\frac{n+1}{m+1}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \tag{2−12}$$

ここで，$\|\cdot\|_P$ は $L^2(\Omega,\ P)$ のノルム。さらに，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{t}\ \Gamma(t)} = 1 \tag{2−13}$$

を用いると，(2 − 12)の右辺は $n, m \to \infty$ の時 0 に収束する。今，

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ X_i^{(n)}(\omega) = X_i(\omega) \tag{2−14}$$

とおくと $X_i(\omega)$ は Ω 上で殆んど到るところ定義されて；

$$\begin{aligned} &\text{i)}\quad \int_{\Omega} X_i(\omega)\, dP(\omega) = 0 \\ &\text{ii)}\quad \int_{\Omega} X_i(\omega)\, X_j(\omega)\, dP(\omega) = \delta_{ij}\, C^2 \end{aligned} \tag{2−15}$$

を満たす。

S は核型空間だから，あるノルム $\|\cdot\|_q \geqq \|\cdot\|$ があつて，$\|\cdot\|_q$ ノルムによる完全正規直交系 $\{ \varphi_k \in S\ ,\ k = 1, 2, \cdots \}$ $\|\cdot\|$ ノルムによる完全正規直交系 $\{ \xi_k \in S\ ,\ k = 1, 2, \cdots \}$，$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$ を満たす点列 $\{ \lambda_k,\ k = 1, 2, \cdots \}$ が選べて，

$$T^q\, \xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, (\xi,\ \varphi_k)_q\ \xi_k \tag{2−16}$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

とかける。ここで T^q は $\|\cdot\|_q$ ノルム空間 S から $\|\cdot\|$ ノルム空間 S への恒等写像。従つて $T^q\xi$ と ξ を同一視すると $(\xi, \xi_k) = \lambda_k(\xi, \varphi_k)_q$ ，従つて

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi, \xi_k)^2 / \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi, \varphi_k)_q^2 = \|\xi\|_q^2 \tag{2-17}$$

今，P測度に関して殆んどすべての $\omega \in \Omega$ に対し

$$T_\omega(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi, \xi_k) X_k(\omega) \tag{2-18}$$

とおくと，$T_\omega(\xi)$ は ω を一つ固定するごとに S 上の連続線型汎関数である。実際，線型であることは明らかで，連続性は，(2－17)から

$$|T_\omega(\xi)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(\xi, \xi_k)| |X_k(\omega)|$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} (\xi, \xi_k)^2 / \lambda_k^2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |X_k(\omega)|^2$$

$$= \|\xi_q\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |X_k(\omega)|^2$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 X_k(\omega)^2$ は(2－15)よりP測度に関し殆んど到るところ有限。従つて $T_\omega(\xi)$ は S の位相で連続。今 $\omega \in \Omega$ に対して $T_\omega(\xi) \in S'$ を対応させる写像を Ψ とすると，Ψ は Ω の P 測度に関して0集合を除いて1対1である。実際，すべての $\xi \in S$ に対して $T_\omega(\xi) = T_{\omega'}(\xi)$ ならば $X_k(\omega) = X_k(\omega')$ で，(2－10)で $n \to \infty$ として，

$$X_i^{(m)}(\omega) = \frac{\sqrt{m+1}\ \ C X_i(\omega)}{\sqrt{X_1^2(\omega) + \cdots + X_{m+1}^2(\omega)}} \tag{2-19}$$

だから任意の m に対し $f_m(\omega) = f_m(\omega')$。従つて $\omega = \omega'$。さらに(P－3)によつて Ω 上の確率測度 P は $X_i^{(n)}(\omega)$ を，従つて $X_i(\omega)$ を可測にする最小の σ－algebra B 上で定義されている。従つて Ψ(B) は (X, ξ)，$\xi \in S$ を可測にする最小の σ－algebra と一致する。従つて Ψ(B) = B(S′)。

次に Ψ は Ω 上の測度 P を S′ 上のガウス測度 μ_c に写すことを示そう。

Lemma 2－3.

$$P(X_i(\omega) > u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, C} \int_u^{\infty} e\left[-\frac{v^2}{2C^2}\right] dv \tag{2-20}$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

証明。 (P－4) より

$$P(X_i^{(n+1)}(\omega) > u) = P_n(x_i^{(n+1)} > u)$$

$$= \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{\omega_{n-1} (\sqrt{n+1}\ C \sin\alpha)^{n-1}}{\omega_n (\sqrt{n+1}\ C)^n} \sqrt{n+1}\ C\ d\alpha$$

$$(|u| \leq \sqrt{n+1}\ C)$$

$$= 0 \quad (\text{他の場合})$$

ここで $\sqrt{n+1}\ C \cos\alpha_0 = u$。$\omega_n$ は Ω_n の面積。さらに $-\sqrt{n+1}\ C \cos\alpha = v$ とおくと $|u| \leq \sqrt{n+1}\,C$ の場合

$$P(X_i^{(n+i)}(\omega) > u) = \int_u^{\sqrt{n+1}\ C} \left(1 - \frac{v^2}{(n+1)C^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\omega_{n-1}}{\sqrt{n+1}\ C\ \omega_n} dv$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{(n+1)\pi}\ C\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_u^{\sqrt{n+1}\ C} \left(1 - \frac{v^2}{(n+1)C^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} dv$$

従つて (2－13) を用いると， $n \to \infty$ として

$$P(X_i(\omega) > u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ C} \int_u^{\infty} e\left[-\frac{v^2}{2C^2}\right] dv$$

正確にいえば $X_i^{(n+1)}(\omega)$ は $X_i(\omega)$ に法則収束して $X_i(\omega)$ は分散C^2，平均0のガウス分布に従う。

(2－15) から $X_i(\omega)$ と $X_j(\omega)$ ($i \neq j$) は互に直交するから，$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi, \xi_k) X_k(\omega)$ は分散 $\|\xi\|^2 C^2$，平均 0 のガウス分布に従う。従つて

$$\int_{S'} e[i\Psi(T_\omega(\xi))]\, d\Psi(P) = \int_{\Omega} e[i T_\omega(\xi)]\, dP(\omega)$$

$$= e\left[-\frac{C^2}{2} \|\xi\|^2\right]$$

以上のことから次の定理を得る。

<u>定理 2－3.</u> 球面上の一様確率測度の射影極限によつて得られる確率空間 (Ω, B ,

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

P)は， S' 上のガウス測度 (S' , $B(S')$, μ_c) と isomorph である。

注意. S' はベクトル空間であるが Ω はそうではない。

§ 3. 球関数に関する極限定理

この節では，古典的球関数を定義する球面上のラプラシアンが§ 1.で定義した無限次元ラプラシアンに収束することを示し，それによつて，球面上のラプラシアンの固有関数系である古典的球関数が，無限次元ラプラシアンの固有関数系であるHermite 多項式（無限次元球関数）に収束することを証明する。

R^{n+1} 上のラプラシアンを $\triangle_{n+1}$ と書くと

$$\triangle_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \qquad (2-21)$$

と表わされる。極座標に書きかえると，

$$\triangle_{n+1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\overline{\triangle}_n \qquad (2-22)$$

ここで $\overline{\triangle}_n$ は球面上のラプラシアンで

$$\overline{\triangle}_1 = \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}$$

$$\overline{\triangle}_n = \frac{\partial^2}{\partial \theta_n^2} + (n-1)\cot\theta_n \frac{\partial}{\partial \theta_n} + \frac{1}{\sin^2\theta_n}\overline{\triangle}_{n-1} \qquad (2-23)$$

と表わされる。

まず形式的に $\overline{\triangle}_n/(n+1)C^2 \to \triangle_c$ $(n \to \infty)$ となることを計算する。

$f(x_1, \cdots x_m)$ を (2−9) で定義された Ω_n 上のなめらかな関数とする。

$$\frac{\overline{\triangle}_n f(x_1, \cdots x_m)}{(n+1)C^2} = \frac{r^2}{(n+1)C^2}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) f(x_1, \cdots x_m), \qquad (2-24)$$

ところが，

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{j=1}^{m}\frac{x_j}{r}\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \sum_{j,k=1}^{m}\frac{x_j x_k}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \qquad (2-25)$$

だから，

$$\left.\frac{\overline{\triangle}_n f(x_1,\cdots x_m)}{(n+1)\,C^2}\right|_{r=\sqrt{n+1}\,C}=\Big[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-\frac{1}{(n+1)C^2}\sum_{j,k=1}^{m}x_j x_k\frac{\partial^2}{\partial x_j x_k}$$
$$-\frac{n}{(n+1)C^2}\sum_{j=1}^{m}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big]\,f(x_1,\cdots x_m)$$

従つて $n\to\infty$ とすると

$$=\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-\frac{x_j}{C^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\,f(x_1,\cdots x_m)$$

$$=\triangle_c\ f(x_1,\cdots x_m)$$

さて，以上のことを厳密に考えよう。

S に属する H の完全正規直交系 $\{\xi_k\}$, $k=1,2,\cdots$ を一つ固定して考える。従つて，§1における $A_{\xi_1,\cdots\xi_n}$ を A_n と書き， $A_\infty=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とする。明らかに A_∞ は $L^2(S',\ \mu_c)$ で dense である。今，半球面

$$\Omega_n^+:\ x_1^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2=(n+1)\,C^2,\quad x_{n+1}\geq 0 \qquad (2-26)$$

を考える。 $L^2(\Omega_n^+,2P_n)$ は $L^2(\Omega_n,\ P_n)$ の閉部分空間で，

$$f(x_1,\cdots x_n,\ x_{n+1})=f(x_1,\cdots x_n,-x_{n+1}) \qquad (2-27)$$

を満たす関数全体 $(\subset L^2(\Omega_n,\ P_n))$ からなる。 Ω_n^+ 上で $x_1,\cdots x_n$ を独立変数とみなせば，n次元球，

$$B_n\ :\ x_1^2+\cdots+x_n^2\leqq(n+1)\ C^2 \qquad (2-28)$$

と Ω_n^+ は一対一に対応し， B_n 上に Ω_n^+ 上の一様測度 $2P_n$ から導入された測度を $\overline{P_n}$ とおくと，自然な対応で $L^2(\Omega_n^+,\ 2P_n)\cong L^2(B_n,\ \overline{P_n})$ となる。従つて $\overline{\triangle_n}$ は $L^2(B_n,\ \overline{P_n})$ 上に定義されていると考えてよい。次に Q_n を B_n で定義された多項式を R^n 上の多項式に拡張する作用素とする。多項式だから拡張は一意に定まる。$L^2(R^n,\mu_{c,n})$ ($\mu_{c,n}$ は分散 C^2, 平均 0のn次元ガウス測度）で多項式は dense だから， Q_n は $L^2(B_n,\ \overline{P_n})$ から $L^2(R^n,\ \mu_{c,n})$ への連続な写像に拡張される。 B_n° をn変数の多項式の全体とすると， $L^2(R^n,\ \mu_{c,n})\supset B_n^\circ$ で定義された作用素 $\overline{\overline{\triangle}}_n$を次のように定

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

義する。

$$\overline{\overline{\triangle}} = Q_n \cdot \overline{\triangle}_n \cdot Q_n^{-1} \qquad (2-29)$$

Ω_n^+ 上で $x_{n+1} = \{(n+1)C^2 - x_1{}^2 - \cdots - x_n{}^2\}^{\frac{1}{2}}$ だから $\overline{\triangle}_n$ を独立変数 $x_1, \cdots x_n$ で書き表わすと，

$$\overline{\triangle}_n = (n+1)C^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j{}^2} - \sum_{j,k}^{n} x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} - n \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (2-30)$$

従つて，$f \in B_n^2$ に対し，

$$\overline{\overline{\triangle}}_n f(x_1, \cdots x_n) = (n+1)C^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j{}^2} - \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$- n \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (2-31)$$

$T_{\xi_1, \cdots \xi_n}$ を§1の作用素とすると，多項式は $T_{\xi_1, \cdots \xi_n} A_n$ で $L^2(R^n, \mu_{c,n})$ の中で dense だから，$\overline{\overline{\triangle}}_n$ は $T_{\xi_1 \cdots \xi_n} A_n$ で定義される。

$$\widetilde{\triangle}_n \equiv T_{\xi_1 \cdots \xi_n}^{-1} \circ \overline{\overline{\triangle}}_n \circ T_{\xi_1 \cdots \xi_n} \qquad (2-32)$$

とおくと，$\widetilde{\triangle}_n$ は A_n 上の作用素である。即ち，$F(X) = f((X, \xi_1), \cdots (X, \xi_n)) \in A_n$ に対し

$$\widetilde{\triangle}_n F(X) = T_{\xi_1 \cdots \xi_n}^{-1} \Big\{ (n+1)C^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j{}^2} - \sum_{j,k}^{n} x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$- n \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big\} f(x_1, \cdots x_n)$$

$n > m$ に対し，$A_n \supset A_m$ だから $\widetilde{\triangle}_n$ は A_m 上でも定義され $\widetilde{\triangle}_m$と一致する。さて，結論を述べよう。

<u>定理 2－4.</u> $F \in A_\infty$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{\triangle}_n}{(n+1)C^2} \cdot F = \triangle_c F \quad (\text{in } L^2(S', \mu_c), \text{ かつ point wise に})$$

証明．先に述べてきたことから $f \in B_m^2$ に対し，

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\triangle_n}{(n+1)C^2} f(x_1, \cdots x_n)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{x_j}{C^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) f(x_1, \cdots x_m)$$

が $L^2(R^m, \mu_{c,m})$ のノルム，かつ各点でいえればよい。ところが $f(x_1, \cdots x_m)$ は $x_{m+1}, \cdots x_n$ に無関係だから，(2－31)で $\sum$ は1からmまででよい。従つて (2－31) の両辺を $(n+1)C^2$ で割つて $n\to\infty$ とすれば $f(x_1, \cdots x_m)$ は多項式だから各係数が収束し，従つて定理の結論を得る。

定理 2－4 によつて，$L^2(S', \mu_c)$ の上で，適当な対応によつて球面上のラプラシアン $\overline{\triangle}_n/(n+1)C^2$ が無限次元ラプラシアン $\triangle_c$ に収束することを示した。次に，これらの微分作用素の固有関数である球関数について対応する収束を論じよう。

$$\frac{\overline{\overline{\triangle}}_n}{(n+1)C^2}\Bigg|_{B_1^{\circ}} = \left(1 - \frac{x_1^2}{(n+1)C^2}\right)\frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{n\ x_1}{(n+1)C^2}\frac{d}{dx_1} \qquad (2-33)$$

よく知られているように (2－33)に対応する固有関数は $C_l^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{n+1}\ C}\right)$ で，その固有値は $-l(l+n-1)/(n+1)C^2$，$l = 0,1,2.\cdots$ である。ここで，$C_l^P(x)$ は Gegenbauer の多項式である。一方

$$\triangle_c T_{\xi_1} \Big| B_1^{\circ} = \frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{x_1^2}{C^2}\frac{d}{dx_1} \qquad (2-34)$$

の固有値は定理 2－2から $-l/C^2$，$l=0,1,2,\cdots$ で固有関数は $H_l\left(\frac{x_1}{C\sqrt{2}}\right)$ である。

<u>Lemma 2－4 .</u>　A を k × k 次の正方行列で相異なる固有値を持つとする。k × k 次正方行列 A_n が A に収束する時，十分大きな n に対し A_n も又相異なる固有値を持ち，さらに A_n の固有値と固有ベクトルはそれぞれ A の固有値，固有ベクトルに収束する。

証明は容易だから省く。

$\overline{\overline{\triangle}}_n \mid B_l^{\circ}$，$\triangle_c T_{\xi_1} \mid B_l^{\circ}$ は高々 l 次の多項式の全体をそれ自身へ写すから，これらの作用素は($l+1$)次の正方行列で表わされる。$\triangle_c T_{\xi_1}$ は相異なる固有値 $-l/C^2$，$l = 0,1,2,\cdots$ をもつ。従つて，lemma 2－4 から古典的に知られた次の極限定理が，有限次元球関数が無限次元球関数に収束するという形で得られる。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

定理 2 − 5

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{l}{2}}\, l!\ \ 2^{\frac{l}{2}}\, C_l^{\frac{n}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = H_l\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \qquad (2-35)$$

定理 2 − 5 を多変数の場合に拡張しよう。定理 2 − 2 からわかるように，無限次元ラプラシアン $\triangle_c$ の固有値 $-l/C^2$ は $l \neq 0$ の場合無限の多重度をもつ。これらの多重度を解くために，部分ラプラシアン $\triangle_c^{(R)}$ を定義しよう。ここで R は S の有限次元部分空間である。$\{\xi_k\}$ $k=1,2,\cdots$ を S に属する H の完全正規直交系とし，$\xi_1,\cdots\xi_r$ を R の base とする。$F(X) \in A_{\xi_1\cdots\xi_n}$ $(n>r)$ に対し

$$\triangle_c^{(R)} F(X) \equiv T_{\xi_1\cdots\xi_n}^{-1} \sum_{j=r+1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j} - \frac{x_j}{C^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) T_{\xi_1\cdots\xi_n} F(X) \qquad (2-36)$$

と定義する。最初の r 個の要素が R の base であるかぎり完全正規直交系 $\{\xi_k\}$ の選び方によらない。今完全正規直交系 $\{\xi_k \in S\}$ $k=0,1,2,\cdots$ を固定し，$\xi_1,\cdots\xi_r$ が R を張るとする。$\triangle_c^{(R)}$ を $\triangle_c^{(r)}$ と書きなおす。

$$F_{l_1\cdots l_k\cdots}(X) = \prod_{k=1}^{\infty} H_{l_k}\left(\frac{(X,\xi_k)}{C\sqrt{2}}\right) \qquad (2-37)$$

ここで，$l_1 + l_2 + \cdots < +\infty$，とおくと明らかに

$$\triangle_c^{(r)} F_{l_1,l_2\cdots}(X) = -\frac{1}{C}(l_{r+1} + l_{r+2} + \cdots) F_{l_1,l_2,\cdots}(X) \qquad (2-38)$$

従つて，$F_{l_1,l_2,\cdots}(X)$ は $\triangle_c^{(r)}$，$r=0,1,2,\cdots$ ($\triangle_c^{(0)} \equiv \triangle_c$) の同時固有関数であつて，同時固有値の系列に属する固有関数は一つしかない。

一方同様のことを球面のラプラシアンについても考える。即ち，

$$\overline{\triangle}_n^{(r)} = \{(n+1)C^2 - x_1^2 - \cdots - x_r^2)\} \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$$
$$-(n-r)\sum_{j=r+1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

とおくと，$\overline{\triangle}_n^{(r)}$ の同時固有関数は Gegenbaner の多項式の積で，

$$Y_{n,l_1,\cdots l_n}(x_1,\cdots x_n)$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \{(n+1)C^2 - x_1^2 - \cdots - x_{k-1}^2\}^{\frac{l_k}{2}} C_{l_k}^{\frac{n-k}{2}+\lambda_k}\left(\frac{x_k}{\sqrt{(n+1)C^2 - x_1^2 - \cdots - x_{k-1}^2}}\right)$$

(2 − 39)

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

ここで $\lambda_k = l_{k+1} + \cdots + l_n$, と表わされる。即ち,

$$\overline{\triangle}_n^{(r)} Y_{n, l_1, \cdots l_n} = -\lambda_r(\lambda_r + n - r - 1) Y_{n, l_1, \cdots l_n} \qquad (2-40)$$

$\overset{\circ}{B}_{m, l}$ を m 変数で高々 l 次の多項式の全体とすると $\overset{\circ}{B}_{m, l}$ は $\sum_{k=0}^{l} \binom{k+m-1}{k}$ 次元のベクトル空間であって, $\triangle_c^{(0)}, \cdots \triangle_c^{(m-1)}$ は $T_{\xi_1 \cdots \xi_m}^{-1}\ \overset{\circ}{B}_{m, l}$ 上に作用する一重の固有値 $\{-\lambda_j/C^2,\ 0 \le i \le m-1\}$ $l \ge \lambda_0 \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_{m-1} \ge 0$ を持つ行列と考えられる。 lemma 2-4 と定理 2-5から一般の球関数についての収束定理を得る。

定理 2-6.

$$\lim_{n\to\infty} \left[l_1!\ l_2! \cdots l_n!\ (nC)^{\frac{-l}{2}}\ 2^{\frac{l}{2}}\ Y_{n, l_1, \cdots l_n}(x_1, \cdots x_n) \right]$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty} H_{l_k}\left(\frac{x_k}{C\sqrt{2}}\right) \qquad (2-41)$$

ここで, $l = l_1 + l_2 + \cdots < +\infty$,

一般に完全正規直交系の列 $\{\xi_k^{(n)}\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$ が任意の k に対し存在しても正規直交系 $\{\xi_k\}$ は必ずしも完全ではない。しかし $\overline{\triangle}_n^{(r)}$, 従って部分ラプラシアンは $\overset{\circ}{B}_{m, l}$ を不変にし, $\bigcup_{m, l=0}^{\infty} \overset{\circ}{B}_{m, l}$ は $L^2(S', \mu_c)$ で dense でさらに系 $\{Y_{n, l_1, \cdots l_n}\}$ は $L^2(\Omega_n^+, 2P_n)$ の完全な base であるから, その極限である系 $\left\{\prod_{k=1}^{\infty} H_{l_k}\left(\frac{(X, \xi_k)}{C\sqrt{2}}\right),\ l_1 + l_2 + \cdots < +\infty\right\}$ は $L^2(S', \mu_c)$ の完全なbaseである。このことはⅢ章においても独立に証明される。

§4. 球関数の積分表示に関する極限定理

まず Gegenbauer の多項式の積分表示を求めよう。

$$a_0^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \qquad (2-42)$$

とおくと, $(a_0 x_1 - i a_1 x_2 - \cdots - i a_n x_{n+1})^l = f_{l, a_0, \cdots a_n}$ は R^{n+1} 上の調和多項式である。従って

$$\overline{\triangle}_n\ f_{l, a_0, \cdots a_n} = -l(l+n-1)\ f_{l, a_0, \cdots a_n} \qquad (2-43)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$(a_0, \cdots a_n)$ は $(2-42)$ を満たす実数の組であればよいから $a_0 = \sqrt{n}\,C$ とし，$(a_1, \cdots a_n)$ を Ω_{n-1} 上の点と考えると

$$\int_{\Omega_{n-1}} (\sqrt{n}\,C x_1 - i\,x_1' \, x_2 - \cdots - i\,x_n' \, x_{n+1})^l \, dm(\omega') \qquad (2-44)$$

はやはり $(2-43)$ を満たす。ここで $m(\omega')$ は Ω_{n-1} 上の任意の測度。特に $m(\omega')$ として Ω_{n-1} 上の一様確率測度をとると，$(2-44)$ は x_1 のみに関係した関数となる。従つてそれは帯球関数であるから Gegenbauer の多項式で表わされる。

$$C_l^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{n+1}\;C}\right) \propto \int_{\Omega_{n-1}} (\sqrt{n}\,C x_1 - i\,x_1' x_2 - \cdots - i\,x_n' \, x_{n+1})^l dP_{n-1}(\omega)$$

$P_{n-1}(\omega')$ は Ω_{n-1} の回転に関し不変なことから

$$\text{右辺} = \int_{\Omega_{n-1}} (\sqrt{n}\,C x_1 - i\,x_1' \sqrt{(n+1)C^2 - x_1^2}\,)^l \, dP_{n-1}(\omega') \qquad (2-45)$$

$x_1 = \sqrt{n+1}\;C$ とおき $C_l^{\frac{n-1}{2}}(1)$ ・と $n^{\frac{l}{2}} C^{2l} (n+1)^{\frac{l}{2}}$ を比較して，$(2-45)$ の系数を定めると，

$$C_l^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{n+1}\;C}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(n+l-1)}{n^{l/2}\,(n+1)^{l/2} C^{2l}\, 2^{n-2}\, l\,!\;\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \times$$

$$\times \int_{\Omega_{n-1}} (\sqrt{n}\,C\;x_1 - i\,x_1' \sqrt{(n+1)\,C^2 - x_1^2}\,)^l \, dP_{n-1}(\omega')$$

を得る。これは§2によつて Ω 上の積分に，従つて又，定理2－3によつて S' 上のガウス測度によつて表わされる。即ち，

$$C_l^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{n+1}\;C}\right) = A_{n,\,l} \int_{S'} (\sqrt{n}\,C x_1 - iX_1^{(n)}(\omega) \sqrt{(n+1)\,C^2 - x_1^2}\,)^l \, d\mu_c(\omega), \qquad (2-46)$$

ここで，

$$A_{n,\,l} = \frac{\sqrt{\pi}\;\;\Gamma(n+l-1)}{n^{l/2}(n+1)^{l/2} C^{2l} 2^{n-2}\, l\,!\;\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \qquad (2-47)$$

Lemma 2－1 と同様な計算によつて，

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\int_{\Omega} (X_1^{(n)}(\omega))^j (X_1^{(m)}(\omega))^k \, dP(\omega)$$

$$= C^{j+k} (n+1)^{j/2} (m+1)^{k/2} \frac{\Gamma(\frac{j+k+1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2}) \Gamma(\frac{j+m+1}{2})}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{j+n+1}{2}) \Gamma(\frac{j+k+m+1}{2})} \qquad (2-48)$$

$$(m \leq n, \quad j + k = \text{even})$$

を得る。(2－48) を用いると

$$(X_1^{(n)}(\omega))^j \to (X_1(\omega))^j \quad \text{in } L^2(\Omega, P)$$
$$= (X, \xi_1)^j \quad \text{in } L^2(S', \mu_c) \qquad (2-49)$$

従ってスターリングの公式と (2－49) と定理 2－5 を考慮にいれて，(2－46) を計算すると

$$H_l\left(\frac{x_1}{C\sqrt{2}}\right) = C^{-l}\, 2^{l/2} \int_{S'} (x_1 - i(X, \xi_1))^l \, d\mu_c(X) \qquad (2-50)$$

(2－50) を一次元の積分に書きなおすとよく知られたガウス変換，

$$H_l(u) = 2^l \int_{-\infty}^{\infty} (u - it)^l \pi^{-1/2} e\{-t^2\} \, dt \qquad (2-51)$$

を得る。

従って我々は次の定理を得た。

<u>定理 2－7.</u>　n次元球面上の帯球関数の積分表示における密度関数は Hermite 多項式の積分表示における密度関数に $L^2(S', \mu_c)$ の意味で収束する。

注意.　ガウス測度は回転不変だから，(2－50) は $\|\xi\| = 1$ を満たす任意の $\xi \in S$ に対し成り立つ。即ち

$$H_l\left(\frac{(X, \xi)}{C\sqrt{2}}\right) = C^{-l}\, 2^{l/2} \int_{S'} (X - iY, \xi)^l \, d\mu_c(Y) \qquad (2-52)$$

Hermite 多項式の S' 上での積分表示 (2－52) を使って Hermite 多項式についての加法公式を証明しよう。

(2－52) で $\xi = \xi_1 \cos\theta + \xi_2 \sin\theta$, $\|\xi_i\| = 1$ とおくと，

$$H_l\left(\frac{(X,\xi_1)}{C\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{(X,\xi_2)}{C\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$

$$=C^{-l}2^{l/2}\int_{S'}[\cos\theta(X-iY,\xi_1)+\sin\theta(X-iY,\xi_2)]^l\,d\mu_c(Y)$$

$$=C^{-l}2^{l/2}\int_{S'}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\cos^k\theta\,\sin^{l-k}\theta(X-iY,\xi_1)^k(X-iY,\xi_2)^{l-k}d\mu_c(Y)$$

（Y，ξ_1）と（Y，ξ_2）は直交したガウス分布をもつ。従つて独立だから

$$=C^{-l}2^{l/2}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\cos^k\theta\,\sin^{l-k}\theta\int_{S'}(X-iY,\xi_1)^k d\mu_c(Y)\int_{S'}(X-iY,\xi_2)^{l-k}d\mu_c(Y)$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\cos^k\theta\,\sin^{l-k}\theta\,H_k\left(\frac{(X,\xi_1)}{C\sqrt{2}}\right)H_{l-k}\left(\frac{(X,\xi_2)}{C\sqrt{2}}\right)\qquad(2-53)$$

普通の関数になおせば $H_l(x)$ は多項式だから（2－53）の各係数が一致して

$$H_l(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta)=\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\cos^k\theta\,\sin^{l-k}\theta\,H_k(x_1)H_{l-k}(x_2)\qquad(2-54)$$

を得る。同様にして

$$H_l\left(\frac{(X,\xi_1)}{C\sqrt{2}}\right)H_k\left(\frac{(X,\xi_2)}{C\sqrt{2}}\right)=C^{-l-k}2^{\frac{l+k}{2}}\int_{S'}(X-iY,\xi_1)^l(X-iY,\xi_2)^k d\mu_c(Y)\qquad(2-55)$$

において，$\xi_1=\xi_1'\cos\theta+\xi_2'\sin\theta$，$\xi_2=-\xi_1'\sin\theta+\xi_2'\cos\theta$，$\|\xi_i'\|=1$

とおくと，

$$H_l\left(\frac{(X,\xi_1)}{C\sqrt{2}}\right)H_k\left(\frac{(X,\xi_2)}{C\sqrt{2}}\right)$$

$$=C^{-l-k}2^{\frac{l+k}{2}}\int_{S'}(X-iY,\xi_1'\cos\theta+\xi_2'\sin\theta)^l(X-iY,-\xi_1'\sin\theta+\xi_2'\cos\theta)^k d\mu_c(Y)$$

$$=C^{-l-k}2^{\frac{l+k}{2}}\int_{S'}\sum_{j=0}^{l+k}H_{k,j}^{l+k}(\cos\theta,\sin\theta)\sqrt{\frac{l!\,k!}{j!(l+k-j)!}}(X-iY,\xi_1')^j(X-iY,\xi_2')^{l+k-j}d\mu_c(Y)$$

$$=\sum_{j=0}^{l+k}H_{k,j}^{l+k}(\cos\theta,\sin\theta)\sqrt{\frac{l!\,k!}{j!(l+k-j)!}}H_j\left(\frac{(X,\xi_1')}{C\sqrt{2}}\right)H_{l+k-j}\left(\frac{(X,\xi_2')}{C\sqrt{2}}\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

普通の関数で考えると

$$H_l(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta)H_k(-x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)$$

$$=\sum_{j=0}^{l+k}H_{k,j}^{l+k}(\cos\theta,\sin\theta)\sqrt{\frac{l!k!}{j!(l+k-j)!}}H_j(x_1)H_{l+k-j}(x_2) \tag{2-56}$$

を得る。なお $H_{k,j}^{l+k}(\cos\theta,\sin\theta)$ についてはⅢ章でくわしい性質を調べる。(2－56)は(3－88)と同じである。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

第Ⅲ章 Hermite多項式について

前の2章ではガウス測度，無限次元ラプラシアンとその球関数であるHermite多項式が数学的意味で，有限次元球面の一様測度，球面のラプラシアン，いわゆる球関数の極限として得られることを示した。この章では，いわゆる球関数が有限次元の運動群の class 1 の表現から統一的に導かれるのと同様に，Hermite多項式及びそれに関連したいくつかの特殊関数を無限次元の運動群の表現から統一的に導くことを試みる。しかし，必ずしも有限次元の場合の方法がそのまま適用できるわけではなく，むしろ有限次元の場合より容易ですらある。というのは無限次元ガウス測度は第Ⅰ章で述べたように有限次元球面上の一様測度的性質即ち $O(\infty)$－不変性と有限次元のルベツク測度的性質－Φ－quasi-invariant という二つの性質を兼ね備えているからである。

§1. 無限次元運動群の表現

まず初めに，無限次元運動群を定義しよう。第Ⅰ章で定義したように $O(\infty)$ を無限次元回転群（Hの定義は第Ⅱ章と同じ），S を S' の S－translation の全体とする。有限次元で運動群を回転群と平行移動群の semi direct product に分解するように，逆に無限次元運動群を $O(\infty)$ と S の対によつて定義する。即ち，

定義3－1. 無限次元運動群 G_∞ は無限次元回転群と平行移動群 S の対，(u, φ)，$u \in O(\infty)$，$\varphi \in S$ の全体であつて群の演算を次の関係式で定義したものである。

$$u_i \in O(\infty),\ \varphi_i \in S \text{ に対し，} (u_1, \varphi_1)\cdot(u_2, \varphi_2) = (u_1\cdot u_2,\ u_1\varphi_2 + \varphi_1).$$

さて，まず $L^2(S', \mu_c)$ の上で G_∞ の表現を考えるわけであるが，その前に $L^2(S', \mu_c)$ の多項式というものを定義しよう。

定義3－2. $g(x_1, \cdots x_n)$ を n変数の多項式とする。この時 S' 上の関数 $F(X) = g((X, \xi_1), \cdots (X, \xi_n))$ を S' 上の多項式と呼ぶ。ここで $\xi_1, \cdots \xi_n$ は S に属する H の正規直交系である。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

この時次の lemma が成立つことが直ちにわかる。

Lemma 3－1. S' 上の多項式の全体（完全正規直交系を一つ固定してそれに関する）は $L^2(S', \mu_c)$ で dense である。

Lemma 3－2. もし S' 上の二つの多項式，$F(X) = g((X, \xi_1), \cdots, (X, \xi_n))$ と $F'(X) = g'((X, \xi_1), \cdots, (X, \xi_n))$ が $L^2(S', \mu_c)$ の元として一致すれば多項式 $g(x_1, \cdots x_n)$ と $g'(x_1, \cdots x_n)$ は一致する。

II章の（2－54），（2－56）では lemma 3－2を使つてある。

さて，$g = (u, \varphi) \in G_\infty$ に対し $L^2(S', \mu_c)$ 上の変換 T_g, S_g を次のように定義する、$F(X) \in L^2(S', \mu_c)$ に対し

$$T_g F(X) = e\left[-\frac{i}{2C^2}(X, \varphi)\right] F(u^{-1}X) \qquad (3-1)$$

$$S_g F(X) = e\left[-\frac{i}{4C^2}(\|\varphi\|^2 + 2(X, \varphi))\right] F(u^{-1}(X+\varphi)) \qquad (3-2)$$

Lemma 3－3. $(T_g, L^2(S', \mu_c))$, $(S_g, L^2(S', \mu_c))$ はそれぞれ G_∞ のユニタリ表現である。（G_∞ に位相を考えないから連続性は考慮にいれない。）

証明． ユニタリー作用素であることは，T_g の場合はガウス測度の性質（G－1）から，S_g の場合は（G－1）と（G－3）から直ちに導かれる。表現になつていることは次のようにして確かめられる。

$g_1 = (u_1, \varphi_1)$, $g_2 = (u_2, \varphi_2)$ とする。$g_1 \cdot g_2 = (u_1 \cdot u_2, u_1\varphi_2 + \varphi_1)$ であるから，

$$T_{g_1} T_{g_2} F = T_{g_1}\, e\left[-\frac{i}{2C^2}(X, \varphi_2)\right] F(u_2^{-1}X)$$

$$= e\left[-\frac{i}{2C^2}(X, \varphi_1)\right] e\left[-\frac{i}{2C^2}(u_1^{-1}X, \varphi_2)\right] F(u_2^{-1}u_1^{-1}X)$$

$$= e\left[-\frac{i}{2C^2}(X, u_1\varphi_2 + \varphi_1)\right] F((u_1 u_2)^{-1}X)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$= T_{g_1 g_2} F. \tag{3-3}$$

$$S_{g_1} S_{g_2} F = S_{g_1} e\left[-\frac{1}{4C^2}(\|\varphi\|^2 + 2(X, \varphi_2))\right] F(u_2^{-1}(X+\varphi_2))$$

$$= e\left[-\frac{1}{4C^2}(\|\varphi_1\|^2 + 2(X, \varphi_1))\right] e\left[-\frac{1}{4C^2}(\|\varphi_2\|^2 + 2(u_1^{-1}(X+\varphi_1)+\varphi_2)\right] F(u_2^{-1}(u_1^{-1}(X+\varphi_1)+\varphi_2))$$

$$= e\left[-\frac{1}{4C^2}(\|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + 2(\varphi_1, u_1\varphi_2) + 2(X, \varphi_1 + u_1\varphi_2))\right] F(u_2^{-1} u_1^{-1}(X+\varphi_1+u_1\varphi_2))$$

$$= S_{g_1 \cdot g_2} F \tag{3-4}$$

後で証明するが，T_g と S_g は実は，Hermite 多項式の加法公式と直交性から自然に導かれる $L^2(S', \mu_c)$ 上のユニタリー変換によつて同値であることがわかる。さらにガウス測度の性質（G－2）によつて表現（T_g，$L^2(S', \mu_c)$）及び（S_g，$L^2(S', \mu_c)$）は既約であつて C が異なれば同値でない表現を与える。〔16〕。しかし，Hermite 多項式を論ずるためには C は本質的な影響を与えない。

次に別の空間の上で G_∞ を表現することを考えよう。即ち S 上の複素関数の部分空間で $G(\xi-\eta)$；$\xi, \eta \in S$ を再生核に持つ最小の Hilbert 空間 R_G を考える。R_G の内積を $(\ ,\ )_r$ と記す。R_G は次のような性質をもつ。〔1〕〔10〕

（R－1） 任意の $\varphi \in S$ に対し $G(\cdot-\varphi) \in R_G$

（R－2） 任意の $f \in R_G$ に対し $(f(\cdot), G(\cdot-\varphi))_r = f(\varphi)$

（R－3） R_G は $\{G(\cdot-\varphi); \varphi \in S\}$ で張られる。

（R－4） $\|\sum_{j=1}^{n} a_j G(\xi-\varphi_j)\|_r^2 = \sum_{j,k}^{n} a_j \bar{a}_k G(\varphi_j - \varphi_k)$

簡単にいえば，R_G は $\{G(\cdot-\varphi)；\varphi \in S\}$ の一次結合の全体のなすベクトル空間に，（R－4）でノルムを定義し，このノルムで完備化した Hilbert 空間である。

次に R_G と $L^2(S', \mu_c)$ の関係を調べよう。

<u>Lemma 3-4.</u>　$F(X) \in L^2(S', \mu_c)$ に対し

$$UF(X) = \int_{S'} e[i(X, \xi)]\ F(X)\, d\mu_c(X) \tag{3-5}$$

とおくと，U は$L^2(S', \mu_c)$ から R_G への1対1上への線型等距離写像である。

証明.　任意の複素数 a_j と S の要素 $\{\varphi_j\}$ $j=1, \cdots n$ に対し

$$\begin{aligned} U \sum_{j=1}^{n} a_j e[i(X, \varphi_j)] &= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{S'} e[i(X, \xi+\varphi_j)]\, d\mu_c(X) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j\, G(\xi+\varphi_j) \end{aligned} \tag{3-6}$$

(3-6)の右辺は(R-3)によつてR_G の要素で(R-4)から

$$\| \sum_{j=1}^{n} a_j e[i(X, \varphi_j)] \|_c = \sum_{j,k}^{n} a_j \overline{a_k}\, G(\varphi_j - \varphi_k) = \| \sum_{j=1}^{n} a_j G(\xi+\varphi_j) \|_r$$

さらに $\{ \sum_{j=1}^{n} a_j e[i(X, \varphi_j)]$; a_j : 任意の複素数, $\varphi_j \in S \}$ は $L^2(S', \mu_c)$ で dense であるから U は R_G の上への1対1線型等距離写像である。(q.e.d).

そこで，G_∞ の表現 $(T_g, L^2(S', \mu_c))$, $(S_g, L^2(S', \mu_c))$ を U で R_G に写して得られる表現を (t_g, R_G), (s_g, R_G) とおくとこれらの間に次の関係式を得る。

$f \in R_G$, $UF(X) = f(\xi)$, $g = (u, \varphi)$ に対し

$$U T_g U^{-1} f(\xi) = t_g f(\xi) = f(u^{-1}(\xi - \frac{\varphi}{2C^2})) \tag{3-7}$$

$$U S_g U^{-1} f(\xi) = s_g f(\xi) = e[-i(\xi, \varphi) - \frac{1}{4C^2}\|\varphi\|^2]\ f(u^{-1}(\xi - \frac{i\varphi}{2C^2})) \tag{3-8}$$

実際，

$$\begin{aligned} t_g f(\xi) = U T_g U^{-1} f(\xi) &= U\ e[-\frac{i}{2C^2}(X, \varphi)]\ F(u^{-1}X) \\ &= \int_{S'} e[i(X, \xi) - \frac{i}{2C^2}(X, \varphi)]\, F(u^{-1}X)\, d\mu_c(X) \\ &= \int_{S'} e[i(Y, u^{-1}(\xi - \frac{\varphi}{2C^2}))]\ F(Y)\, d\mu_c(Y) \\ &= f(u^{-1}(\xi - \frac{\varphi}{2C^2})) \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$s_g f(\xi) = U S_g U^{-1} f(\xi) = U\, e\left[-\frac{1}{4C^2}\left(\|\varphi\|^2 + 2(X,\varphi)\right)\right] F(u^{-1}(X+\varphi))$$

$$= \int_{S'} e\left[i(X,\xi) - \frac{1}{4C^2}\left(\|\varphi\|^2 + 2(X,\varphi)\right)\right] F(u^{-1}(X+\varphi))\, d\mu_c(X)$$

$X = uY - \varphi$ とおくと（G－3）から

$$= e\left[-i(\xi,\varphi) - \frac{1}{4C^2}\|\varphi\|^2\right] \int_{S'} e\Big[i(Y, u^{-1}\xi) + \Big(Y, \frac{u^{-1}\varphi}{2C^2}\Big)\Big] F(Y)\, d\mu_c(Y)$$

$$= e\left[-i(\xi,\varphi) - \frac{1}{4C^2}\|\varphi\|^2\right] f\Big(u^{-1}\Big(\xi - \frac{i\varphi}{2C^2}\Big)\Big)$$

次に我々は G_∞ の特別な表現に注目しよう。$g = (I, r\varphi)$ ここで I は $0(\infty)$ の単位元，r は実数とし，この場合の T_g, S_g, t_g, s_g をそれぞれ，T_r^φ，S_r^φ，t_r^φ，s_r^φ と書く。φ を固定し，r をパラメーターとして考えるとこれらは次の性質を満たすことがわかる。

i）　$T_g \circ T_r = T_{g+r}$

ii）　$T_0 = I$（単位作用素）

iii）　$\lim_{r\to 0} \| T_r - I \| = 0$　　（3－9）

T_r^φ についてだけ確かめる。他の場合も容易である。まず ii）は明らか。i）は

$$T_q^\varphi \cdot T_r^\varphi F(X) = T_q^\varphi\, e\left[-\frac{i}{2C^2}(X, r\varphi)\right] F(X)$$

$$= e\left[-\frac{i}{2C^2}(q+r)(X,\varphi)\right] F(X)$$

$$= T_{q+r}^\varphi F(X)$$

$$\lim_{r\to 0} \| T_r^\varphi F(X) - F(X)\|_c = \lim_{r\to 0}\int_{S'} \left|\left(e[i(X, r\varphi)] - 1\right)F(X)\right|^2 d\mu_c(X) = 0$$

従って Stone の定理から次のような表現を得る

$$T_r^\varphi = e[irA_\varphi],\quad S_r^\varphi = e[irB_\varphi],\quad t_r^\varphi = e[ir a_\varphi],\quad s_r^\varphi = e[irb_\varphi] \qquad (3-10)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

ここで A_φ, B_φ は $L^2(S', \mu_c)$ 上の自己共役作用素で，a_φ, b_φ は R_G の自己共役作用素であつて次のように具体的に表わされる。

ある正数 p があつて $|r| < p$ に対し $e[r(X, \varphi)]F(X) \in L^2(S', \mu_c)$ ならば，

$$2c^2 A_\varphi F(X) = -(X, \varphi) F(X) \tag{3-11}$$

$F(X)$ が A_φ の定義域に属し $D_\varphi F(X)$ が存在するならば

$$2c^2 B_\varphi F(X) = i(X, \varphi) F(X) + 2c^2 D_\varphi F(X) \tag{3-12}$$

ここで D_φ は次の極限が $L^2(S', \mu_c)$ の意味で存在する時に定義される。

$$D_\varphi F(X) = \underset{r \to 0}{\mathrm{l.i.m}} \frac{F(X + r\varphi) - F(X)}{ir} \tag{3-13}$$

$f(\xi) \in R_G$ が d_φ の定義域に属せば，

$$2c^2 a_\varphi f(\xi) = -d_\varphi f(\xi) \tag{3-14}$$

ここで d_φ は次の極限が R_G のノルムで存在する時に定義される。

$$d_\varphi = \underset{r \to 0}{\mathrm{l.i.m}} \frac{f(\xi + r\varphi) - f(\xi)}{ir} \tag{3-15}$$

$f(\xi) \in R_G$ が d_φ の定義域に属しさらに正数 p が存在して $|r| < P$ に対して $e[r(\varphi, \xi)]\ f(\xi)$ が R_G に属す時

$$2c^2 b_\varphi f(\xi) = -2c^2(\xi, \varphi) f(\xi) - i d_\varphi f(\xi) \tag{3-16}$$

関係式(3−7)と(3−8)より

$$U A_\varphi U^{-1} = a_\varphi \tag{3-17}$$

$$U B_\varphi U^{-1} = b_\varphi \tag{3-18}$$

従つて (3−17), (3−18)に(3−11), (3−14)と(3−12), (3−16)をそれぞれ代入すると

$$U(X, \varphi) U^{-1} = d_\varphi \tag{3-19}$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$U(i(X,\varphi)+2c^2 D_\varphi)U^{-1} = -2c^2(\xi,\varphi) - i\, d_\varphi \qquad (3-20)$$

を得る。さらに（3－19）を（3－20）に代入すると

$$c^2 U D_\varphi U^{-1} + i\,U(X,\varphi)U^{-1} = -c^2(\xi,\varphi) \qquad (3-21)$$

を得る。関係式（3－19）と（3－21）が基本的である。

§2. Hermite 多項式について

この節では R_G に M. G. Krein の直交分解をほどこし，それを U^{-1} で $L^2(S',\mu_c)$ にもどすことによつて $L^2(S',\mu_c)$ の完全直交系として Hermite多項式を得，あわせて関係式，（3－19），（3－21）を用いてHermite 多項式についてのさまざまな公式を導く。なお $L^2(S',\mu_c)$ を直接直交分解する方法が K. Itô の multiple Wiener integral であつてこれについては§4で述べる。

$\{\xi_j \in S\}$ $j=1,2,\cdots$ を H の完全正規直交系とする。次の定理を得る。

定理3－1. R_Gは次のように直和分解される。

$$R_G = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus\ R_n \qquad (3-22)$$

ここで R_n は $\{(\xi,\xi_{k_1})^{l_1}\cdots(\xi,\xi_{k_j})^{l_j} e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2] ;\ l_1+\cdots+l_j=n\}$ で張られる閉部分空間。さらに

$$\varphi^{l_1\cdots l_j}_{k_1\cdots k_j}(\xi) = (l_1!\cdots l_j!)^{-\frac{1}{2}} c^n(\xi,\xi_{k_1})^{l_1}\cdots (\xi,\xi_{k_j})^{l_j}\ e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2], \qquad (3-23)$$

とおくと $\{\varphi^{l_1\cdots l_j}_{k_1\cdots k_j},\ l_1+\cdots+l_j=n\}$ は R_nの完全正規直交系である。

証明. （3－15）より

$$d_{\xi_k}\, e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2] = \lim_{r\to 0}\frac{1}{ir}\Big(e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi+r\xi_k\|^2 - e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2]\Big)$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{ir} e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2]\Big(e[-c^2 r(\xi,\xi_k)-\frac{1}{2}c^2 r^2]-1\Big)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$= i c^2 (\xi, \xi_k)\, e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2] \qquad (3-24)$$

一般に $i^n(\xi, \xi_k)^n\, e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2] = (\sqrt{2}\, c)^{-n} H_n\left(\frac{d_{\xi_k}}{c\sqrt{2}}\right) e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2]$

$$(3-25)$$

と表わされる。ここで $H_n(x)$ は n 次の多項式で次の漸化式を満たす。

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \qquad (3-26)$$
$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$$

(従って，後で述べるように $H_n(x)$ は n 次の Hermite 多項式である。しかしここでは Hermite 多項式の定義は行なわない。Hermite 多項式であることは証明には不要である。)

実際(3-25)の両辺に d_{ξ_k} をほどこすと

$$i^{n-1} n(\xi, \xi_k)^{n-1}\, e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2] + i^{n+1} c^2 (\xi, \xi_k)^{n+1}\, e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2]$$
$$= d_{\xi_k} (\sqrt{2}\, c)^{-n} H_n\left(\frac{d_{\xi_k}}{c\sqrt{2}}\right)$$

従って，$n = 0, 1$ の時は明らかだから n の時(3-25)が成り立つと仮定すると

$$n(\sqrt{2}\, c)^{-n+1} H_{n-1}\left(\frac{1}{c\sqrt{2}} d_{\xi_k}\right) + c^2 (\sqrt{2}\, c)^{-n-1} H_{n+1}\left(\frac{1}{c\sqrt{2}} d_{\xi_k}\right) e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2]$$
$$= d_{\xi_k} (\sqrt{2}\, c)^{-n} H_n\left(\frac{1}{c\sqrt{2}} d_{\xi_k}\right)$$

従って，

$$2nc H_{n-1}\left(\frac{1}{c\sqrt{2}} d_{\xi_k}\right) + c H_{n+1}\left(\frac{1}{c\sqrt{2}} d_{\xi_k}\right) = \sqrt{2}\, d_{\xi_k} H_n\left(\frac{1}{c\sqrt{2}} d_{\xi_k}\right)$$

従って $H_n(x)$ は(3-26)を満たす多項式である。

まず最初に $l_1 \neq l_2$ の時 $(\xi, \xi_k)^{l_1} e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2]$ と $(\xi, \xi_k)^{l_2} e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2]$ との直交性を証明する。

$l_1 \geqq l_2$ と仮定する。その時

$$\left((\xi, \xi_k)^{l_1} e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2],\ (\xi, \xi_k)^{l_2} e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2]\right)_r$$
$$= \left((\xi, \xi_k)^{l_1} e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2],\ i^{-l_2} (\sqrt{2}\, c)^{-l_2} H_{l_2}\left(\frac{1}{c\sqrt{2}} d_{\xi_k}\right) e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2]\right)_r$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

ところが，$d\xi_k$ は自己共役作用素だから，

$$= \left(H_{l_2}\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}d\xi_k\right)(\xi,\xi_k)^{l_1}e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right],\ i^{-l_2}(\sqrt{2}\,c)^{-l_2}e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right]\right)_r \ (*)$$

今 $l_1 > l_2$ とすると（3－24）から $H_{l_2}\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}d\xi_k\right)(\xi,\xi_k)^{l_1}e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right]$ は (ξ,ξ_k) に関する原点で0となる少なくとも一次以上の多項式 × $e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right]$ という形になる。従つて R_G の性質（R－2）によつて $(*)=0$

$l_1 = l_2 = l$ とすると

$$(*) = \left(l!\,i^{-l}e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right],\ i^{-l}c^{-2l}e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right]\right)_r$$

$$+\left(((\xi,\xi_k)\times(l-1)\text{次の多項式})\right)\times e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right],\ e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right]\Big)_r$$

$$= l!\ c^{-2l} \qquad (3-27)$$

一般の場合には $j \neq k$ の時

$$d\xi_j\,(\xi,\xi_k)^m e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right] = (\xi,\xi_k)^m\,d\xi_j\ e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right]$$

であることに注意すれば先に述べた場合と同様に証明できる。（q．e．d）

次に

$$U^{-1}R_n = L_n$$

$$U^{-1}\varphi^{l_1\cdots l_j}_{k_1\cdots k_j}(\xi) = i^{-l}\,\Phi^{l_1\cdots l_j}_{k_1\cdots k_j}(X)$$

とおくと lemma 3－4 によつて

$$L^2(S',\mu_c) = \sum_{n=0}^{\infty}\oplus\, L_n$$

と直和分解されて，定理 3－1によつて $\{\Phi^{l_1,\cdots l_j}_{k_1,\cdots k_j},\ l_1+\cdots+l_j=n\}$ は L_n の完全正規直交系である。$\Phi^{l_1\cdots l_j}_{k_1\cdots k_j}(X)$ について次の定理を得る。なお（3－28）の分解は K. Itô の multiple Wiener integral による分解と完全に一致する。それについては§4参照。

<u>定理 3－2.</u>　$\Phi^{l_1\cdots l_j}_{k_1\cdots k_j}(X)$ は次のような S' 上の多項式の積によつて表わされる。即ち，

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\Phi_{k_1\cdots k_j}^{l_1\cdots l_j}(X) = (2^l\, l_1!\cdots l_j!)^{-1/2} \prod_{i=1}^{j} H_{l_i}\left(\frac{(X, \xi_{k_i})}{c\sqrt{2}}\right) \qquad (3-29)$$

ここで $l_1 + \cdots + l_j = l$ 。 $H_n(x)$ は次の漸化式を満たす多項式である。

$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = 2x$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \qquad (3-30)$$

定義 3－3. （3－30）によつて定まる多項式を Hermite 多項式と呼ぶ。

勿論よく知られている Hermite 多項式と一致する。

定理 3－2の証明. lemma 3－4 と （2－3） から $\Phi_k^0(X) \equiv 1$ 。

関係式（3－19）によつて

$$(X, \xi_k) = U^{-1}\, d_{\xi_k}\, \varphi_k^0(\xi)$$

$$= U^{-1}\, i\, c^2 (\xi, \xi_k)\, e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right]$$

従つて， $U^{-1}\varphi_k^1(\xi) = (ic)^{-1}(X, \xi_k)$

を得る。 $l \geq 1$ と仮定すると同じ関係式によつて

$$(X, \xi_k)\, i^{-l}\, \Phi_k^l(X) = U^{-1}\, d_{\xi_k}\, \varphi_k^l(\xi)$$

$$= U^{-1}\, d_{\xi_k}\, c^l (l!)^{-1/2} (\xi, \xi_k)^l\, e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right]$$

即ち，
$$(X, \xi_k)\,\Phi_k^l(X) = \sqrt{l}\; c\, \Phi_k^{l-1}(X) + \sqrt{l+1}\; c\, \Phi_k^{l+1}(X) \qquad (3-31)$$

ここで

$$\Phi_k^l(X) = (2^l\, l!)^{-1/2} H_k(X)$$

とおくと，

$$H_0(X) = 1, \qquad H_1(X) = c^{-1}\, 2(X, \xi_k)$$

$$\sqrt{2}\,(X, \xi_k)\, H_l(X) = 2lc\, H_{l-1}(X) + cH_{l+1}(X) \qquad (3-32)$$

従つて，

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$H_l(X) = H_l\left(\frac{(X, \xi_k)}{c\sqrt{2}}\right)$$

を得る。ここで $H_l(x)$ は漸化式(3－30)を満たす l 次の多項式である。次に我々は $i^{-(l_1+l_2)}\Phi^{l_1, l_2}_{k_1, k_2} = U^{-1}\varphi^{l_1, l_2}_{k_1, k_2}(\xi)$ の場合を考える。一変数の場合と同様にして，$l_1 = 0$ の時，

$$\begin{aligned}
& i^{-l_2}(X, \xi_{k_1})\Phi^{0, l_2}_{k_1, k_2} \\
&= U^{-1}(i(l_2!)^{-1/2} c^{2+l_2}(\xi, \xi_{k_1})(\xi, \xi_{k_2})^{l_2} e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2] \\
&= -c\, i^{-2-l_2}\Phi^{1, l_2}_{k_1, k_2}
\end{aligned}$$

従って $\Phi^{1, l_2}_{k_1, k_2} = c^{-1}(X, \xi_{k_1})\Phi^{0, l_2}_{k_1, k_2}$

$l_1 \geq 1$ の時

$$\begin{aligned}
& (X, \xi_{k_1})i^{-(l_1+l_2)}\Phi^{l_1, l_2}_{k_1, k_2} = U^{-1} d_{\xi_k}\varphi^{l_1, l_2}_{k_1, k_2} \\
&= U^{-1}\Big\{\frac{c^{l_1+l_2}\sqrt{l_1}}{i\sqrt{(l_1-1)!\, l_2!}}\cdot(\xi, \xi_{k_1})^{l_1-1}(\xi, \xi_{k_2})^{l_2} e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2] \\
&\qquad - \frac{\sqrt{l_1+1}}{i\sqrt{(l_1+1)!\, l_2!}}(\xi, \xi_{k_1})^{l_1+1}(\xi, \xi_{k_2})^{l_2} e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2]\Big\} \\
&= U^{-1}\{\sqrt{l_1}\, c\, \Phi^{l_1-1, l_2}_{k_1, k_2}(X) + \sqrt{l_1+1}\, c\, \Phi^{l_1+1, l_2}_{k_1, k_2}(X)\}
\end{aligned}$$

従って $\Phi^{l_1, l_2}_{k_1, k_2} = (2^{l_1}l_1!)^{-1/2} H_{l_1}\left(\frac{(X, \xi_{k_1})}{c\sqrt{2}}\right)\Phi^{0, l_2}_{k_1, k_2}$

$$= (2^{l_1+l_2}l_1!\, l_2!)^{-1/2} H_{l_1}\left(\frac{(X, \xi_{k_1})}{c\sqrt{2}}\right) H_{l_2}\left(\frac{(X, \xi_{k_2})}{c\sqrt{2}}\right)$$

以上のようにして任意の変数の時も同様な方法で証明される。(q.e.d).

さて次に，定理3－1，3－2及び関係式(3－19)，(3－21)を用いてHermite多項式に関する種々の公式を導こう。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

o直交性。

$$(\Phi_1^n(X), \Phi_1^m(X))_c = \delta_{n,m}$$ と定理3－2から

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) \pi^{-1/2} e[-x^2] dx = \delta_{n,m} 2^n n! \tag{3-33}$$

定理3－1，3－2から $\{2^{-n/2}(n!)^{-1/2} H_n(x);\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ は $L^2(R, \pi^{-1/2} e[-x^2] dx)$ の完全正規直交系である。

o微分方程式

関係式（3－21）より

$$D_{\xi_1} U^{-1}(\xi, \xi_1)^n e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2] = -U^{-1}(\xi, \xi_1)^{n+1} e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2]$$
$$- i\, c^{-2}(X, \xi_1) U^{-1}(\xi, \xi_1)^n e[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2]$$

従って定理3－2より

$$H_n'\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right) = -H_{n+1}\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right) + c^{-1}\sqrt{2}(X, \xi_1) H_n\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right)$$

lemma 3－2より

$$H_n'(x) = -H_{n+1}(x) + 2x H_n(x) \tag{3-34}$$

（3－30）と（3－34）を合わせて

$$H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x) \tag{3-35}$$

を得る。従って（3－34）と（3－35）から Hermite 多項式の満たす微分方程式

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0 \tag{3-36}$$

を得る。

o加法公式 I

$$\varphi = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_n \xi_n, \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$$

とおくと

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$
\begin{aligned}
U H_l\left(\frac{(X,\varphi)}{c\sqrt{2}}\right) &= 2^{l/2} i^l c^l (\xi,\varphi)^l e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right] \\
&= 2^{l/2} i^l c^l \left(\xi, \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i\right)^l e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right] \\
&= 2^{l/2} i^l c^l \sum_{l_1+\cdots+l_n=l} \frac{l!\, a_1^{l_1}\cdots a_n^{l_n}}{l_1!\cdots l_n!} (\xi,\xi_1)^{l_1} \cdots \\
&\qquad \cdots (\xi,\xi_n)^{l_n} e\left[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2\right] \\
&= U \sum_{l_1+\cdots+l_n=l} \frac{l!}{l_1!\cdots l_n!} \prod_{i=1}^{n} a_i^{l_i} H_{l_i}\left(\frac{(X,\xi_i)}{c\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

従つて lemma 3－2 によつて

$$
H_l\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{l_1+\cdots+l_n=l} \frac{l!\, a_1^{l_1}\cdots a_n^{l_n}}{l_1!\cdots l_n!} H_{l_1}(x_1)\cdots H_{l_n}(x_n) \qquad (3-37)
$$

ここで $a_1^2+\cdots+a_n^2=1$

特に $n=2$ の場合，（3－33）を考慮にいれると

$$
\int_{-\infty}^{\infty} H_l(a_1x_1+a_2x_2) H_m(x_1)\pi^{-1/2} e^{-x_1^2} dx_1 = 2^m \frac{l!}{(l-m)!} a_1^m a_2^{l-m} H_{l-m}(x_2) \qquad (3-38)
$$

ここで $a_1^2+a_2^2=1$

変換（3－38）が $L^2(R^1, \pi^{-1/2}e[-x^2]dx)$ のノルムで isometric となる場合が特に重要である。そのために，（3－38）で $m=0$, $|a_2|=1$ とおく。

$$
\int_{-\infty}^{\infty} H_n(a_1x_1+a_2x_2)\pi^{-1/2} e[-x_1^2]\, dx_1 = a_2^n H_n(x_2) \qquad (3-39)
$$

特に $a_1=\sqrt{2}$ $a_2=i$ とおいた場合がいわゆる Wiener 変換である。即ち，

$$
\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\sqrt{2}x+iy)\pi^{-1/2} e[-x^2]\, dx = i^n H_n(y) \qquad (3-40)
$$

（3－39）で $a_1x_1+a_2x_2=y$, $x_2=x$ とおくと

$$
\int_{-\infty}^{\infty} H_n(y)\pi^{-1/2} e\left[-\frac{1}{a_1^2}(y-a_2x)^2\right] a_1^{-1} dy = a_2^n H_n(x)
$$

ここで $ia_2=\omega$ $|\omega|=1$ とおきなおすと

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(y)\, e\left[-\frac{(y+i\omega x)^2}{1+\omega^2}\right] \left\{\pi(1+\omega^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} dy = i^{-n}\omega^n H_n(x) \tag{3-41}$$

従つて簡単な計算によつて（3－41）は

$$\int_{-\infty}^{\infty} i^n H_n(y)\, K(x, y)\, e\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy = \omega^n H_n(x)\, e\left[-\frac{x^2}{2}\right] \tag{3-42}$$

ここで，

$$K(x, y) = \left\{\pi(\omega^2+1)\right\}^{-\frac{1}{2}} e\left[\frac{\omega^2-1}{2(\omega^2+1)}(x^2+y^2) - \frac{2i\omega xy}{\omega^2+1}\right]$$

又は $\omega = e^{i\theta}$ とおくと

$$K(x, y) = (2\pi\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} e\left[i\left(\frac{\tan\theta}{2}(x^2+y^2) - xy\sec\theta - \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

とかける。（3－42）は正に，N. Wiener〔27〕が量子力学において位置と運動量の相互作用を表わす作用素として導いた式そのものである。（3－39）は一般化されたWiener変換と呼ぶことができる。

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ とし，S' 上の多項式 $F(X)$ に対し

$$\begin{aligned} W^\theta F &= \int_{S'} F(\omega(\theta)X + e[i\theta]\,Y)\, d\mu_c(X) \\ &= \widetilde{F}^\theta(Y) \end{aligned} \tag{3-43}$$

とおく。ここで $\omega(\theta) = \sqrt{2\sin\theta}\; e\left[i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$。$W^\theta$ は S' 上の多項式を多項式に写し（3－39）から $\|\xi\| = 1$ の時

$$\begin{aligned} & W^\theta H_n\left(\frac{(X, \xi)}{c\sqrt{2}}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\frac{\omega(\theta)}{c\sqrt{2}}x + \frac{e[i\theta]}{c\sqrt{2}}(Y, \xi)\right)(2\pi c^2)^{-\frac{1}{2}} e\left[-\frac{x^2}{2c^2}\right] dx \\ &= e[in\theta]\, H_n\left(\frac{(Y, \xi)}{c\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \tag{3-44}$$

故に W^θ は $L^2(S', \mu_c)$ 上のユニタリー作用素である。

（3－44）から明らかに $(W^\theta)^{-1} = W^{-\theta}$，$W^\theta \cdot W^{\theta'} = W^{\theta+\theta'}$ である。

$\lim_{\theta\to 0} W^\theta = W^0 =$ 恒等写像とすると W^θ は θ に関して1径数群となる。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$g = (u, \varphi) \in G_\infty$ に対し

$$W^{-\theta} T_g W^\theta = T_g^{\theta} \qquad (3-45)$$

と定義すると（$T_g^0 \equiv T_g$），S' 上の多項式 $F(X)$ に対し，

$$T_g^\theta F = W^{-\theta} T_g \int_{S'} F(\omega(\theta) X + e[i\theta] Y)\, d\mu_c(X)$$

$$= W^{-\theta} e\Big[-\frac{i}{2c^2}(Y, \varphi)\Big] \int_{S'} F(\omega(\theta) X + e[i\theta]\, u^{-1} Y]\, d\mu_c(X)$$

$$= \int_{S'\times S'} e\Big[-\frac{i}{2c^2}(\omega(-\theta)Y + e[-i\theta]X, \varphi)\, F(\omega(\theta)X'$$
$$+ e[i\theta]\, u^{-1}(\omega(-\theta)Y + e[-i\theta]X))\, d\mu_c(X')\, d\mu_c(Y)$$

$$= e\Big[-\frac{i}{2c^2} e[-i\theta](X, \varphi)\Big] \int_{S'\times S'} e\Big[-\frac{i\omega(-\theta)}{2c^2}(Y, u^{-1}\varphi)\Big] F(\omega(\theta)X'$$
$$+ e[i\theta]\omega(-\theta)Y + u^{-1}X)\, d\mu_c(X')\, d\mu_c(Y)$$

故に，

$$T_g^\theta F = e\Big[-\frac{i\, e[-i\theta]}{4c^2}(2(X, \varphi) + \sin\theta \|\varphi\|^2)\Big] \cdot F(u^{-1}(X + \varphi \sin\theta))$$

$$(3-46)$$

特に $\theta = \frac{\pi}{2}$ とおくと（3－46）は（3－2）と一致するから

$$T_g^{\frac{\pi}{2}} = S_g \qquad (3-47)$$

であることがわかる。従つて表現（$T_g, L^2(S', \mu_c)$）と（$S_g, L^2(S', \mu_c)$）は同値である。$\theta \fallingdotseq \theta'$ とした時表現（$T_g^\theta, L^2(S', \mu_c)$）と（$T_g^{\theta'}, L^2(S', \mu_c)$）から出発すれば，やはり関係式（3－19）～（3－21）が得られる。

結局一般化された Wiener 変換は加法公式（3－37）と同等である。次に一般化されたガウス変換と同等な他の加法公式を導く。

o加法公式 II

$U(b_1(X, \xi_1) + b_2(X, \xi_2))^n = k_n(\xi)$ とおく。但しここで $b_1^2 + b_2^2 = 0$ を満たす。

$$k_n(\xi) = U\{b_1(X,\xi_1)(b_1(X,\xi_1)+b_2(X,\xi_2))^{n-1}$$
$$+ b_2(X,\xi_2)(b_1(X,\xi_1)+b_2(X,\xi_2))^{n-1}\}$$

関係式(3－19)より，

$$k_n(\xi) = (b_1 d_{\xi_1} + b_2 d_{\xi_2}) k_{n-1}(\xi)$$
$$\cdots$$
$$= (b_1 d_{\xi_1} + b_2 d_{\xi_2})^n e[-\frac{1}{2}c^2 \|\xi\|^2]$$

ところで，

$$(b_1 d_{\xi_1} + b_2 d_{\xi_2}) e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2]$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{ir}\{e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi + rb_1\xi_1 + rb_2\xi_2\|^2] - e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2]\}$$
$$= i\,c^2\{b_1(\xi,\xi_1)+b_2(\xi,\xi_2)\}\, e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2] ,$$

$$(b_1 d_{\xi_1} + b_2 d_{\xi_2})(b_1(\xi,\xi_1)+b_2(\xi,\xi_2))^n e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2]$$
$$= [n b_1^2(b_1(\xi,\xi_1)+b_2(\xi,\xi_2))^{n-1} + n b_2^2(b_1(\xi,\xi_1)+b_2(\xi,\xi_2))^{n-1}] e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2]$$
$$+(b_1(\xi,\xi_1)+b_2(\xi,\xi_2))^n(b_1 d_{\xi_1}+b_2 d_{\xi_2}) e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2]$$

従つて

$$(b_1 d_{\xi_1} + b_2 d_{\xi_2})^n e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2]$$
$$= i^n c^{2n}\{b_1(\xi,\xi_1)+b_2(\xi,\xi_2)\}^n e[-\frac{1}{2}c^2\|\xi\|^2] \qquad (3-48)$$

従つて U の定義から

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(b_1x_1+b_2x_2)^n\pi^{-1}e[i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-\frac{x_1^2+x_2^2}{2c^2}]\,dx_1dx_2(2c)^{-1}$$
$$= i^n c^{2n}(b_1\lambda_1+b_2\lambda_1)^n\, e[-\frac{c^2}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)] \qquad (3-49)$$

但し $b_1^2+b_2^2=0$

(3－48)の右辺を展開すると

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$k_n(\xi) = i^n c^{2n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_1{}^j b_2{}^{n-j} (\xi, \xi_1)^j (\xi, \xi_2)^{n-j} \; e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right]$$

定理 3－2によつて

$$= U c^n 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{n} b_1{}^j \, b_2{}^{n-j} \binom{n}{j} H_j\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right) H_{n-j}\left(\frac{(X, \xi_2)}{c\sqrt{2}}\right)$$

従つて lemma 3－2 によつて $b_1{}^2 + b_2{}^2 = 0$ の時

$$2^n (b_1 x + b_2 y)^n = \sum_{j=0}^{n} b_1{}^j \, b_2{}^{n-j} \binom{n}{j} H_j(x) H_{n-j}(y) \qquad (3-50)$$

又は $b_1 = 1$, $b_2 = i$, $x = r \sin\theta$, $y = r \sin\theta$ とおくと

$$2^n r^n e[in\theta] = \sum_{j=0}^{n} i^{n-j} \binom{n}{j} H_j(r\cos\theta) H_{n-j}(r\sin\theta) \qquad (3-51)$$

(3－33)から

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x+iy)^n H_m(x) \pi^{-\frac{1}{2}} e[-x^2] \, dx = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-m} \frac{n!}{(n-m)!} H_{n-m}(y) \qquad (3-52)$$

(3－52)で m＝0 の場合がいわゆるガウス変換である。

(3－52)は一般化されたガウス変換ともいうべきものである。ガウス変換は他の方法からも導かれる。

o 積分表示

$U \Phi_1^n = i^n \varphi_1^n$ において $\xi = \lambda \xi_1$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} e[i\lambda x] H_n(x) \pi^{-\frac{1}{2}} e[-x^2] \, dx = i^n 2^{\frac{n}{2}} c^n \lambda^n e\left[-\frac{1}{2} c^2 \lambda^2\right] \qquad (3-53)$$

を得る。次に $U(X, \xi_1)^n = h_n(\xi)$ とおく。

n＝0 の時は明らかに $h_0(\xi) = e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right]$。

関係式(3－19)より

$$U(X, \xi_1) = i c^2 (\xi, \xi_1) U + i c^2 U D_{\xi_1}$$

従つて $h_1(\xi) = i c^2 (\xi, \xi_1) \, e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right]$

$$U(X, \xi_1)^{n+1} = U(X, \xi_1)(X, \xi_1)^n$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$= c^2\, i\, UD_{\xi_1}(X,\ \xi_1)^n + c^2\, i(\xi,\ \xi_1)\ U(X,\ \xi_1)^n$$

$$= c^2\, U n\, (X,\ \xi_1)^{n-1} + c^2\, i(\xi,\ \xi_1)\, U(X,\ \xi_1)^n$$

故に $\quad h_{n+1}(\xi) = n\, c^2\, h_{n-1}(\xi) + c^2\, i(\xi,\ \xi_1)\ h_n(\xi)$

$$h_1(\xi) = i\, c^2 (\xi,\ \xi_1)\, e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right] \tag{3-54}$$

$$h_0(\xi) = e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right]$$

（3－54）と（3－30）を比較して

$$h_n(\xi) = U(X,\ \xi_1)^n = i^n\, c^n\, 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{c(\xi,\ \xi_1)}{\sqrt{2}}\right)\, e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right] \tag{3-55}$$

を得る。ξ_1 を $-\xi_1$ で置きかえると

$$H_n(-x) = (-1)^n\, H_n(x) \tag{3-56}$$

（3－55）を積分表示すると（$\xi = \lambda\, \xi_1$ とおく）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e[i\lambda x]\ x^n\, (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e\left[-\frac{1}{2} x^2\right] dx = 2^{-\frac{n}{2}}\, i^n H_n\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\ e\left[-\frac{1}{2}\lambda^2\right] \tag{3-57}$$

$x = t + i\lambda$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t + i\lambda)^n (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e\left[-\frac{1}{2} t^2\right] dt = i^n\, 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) \tag{3-58}$$

を得る。（3－58）と（3－52）は同じ式である。

o母関数

$$U \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n\left(\frac{(X,\ \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right) / n!$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}}\, i^n\, t^n\, c^n (\xi,\ \xi_1)^n\, e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right] / n!$$

$$= e\left[\sqrt{2}\, i\, c(\xi,\ \xi_1)\, t - \frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$= e\left[-t^2 - \frac{1}{2}c^2 \|\xi - \sqrt{2}\, i\, t\, \xi_1 / c\|^2\right]$$

$$= e\left[-t^2\right] U\, e\left[\sqrt{2}\, t(X, \xi_1)/c\right]$$

従つて，lemma 3－2 によつて

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x)/n! = e\left[2tx - t^2\right] \qquad (3-59)$$

o Rodrigues' formula

関係式（3－19）によつて

$$(d_{\xi_1})^n\, e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right] = U(X, \xi_1)^n$$

（3－55）より

$$= i^n c^n 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{c(\xi, \xi_1)}{\sqrt{2}}\right) e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right] \qquad (3-60)$$

$\xi = \lambda \xi_1$ とおくと

$$d_{\xi_1} e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right]\Big|_{\xi=\lambda\xi_1}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{ir}\left\{ e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi + r\xi_1\|^2\right] - e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right]\right\}\Big|_{\xi=\lambda\xi_1}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{ir} e\left[-\frac{1}{2} c^2 \|\xi\|^2\right]\left\{ e\left[-c^2(\xi, \xi_1)\, r - \frac{1}{2} r^2 c^2 - 1\right]\right\}\Big|_{\xi=\lambda\xi_1}$$

$$= -i \frac{d}{d\lambda}\, e\left[-\frac{1}{2} c^2 \lambda^2\right]$$

従つて（3－60）より

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n e\left[-\frac{1}{2} c^2 \lambda^2\right] = (-i)^n c^n 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{c\lambda}{\sqrt{2}}\right) e\left[-\frac{c^2 \lambda^2}{2}\right] \qquad (3-61)$$

（3－61）において $\sigma c^2 = 1$ とおくと

$$(-1)^n (\sqrt{2\sigma})^n e\left[\frac{\lambda^2}{2\sigma}\right] \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n e\left[-\frac{\lambda^2}{2\sigma}\right] = H_n\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2\sigma}}\right) \equiv H_n(\lambda, \sigma) \qquad (3-62)$$

これは S. Kakutani の定義した公式である。〔13〕

S. Kakutani は（3－62）で定義された Hermite 多項式を用いて（3－28）の

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

分解を与えた。彼の方法はあらかじめ Hermite 多項式を用いた点において定理 3−1，3−2の分解や，§4で述べる K. Itô の multiple Wiener integral による分解よりも初等的である。

o Legendre 多項式との関係

$$U H_n\left(\frac{(X,\varphi)}{c\sqrt{2}}\right) = m_n(\xi)$$

とおく。関係式（3−21）によって

$$-(\xi,\varphi)\, m_n(\xi)$$
$$= U\left\{-i\, 2^{-\frac{1}{2}} c^{-1} \|\varphi\|^2 H_n'\left(\frac{(X,\varphi)}{c\sqrt{2}}\right) + i\, c^{-2} (X,\varphi) H_n\left(\frac{(X,\varphi)}{c\sqrt{2}}\right)\right\}$$

但し，ここで

$$D_\varphi H_n\left(\frac{(X,\varphi)}{c\sqrt{2}}\right) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{ir}\left\{H_n\left(\frac{(X,\varphi)+r\|\varphi\|^2}{c\sqrt{2}}\right) - H_n\left(\frac{(X,\varphi)}{c\sqrt{2}}\right)\right\}$$
$$= -i\, 2^{-\frac{1}{2}} c^{-1} \|\varphi\|^2 H_n'\left(\frac{(X,\varphi)}{c\sqrt{2}}\right)$$

を用いた。

（3−30）と（3−35）より

$$-(\xi,\varphi)\, m_n(\xi) = U\left\{-i\, c^{-1}(\|\varphi\|^2-1)\, n\sqrt{2}\, H_{n-1}\left(\frac{(X,\varphi)}{c\sqrt{2}}\right) + i\, 2^{-\frac{1}{2}} c^{-1} H_{n+1}\left(\frac{(X,\varphi)}{c\sqrt{2}}\right)\right\}$$

ここで $\xi = 0$ とおくと

$$m_{n+1}(0) = 2n(\|\varphi\|^2 - 1)\, m_{n-1}(0)$$

明らかに　$m_0(0) = 1$　従って

$$m_{2n}(0) = \frac{(2n)!}{n!}(\|\varphi\|^2 - 1)^n$$

ここで $\|\varphi\| = y$ とおいて

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{2n}(yx)\, \pi^{-\frac{1}{2}} e[-x^2]\, dx = (y^2-1)^n (2n)!/n! \qquad (3-63)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

を得る。(3−35)より

$$\frac{d}{dy} H_{2n}(yx) = 2^2 \ n x H_{2n-1}(yx) \qquad (3-64)$$

(3−64)をくり返し用いて(3−63)に代入すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n H_n(yx) \ \pi^{-\frac{1}{2}} \ e[-x^2] \, dx = 2^{-n} \left(\frac{d}{dy}\right)^n (y^2-1)^2$$

$$= n! \ P_n(y)$$

ここで $P_n(y)$ は n 次の Legendre の多項式。

§3. 無限次元運動群の表現における行列要素

この節では§1.で考察した無限次元運動群の表現(T_g, $L^2(S', \mu_c)$)の行列要素を計算し,それがⅡ章の極限定理から N. Ya. Vilenkin 〔24〕の研究した有限次元ユークリッド運動群の表現の行列要素の極限であることを示す。

$g = (I, \xi)$ とおき,行列要素

$$\left(T_g \frac{H_k\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2^k k!}}, \frac{H_m\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2^m m!}}\right)_c \equiv H_{k,m}(\xi) \qquad (3-65)$$

と定義する。定義から

$$H_{k,m}(\xi) = (2^{m+k} m! \, k!)^{-\frac{1}{2}} \int_{S'} e\left[-\frac{i}{2c^2}(X, \xi)\right] H_k\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right) H_m\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right) d\mu_c(X)$$

$\xi = 2 \ \ c x \xi_1$ とおくと,$H_{k,m}(\xi)$ は一変数の普通の関数となつて,

$$H_{k,m}(x) = (2^{m+k} m! k!)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e[-\sqrt{2} x y i] \, H_k(y) H_m(y) \, \pi^{-\frac{1}{2}} \, e[-y^2] \, dy \qquad (3-66)$$

を得る。Ⅱ章の極限定理から $H_{k,m}(x)$ は有限次元平行移動群の表現の行列要素の極限であることが直ちにわかる。

<u>定理 3−3</u>.

$$\lim_{n\to\infty} J^n_{k,m,0}(\sqrt{n} \ x) = H_{k,m}(x) \qquad (3-67)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

ここで，

$$J^n_{k,m,0}(x)=D^n_{k,m}\int_0^\pi e\left[-i\,x\cos\varphi\right] C_m^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi)\, C_k^{\frac{n-3}{2}}(\cos\varphi)\,\sin^{n-3}\varphi\, d\varphi$$

$$D^n_{k,m}=\pi^{-1}\,2^{n-5}\left(\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\right)^2\left\{\frac{k!m!(2k+n-3)(2m+n-3)}{\Gamma(n+k-3)\Gamma(n+m-3)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

N. Ya. Vilenkin 〔24〕

特殊関数 $H_{k,m}(x)$ の性質

$$\sqrt{k+1}\,H_{k+1,m+1}(x)=\sqrt{m+1}\,H_{k,m}(x)-i\,x\,H_{k,m+1}(x) \tag{3-68}$$

$$i\,\frac{d}{dx}H_{k,m}(x)=\sqrt{m+1}\,H_{k,m+1}(x)+\sqrt{m}\,H_{k,m-1}(x) \tag{3-69}$$

$$H_{k,m}(x_1+x_2)=\sum_{s=0}^{\infty}H_{k,s}(x_1)\,H_{s,m}(x_2) \tag{3-70}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}H_{k,s}(x)\,\overline{H_{s,m}(x)}=\delta_{k,m} \tag{3-71}$$

$$e\left[-\sqrt{2}\,xy\,i\right]H_m(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2^m m!}{2^k k!}}\,H_{k,m}(x)\,H_k(y) \tag{3-72}$$

$$H_{k,m}(x)=i^{-(m+k)}(m!k!)^{-\frac{1}{2}}e\left[-\frac{x^2}{2}\right]\sum_{p=0}^{m\wedge k}(-1)^p p!\binom{m}{p}\binom{k}{p}x^{m+k-2p} \tag{3-73}$$

$$\sum_{p=0}^{k}\sqrt{k!\binom{k}{p}}\,H_{k-p,p}(x)=(-i)^k H_k(x)\,e\left[-\frac{x^2}{2}\right] \tag{3-74}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\sqrt{(2p)!}}{2^p\,p!}H_{2s,2p}(x)=\frac{(-1)^s\sqrt{(2s)!}}{2^s\,s!} \tag{3-75}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\sqrt{(2p+1)!}}{2^p\,p!}H_{2s+1,2p+1}(x)=\frac{(-1)^s\sqrt{(2s+1)!}}{2^s\,s!} \tag{3-76}$$

$$\sqrt{m+1}\,H_{k,m+1}(x)+\sqrt{m}\,H_{k,m-1}(x)=\sqrt{k+1}\,H_{k+1,m}+\sqrt{k}\,H_{k-1,m} \tag{3-77}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}H_{0,p}(x)\,H_{0,p}(y)\cos^p(\varphi+\phi)=e\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+2xy\cos(\varphi+\phi))\right] \tag{3-78}$$

これらの公式は表現の定義及び Hermite 多項式の性質から導かれる。又特殊関数 $H_{k,m}(x)$ が真に意味のある特殊関数であるかどうか疑問であるので証明は省略する。

$H_{k,m}(x)$ は S －translation の表現の行列要素として定義されたが，次に無限次

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

元回転群の表現の行列要素を考えよう。

$g = (u, \theta)$ とおく。ここで

$$
\begin{aligned}
u\,\xi_1 &= \cos\theta\,\xi_1 + \sin\theta\,\xi_2 \\
u\,\xi_2 &= -\sin\theta\,\xi_1 + \cos\theta\,\xi_2 \qquad (3-79) \\
u\,\xi_i &= \xi_i,\quad i = 3, 4, \cdots
\end{aligned}
$$

この時

$$
H^{l}_{k,m}(u) = \left(T_g \frac{H_k\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right) H_{l-k}\left(\frac{(X, \xi_2)}{c\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2^l\, k!\,(l-k)!}},\ \frac{H_m\left(\frac{(X, \xi_1)}{c\sqrt{2}}\right) H_{l-m}\left(\frac{(X, \xi_2)}{c\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2^l\, m!\,(l-m)!}} \right)_c
$$

$$
(\, l \geq m,\ k\,) \qquad (3-80)
$$

定義から

$$
H^{l}_{k,m}(u) = 2^{-l}\left\{k!\,m!\,(l-k)!\,(l-m)!\right\}^{-\frac{1}{2}} \iint_{-\infty}^{\infty} H_k(x\cos\theta + y\sin\theta) H_{l-k}(-x\sin\theta + y\cos\theta) H_m(x) H_{l-m}(y) \pi^{-1} e\left[-(x^2+y^2)\right] dx\,dy \qquad (3-81)
$$

従つて $H^{l}_{k,m}$ は $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の多項式として表わされる。
故に $H^{l}_{k,m}(u) = H^{l}_{k,m}(\cos\theta, \sin\theta)$ と書く。 $H_{k,m}(x)$ の場合と同様にⅡ章の極限定理によつて $H^{l}_{k,m}(\cos\theta, \sin\theta)$ は有限次元回転群の表現の行列要素の極限として得られる。

<u>定理 3 − 4</u>

$$
\lim_{n\to\infty} P^{n,\,l}_{k,m,0}(\cos\theta) = H^{l}_{k,m}(\cos\theta, \sin\theta) \qquad (3-82)
$$

ここで，

$$
P^{n,\,l}_{k,m,0}(\cos\theta)
$$

$$
= D^{n,\,l}_{k,m} \int_0^{\pi} (\cos\theta + i\cos\varphi\sin\theta)^l\, C^{\frac{n-3}{2}}_m\left(\frac{\cos\varphi\cos\theta + i\sin\theta}{i\cos\varphi\sin\theta + \cos\theta}\right) C^{\frac{n-3}{2}}_k(\cos\varphi)\sin^{n-3}\varphi\, d\varphi
$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$D^{n,\,l}_{k,m}=\pi^{-1}\,2^{n-5}\left[\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\right]^{2} i^{m-k}\left[\frac{(l-k)!\,m!\,\Gamma(l+k+n-2)(2m+n-3)(2k+n-3)\,k!}{(l-m)!\,\Gamma(m+n-3)\,\Gamma(k+n-3)\,\Gamma(l+m+n-2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

N. Ya. Vilenkin [24]

特殊関数 $H^{n}_{k,m}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ の性質

$$H^{n}_{k,m}(\cos\theta,\ \sin\theta)=(-1)^{k+m}H^{n}_{m,k}(\cos\theta,\ \sin\theta) \qquad (3-83)$$

$$\sqrt{k}\ H^{n}_{k,m}=\sqrt{(n-m)}\ \sin\theta\, H^{n-1}_{k-1,m}+\sqrt{m}\ \cos\theta\, H^{n-1}_{k-1,m-1} \qquad (3-84)$$

$$\frac{d}{d\theta}H^{n}_{k,m}=\sqrt{k(n-k+1)}\ H^{n}_{k-1,m}-\sqrt{(k+1)(n-k)}\ H^{n}_{k-1,m} \qquad (3-85)$$

$$H^{n}_{k,m}(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))=\sum_{s=0}^{n}H^{n}_{k,s}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)H^{n}_{s,m}(\cos\beta,\ \sin\beta) \qquad (3-86)$$

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s+m}H^{n}_{k,s}\ H^{n}_{s,m}=\delta_{k,m} \qquad (3-87)$$

$$H_k(x\cos\theta+y\sin\theta)H_{n-k}(-x\sin\theta+y\cos\theta)$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\sqrt{\frac{k!(n-k)!}{m!(n-m)!}}\ H^{n}_{k,m}(\cos\theta,\ \sin\theta)\ H_m(x)H_{n-m}(y) \qquad (3-88)$$

$$\sum_{p=0}^{n}H^{n}_{k,p}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)H_{p,m}(x\cos\alpha-y\sin\alpha)H_{n-p,n-m}(x\sin\alpha+y\cos\alpha)$$
$$=\sum_{p=0}^{n}H^{n}_{p,m}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\ H_{k,p}(x)H_{n-k,n-p}(y) \qquad (3-89)$$

$$H^{n}_{k,m}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$=(-1)^{m}\sqrt{\frac{(n-k)!k!}{(n-m)!m!}}\sum_{p=0}^{m\wedge k}(-1)^{p}\binom{n-m}{k-p}\binom{m}{p}\cos^{n-m-k+2p}\theta\,\sin^{k+m-2p}\theta \qquad (3-90)$$

$$\sum_{k=0}^{n}i^{k-m}\sqrt{\frac{(n-m)!m!}{(n-k)!k!}}\ H^{n}_{k,m}(\cos\theta,\ \sin\theta)=e[in\theta] \qquad (3-91)$$

$$\sqrt{(n-m)(n-m-1)}\,H^{n}_{m,k+1}+\sqrt{(m+2)(m+1)}\,H^{n}_{m+2,k+1}$$
$$=\sqrt{k(k+1)}\ H^{n-2}_{m,k-1}+\sqrt{(n-k-1)(n-k-2)}\ H^{n-2}_{m,k+1} \qquad (3-92)$$

$H^{n}_{k,m}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ についても $H_{k,m}(x)$ と同様であるからこれらの公式の証明は省く。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

（3－89）については〔11〕をみよ。

§4. Multiple Wiener Integral

multiple Wiener integral についてはすでに Seminar on Probability にたびたび解説してあるが，この節では（3－28）における $L^2(S', \mu_c)$ の直和分解を直接構成する方法としての multiple Wiener integral を説明する。この節では簡単のためにガウス分布の分散 c^2 を1とする。実際，c は本質的に役割をはたさない。前節までの記号でサフイツクス c を省略する。

$L^2(R^n)$ でもつて R^n 上のルベツク測度に関して二乗可積分な複素数値可測関数全体からなる Hilbert 空間とし，そのノルムを $(\ ,\ )_n$，$\|\cdot\|_n$ で表わす。I 章の記号とは混同しないであろう。

$B^*(R)$ でもつてルベツク測度が有限でかつ0でない直線上のボレル集合の全体を表わす。$B^*(R) \ni E$ に対し，$\varphi_E(x)$ 又は $\varphi(E)$ を集合 E の indicator function とする。

S_nを $\varphi_{E_1}(t_1)\times\cdots\times\varphi_{E_n}(t_n)$，$E_i \cap E_j = \phi$，$E_i \in B^*(R)$ によつて張られる $L^2(R^n)$ の部分空間とすると，明らかに S_n は $L^2(R^n)$ で dense である。

$L^2(R^n)$ の元 f に対し $L^2(S', \mu) \ni I_n(f)$ を対応させる。そのために，まず，H のノルムで $\varphi_E(t)$ に収束する列 $\{\varphi_n \in S\}$ $n=1, 2, \cdots$ をとる。（このことが可能なように H のノルムを定めてある。II 章の序参照）

$$\int_{S'} |(X, \varphi_n)-(X, \varphi_m)|^2 d\mu(X) = \int_{S'} |(X, \varphi_n-\varphi_m)|^2 d\mu(X)$$
$$= \|\varphi_n-\varphi_m\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

従つて $\{(X, \varphi_n)\}$ は $L^2(S', \mu)$ で基本列をなすから，それを記号的に (X, φ_E) とかく。即ち，

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ (X, \varphi_n) = (X, \varphi_E) \qquad (3-93)$$

さて，$f \in S_n$ とすると

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \sum a_{i_1\cdots i_n}\varphi_{E_{i_1}}(t_1)\times\cdots\times\varphi_{E_{i_n}}(t_n),\ E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j)$$
$$= 0 \qquad 他の場合 \qquad (3-94)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

とかける。この時 f に対し $L^2(S', \mu)$ の元

$$I_n(f) = \sum a_{i_1 \cdots i_n}(X, \varphi_{E_{i_1}}) \times \cdots \times (X, \varphi_{E_{i_n}}) \qquad (3-95)$$

を対応させる。但し，$n=0$ の時は，任意の複素数 C に対し $I_0(C) = C$ と定義する。定義から明らかに，$I_n(\cdot)$ は S_n の元 f, g に対し次の性質を満たす。

(I−1) $I_n(af+bg) = a I_n(f) + b I_n(g)$

(I−2) $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$

ここで $\tilde{f}(t_1, \cdots t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1 \cdots i_n)} f(t_{i_1} \cdots t_{i_n})$, $\sum_{(i_1 \cdots i_n)}$ は $(1, \cdots n)$ のすべての置換の和。

(I−3) $(I_n(f), I_n(g)) = n! (\tilde{f}, \tilde{g})_n$

(I−4) $E(I_n(f)) = 0$

ここで E は $d\mu$ による積分を表わす。

(I−5) $(I_n(f), I_n(g)) = 0 \qquad (n \neq m)$

(I−1, 2, 4, 5) は明らか。(I−3) を証明する。

S_n の元 f, g は $E_1, \cdots E_n$ $E_i \cap E_j = \phi$ $E_i \in B^*(R)$ が選べて，

$$\begin{aligned} f &= \sum a_{i_1 \cdots i_n} \varphi_{E_{i_1}}(t_1) \times \cdots \times \varphi_{E_{i_n}}(t_n) \quad i_k \neq i_l \quad (k \neq l) \\ &= 0 \qquad \text{他の場合。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \sum b_{i_1 \cdots i_n} \varphi_{E_{i_1}}(t_1) \times \cdots \times \varphi_{E_{i_n}}(t_n) \\ &= 0 \qquad \text{他の場合。} \end{aligned}$$

と表わせるから，

$$\begin{aligned} &(I_n(f), I_n(g)) \\ &= E[(\sum a_{i_1 \cdots i_n}(X, \varphi_{E_{i_1}}) \cdots (X, \varphi_{E_{i_n}}))(\sum b_{i_1 \cdots i_n}(X, \varphi_{E_{i_1}}) \cdots (X, \varphi_{E_{i_n}}))] \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_n} (\sum_{(j) \sim (i)} a_{j_1 \cdots j_n})(\sum_{(j) \sim (i)} b_{j_1 \cdots j_n}) |E_{j_1}| \times \cdots \times |E_{i_n}| \end{aligned}$$

ここで $\sum_{(j) \sim (i)}$ は $(i_1 \cdots i_n)$ の置換全体についての和，$|E|$ は Eのルベツク測度。

$$= \frac{1}{n!} \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (\sum_{(j) \sim (i)} a_{j_1 \cdots j_n})(\sum_{(j) \sim (i)} b_{j_1 \cdots j_n}) |E_{i_1}| \times \cdots \times |E_{i_n}|$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$= n!\sum_{(i_1\cdots i_n)}\left(\frac{1}{n!}\sum_{(j_1\cdots j_n)} a_{j_1\cdots j_n}\right)\left(\frac{1}{n!}\sum_{(j_1\cdots j_n)} b_{j_1\cdots j_n}\right)|E_{i_1}|\times\cdots\times|E_{i_n}|$$

$$= n!\,(\tilde{f},\ \tilde{g})_n \qquad (\mathrm{q.e.d})$$

(I − 3)より $\|I_n(f)\| = \sqrt{n!}\,\|\tilde{f}\|_n \leqq \sqrt{n!}\,\|f\|_n$ 故に $I_n(\cdot)$ は $L^2(R^n)$ 全体から $L^2(S',\ \mu)$ への写像に拡張され，性質，(I − 1)〜(I − 5)を満たす。

定義 3 − 4　$I_n(\cdot)$ を n 次の multiple Wiener integral と呼ぶ。

$I_n = I_n(L^2(R^n))$ とおくと，(I − 5)から

$$L^2(S',\ \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus\ I_n \tag{3-96}$$

と直和分解されることがわかる。 I_n が (3 − 28)における L_n と一致することを示そう。

Lemma 3 − 5

i) $\varphi \in L^2(R^n)$, $\phi \in L^2(R^1)$ に対し

$$(\varphi \underset{k}{\times} \phi)(t_1,\cdots t_{k-1},\ t_{k+1},\cdots t_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_1,\cdots t_k,\cdots t_n)\phi(t_k)\,dt_k$$

とおくと $\varphi \underset{k}{\times} \phi \in L^2(R^{n-1})$ で $\|\varphi \underset{k}{\times}\phi\|_{n-1} \leq \|\varphi\|_n\,\|\phi\|_1$

ii) $\varphi\cdot\phi(t_1\cdots t_{n+1}) = \varphi(t_1\cdots t_n)\phi(t_{n+1})$ とおく。

$$I_{n+1}(\varphi\cdot\phi) = I_n(\varphi)\,I_1(\phi) - \sum_{k=1}^{n} I_{n-1}(\varphi \underset{k}{\times} \phi) \tag{3-97}$$

証明.　i) は Schwarz の不等式から明らか。

ii) の証明をしよう。まず $\varphi \in S_n$，$\phi \in S_1$ の時に証明する。任意の $\varepsilon > 0$ に対し互に disjoint な分割 $E_1, \cdots E_n$ を選んで，任意の i に対し $|E_i| < \varepsilon$ となるようにしておく。φ，ϕ は

$$\varphi(t_1,\cdots t_n) = \sum a_{i_1\cdots i_n}\,\varphi_{E_{i_1}}(t_1)\times\cdots\times\varphi_{E_{i_n}}(t_n),\ i_k \neq i_m\ (k \neq m)$$

$$= 0 \qquad \text{他の場合。}$$

$$\phi(t) = \sum b_i\ \varphi_{E_i}(t)$$

$$= 0 \qquad \text{他の場合。}$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

と表わされる。さらに

$$\chi_\varepsilon(t_1, \cdots t_{n+1}) = \Sigma\, a_{i_1\cdots i_n} b_i \varphi_{E_{i_1}}(t_1)\times\cdots\times\varphi_{E_{i_n}}(t_n)\varphi_{E_i}(t_{n+1}) \quad (i \neq i_k)$$
$$= 0 \quad 他の場合。$$

とおくと，

$$I_n(\varphi)\cdot I_1(\phi) = (\Sigma\, a_{i_1\cdots i_n}(X, \varphi_{E_i})\times\cdots\times(X, \varphi_{i_n}))(\Sigma\, b_i(X, \varphi_{E_i}))$$
$$= \sum_{i_k \neq i} a_{i_1\cdots i_n} b_i(X, \varphi_{E_{i_1}})\times\cdots\times(X, \varphi_{E_{i_n}})(X, \varphi_{E_i})$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} a_{i_1\cdots i_n} b_{i_k}(X, \varphi_{E_{i_1}})\times\cdots\times(X, \varphi_{E_{i_k}})^2\times\cdots\times(X, \varphi_{E_{i_n}})$$
$$= I_{n+1}(\chi_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{n}\Sigma\, a_{i_1\cdots i_n} b_{i_k}(X, \varphi_{E_{i_1}})\cdots|E_{i_k}|\cdots(X, \varphi_{E_{i_n}})$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\Sigma\, a_{i_1\cdots i_n} b_{i_k}(X, \varphi_{E_{i_1}})\cdots\{(X, \varphi_{E_{i_k}})^2 - |E_{i_k}|\}\cdots(X, \varphi_{E_{i_n}})$$
$$= I_{n+1}(\chi_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{n} I_{n-1}(\varphi \underset{k}{\times} \phi) + \sum_{k=1}^{n} R_k$$

$$\|I_{n+1}(\chi_\varepsilon) - I_{n+1}(\varphi\cdot\phi)\|^2 \leq n\,!\,\|\chi_\varepsilon - \varphi\cdot\phi\|^2_{n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\Sigma\, a^2_{i_1\cdots i_n} b^2_{i_k}\, |E_{i_1}|\cdots|E_{i_k}|^2\cdots|E_{i_n}|$$
$$\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n}\Sigma\, a^2_{i_1\cdots i_n} b^2_{i_k}\, |E_{i_1}|\cdots|E_{i_k}|\cdots|E_{i_n}|$$
$$= \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_1\cdots t_n)^2\phi(t_k)^2\, dt_1\cdots dt_n$$
$$\to 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

$$\|R_k\|^2 = \Sigma\, a^2_{i_1\cdots i_n} b^2_{i_k}\, |E_{i_1}|\cdots(2\pi|E_{i_k}|)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2 - |E_{i_k}|)^2 e\left(-\frac{x^2}{2|E_{i_k}|}\right) dx \times\cdot$$
$$\cdot\times|E_{i_n}|$$
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-1)^2 e\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\ \Sigma\, a^2_{i_1\cdots i_n} b^2_{i_k}\, |E_{i_1}|\cdots|E_{i_k}|^2\cdot$$
$$\cdot|E_{i_n}|$$
$$\leqq \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-1)^2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t_1\cdots t_n)\phi^2(t_k)\, dt_1\cdots dt_n$$
$$\to 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

従つて $\varphi \in S_n$, $\phi \in S_1$ に対しては

$$I_n(\varphi)\cdot I_1(\phi) = I_{n+1}(\varphi\cdot\phi) + \sum_{k=1}^{n} I_{n-1}(\varphi \underset{k}{\times} \phi) \qquad (3-98)$$

が成立つ。任意の $\varphi \in L^2(R^n)$, $\phi \in L^2(R)$ に対しては $\{\varphi_j \in S_n\}\{\phi_j \in S_1\}$ が選べて $\|\varphi_j - \varphi\|_n \to 0$, $\|\phi_j - \phi\|_1 \to 0$ とできる。しかも $\{\varphi_j\}$, $\{\phi_j\}$ に対しては (3−98) が成立つから

$$\|I_{n+1}(\varphi_j\cdot\phi_j) - I_{n+1}(\varphi\cdot\phi)\| = \|I_{n+1}(\varphi_j\phi_j - \varphi\cdot\phi)\|$$

$$\leqq \sqrt{(n+1)!}\ \|\varphi_j\cdot\phi_j - \varphi\cdot\phi\|_{n+1}$$

$$\leqq \sqrt{(n+1)!}\ \|\varphi_j(\phi_j - \varphi)\|_{n+1} + \sqrt{(n+1)!}\ \|(\varphi_j - \varphi)\phi\|_{n+1}$$

$$= \sqrt{(n+1)!}\ \|\varphi_j\|_n \|\phi_j - \phi\|_1 + \sqrt{(n+1)!}\ \|\varphi_j - \varphi\|_n \|\phi\|_1$$

$$\to 0 \qquad (j \to \infty)$$

$$\|I_{n-1}(\varphi_j \underset{k}{\times} \phi_j) - I_{n-1}(\varphi \underset{k}{\times} \phi)\| \leqq \sqrt{(n-1)!}\ \|\varphi_j \underset{k}{\times} \phi_j - \varphi \underset{k}{\times} \phi\|_{n-1}$$

$$\leqq \sqrt{(n-1)!}\ \|(\varphi_j - \varphi)\underset{k}{\times}\phi_j\|_{n-1} + \sqrt{(n-1)!}\ \|\varphi\underset{k}{\times}(\phi_j - \phi)\|_{n-1}$$

$$\leqq \sqrt{(n-1)!}\ \|\varphi_j - \varphi\|_n \|\phi_j\|_1 + \sqrt{(n-1)!}\ \|\varphi\|_n \|\phi_j - \phi\|_1$$

$$\to 0 \qquad (j \to \infty)$$

$$E|I_n(\varphi_j)\cdot I_1(\phi_j) - I_n(\varphi)I_1(\phi)| \leqq E|I_n(\varphi_j)\,I_1(\phi_j - \phi)| + E|I_n(\varphi_j - \varphi)\,I_1(\phi)|$$

$$\leqq \|I_n(\varphi_j)\|\ \|I_1(\phi_j - \phi)\| + \|I_n(\varphi_j - \varphi)\|\cdot\|I_1(\phi)\|$$

$$\leqq \sqrt{n!}\ \|\varphi_j\|_n \|\phi_j - \phi\|_1 + \sqrt{n!}\ \|\varphi_j - \varphi\|_n \|\phi\|_1$$

$$\to 0 \qquad (j \to \infty)$$

従つて

$$\|I_{n+1}(\varphi\cdot\phi) + \sum_{k=1}^{n} I_{n-1}(\varphi\underset{k}{\times}\phi) - \{I_{n+1}(\varphi_j\cdot\phi_j) - \sum_{k=1}^{n} I_{n-1}(\varphi_j\underset{k}{\times}\phi_j)\}\| \to 0$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

故に $I_n(\varphi_j)\cdot I_1(\phi_j)$ は $I_{n+1}(\varphi\cdot\phi)+\sum_{k=1}^{n} I_{n-1}(\varphi\underset{k}{\times}\phi)$ に $L^2(S',\mu)$ ノルムで収束する。一方 $I_n(\varphi_j)\cdot I_1(\phi_j)$ は $I_n(\varphi)\,I_n(\phi)$ に L^1- 収束する。従つて実は $L^2(S',\mu)$ の意味で両者は一致する。（q．e．d）

<u>定理 3－5.</u>　$\{\xi_i\in S\}$ $i=1,2,\cdots$ を H の完全正規直交系とする。
$H=L^2(R^1)$ だから

$$\Xi^{l_1\cdots l_n}_{k_1\cdots k_n}=\{\xi_{k_1}(t_1)\cdots\xi_{k_1}(t_{l_1})\cdot\xi_{k_2}(t_{l_1+1})\cdots\cdot\xi_{k_n}(t_{l_1+\cdots+l_n})\}$$

とおくと $\{\Xi^{l_1\cdots l_n}_{k_1\cdots k_n}\ \ l_1+\cdots+l_n=l\}$ は $L^2(R^l)$ の完全正規直交系である。この時，

$$I_l\,(\Xi^{l_1\cdots l_n}_{k_1\cdots k_n})=2^{-\frac{l}{2}}\prod_{j=1}^{n}H_{l_j}\left(\frac{(X,\ \xi_{k_j})}{2}\right)\qquad(3-99)$$

証明.　まず $l=0,\ 1$ の時は明らか。従つて $l_1+\cdots+l_n=l-1,\ l$ の時（3－99）が成立つと仮定する。$l_1+\cdots+l_n=l+1$ とし，$l_1\geq 1$ と仮定しても一般性を失わない。

$$\varphi=\xi_{k_1}(t_1)\times\cdots\times\xi_{k_1}(t_{l_1-1})\ \xi_{k_2}(t_{l_1})\times\cdots\times\xi_{k_n}(t_{l_1+\cdots+l_n-1})$$

$$\phi=\xi_{k_1}(t)$$

とおく。

$$I_{l+1}(\Xi^{l_1\cdots l_n}_{k_1\cdots k_n})=I_l(\Xi^{l_1-1,\,l_2,\cdots,\,l_n}_{k_1,\cdots,k_n})\,I_1(\xi_{k_1})-\sum_{k=1}^{l}I_{l-1}(\Xi^{l_1-1,\,l_2,\cdots\,l_n}_{k_1,\cdots\,k_n}\underset{k}{\times}\xi_{k_1})\qquad(3-100)$$

ここで $\{\xi_j\}$ が正規直交系であることを考慮すると

$$\begin{aligned}\Xi^{l_1-1,\,l_2,\cdots,\,l_n}_{k_1,\cdots,k_n}\underset{k}{\times}\xi_{k_1}&=\Xi^{l_1-2,\,l_2,\cdots\,l_n}_{k_1,\cdots\,k_n} & k\leq l_1-1\\ &=0 & k>l_1-1\end{aligned}\qquad(3-101)$$

帰納法の仮定と（3－30）を用いると（3－100）は

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$I_{l+1}\left[\Xi^{l_1\cdots l_n}_{k_1\cdots k_n}\right]=\prod_{j=2}^{n}2^{-\frac{l_j}{2}}H_{l_j}\left(\frac{(X,\xi_{k_j})}{\sqrt{2}}\right)2^{-\frac{l_1-1}{2}}H_{l_1-1}\left(\frac{(X,\xi_{k_1})}{\sqrt{2}}\right)(X,\xi_{k_1})$$

$$-(l_1-1)\prod_{j=2}^{n}2^{-\frac{l_j}{2}}H_{l_j}\left(\frac{(X,\xi_{k_j})}{\sqrt{2}}\right)2^{-\frac{l_1-2}{2}}H_{l_1-2}\left(\frac{(X,\xi_{k_1})}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=2^{-\frac{l}{2}}\prod_{j=1}^{n}H_{l_j}\left(\frac{(X,\xi_{k_j})}{\sqrt{2}}\right)\qquad(\text{q.e.d})$$

定理3－2と multiple Wiener integral の性質 （I－3）から $\{(l_1!\cdots l_n!)^{-1/2}I_l[\Xi^{l_1\cdots l_n}_{k_1\cdots k_n}],\ l_1+\cdots+l_n=l\}$ は I_l の完全正規直交系である。従つて multiple Wiener integral による $L^2(S',\mu)$ の直和分解は，直交部分空間の base まで含めて，定理3－2，（3－28）と一致する。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

第Ⅳ章　Poisson White Noise

前章までは無限次元ガウス測度とそれに関連した Hermite 多項式を研究した。確率論でよく知られているように，連続分布としてのガウス測度に対し，同様な性質（加法性）をもつ離散分布として Poisson 分布がある。この章では無限次元ガウス測度に対応する無限次元 Poisson 分布（Poisson white noise）をⅢ章と同様な手法で考察する。但し，無限次元ガウス測度が $O(\infty)$ − invariant，S − quasi-invariant という非常に特長的性質をもつ測度であつたのに対し，Poisson white noiseを特長づける群論的性質がよく知られていない。従つてこの章では，可能なかぎりⅢ章のガウス測度の場合の類似によつて考えることにする。

§1. Charlier の多項式

$\xi \in S$ に対し

$$P(\xi) = e\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(e[i\xi(t)] - 1 - i\xi(t)\right) dt\right] \qquad (4-1)$$

とおく。$P(\xi)$ がⅠ章の特性汎関数であるための条件（L − 1）〜（L − 3）を満たすことを示そう。まず，$P(0) = 1$ は明らか。連続性は $\xi \to 0$ in S の時 $\int_{-\infty}^{\infty} e[i\xi(t) - 1 - i\xi(t)]\, dt \to 0$ より明らか。最後に正定値性（L − 3）を示そう。

まず，（4 − 1）で，$\xi = a\varphi_E(t)$ の時を考える。勿論 $\varphi_E(t)$ は S に属さないから適当な修正が必要である。

$$\begin{aligned} P(a\varphi_E) &= e\left[\,|E|\,(e[ai] - 1 - ai)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e[ai(m - |E|)]\, \frac{|E|^m}{m!}\, e[-|E|] \end{aligned} \qquad (4-2)$$

従つて，

$$\varphi_j(t) = \sum_{p=1} a_p^j\, \varphi_{E_p}(t) \qquad E_i \cap E_j = \phi \qquad i \neq j$$

とおくと，任意の複素数 λ_j に対し，（4 − 2）から

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\sum_{j,k}^{n} \lambda_j \overline{\lambda}_k \; P(\varphi_j - \varphi_k)$$
$$= \sum_{j,k}^{n} \lambda_j \overline{\lambda}_k \prod_{p=1} \sum_{m=0}^{\infty} e\left[i(a_p^j - a_p^k)(m - |E_p|) \right] |E_p|^m e\left[-|E_p| \right] / m!$$
$$= \prod_{p=1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j,k}^{n} \lambda_j \overline{\lambda}_k \, e\left[i(a_p^j - a_p^k)(m - |E_p|) \right] |E_p|^m e\left[-|E_p| \right] / m!$$
$$= \prod_{p=1} \sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{n} e\left[i \lambda_i a_p^j (m - |E_p|) \right] \right|^2 |E_p|^m e\left[-|E_p| \right] / m! \geq 0$$

任意の $\varphi_j \in S$ に対しては，上のように表わされる階段関数 φ_j^m で下から近似すれば

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda}_k P(\varphi_j - \varphi_k) = \lim_{m \to \infty} \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda}_k P(\varphi_j^m - \varphi_k^m) \geqq 0$$

従つて定理 1－4 によつて（4－1）は S' 上の測度 P によつて

$$P(\xi) = \int_{S'} e\left[i(X, \xi) \right] dP(X) \qquad (4-3)$$

と書ける。$(S', B(S'), P)$ を無限次元 Poisson 測度と呼ぶ。

Ⅲ章と同様にして $L^2(S', P)$ を S' 上の複素関数で P 測度に関して二乗可積分なもの全体からなる Hilbert 空間，R_P を $P(\xi - \varphi)$ を再生核にもつ S 上の最小の複素 Hilbert 空間とする。$L^2(S', P)$ の内積を $(\ ,\ )_S$，R_P の内積を $(\ ,\ )_P$ と書く。lemma 3－4 と同様にして $F(X) \in L^2(S', P)$ に対し

$$V F(X) = \int_{S'} e\left[i(X, \xi) \right] F(X) \, dP(X) \qquad (4-4)$$

とおくと V は $L^2(S', P)$ から R_P の上への1対1線型等距離写像である。

次に $L^2(S', P)$ において作用素 $(X, \varphi)\cdot$ に対応する R_P の作用素を求める。

$$V(X, \varphi) = V(-i) \frac{d}{dr} e\left[i(X, r\varphi) \right] \Big|_{r=0}$$
$$= -i \frac{d}{dr} P(\xi + r\varphi) \Big|_{r=0}$$
$$= \lim_{r \to 0} \frac{1}{ir} \Big\{ e\Big[\int_{-\infty}^{\infty} (e[i\xi(t) + ir\varphi(t)] - 1 - i\xi(t) - ri\varphi(t))\, dt \Big]$$
$$- e\Big[\int_{-\infty}^{\infty} (e[i\xi(t)] - 1 - i\xi(t))\, dt \Big]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) (e[i\xi(t)] - 1)\, dt \; P(\xi) \qquad (4-5)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

今，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)(e[i\xi(t)]-1)\,dt \equiv X_\varphi(\xi) \qquad (4-6)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} V1 &= P(\xi) \\ V(X,\varphi) &= X_\varphi(\xi)\,P(\xi) \end{aligned} \qquad (4-7)$$

R_P 上で作用素

$$d_\varphi = \lim_{r\to 0} \frac{1}{ir}[f(\xi + r\varphi) - f(\xi)] \qquad (4-8)$$

を定義すると

$$V(X,\varphi)\cdot = d_\varphi\ V \qquad (4-9)$$

とかける。

d_φ を作用させた時の計算をあらかじめしておこう。（厳密にいえば形式的なところがある。例えば $X_\varphi(\xi)$ 自身は R_P の元かどうかわからない。）

$$\begin{aligned} d_{\varphi_1} X_{\varphi_2}(\xi) &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{ir}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(t)\{e[i\xi(t)+ir\varphi_1(t)]-1\}\,dt \\ &\qquad -\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(t)(e[i\xi(t)]-1)\,dt\Big\} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{ir}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(t)\,e[i\xi(t)](e[ir\varphi_2(t)]-1)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,e[i\xi(t)]\,dt \end{aligned}$$

従つて，

$$d_{\varphi_1} X_{\varphi_2}(\xi) = X_{\varphi_1\cdot\varphi_2}(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(t)\ \varphi_2(t)\,dt \qquad (4-10)$$

ここで $\varphi_1\cdot\varphi_2 = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$

を得る。さらに帰納法によつて

$$d_{\varphi_1}(X_{\varphi_2}(\xi))^n = n(X_{\varphi_2}(\xi))^{n-1}(X_{\varphi_1\cdot\varphi_2}(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,dt) \qquad (4-11)$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

注意. d_{φ_1} はII章における場合と同様に R_P 上の自己共役作用素である。

$E \in B^*(R)$ に対し $\varphi_E(t) \equiv \varphi(E)$ とした場合も上の議論は $\varphi_j \in S$ で近似することによつて同様に成り立つから,以下では必ずしも S に属さない H の元に対しても上の議論を適用する。

定理 4−1 R_P は次のように直和分解される。

$$R_P = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus P_n$$

ここで, P_n は $\left\{ \prod_{j=1}^{m} (X_{\varphi_{E_j}}(\xi))^{k_j} P(\xi),\ k_1+\cdots+k_m = n,\ E_i \cap E_j = \phi,\ E_i \in B^*(R) \right\}$ で張られる閉部分空間。

証明. まず, $B^*(R)$ に属する互に素な集合 $E_1, \cdots E_n$ に対し $\prod_{j=1}^{m} (X_{\varphi_{E_j}}(\xi))^{k_j} P(\xi)$ は $(k_1, \cdots k_n)$ の組が異なれば R_P で直交することを示す。そのために,最初に $(X_{\varphi_E}(\xi))^j P(\xi)$ と $(X_{\varphi_E}(\xi))^k \cdot P(\xi)$ $j \geq k$ の場合を調べる。

(4−10) で $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_E(t)$ とおくと

$$d_{\varphi_E} X_{\varphi_E}(\xi) = X_{\varphi_E}(\xi) + |E| \qquad (4-12)$$

(4−9)によつて,

$$\begin{aligned} V(X, \varphi_E)^n &= d_{\varphi_E}{}^n P(\xi) = d_{\varphi_E}^{n-1} X_{\varphi_E}(\xi) P(\xi) \\ &= \Big\{ X_{\varphi_E}(\xi) T_{n-1}(X_{\varphi_E}(\xi); |E|) + (X_{\varphi_E}(\xi) + |E|) \times \\ &\qquad \times \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} T_k(X_{\varphi_E}(\xi); |E|) \Big\} P(\xi) \\ &= T_n(X_{\varphi_E}(\xi); |E|) P(\xi) \end{aligned} \qquad (4-13)$$

ここで, $T_n(x; \lambda)$ は次の関係式を満たす多項式。

$T_0(x; \lambda) = 1,$

$T_1(x; \lambda) = x$

$T_2(x; \lambda) = x^2 + x + \lambda$

$T_3(x; \lambda) = x^3 + 3x^2 + (3\lambda + 1)x + \lambda$

$$T_4(x;\lambda)=x^4+6x^3+(6\lambda+7)x^2+(10\lambda+1)x+3\lambda^2+\lambda$$

$\cdots\cdots$

$$T_n(x;\lambda)=xT_{n-1}(x;\lambda)+(x+\lambda)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}T_k(x;\lambda) \qquad (4-14)$$

従つて，逆に

$$(X\varphi_E(\xi))^n=\sum_{k=0}^{n} a_k T_k(X\varphi_E(\xi)\ ;\ |E|)$$

と表わされるから，(4－9)から

$$(X\varphi_E(\xi))^n P(\xi)=\sum_{k=0}^{n} a_k\, d\varphi_E^k P(\xi)$$

従つて，

$$((X\varphi_E(\xi))^j P(\xi),\ (X\varphi_E(\xi))^k P(\xi))_p$$
$$=((X\varphi_E(\xi))^j P(\xi),\ \sum_{m=0}^{k} a_m\, d\varphi_E^m P(\xi))_F$$
$$=(\sum_{m=0}^{k} a_m\, d\varphi_E^m (X\varphi_E(\xi))^j P(\xi),\ P(\xi))_p \qquad (*)$$

Ⅲ章の再生核をもつHilbert空間の性質 (R－2) によつて $n\geq 1$ に対し，

$$(X\varphi_E(\xi))^n P(\xi),\ P(\xi))_p=(X\varphi_E(0))^n P(0)=0 \qquad (4-15)$$

従つて (4－11) と (4－15) を考慮すれば，$j>k$ の時

$$(*)=0$$

$j=k$ の時 (4－11) から

$$(*)=n!\ |E|^n \qquad (4-16)$$

(4－10) から $E\cap F=\phi$ の時

$$d\varphi_E\ (X\varphi_F(\xi))^n=0 \qquad (4-17)$$

従つて $E\cap F=\phi$ であるかぎり，$(X\varphi_E(\xi))^k P(\xi)$ と $(X\varphi_F(\xi))^j P(\xi)$ が直交することは直ちにわかる。同様にして一般の場合も証明される。$k_1+k_2+\cdots+k_n \neq m_1+\cdots+m_j$ ならば，$(k_1,\cdots k_n)$ と $(m_1,\cdots m_j)$ の組は一致しないから定理の結論を得る。(q . e . d)

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

定理4－2. $L_n = V^{-1} P_n$ とおくと

$$L^2(S', P) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus L_n$$

と直和分解される。さらに

$$V^{-1} \prod_{j=1}^{m} (X\varphi_{E_j}(\xi))^{k_j} P(\xi) = \sum_{j=1}^{m} C_{k_j}((X, \varphi_{E_j}); |E_j|) \qquad (4-18)$$

とかけて, L_n は $\{\prod_{j=1}^{m} C_{k_j}((X, \varphi_{E_j}); |E_j|),\ k_1+\cdots+k_m=n,\ E_i \cap E_j = \phi,\ E_i \in B^*(R)\}$ によつて張られる閉部分空間である。

ここで, $C_n(x;\lambda)$ は変形された Charlier の多項式で，次の関係式を満たす。

$$C_0(x;\lambda) = 1,$$

$$C_1(x, \lambda) = x$$

$$C_n(x;\lambda) = (x+1-n)C_{n-1}(x;\lambda) - (n-1)\lambda C_{n-1}(x;\lambda) \qquad (4-19)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n(k-\lambda, \lambda) C_m(k-\lambda, \lambda) \lambda^k e[-\lambda] / k!$$

$$= \delta_{n,m} \lambda^n n! \qquad (4-20)$$

$$C_n(x+y;\lambda_1+\lambda_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C_k(x;\lambda_1) C_{n-k}(y;\lambda_2) \qquad (4-21)$$

変形された Charlier の多項式はあまり知られていないから多少計算しておく。

$$C_2(x;\lambda) = x^2 - x - \lambda$$

$$C_3(x;\lambda) = x^3 - 3x^2 - (3\lambda - 2)x + 2\lambda$$

$$C_4(x;\lambda) = x^4 - 6x^2 - (6\lambda - 11)x^2 + (14\lambda - 6)x + 3\lambda^2 - 6\lambda$$

$$C_5(x;\lambda) = x^5 - 10x^4 - (10\lambda - 35)x^3 + (50\lambda - 50)x^2$$

$$+ (15\lambda^2 - 70\lambda + 24)x - (20\lambda^2 - 24\lambda) \qquad (4-22)$$

(4－20)と(4－21)を合わせると積分表示に相当する式を得る。

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_n(m-\lambda_1+y;\lambda_1+\lambda_2) C_k(m-\lambda_1;\lambda_1) \lambda_1^m e[-\lambda_1] / m!$$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \lambda_1^k C_{n-k}(y ; \lambda_2) \tag{4-23}$$

証明． Vの性質から $L^2(S', P)$ が直和分解されることは明らかだから，（4－18）を証明する。

$n=0, 1$ の時は（4－6）から明らか。$n=m-1$，mの時（4－18）が成り立つと仮定する。（4－9）（4－11）から，

$$V(X, \varphi_E) C_m((X, \varphi_E) ; |E|) = d\varphi_E (X\varphi_E(\xi))^m P(\xi)$$

$$= \left\{ m(X\varphi_E(\xi))^m + m(X\varphi_E(\xi))^{m-1} \cdot |E| + (X\varphi_E(\xi))^{m+1} \right\} P(\xi)$$

従つて，

$$V^{-1}(X\varphi_E(\xi))^{m+1} P(\xi) = \left\{ (X, \varphi_E) - m \right\} C_m((X, \varphi_E) ; |E|) - m \cdot |E| C_{m-1}((X, \varphi_E) ; |E|)$$

故に，

$$C_{m+1}((X, \varphi_E) ; |E|) = ((X, \varphi_E) - m) C_m((X, \varphi_E) ; |E|) - m|E| C_{m-1}((X, \varphi_E) ; |E|)$$

一般の場合は定理3－2の場合と同様にして証明できる。公式（4－20）は（4－16）を V^{-1} で $L^2(S', P)$ に写した結果である。（4－21）を証明しよう。（4－18）において $E = E_1 + E_2$ とおくと，

$$(X\varphi_E(\xi))^n P(\xi) = (X\varphi_{E_1}(\xi) + X\varphi_{E_2}(\xi))^n P(\xi)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X\varphi_{E_1}(\xi))^k (X\varphi_{E_2}(\xi))^{n-k} P(\xi)$$

従つて（4－18）から

$$C_n((X, \varphi_E) ; |E|)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C_k((X, \varphi_{E_1}) ; |E_1|) C_{n-k}((X, \varphi_{E_2}) ; |E_2|)$$

lemma 3－2 と同様な事実が Poisson測度の場合にも成り立つから，実多項式に直せば，

$$C_n(x+y ; \lambda_1 + \lambda_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C_k(x ; \lambda_1) C_{n-k}(y ; \lambda_2)$$

（q．e．d）

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

§2. Poisson type の Multiple Wiener Integral

Gaussian の場合の multiple Wiener integral と同様に，$S_n \ni f$ に対し

$$f(t_1, \cdots t_n) = \sum a_{i_1 \cdots i_n} \varphi_{E_{i_1}}(t_1) \times \cdots \times \varphi_{E_{i_n}}(t_n) \quad E_i \cap E_j = \phi \quad i \neq j$$

と書ける時，$L^2(S', P)$ の元

$$J_n(f) = \sum a_{i_1 \cdots i_n} (X, \varphi_{E_{i_1}}) \times \cdots \times (X, \varphi_{E_{i_n}}) \qquad (4-24)$$

とおくと，$J_n(\cdot)$ についても（I−1）～（I～5）までの性質が同様に成り立つ。従って $J_n(\cdot)$ は $L^2(R^n)$ 全体から $L^2(S', P)$ への写像に拡張される。

<u>Lemma 4−1.</u> $\varphi(t_1, \cdots t_n) \in L^2(R^n)$, $\phi(t) \in L^2(R)$ かつ φ, ϕ 共に有界とする。さらに

$$\varphi \underset{k}{\otimes} \phi(t_1 \cdots t_n) = \varphi(t_1 \cdots t_n)\, \phi(t_k)$$

とおくと，

$$J_{n+1}(\varphi \cdot \phi) = J_n(\varphi)\, J_1(\phi) - \sum_{k=1}^{n} J_n(\varphi \underset{k}{\otimes} \phi) - \sum_{k=1}^{n} J_{n-1}(\varphi \underset{k}{\times} \phi) \qquad (4-25)$$

ここで $\varphi \cdot \phi = \varphi \cdot \phi(t_1, \cdots, t_{n+1}) = \varphi(t_1 \cdots t_n) \cdot \phi(t_{n+1})$.

証明． まず $\varphi \in S_n$, $\phi \in S_1$ の時を証明する。任意の $\varepsilon > 0$ に対し互に素な分割 $E_1, \cdots, E_n$ で，任意の i に対し $|E_i| < \varepsilon$ となるように選んで

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \cdots, t_n) &= \sum a_{i_1 \cdots i_n} \varphi_{E_{i_1}}(t_1) \times \cdots \times \varphi_{E_{i_n}}(t_n) \quad i_k \neq i_j \ (k \neq j) \\ &= 0 \quad \text{他の場合} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum b_i\, \varphi_{E_i}(t) \\ &= 0 \quad \text{他の場合} \end{aligned}$$

と表わされる。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$$\chi_\varepsilon(t_1,\cdots,t_{n+1}) = \sum a_{i_1\cdots i_n}\, b_i\, \varphi_{E_{i_1}}(t_1)\times\cdots\times\varphi_{E_{i_n}}(t_n)\times\varphi_{E_i}(t_{n+1}) \quad i \neq i_k$$

$$= 0 \quad \text{他の場合}$$

とおくと，

$$J_n(\varphi)\cdot J_1(\phi) = (\sum a_{i_1\cdots i_n}(X,\varphi_{E_{i_1}})\cdots(X,\varphi_{E_{i_n}}))(\sum b_i(X,\varphi_{E_i}))$$

$$= J_{n+1}(\chi_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{n} a_{i_1\cdots i_n} b_{i_k}(X,\varphi_{E_{i_1}})\times\cdots(X,\varphi_{E_{i_k}})\cdots(X,\varphi_{E_{i_n}})$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum a_{i_1\cdots i_n} b_{i_k}(X,\varphi_{E_{i_1}})\cdots|E_{i_k}|\cdots(X,\varphi_{E_{i_n}})$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum a_{i_1\cdots i_n} b_{i_k}(X,\varphi_{E_{i_1}})\cdots\{(X,\varphi_{E_{i_k}})^2-(X,\varphi_{E_{i_k}})-|E_{i_k}|\}\cdots(X,\varphi_{E_{i_n}})$$

$$= J_{n+1}(\chi_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{n} J_n(\varphi \underset{k}{\otimes} \phi) + \sum_{k=1}^{n} J_{n-1}(\varphi \underset{k}{\times} \phi) + \sum_{k=1}^{n} R_k$$

lemma 3－5 の場合と同様にして

$$\| J_{n+1}(\chi_\varepsilon) - J_{n+1}(\varphi\cdot\phi)\| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

$$\|R_k\|^2 = \sum a_{i_1\cdots i_n}^2\, b_{i_k}^2\, |E_{i_1}|\cdots 2|E_{i_k}|^2\cdots|E_{i_n}|$$

$$\leqq 2\varepsilon\|\varphi\|_n\|\phi\|_1 \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

従つて一般の $\varphi\in L^2(R^n)$，$\phi\in L^2(R^1)$ についても lemma 3－5 の場合と同様にして証明される。

$J_n = J_n(L^2(R^n))$ とおく。

<u>定理 4－3.</u> $\quad L^2(S', P) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus J_n$

と直和分解される。さらに

$$\varphi(t_1,\cdots t_n) = \varphi_{E_1}(t_1)\cdots\varphi_{E_1}(t_{j_1})\cdot\varphi_{E_2}(t_{j_1+1})\cdots\varphi_{E_k}(t_{j_1+\cdots+j_k})$$

$j_1+\cdots+j_k = n \quad E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j)$ とおくと

$$J_n(\varphi) = \prod_{p=1}^{k} C_{j_p}((X,\varphi_{E_p});|E_p|) \tag{4－26}$$

と表わされ，J_n は $\{\prod_{p=1}^{k} C_{j_p}((X,\varphi_{E_p});|E_p|),\ j_1+\cdots+j_k=n,\ E_i\cap E_j=\phi$

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

$E_i \in B^*(R)\}$ によつて張られる閉部分空間。

証明. (4－26)だけを証明する。(他は明らか)

$j_1+\cdots+j_k=0$, 1 の時は明らか。 $j_1+\cdots+j_k=n-2$, $n-1$ の時(4－26)が成り立つと仮定する。($j_1 \geq 1$ として一般性を失わない。)

(4－25)で, $\varphi(t_1,\cdots t_{n-1})=\varphi_{E_1}(t_1)\cdots\varphi_{E_1}(t_{j_1-1})\varphi_{E_2}(t_{j_1})\cdots$ $\varphi_{E_k}(t_{j_1+\cdots+j_k-1})$, $\phi(t)=\varphi_{E_i}(t)$ とおくと, $\varphi_{E_i}(t)\varphi_{E_j}(t)=\delta_{ij}\ \varphi_{E_i}(t)$ だから,(4－25)より

$$J_n(\varphi)=J_{n-1}(\varphi_{E_1}(t_1)\times\cdots\times\varphi_{E_1}(t_{j_1-1})\times\cdots\times\varphi_{E_k}(t_{j_1+\cdots+j_k-1}))J_1(\varphi_{E_1}(t))$$
$$-(j_1-1)J_{n-1}(\varphi_{E_1}(t_1)\times\cdots\times\varphi_{E_1}(t_{j_1-1})\times\cdots\times\varphi_{E_k}(t_{j_1+\cdots+j_k-1}))$$
$$-(j_1-1)|E_1|J_{n-2}(\varphi_{E_1}(t_1)\cdots\varphi_{E_1}(t_{j_1-2})\times\cdots\times\varphi_{E_k}(t_{j_1+\cdots+j_k-2}))$$

帰納法の仮定から,

$$=\sum_{p=2}^{k} C_{j_p}((X,\varphi_{E_p});|E_p|)\,C_{j_1-1}((X,\varphi_{E_1});|E_1|)(X,\varphi_{E_1})$$
$$-(j_1-1)\prod_{p=2}^{k} C_{j_p}((X,\varphi_{E_p});|E_p|)\cdot C_{j_1-1}((X,\varphi_{E_1});|E_1|)$$
$$-(j_1-1)|E_1|\prod_{p=2}^{k} C_{j_p}((X,\varphi_{E_p});|E_p|)\cdot C_{j_1-2}((X,\varphi_{E_1});|E_1|)$$

(4－19)より

$$=\prod_{p=1}^{k} C_{j_p}((X,\varphi_{E_p});|E_p|) \qquad (q.e.d)$$

従つて定理 4－2による $L^2(S',P)$ の分解と定理 4－3による分解とは完全に一致していることがわかる。

文 献

〔1〕 N. Aronszajn; Theory of reproducing Kernels. Trans. Amer. Math. Soc. 68, (1950) 337-404.

〔2〕 J. M. Cook; The Mathematics of second quantization. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 74 (1953) 222-245.

〔3〕 V. Fock; 題不明, Physikalische zeitschrift der sowjetunion vol. 6 (1934) 425-469.

〔4〕 Gelfand-Vilenkin; Generalized functions. vol. 4 (1961)

〔5〕 T. Hida; Gaussian system について, 第8回確率論セミナー総会講演 (1966).

〔6〕 T. Hida and H. Nomoto. Gaussian measure on the projective limit space of spheres. Proc. Japan. Acad. vol. 40. No. 5 (1964) 301-304.

〔7〕 K. Itô; Multiple Wiener integral. J. Math. Soc. Japan 3. (1951) 157-169.

〔8〕 ; Complex multiple Wiener integral. Japan J. Math. 22 (1952) 63-86.

〔9〕 ; Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments.

〔10〕 N. Ikeda and T. Hida; Analysis on Hilbert space with reproducing kerael arising from multiple Wiener integral. 5th Berkeley Sym. (1965).

〔11〕 N. Kôno; Special functions connected with the infinite dimensional motion group. J. Kyoto Univ. vol. 6. No. 1 (1966).

〔12〕 ; Infinite dimensional Laplacian and spherical harmonics 京大修士論文 (1965).

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

[13] S. Kakutani; Determination of the spectrum of the flow of Brownian motion. Procc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 36, (1950) 319-323.

[14] ; Spectral Analysis of stationary Gaussian process. 4th Berkeley Sym. II(1960) 239-247.

[15] M. G. Krein; Hermitian positive kernels on homogeneous space I. II. Amer. Math. Soc. Trans. Ser2. vol. 34. 69-164.

[16] A. Orihara; Hermite polynomials and the infinite dimensional motion group. J. Math. Kyoto Univ. vol. 6. No. 1 (1966).

[17] M. Osikawa; 重複ウイナー積分の無限次元解析．(1964)．修士論文 九州大学。

[18] I. E. Segal; Tensor algebras over Hilbert spaces I, Trans. Amer. Math. Soc. 81, (1956) 106-134.

[19] ; II, Annals of Math. vol. 63, (1956) 160-175.

[20] Y. Umemura; Rotationaly invariant measure in the dual space of a nuclear space. Procc. Japan Acad. vol. (1962) 15-17.

[21] ; Measures on infinite dimensional vector spaces. Publ. of Research Institute for Math. Sci, Kyoto Univ. vol. 1 No.1 (1965) 1-47.

[22] ; On the infinite dimensional Laplacian operator. J. Math. Kyoto Univ. vol. 4, No. 3 (1965), 477-492.

[23] Y. Umemura and N. Kôno; Infinite dimensional Laplacian and spherical harmonics. Publ. of Research Inst. Sci. Kyoto Univ. vol. 1, No. 2 (1966), 193-186.

[24] N. Ya. Vilenkin; Special functions connected with class 1 representations of groups of motions in

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

spaces of constant curvature; Trudy Moscow Math. 12 (1963) 185-257.

〔25〕 ; Special functions and representation theory of group. (1965) Moscow. (in Russian)

〔26〕 Von. Neumann; Measure in Functional spaces. Collected works Ⅳ 435-438.

〔27〕 N. Wiener; Hermitian polynomials and Fourier analysis. J. Math. Phys..81 (1929).

〔28〕 ; The homogeneous chaos. Amer. J. Math. vol. 60. (1938) 897-936.

〔29〕 H. Yoshizawa and others; On multiple Wiener integral. Notes of seminars on functional analysis and probability (1962) (in Japanese).

〔30〕 H. Yoshizawa; Shift の群論的特徴について (1966) 学会講演。

Sem. on Probab.
Vol.27 1967年
P1-83

1967. 1. 発行. 確率論セミナー