SEMINAR ON PROBABILITY

VOL. 30

古典力学のエルゴード問題

丹　羽　敏　雄
大　槻　舒　一
宮　原　孝　夫

1969

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

まえがき

このノートは最近，ArnoldやMoserを中心に発展してきた力学系の安定性の理論を中心に紹介したものである。この種の理論に対してはすでに，ArnoldとAvezによるおもしろい本〔5〕も出ているが，同書は証明がはぶかれていたりして読みやすいとは言いがたい。このノートは同書の第4章の解説とも言えるので，併わせて読まれることを希望する。以下簡単に内容を紹介する。

第1章では，積分可能な力学系とトーラス上のいわゆる概週期運動との関連をのべる。即ち，§1.1において，Whittaker〔18〕に従って，力学系が積分可能なる為の（1つの十分）条件を示し，それが，トーラス上の概週期運動に帰着されることを述べる。§1.2においては，T.Niwa〔14〕に従って，Classical flowsの立場からこれを論ずる。

第2章では，なるべく具体的な例を中心にいわゆる安定性の問題を取りあげ，§2.1では，Siegel〔16〕とMoser〔12〕に従い紹介する。§2.2においては，Arnold〔4〕をもとに，T. Niwa〔15〕に従い紹介する。§2.2においては，Arnold〔3，4〕に従い，Kolmogorov−Arnoldの定理〔§2.3．定理2.3．B〕の証明のideaを紹介する。なお同節は§2.1，§2.2に使われている方法の解説でもある。

第3章では，これらの理論の発生母胎ともいえる，制限三体問題を取りあげ，Birkhoff〔6〕とMoser〔13〕に従い解説する。

なお，§1.2と§2.1を除き，解析力学の初歩的な知識（特にHamitton系の知識）が必要である。この為には例えば，ランダウ・リフシッツ〔10〕の第1章及び第7章，あるいは，山内恭彦〔19〕の第4章の知識があれば十分である。

各章はおおむね独立しているので，どの章からでも読むことができる。

著　　者

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第 I 部

安 定 な 力 学 系

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

凡　　　例

このノートは第Ⅰ部，第Ⅱ部，及び附録からなる。
第Ⅰ部では主に，力学系の安定性の理論を扱い，第Ⅱ部では主に
C−system の理論を扱う。なお附録においては，定負曲率をもつ
Riemann 面上の geodesic flow を E. Hopf に従って解説する。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第Ⅰ部　目　次

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第１章　積分可能な力学系とトーラス上の概週期運動

§1.1　Liouville－Arnoldの定理

力学系を求積法によって解くことは１９世紀の力学研究家の中心的な問題の１つであったが，我々はここで，Liouvilleによる，求積法によって解ける為の１つの十分条件を示そう。

定理1.1A　ハミルトニアン　$H=H(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n,t)$　をもつ力学系

$$\dot{q}_r=\frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\quad (r=1,\cdots,n)$$

において，相異なるn個の互いにinvolute*)する第1積分　$\phi_r(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n,t)$　$(r=1,\cdots,n)$　が存在すれば，この力学系は求積法によって解くことができる。

*)　ここでϕ_r，ϕ_s が互いにinvolute　するとは，
Poissonカッコ$(\phi_r,\phi_s)=0$　をみたす時をいう：

$$(\phi_r,\phi_s)\equiv\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial\phi_s}{\partial p_k}-\frac{\partial\phi_r}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial\phi_s}{\partial q_k}\right)$$

証　明　　$p=(p_1,\cdots,p_n)$，$q=(q_1,\cdots,q_n)$と略記する。さて，a_r $(r=1,\cdots,n)$を任意定数とし，

$$\phi_r(q,p;t)=a_r\quad (r=1,\cdots,n)\tag{1.1}$$

とおく。(1.1)をpについて解いたものを，

$$p_r=f_r(q,a,t)\tag{1.2}$$

としょう。　$\phi_1-a_1,\cdots,\phi_n-a_n$は互いにinvolute するから，$p_1-f_1\cdots$，$p_n-f_n$ も互いにinvolute　する。

従って，

$$(p_r-f_r,\ p_s-f_s)=0\qquad (r,s=1,\cdots,n)$$

即ち

$$\frac{\partial f_s}{\partial q_r}-\frac{\partial f_r}{\partial q_s}=0.\qquad (r,s=1,\cdots,n)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

又, $$-\frac{\partial H}{\partial q_r}=\frac{dp_r}{dt}=\frac{df_r}{dt}$$

$$=\frac{\partial f_r}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}$$

$$=\frac{\partial f_r}{\partial t}+\sum_{s}\frac{\partial f_s}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_s}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial f_r}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial q_r}-\sum_{s}\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial q_r}$$

$$=-\frac{\partial H_1}{\partial q_r}$$

ここで, H_1 は変数 (q, a, t) によって表わされた関数Hを示す。

方程式 $$\frac{\partial f_s}{\partial q_r}=\frac{\partial f_r}{\partial q_s},\quad \frac{\partial f_r}{\partial t}=-\frac{\partial H_1}{\partial q_r}$$

は $$f_1 dq_1+\cdots+f_n dq_n-H_1 dt$$

がある関数V (q, a, t) の完全微分であることを示す。さて dV を関数Vのすべての変数にわたる全微分とすれば,

$$dV=f_1 dq_1+\cdots+f_n dq_n-H_1 dt+\sum_r \frac{\partial V}{\partial a_r}da_r.$$

この方程式において量 a_r にその値 ϕ_r を代入すれば, 我々は (q, p, t) に関する恒等式をうる:

$$dV-\sum_r \frac{\partial V}{\partial a_r}d\phi_r=p_1 dq_1+\cdots+p_n dq_n-H dt$$

ここで, 左辺の dV, $\frac{\partial V}{\partial a_r}$ において 量 a_r にはその値 ϕ_r が代入されている。この方程式は微分形式

$$p_1 dq_1+\cdots+p_n dq_n-H dt$$

を変数 (q, ϕ, t) によって表わすとき,

$$-\sum_r \frac{\partial V}{\partial a_r}d\phi_r+dV$$

の形をとることを示す。従って最初の力学系は次の first Phaffs' system に同値である:

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$d\phi_r = 0, \quad d\left(\frac{\partial V}{\partial a_r}\right) = 0 \qquad (r = 1, \cdots, n)$$

よって，$\dfrac{\partial V}{\partial a_r} = b_r$ は力学系の第1積分を与える。ここで $b_1, \cdots, b_n$ は任意定数である。

q. e. d.

二体問題や楕円体の表面の測地線にそう自由質点の運動などはよく知られた積分可能な力学系の例であるが，得られた積分可能な力学系においては，その相空間はいずれも一般に不変なトーラス達にわかれその上の運動はいわゆる概週期運動であることが見とめられる。最近，V. I. Arnold によって一価第一積分を有する力学系においては，一般的に言って，このような事情はさけられないことが示された：

定理 1.1 B　$H = H(p, q)$ をハミルトニアンにもつ，自由度 n のハミルトン系

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \cdots\cdots (1.3)$$

において，n 個の互いに involute する第1積分がえられたとする：

$$H = \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n ; (\phi_i, \phi_j) = 0$$

この場合，前述の Liouville の定理 1.1 A によって，この系は積分可能であるが，もし，方程式

$$\phi_i = C_i = \text{const} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

がコンパクトな連結多様体 $M = M_c$ を定め，かつ，

1）　M 上において grad ϕ_i $(i = 1, \cdots, n)$ は致る所1次独立。

2）　$\det\left|\dfrac{\partial I_i}{\partial c_j}\right| \neq 0$

ここで，I_i は，トーラス M_c（M_c は1）からトーラスであることがわかる）上の輪体の底を $r_i(c)$　$i = 1, \cdots, n$ とするとき，

$$I_i(c) = \frac{1}{2\pi}\oint_{r_i(c)} pdq$$

によって与えられる作用変数を表わす。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

とする。このとき，

1） Mはn次元トーラスであり，Mの近傍はトーラスとユークリッド空間との直積であり，

2） この近傍は，作用変数ー角変数（I，φ）（$I \in B^n \subset R^n$，$\varphi\,(\mathrm{mod}\ 2\pi) \in T^n$）で表わされ，変換（I，$\varphi$）→（p，q）は正準変換であり，$\phi_i = \phi_i(I)$ 従って方程式（1.3）は変数（I，φ）で表わせば，

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I) \equiv \frac{\partial H}{\partial I}(I).$$

証明は，Arnold − Avez〔5〕，Appendix 26，を見られたい。

§1.2 離散スペクトルをもつClassical flows

前節において，積分可能な力学系は荒っぽく言って，トーラス上の概週期運動に帰着されることを見た。本節では，この概週期運動を別の立場から，即ち，classical flow として考察しょう。ここで念の為にclassical flow の定義を与えよう。

定義 1.2.A　MをC^∞− 多様体，μを連続な正の密度でもって定義されるMの上の有限測度（$\mu(M)=1$とする。），（φ_t）を測度μを保つMの微分同型の1径数群とするとき，（M，μ，φ_t）又は（φ_t）をclassical flow と呼ぶ。

このclassical flow に対しては，同型の概念は当然，abstract flowに対する同型の概念，即ち，いわゆる計量同型よりも精密でなければならない。そこで次の定義を与えよう。

定義 1.2.B　（M，μ，φ_t），（N，ν，ϕ_t）をclassical flows とするとき，（M，μ，φ_t）が（N，ν，ϕ_t）にclassical flowsとしてC^ρ−同型であるとは，MからNの上へのC^ρ− 微分同型ψがあって，（φ_t）と（ϕ_t）がこのψに関してconjugate である。即ち，すべてのtに対して$\psi \cdot \varphi_t = \phi_t \cdot \psi$ が成りたち，かつ，$\psi(\mu)=\nu$であるときをいう。このとき，我々は次のように示す：

$$(M,\ \mu,\ \varphi_t) \underset{C^\rho}{\simeq} (N,\ \nu,\ \phi_t)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

さて，Mとして，n次元トーラス：$T^n = R^n / Z^n$，μとしZはT^n上の普通のルヘーグ測度：$dm = dx_1, \cdots dx_n$，φ_t としては，いわゆる概週期運動：

$$\psi_t : x_i \to x + \omega_i t \ (\mathrm{mod}\ 1)\ (i = 1, \cdots, n)$$

を取れば，(T^n, dm, ψ_t)は1つのclassical flowの例を与える。$\omega_1, \cdots, \omega_n$ は振動数と呼ばれるが，特にZ上1次独立な振動数$\omega_1, \cdots, \omega_n$，即ち，

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0 . \quad k_i \in Z$$

ならば$k_1 = \cdots = k_n = 0$ なるような$\omega_1, \cdots, \omega_n$ を振動数をもつ概週期運動の軌道：$\bigcup_t \psi_t x$ はT^n 上致る所稠密であることはよく知られている。

この概週期運動のflow としてのスペクトルは離散スペクトルであることはよく知られているが，ある意味で，この離散スペクトルが逆に概週期運動を特長づけることが示される。前節の結果とくらべあわせれば，極く荒っぽく言って，積分可能な力学系は離散スペクトルをもつflow と対応する。

さて，エルゴールド的なclassical flow(M, μ, φ_t) を考えよう。今Λを(φ_t)の固有値全体とする。よく知られているように，（例えば，池田・飛田・吉沢〔8〕の第5章を参照。以下の内容においては同章に述べられている結果を使う。）Λは実数Rの加法に関して部分群をなしている。さらに，Λ^ρ $(\rho > 1)$ を固有関数がρ回連続的微分可能，即ちC^ρ－class であるような固有値全体とする。（Λ^ρがΛの部分群となすことはすぐわかる）$H^{(\lambda)} \subset H \equiv L^2(M, \mu)$を固有値$\lambda$に属する固有空間，即ち固有値$\lambda$に属する固有関数全体とする。

このとき，我々は次の結果を証明することができる：

<u>定理 1.2.C</u> (M, μ, φ_t)をエルゴード的なclassical flowとし，Mはcompactとする。このとき，

もし，$H = \sum_{\lambda \in \Lambda^\rho} \oplus H^{(\lambda)}$

ならば $(M, \mu, \varphi_t) \underset{C^\rho}{\simeq} (T^{\dim M}, m, \psi_t)$，

即ち，(M, μ, φ_t)はclassical flowsとして，ある概週期運動とC^ρ－同型である。

証明をのべる前に，そのidea を述べよう。idea の中心は，固有関数そのものを（global な）座標関数に使おうという所にある。即ち，$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ をZ上1次独立な固有値（∈

Λ^ρ)とし，f_1，…，f_r をそれぞれに属する（C^ρ−classの）固有関数としよう。ここで f_1，…，f_r が局所座標系をなす為には，まず微分 df_1，…，df_r が一次独立であることが必要であるが，それは次のようにして，示されよう，即ち，もしかりにある点でそれらが従属している場合，flow φ_t によってそれらは軌道上で従属でなければならない。（φ_t はMの微分同型である！）φ_t のエルゴード性から，Mの致る所でそれらは従属していることになる。即ち，例えば f_r が残りの f_1，…，f_r の関数になる。ところが（$f_1(x)$，…，$f_r(x)$）を軌動にそって取ってみれば，これは λ_1，…，λ_r の独立性から r 次元トーラス T^r の中をエルゴード的に動く，これは矛盾を導くであろう。以上により，r を Λ^ρ の階数，即ち，Λ^ρ の元でZ上1次独立な最大個数としておけば，df_1，…，df_r はM上致る所で1次独立となる。このことから，Mにはある種のファイバー構造が入るであろう。（ファイバーは $f_1=C_1$，…，$f_r=C_r$，C_1，…C_r は定数,で与えられる。）従って，残る問題は r がMの次元に等しいこと，換言すれば，ファイバーの次元が0に等しいことを示すことである。ところが，これは固有関数の全体 $\{f_r\}$ が λ をパラメータとする群をなすことと，定理の仮定，$H=\sum_{\lambda\in\Lambda^\rho}^{\oplus} H(\lambda)$ から簡単に示せる。
（池田・飛田・吉沢〔8〕第5章．Prop. 1.3）

以上の考察により，上の定理を示す前に，まず次の定理を証明しよう：

定理 1.2.D （M，μ，φ_t）をエルゴード的なclassical flowとし，Mはcompactとする。このとき，もし λ_1，…，$\lambda_r\in\Lambda^\rho$ がZ上1次独立であれば，Mは局所自明な $C^{\rho-1}$ smooth なファイバー空間の全空間とみなせる。その底空間は r 次元トーラス T^r であり，そのファイバーはMの C^ρ− 部分多様体である。

flow(φ_t)はファイバーを保ち，底空間 T^r に自然にひきおこされる flow は λ_1，…，λ_r を振動数とする概週期運動である。

補助定理 1.2.E 定理 1.2.Dの仮定のもとで，f_1，…，f_r をそれぞれ固有値 λ_1，…，λ_r に属する C^ρ− class の固有関数とする。このとき df_1，…，df_r*) $\in T^r(M)$ はM上致る所1次独立である。

*) $f_j(x)$ （$j=1$，…，r）は複素数値関数であるが，証明の第1段で見るように，

$$f_i(x)=e^{2\pi i\theta_j(\lambda)},\quad \theta_j(x)\in R/Z$$

とおける。この $d\theta_j$ のかわりに df_j とかく。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

証 明 第1段：$f_j(x)$ $(j=1, \cdots, r)$ はエルゴード的な flow(φ_t) の連続な固有関数であるから，

$$|f_j(x)| = \text{const.}\ (\text{例えば}=1) \qquad \cdots\cdots \qquad (1.4)$$

$$f_j(\varphi_t x) = e^{2\pi i \lambda_j t} f_j(x),\ \forall x \in M\ \forall t \qquad \cdots\cdots \qquad (1.5)$$

さて，写像P_k $(k=1, \cdots, r)$ を次のように定義する：

$$P_k : M \to S^k \cong T^k$$
$$x \mapsto (f_1(x), \cdots, f_k(x))$$
$$\text{ここで}\quad S \equiv \{Z \in \mathbb{C}\ ;\ |Z| = 1\} \qquad \cdots\cdots \qquad (1.6)$$

S^k上の flow(ψ_t^k)を

$$\psi_t^k(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) = (e^{2\pi i \lambda_1 t}\alpha_1, \cdots, e^{2\pi i \lambda_k}\alpha_k)$$
$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in S^k$$

と定義すれば，明らかに次の図式は可換である：

$$\begin{array}{lccc} \varphi_t : & M & \longrightarrow & M \\ & \downarrow P_k & & \downarrow P_k \\ \psi_t^k : & S^k & \longrightarrow & S^k \end{array}$$

(ψ_t^k)はk次元トーラスS^k上の$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$を振動数にもつ概週期運動であることに注意すれば，$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$の独立性から$(\psi_t^k)$の軌道は$S^k$上致る所稠密であることがわかる。しかも，Mはコンパクトであるから，$P_k(M)$は閉集合であるから，P_kは上への写像である。

第2段： さて，$df_1, \cdots, df_k$が致る所1次独立，即ち，写像P_kはM上致る所 full r-ank であると仮定しよう。

よく知られているように，集合$P_k^{-1}(\alpha)$，$\alpha \in S^k$はMの部分多様体になる。しかも任意の$\alpha_0 \in S^k$に対してある$U_0 \subset S^k$があって$P_k^{-1}(U_0) \subset M$には直積の構造が入る。即ち：

$$\exists \eta_0 : U_0 \times P_k^{-1}(\alpha_0) \longrightarrow P_k^{-1}(U_0)\ :\text{微分同型}$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\text{s.t.} \quad P_k \cdot \tau_0(\alpha, y) = \alpha, \quad \text{for} \quad {}^{\forall}\alpha \in U_0,\ y \in P_k^{-1}(\alpha_0).$$

かかる微分同型 τ_0 の存在証明ははぶくが，例えば，Mにリーマン計量を定義し，$P_k^{-1}(\alpha_0)$ における指数写像 $\mathrm{Exp}_{P_k^{-1}(\alpha_0)}$

$$\mathrm{Exp}_{P_k^{-1}(\alpha_0)} : N(P_k^{-1}(\alpha_0)) \supset V \to M$$

を適当に修正することにより得られる。ここで $N(P_k^{-1}(\alpha_0))$ は $P_k^{-1}(\alpha_0)$ のノーマルバンドルであり，$P_k^{-1}(\alpha_0)$ はその0セクションとして自然に含まれる。$df_1, \cdots, df_k$ の一次独立性から，$N(P_k^{-1}(\alpha_0))$ は直積バンドルであることにも注意をしておく。

かかる τ_0 の存在はいわゆる局所自明性を示す。よって，$(M, P_k, S^k, P_k^{-1}(\alpha_0))$ が局所自明な k 次元トーラス S^k 上の $C^{\rho-1}$－ smooth なファイバー空間であり，そのファイバーはMの C^{ρ}－ 部分多様体であることが示された。

第3段： 帰納法により $df_1, \cdots, df_r$ はM上致る所1次独立であることを示そう。df_1 が致る所1次独立であることは明らかであるから，$df_1, \cdots, df_k$ の1次独立性を仮定して $df_1, \cdots, df_k, df_{k+1}$ の1次独立性を示せばよい。

さて，df_{k+1} が点 $x_0 \in M$ において $df_1, \cdots df_k$ に1次従属であるとしょう。すると，φ_t は微分同型であることと，$f_j(x)$ は（1.5）をみたすから，df_{k+1} は $\varphi_t x_0 \in M$ においても $df_1, \cdots, df_k$ に1次従属である。よって，x_0 を通る (φ_t) の軌道の閉包 Cx_0：

$$Cx_0 = \overline{\bigcup_t \varphi_t x_0}$$

の上で df_{k+1} は $df_1, \cdots, df_k$ に1次従属である。これは f_{k+1} を $P_k^{-1}(\alpha)$（第2段）上の関数と考えるとき，$Cx_0 \cap P_k^{-1}(\alpha)$ の点はすべて f_{k+1} の critical point であることを示す。従って，よく知られたSard の定理により集合，$f_{k+1}(Cx_0 \cap P_k^{-1}(\alpha))$ の測度は S^1 において0である。ところが，Cx_0 がコンパクトであることから，第1段と同様に，$P_{k+1}(Cx_0) = S^{k+1}$ であることがわかる。故に $f_{k+1}(Cx_0 \cap P_k^{-1}(\alpha)) = S^1$．これは明らかな矛盾である。

q. e. d.

定理 1. 2. Dの証明は，上の証明の中に含まれている。

定理1.2.Cの証明 定理1.2.Dから，rank $\Lambda^{\rho}=\dim M$ を示せば十分である。実際，このとき，Mは明らかにトーラスのcovering spaceになるから，それ自身トーラスに同型である。

r＝rank Λ^{ρ} とし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \Lambda^{\rho}$ をZ上1次独立な固有値，$f_1, \cdots, f_r$ をそれぞれ $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ に属する C^{ρ}－classの固有関数とする。λ を任意の（$\in \Lambda^{\rho}$）固有値，f_λ をそれに属する C^{ρ}－class の固有関数としょう。rは Λ^{ρ} の階数であったから，$\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ はZ上1次従属，即ち，

$$\exists\, k \neq 0,\ k_1, \cdots, k_r \in Z$$
$$k\lambda = k_1\lambda_1 + \cdots + k_r\lambda_r .$$

従って，池田・飛田・吉沢〔8〕のProp. 1.3（第5章）から，

$$f_\lambda^{k}(2) = f_1^{k_1}(x) \cdot \cdots \cdot f_r^{k_r}(\lambda)$$

故に，$f_\lambda(x)$ の連続性から，$f_\lambda(x)$ は各ファイバー $P_r^{-1}(\alpha)$ の各連結成分上で定数でなければならない。仮定により，

$$\sum_{\lambda \in \Lambda^{\rho}} \oplus\, H(\lambda) = H$$

であったから，もし，rank $\Lambda^{\rho} < \dim M$ 即ち，ファイバー $P_r^{-1}(\alpha)$ の次元が1以上であれば，明らかな矛盾を導く。よって，rank $\Lambda^{\rho}=\dim M$.

q. e. d.

ここで，証明は与えないが，次の興味ある結果を掲げる。

定理1.2.F （M, μ, φ_t）をコンパクト・リーマン多様体M上のclassical flowとする。もし，（φ_t）がエルゴード的であり，tに関して同程度連続，即ち，

$\forall \varepsilon > 0.$ $\exists \delta > 0$ s.t.

もし，$d(x, y) < \delta$, $x, y \in M$ ならば

$d(\varphi_t x, \varphi_t y) < \varepsilon$, $\forall t$

であるならば，

$$(M, \mu, \varphi_t) \underset{C^0}{\simeq} (T^{\dim M}, m, \psi_t),$$

即ち，classical flows として，あるトーラス上の概週期運動と C^0－ 同型である。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第2章　安 定 性 の 問 題

§2.1.　Siegelの定理

安定性の問題の特質を示すものとして，我々はSiegel が与えた定理を取りあげる。

今，原点のまわりの等角写像：

$$S : C \longrightarrow C : Z \longmapsto Z_1 = f(z) = \lambda Z + \hat{f}(z)$$

ここで　$\lambda \neq 0$

$$\hat{f}(z) = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad , \quad |z| < r \tag{2.1}$$

を考える。このとき，原点 $z=0$ が安定あるいは等角写像Sが安定であるというのは，任意の原点の近傍Uに対してある原点の近傍Vがあって，すべての整数nに対して

$$S^n V \subset U$$

であるときをいう。又，原点あるいはSが不安定であるというのは，ある原点の近傍Uがあって，任意の $Z_0 \neq 0 \in U$ に対してある整数nがあって $Z_n = S^n Z_0 \notin U$ なるときをいう。ここで，不安定の定義が単に安定の論理的な否定ではないことに注意をしておく。

ここで簡単に得られる2，3の命題をあげる。

命題2.1.A　S：安定

$\Longleftrightarrow$　任意の原点の近傍Uに対してある原点の近傍Vがあって　$SV = V$，$V \subset U$

このとき，Vは単連結と仮定できる。

証　明 $\Leftarrow$ は明らかであるから，$\Rightarrow$ を証明する。

定義から，　$W \subset U$，$S^n W \subset U$，$\forall n \in \mathbb{Z}$

そこで　$V = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n W$ とすればこのVが求めるものである。今Vの原点を含む連結成分を取れば，明らかにこの連結成分はS－不変であるから，Vは連結と仮定できる。ここでさらにVを単連結とするには次のようにすればよい。即ち，Vに含まれ原点を内部に含むような閉曲線で囲まれるような領域全体の和集合を取ればこの集合が条件をすべてみたすことは容易にわかる。

q.e.d.

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

命題2.1.B　S：安定

$\Longleftrightarrow$ $|\lambda|=1$．かつ，ある収束巾級数 $Z=u(\zeta)$，

$$u(\zeta)=\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+\cdots$$

があって次の図式が可換：

$$\begin{array}{ccc} S: Z & \rightarrow & Z_1 \\ u\uparrow & & u\uparrow \\ \zeta & \rightarrow & \zeta_1=\lambda\zeta \end{array}$$

即ち，

$$u(\lambda\zeta)-\lambda u(\zeta)=f(u(\zeta))-\lambda u(\zeta) \quad \text{。} \qquad \cdots\cdots (2.2)$$

証　明 $\Leftarrow$ は明らかであるから，$\Rightarrow$を示す。

命題2.1.AからS－不変な原点の単連結近傍Vがある：

$$SV=V$$

故にRiemann の写像定理により，領域 $|\zeta|<\rho$ からVの上への写像 $Z=u(\zeta)$，$u(0)=0$，

$$u(\zeta)=\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+\cdots$$

が存在する。$u^{-1}\cdot S\cdot u$ を考えれば，この写像は $|\zeta|<\rho$ の上への原点を不変にする等角写像である。故に，よく知られているように $|\mu|=1$ があって，

$$u^{-1}\cdot S\cdot u(\zeta)=\mu\zeta.$$

$\mu=\lambda$ であることをみるのは容易である。

q. e. d.

今得られた命題から，Sが安定かどうかは，関数方程式（2.2）をみたす収束巾級数 $Z=u(\zeta)$ が存在するか否かにかかっている。（2.2）を形式的に解いてみると次の方程式を得る。

$$\sum_{k\geqq 2}(\lambda^k-\lambda)\,b_k\,\zeta^k=\sum_{k\geqq 2}a_k\,(u(\zeta))^k \qquad \cdots\cdots (2.3)$$

さて，興味のある場合は $|\lambda|=1$ の場合であるが対比の上から，$|\lambda|\neq 1$ の場合も考えよう。この場合はCauchy の優級数の方法が使える。

命題2.1.C　$|\lambda|\neq 1$ のとき，方程式（2.3）を，従って関数方程式（2.2）をみたす形式巾級数解 $Z=u(\zeta)$ は収束する。従って等角写像S（2.1）は変数 ζ で表わせば，

$$\zeta_1=\lambda\zeta$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

となる。

<u>証 明</u>　$Z_1=f(z)$ の収束半径は1としても一般性を失なわないからそう仮定する。又，$|z|<1$ で $|f(z)|<1$ とすればCauchy の不等式から $|a_n|<1$ を得る。

さて，
$$\Phi(\zeta)=\zeta+C_2\zeta^2+C_3\zeta^3+\cdots \quad を$$
$$C(\Phi-\zeta)=\sum_{k\geqq 2}\Phi^k$$
の形式解とする。ここでCは
$$|\lambda^{n+1}-\lambda|>C>0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$
なる定数である。その存在は $|\lambda|\neq 1$ なる仮定から保障される。このΦが級数 $u(\zeta)$の優級数であることはすぐわかる。ところで，$\zeta=\Phi-C^{-1}\Sigma\Phi^k$ は $|\Phi|<1$ で収束するから，逆関数の定理から$\Phi(\zeta)$も収束する。故に級数 $u(\zeta)$も収束する。

q. e. d.

次に $|\lambda|=1$ の場合を考察しょう。我々はλが1の根である場合とそうでない場合に分ける。

(イ)　λが1の根の場合：$\lambda^p=1$

Sが安定なることとS^p ($p\neq 0$) が安定なることは同値であることに注意すれば，$\lambda=1$ と仮定してもよい。この場合（2.1）は安定でも不安定でもないものが存在する。例えば，

$$Z_1=\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\cdots.$$

$\left[\ S^n z=\dfrac{1}{1-nz}\right.$ に注意 $\left.\right]$

(ロ)　λが1の根でない場合：

（2.3）から級数$u(\zeta)$の係数$\{b_n\}$は一意的にきまるから（2.1）が安定かどうかは$u(\zeta)$の収束性によってきまる。この収束性の判定は非常に微妙であって，ほとんどすべてのλに対して$u(\zeta)$は$\zeta=0$のある近傍で収束するのであるが，又単位円周（$|\lambda|=1$）上致る所稠密な集合に属するλに対しては（$\{a_n\}$ の適当に取って）$u(\zeta)$は収束しない。次に収束しない例をあげよう。

（2.2）から，
$$(\lambda^n-\lambda)b_n=a_n+P_n(a_1,\cdots,a_{n-1},b_1,\cdots b_{n-1})$$
ここで$P_n(x_1,\cdots,x_{n-1},y_1,\cdots,y_{n-1})$は$x_1,\cdots,y_1,\cdots$　の多項式.

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

今 $a_n = \pm \frac{1}{n!}$ とし，符号を適当に選んでいけば，

$$|(\lambda^n - \lambda) b_n| \geq \frac{1}{n!}$$

とできる。λを

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{無限に多くの } n \text{ に対して} \\ |\lambda^n - 1| < (n!)^{-2} \end{array} \right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.4)$$

をみたすとすれば

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} = \infty$$

故に$u(\zeta)$は$\zeta = 0$を除いて発散する。従って上に述べた結果を得るには次の補題を示せばよい。

<u>補題 2.1.D</u>　(2.4) をみたす1の根でないλが単位円周$\{|\lambda| = 1\}$上に致る所稠密に存在する。

上の補題を証明する為に連分数展開で知られた事実を述べる。

〔連分数展開からの準備〕

$0 < \alpha < 1$ なる任意の無理数αに対して，自然数列$\{r_n\}$が唯一つ定まって，

$$\alpha_n = \frac{p_n}{q_n} \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

ここで，p_n，q_n ($n \quad 0$) は次のようにして$\{r_n\}$から定まるもの：

$$p_0 = 0,\ q_0 = 1\ ;\ p_1 = 1,\ q_1 = r_1,\ \cdots$$

$$p_n = r_n p_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = r_n q_{n-1} + q_{n-2} \qquad (n \geqq 2)$$

即ち，
$$\alpha_1 = \frac{1}{r_1},\ \alpha_2 = \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2}},\quad \alpha_3 = \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{r_3}}},\ \cdots$$

逆に任意の自然数列$\{r_n\}$に対して，上のようにして，$0 < \alpha < 1$ なる無理数が定まる。

さて，$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{q_{n-2}}{q_n}(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})$に注意すれば，大した困難なく次の評価式をえることができる。

$$|q_n \alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} < \frac{1}{r_{n+1} q_n} \leqq \frac{1}{r_{n+1}} \qquad \cdots\cdots \qquad (2.5)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

補題2.1.Dの証明　$\lambda=e^{2\pi i\alpha}$（$0<\alpha<1$）とおく。任意の自然数nに対して$-\frac{1}{2}\leq n\alpha-m<\frac{1}{2}$なる整数mが唯一つ存在する。このとき，

$$|\lambda^n-1|=|e^{2\pi in\alpha}-1|=|e^{\pi in\alpha}-e^{-\pi in\alpha}|$$

$$=2|\sin(\pi n\alpha)|=2\sin(\pi|n\alpha-m|),$$

$|n\alpha-m|\leq\frac{1}{2}$から

$$2|n\alpha-m|\leq\sin(\pi|n\alpha-m|)\leq\pi|n\alpha-m|.$$

$$\therefore\ 4|n\alpha-m|\leq|\lambda^n-1|\leq 7|n\alpha-m|.$$

従って，無限に多くの $n>0$ に対して

$$|n\alpha-m|<\frac{1}{7(n!)^2} \tag{2.6}$$

をみたす$0<\alpha<1$なる無理数αが$0<\alpha<1$上に稠密に存在することをいえばよい。

さて，$0<\beta<1$なる無理数を任意に一つ取ってきて固定する。自然数列$\{S_n\}$を上の連分数展開からβに対して定まる列とする。kを任意の自然数とし，このkに対して自然数列$\{r_n\}$を次のようにして作る：　$r_n=S_n$（$n\leq k$）とし，$n\geqq k+1$に対しては$r_n=7(q_{n-1}!)^2$と帰納的に定める。但し，q_{n-1}は$r_1,\cdots,r_{n-1}$から（上の連分数展開からの準備で作ったようにして）定まる自然数である。

αを$\{r_n\}$から定まる無理数とすれば，（2.5）から，αは無限に多くの自然数（$\{q_n\}_{n\geqq k+1}$！）に対して（2.6）をみたす。又，

$$|\alpha-\beta|\leq\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|+\left|\beta-\frac{p_k}{q_k}\right|<2q_k^{-2}\leq 2k^{-2}$$

であるから，証明のすべては終る。

q.e.d.

今えられた結果から，我々は，十分に有理数で近似されうるα（$\lambda=e^{2\pi i\alpha}$）に対しては写像S（2.1）は（$\{a_n\}$を適当に取りさえすれば）安定でないことを知った。（ここで，有理数の連分数展開$\{r_n\}$においてはあるn_0からr_nは∞になることに注意する。）このことから逆に，有理数では近似しにくい無理数αに対しては写像Sは安定ではないかとの予想ができる。実際，次のSiegelの定理はそのことを裏ずける。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

定理2.1.E　もしλが，ある正の定数C_0があって
任意の$q=1,2,\cdots$ に対して $|\lambda^q-1|^{-1}\leq C_0 q^2$ ……………… (2.7)
をみたすならば，(2.3) で定まる(形式)巾級数$u(\zeta)$は収束する。従って $|\lambda|=1$ ならば S (2.3) は安定である。

Siegel の原証明はきわめてデリケイトな整数論的評価により (2.3) の形式解の収束性を保証している。ここでは，J. Moserに従って，"ニュートン法"を使って証明する。証明はいくつかの補題に分かれる。

さて，与えられた写像：

$$Z_1=f(z)=\lambda z+\hat{f}(z) \qquad \cdots\cdots (2.1)$$

において，$|z|<r$ において

$$|\hat{f}'|<\varepsilon \qquad \cdots\cdots (2,8)$$

をみたすとする。$\hat{f}(z)$ は2次以上の項のみを含むから(これから"$\wedge$"は2次以上の項のみを含んでいることを示す) rを十分に小さく取ることによりεは任意に小さく取れる。又，$|\lambda|\fallingdotseq 1$の場合は証明はすでに終っているから $|\lambda|=1$ とする。

方程式 (2,2) を解くかわりに，その"線型化"された次の方程式

$$\hat{v}(\lambda\zeta)-\lambda\hat{v}(\zeta)=\hat{f}(\zeta) \qquad \cdots\cdots (2.9)$$

の解$\hat{v}(\zeta)$を求め，変換

$$Z=v(\zeta)=\zeta+\hat{v}(\zeta)$$

をかわりに用いよう。次の補題は$|\hat{v}|$の評価を与える：

補題2.1.F　もし$g(\zeta)$が$|\zeta|<r$において解析的であり，かつそこで$|g|<\varepsilon$をみたし，$g(0)=g'(0)=0$ ならば

$$\hat{v}(\lambda\zeta)-\lambda\hat{v}(\zeta)=g(\zeta) \qquad \cdots\cdots (2.10)$$

の解$\hat{v}(\zeta)$は$|\zeta|<r$で解析的であり，任意の$0<\theta<1$なるθに対して，$|\zeta|<r(1-\theta)$において$|v|<2C_0\dfrac{\varepsilon}{\theta^3}$をみたす。

証明　Cauchyの評価式から，$|g_k|<\varepsilon r^{-k}$，ここで

$$g(\zeta)=\sum_{k\geqq 2} g_k\zeta^k$$

故に　$|v|=\left|\sum_{k\geqq 2}(\lambda^k-\lambda)^{-1} g_k\zeta^k\right|$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$< \varepsilon C_0 \sum_{k\geqq 2} k^2 \left|\frac{\zeta}{r}\right|^k$$

$$\leqq \varepsilon C_0 \sum_{k\geqq 2} k^2 (1-\theta)^k \leqq \frac{2\varepsilon C_0}{\theta^3}$$

ここで

$$\sum_{k\geqq 2} k^2 x^k \leqq \sum_{k\geqq 2} k(k-1)x^k + \sum_{k\geqq 1} k x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$\leqq \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $(0<x<1)$ を使った。

q. e. d.

$g=\zeta \hat{f}'(\zeta)$ としてこの補題を用いれば，(2,9) の解は $|\zeta|<r(1-\theta)$ において $|\hat{\upsilon}'|<2C_0\dfrac{\varepsilon}{\theta^3}$ をみたす。従って，

$$|\hat{\upsilon}|<\frac{2C_0\varepsilon}{\theta^3} r . \qquad (2,11)$$

次に変換 $\upsilon^{-1}\cdot f\cdot \upsilon$ の定義域をみる：

補題2.1.G　もし，$2C_0\varepsilon<\theta^4$, $0<\theta<\dfrac{1}{4}$ ならば写像 $Z=\upsilon(\zeta)=\zeta+\hat{\upsilon}(\zeta)$ は $|\zeta|<r(1-4\theta)$ を $|Z|<r(1-3\theta)$ の中に写し，円板 $|\zeta|<r(1-\theta)$ の像は円板 $|Z|<r(1-2\theta)$ を覆う。

証 明　(2,11) と補題の仮定から，

$|Z|\leqq|\zeta|+|\hat{\upsilon}|<r\left(1-4\theta+\dfrac{2C_0\varepsilon}{\theta^3}\right)<r(1-3\theta)$．後半を得るには $|Z|<r(1-2\theta)$ に対して方程式 $\zeta+\hat{\upsilon}=Z$ が $|\zeta|<r(1-\theta)$ の中に解をもつことをいえばよい。この為には Rouche の定理から $|\zeta|=r(1-\theta)$ に対して，不等式：

$$|\hat{\upsilon}|\leqq r\theta<|\zeta|-|Z|$$

をみたすことがわかればよい。しかしながらこれは (2,11) から明らかである。

q. e. d.

補題2.1.H　もし，$2C_0\varepsilon<\theta^4$, $0<\varepsilon<\theta<\dfrac{1}{5}$ $\qquad (2,12)$

ならば，写像 $\Phi=\upsilon^{-1}\cdot f\cdot\upsilon$ あるいは $\zeta_1=\Phi(\zeta)$ は $|\zeta|<r(1-5\theta)=\rho$ に対して定義される。さらに，もしこの写像を

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\zeta_1 = \lambda\zeta + \hat{\Phi}$$

の形にかけば $|\zeta| < \rho$ において

$$|\hat{\Phi}'| < C_1 \frac{\varepsilon^2}{\theta^4},$$

ここで，$C_1 < 3C_0$

証　明　写像Φが $|\zeta| < \rho$ で定義されることは補題2,1.Gと（2,8）からすぐにわかる。Φを評価する為に，関係式 $\upsilon \cdot \Phi = f \cdot \upsilon$ を $\hat{\upsilon} = \upsilon - \zeta$，$\hat{f} = f - \lambda Z$，$\hat{\Phi} = \Phi - \lambda\zeta$ を使って書き表わす：

$$\hat{\Phi} + \hat{\upsilon}(\lambda\zeta + \Phi) = \lambda\upsilon(\zeta) + f(\upsilon)$$

ここで，$\hat{\upsilon}$は（2,9）の解であったから，

$$\hat{\Phi} = \hat{\upsilon}(\lambda\zeta) - \hat{\upsilon}(\lambda\zeta + \hat{\Phi}) + \hat{f}(\upsilon) - \hat{f}(\zeta).$$

平均値の定理から，

$$|\hat{\upsilon}(\lambda\zeta) - \hat{\upsilon}(\lambda\zeta + \hat{\Phi})| \leq \sup|\hat{\upsilon}'| \sup|\hat{\Phi}|$$

$$< \frac{2\varepsilon C_0}{\theta^3} \sup|\hat{\Phi}| < \theta \sup|\hat{\Phi}| < \frac{1}{5} \sup|\hat{\Phi}|$$

故に（2,11）を使って，$|\zeta| < (1-4\theta)r$ において

$$\frac{4}{5}\sup|\hat{\Phi}| \leq |\hat{f}(\upsilon) - \hat{f}(\zeta)| \leq \sup|\hat{f}'||\hat{\upsilon}|$$

$$< \varepsilon \frac{2C_0\varepsilon}{\theta^3} r$$

Cauchy の評価式より，$|\zeta| < (1-5\theta)r$ において

$$|\hat{\Phi}'| \leq \varepsilon \frac{5}{2} C_0 \frac{\varepsilon}{\theta^4}.$$

q. e. d.

以上の補題から，最初の写像 $f(z)$ をより線型写像に近いΦに変換できる。この操作をくりかえすことにより，収束する写像 f_n の列を得ることができる。実際，もし $f_n = \lambda z + \hat{f}_n$ であり，かつ $|z| < r_n$ において $|\hat{f}_n'(z)| \leq \varepsilon_n$ をみたすならば，補題2,1.Hから，$f_{n+1} = \upsilon_n^{-1} \cdot f_n \cdot \upsilon_n$ は $|z| < r_{n+1} = r_n(1-5\theta_n)$ において

$$|\hat{f}'_{n+1}| \leq C_1 \frac{\varepsilon_n^2}{\theta_n^4} = \varepsilon_{n+1} \qquad (2,13)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

をみたす。

もしここで
$$5\theta_n = \frac{1}{(2^n+1)2} \qquad \cdots\cdots (2.14)$$

とおけば
$$r_n = r(1+2^{-n})/2 \qquad \cdots\cdots (2.15)$$

を得る。

もし，(2.13) で定義される数列 $\{\varepsilon_n\}$ が 0 に収束するならば $\{f_n\}$ の収束性は示されたことになる。(2.13)，(2.14) から

$$\varepsilon_{n+1} = C_1 \frac{\varepsilon_n^2}{\theta_n^4} = C_1 \{10(2^n+1)\}^4 \varepsilon_n^2$$

$$< C_2^{n+1} \varepsilon_n^2 \qquad n=0,1,\cdots.$$

$\varepsilon'_n = C_2^{n+2}\varepsilon_n$ とおけば，$\varepsilon'_{n+1} \leq (\varepsilon'_n)^2$ 故に，$\varepsilon'_0 = C_2^2 \varepsilon_0 < 1$ なるように ε_0 を選べば $\varepsilon_n \to 0$．$\theta=\theta_n$ に対して (2,12) がみたされていることを言わねばならないがそれは ε_0 を十分小さく取ることによって明らかである。

こうして，我々は写像 f_n を f_{n+1} に変換する変換 υ_n の列を得ることができた。ここで f_0 は最初の f である。故に

$$u_n = \upsilon_0 \cdot \upsilon_1 \cdot \cdots \cdot \upsilon_{n-1}$$

は f を
$$f_n = u_n^{-1} \cdot f \cdot u_n \qquad \cdots\cdots (2,16)$$

に変換する。この写像 u_n は $|\zeta| < r_{n-1}$ において定義されている。従って又 f_n も同じ円板で定義されている。(2.15) から $r_n \geqq r/2$ であるが，u_n は $|\zeta| < r/2$ で一様に収束することを示そう。この為に

$$u'_n(\zeta) = \prod_{k=0}^{n-1} \upsilon'_k = \prod_{k=0}^{n-1} (1+\hat{\upsilon}'_k)$$

（ここで，導関数 υ'_k は点 $\upsilon_{k+1} \cdot \cdots \cdot \upsilon_{n-1}(\zeta)$ での値）を考える。(2.11) から $|\hat{\upsilon}'_k| \leq C_3^k \varepsilon_k$ 故に，

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1+|\hat{\upsilon}'_k|) \leq C_4$$

従って
$$|u_{n+1} - u_n| \leq C_4 \sup|\upsilon_n(\zeta) - \zeta|$$
$$\leq C_4 |\hat{\upsilon}_n| \to 0$$

故に，一様に $u_n(\zeta) \to u(\zeta)$，$f_n(\zeta) \to \lambda\zeta$．

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

(2.16) から　$u^{-1}\cdot f\cdot u(\zeta)=\lambda\zeta$.

$\upsilon_n(0)=0$, $\upsilon_n(0)=1$ であるから $u(0)=0$, $u'(0)=1$

以上の考察により，もし $\varepsilon_0=\sup\limits_{|z|<r}|\hat{f}'|$ を十分小さく取れば，上の逐次近似はうまくゆくことがわかった。これは r を十分小さく取ればよい。これでSiegel の定理の証明はすべて終った。

§2.2. ブランコの安定性

前節において，我々は原点の回りの等角写像を扱ったが，今節ではHamiltonian 系を扱おう。ここでは具体的に単振子を取り上げる。よく知られているように，単振子の運動方程式は $\ddot{q}=-\omega^2\sin q$. ここで q は鉛直方向からの振れ角を表わし，ω は角振動数である。この運動方程式は，

$$\text{Hamiltonian}\quad H(p.\,q)=\frac{1}{2}p^2+\omega^2(1-\cos q) \qquad \cdots\cdots\quad (2.17)$$

を使って正準方程式で書き表わせば，

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=p,\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\omega^2\sin q. \qquad \cdots\cdots\quad (2.18)$$

$h=H(p,q)$ は (2.18) の第1積分であるから (2,18) は積分可能であり，その相空間における軌動は(図2,19)の通りである。$h=2\omega^2$ を境いにして運動の様子は大幅に変る。即ち，$h<2\omega^2$ の場合，単振子は振動するし，$h>2\omega^2$ の場合単振子は回転する。我々は $h<2\omega^2$ の場合を調べよう。

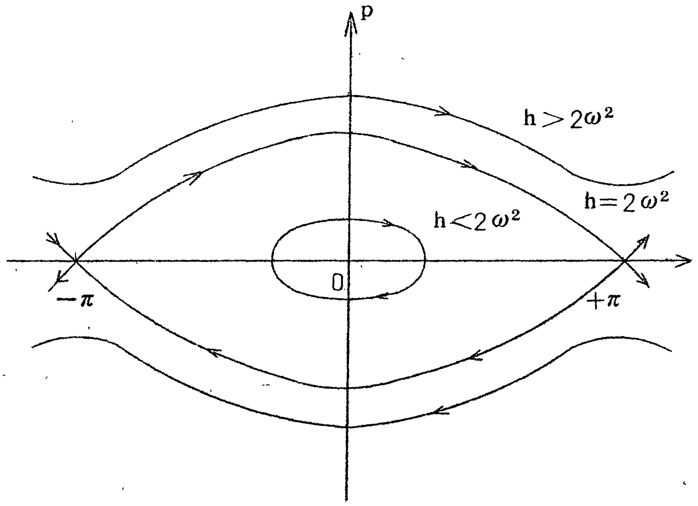


図　2.19

運動の様子をさらによく調べるには，作用変数 I と

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

角変数φを用いるのが便利である。即ち：

$$I(h)=\frac{1}{2\pi}\oint_{H(p\cdot q)=h} p\,dq \qquad (2,20)$$

で$I(h)$を定義し，$I=I(h)$をhについて解いて（後に見るように$\frac{dI}{dh}>0$であるからこれは可能）$h=h(I)$とする。

$$S(I,q)=\int_{q_0}^{q} p\,dq \qquad (2,21)$$

（積分路は$H(p,q)=h(I)$）を母関数とする正準変換：

$$p=\frac{\partial S}{\partial q},\quad \varphi=\frac{\partial S}{\partial I} \qquad (2,22)$$

を行えば新しい変数（I,φ）によって，Hamiltonian (2,17) は

$$h=h(I) \qquad (2,23)$$

となる。従って運動方程式は：

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial h}{\partial I}=\lambda(I),\quad \dot{I}=-\frac{\partial h}{\partial \varphi}=0. \qquad (2,24)$$

故に，運動は不変な閉曲線Γ_I：$I=\mathrm{const.}$上で角速度$\lambda(I)$をもつ一様な回転になる。

次に我々は

$$\frac{d^2h}{dI^2}=\frac{d\lambda}{dI}<0 \qquad (2,25)$$

であり，$\lambda(0)=0$，分離枝　$h=2\omega^2$の近くでは$\lim\lambda(I)=0$であることを示そう：

$$h=2\omega^2k^2 \quad k<1,\quad k=\sin\frac{\alpha}{2},\quad 0\leqq\alpha<\pi$$

とおけば，

$$I(h)=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\alpha}\sqrt{4\omega^2\left(k^2-\sin^2\frac{q}{2}\right)}\,dq$$

$$=\frac{8\omega}{\pi}\int_0^{k}\frac{\sqrt{k^2-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}dy \qquad \left(y=\sin\frac{q}{2}\right)$$

$$=\frac{8\omega}{\pi}\int_0^{1}\frac{k^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}dx \qquad (y=kx)$$

$$= \frac{4}{\pi\omega} h \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-\frac{h}{2\omega^2}x^2}}\,dx$$

$$S(h) \equiv \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-\frac{h}{2\omega^2}x^2}}\,dx \qquad (0 \leq h < 2\omega^2)$$

とおけば次のことは容易に分る：

$$S'(h) > 0, \quad S''(h) > 0 ;$$

$$S(0) = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \qquad \frac{dI}{dh} = \frac{4}{\pi\omega}(S(h) + hS'(h)) > 0$$

$$\frac{dI}{dh}(0) = \frac{1}{\omega}, \quad \lim_{h \to 2\omega^2} \frac{dI}{dh}(h) = \infty$$

$$\therefore \qquad \lambda(0) = 1 \Big/ \frac{dI}{dh}(0) = \omega, \quad \lim_{h\to 2\omega^2} \lambda(I(h)) = 0 \qquad \cdots\cdots (2{,}26)$$

$$\frac{d^2h}{dI^2} = \frac{d}{dh}\left(\frac{dh}{dI}\right)\frac{dh}{dI} = \frac{d}{dh}\left(1 \Big/ \frac{dI}{dh}\right) \times 1 \Big/ \frac{dI}{dh}$$

$$= -\frac{4}{\pi\omega\left(\frac{dI}{dh}\right)^3}(2S'(h) + hS''(h))$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2h}{dI^2} < 0 \qquad \left(0 \leq I < \frac{8\omega}{\pi} = I(2\omega^2)\right) \qquad \cdots\cdots (2{,}27)$$

さて，単振子のパラメータωが何らかの原因で，例えば単振子の長さが変化したり，支点が上下したりして周期的に（例えば周期2πで）変化する場合を考えよう：

$$\omega = \omega(t) = \omega(t + 2\pi)$$

我々はここで，ωはある定数ω_0の近くにとどまると仮定する：

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\omega^2 = \omega_\varepsilon^2(t) = \omega_0^2 + \varepsilon\,\omega_1^2\,(t)$$
$$\omega_1\,(t) = \omega_1\,(t + 2\pi), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \qquad \cdots\cdots (2,28)$$

このとき，$H(p.\ q.\ t) = \frac{1}{2}p^2 + \omega_\varepsilon^2(t)(1 - \cos q)$ をHamiltonianにもつ系：

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega_\varepsilon^2(t)\sin q \qquad (2,18)_\varepsilon$$

はもはや，エネルギー$H(p.\ q.\ t)$も又閉曲線Γ_Iも保たない。問題は$\varepsilon \ll 1$で，$t \to \infty$になったときの，系$(2,18)_\varepsilon$の解の挙動を調べることである。

次の結果はKolmogorov−Arnold による。

定理2,2.A　系$(2,18)_\varepsilon$は十分小さいεに対して，$(p,\ q,\ t)$−空間$(q, t$: mod $2\pi)$において，系(2,18)に対して不変なトーラス$\Gamma = \{(p.\ q.\ t)\ ;\ I\ (H\ (p.\ q)) = \text{const.}\}$達の近くに不変なトーラス$\Gamma_\varepsilon$達をもつ。ここで$\Gamma_\varepsilon$が不変であるとは$\Gamma_\varepsilon$を通る$(2,18)_\varepsilon$の軌道は永久に$\Gamma_\varepsilon$にとどまることを意味する。さらにこの不変トーラス$\Gamma_\varepsilon$達は十分小さな$\varepsilon$に対しては"十分に多く"*)存在する。

*) "十分に多く"の意味は以下の諸定理等の中で示される。実際は，ここでは証明を与えないが，この不変トーラス達は$\varepsilon \to 0$に従って，任意に小さい領域(ルベーグ測度の意味において)を除いて分離枝の内部：

$$\left\{(p.\ q.\ t)\ ;\ \frac{1}{2}p^2 + \omega_0^2(1 - \cos q) \leq 2\omega_0^2\right\}$$

を満たす。

Hamiltonian 系$(2,18)_\varepsilon$に正準変数(2,22)をほどこせば新しいHamiltonian

$$H(I.\ \varphi.\ t) = h(I) + \widetilde{H}(I.\ \varphi.\ t) \qquad \cdots\cdots (2,29)$$

をもつ系：

$$\dot{I} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \varphi}(I.\ \varphi.\ t)$$
$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial I}(I.\ \varphi.\ t),\ \omega(I) = \frac{\partial h}{\partial I}(I) \qquad \cdots\cdots (2,30)$$

に変換される。ここで，$h(I)$は(2,23)によって与えられるもので，従って，

$$\frac{d^2}{dI^2}h = \frac{d\omega}{dI} < 0, \quad 0 \leq I < \frac{8\omega}{I} \qquad \cdots\cdots (2,31)$$

であり，$\widetilde{H}(I.\ \varphi.\ t) \sim \varepsilon$である。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

定理2,2 Aを示すかわりに，次のより一般的な定理を証明しょう。

定理2,2 B　Hamiltonian が次の形であるとする，

$$H(\gamma.\ \varphi.\ t)=H_0(\gamma)+\widetilde{H}(\gamma.\ \varphi.\ t) \quad \cdots\cdots \quad (2,32)$$

ここで，

$$\widetilde{H}(\gamma.\ \varphi.\ t)=\Sigma' H_{mn}(\gamma)\, e^{i(m\varphi+nt)},\quad \Sigma'=\sum_{m^2+n^2\neq 0}$$

は　$D(\rho_\gamma.\ \rho.\ \rho)\equiv\{(\gamma.\ \varphi.\ t)\ ;\ |\gamma|\leq\rho_\gamma=\delta^k,\ |I_m\varphi|\leq\rho,$
$|I_m t|\leq\rho\}$ で解析的であり，そこで不等式

$$|\widetilde{H}|\leq M=\delta^N \quad \cdots\cdots \quad (2,33)$$

をみたす。

又，$\dfrac{dH_0}{d\gamma}=\mu+\Omega(\gamma)$，$\Omega(0)=0$　とするとき，

$$\mu\in A_K\equiv\left\{\lambda\ ;\ |\lambda n+m|\geqq\frac{K}{(|n|+|m|)^2},\ |n|+|m|\neq 0\right\}$$

であり，$\Omega(\gamma)$ は $|\gamma|\leq\rho_\gamma$ で解析的かつ次の不等式

$$\delta<\left|\frac{d\Omega}{d\gamma}\right|<\delta^{-1} \quad \cdots\cdots \quad (2,34)$$

をみたす。

ここに，k．Nは不等式

$$4k-32>N>\frac{3}{2}k+10 \quad \cdots\cdots \quad (2,35)$$

をみたす定数。

このとき，もし定数δが十分小さければ，即ちある定数$\delta(\rho.\ K)$があって$\delta<\delta(\rho.\ K)$ならば，ϕ，tに関して周期2πをもつ$|I_m\phi.\ t|\leq\dfrac{\rho}{2}$において解析的な周期関数$R(\phi.\ t)$,$\Phi(\phi.\ t)-\phi$が存在して，トーラス　$\gamma=R(\phi.\ t)$，$\varphi=\Phi(\phi.\ t)$は系

$$\dot{\gamma}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi},\quad \dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial\gamma} \quad \cdots\cdots \quad (S)$$

に対して不変であり，かつこの上では（S）は

$$\dot{\phi}=\mu$$

となる。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

次の補題2,2Cに注意すれば，定理2,2Aが定理2,2Bから導かれることは明らかである。

補題2,2,C　$\lim_{K\downarrow 0} \text{meas} \left\{(-a, a) - \Lambda_K\right\} = 0$

ここでaは任意の正の実数，meas.は勿論，直線上のルベーグ測度。

証明は容易なので略する。

定理2,2Bの証明の為には次の補助定理がきめてである。

補助定理2,2D　定理2,2Bの仮定（2,32）〜（2,35）の下に，さらに

$$\delta < \frac{1}{2^8(1+K)} \qquad (2,36)$$

をみたすならば，正準変換F：

$$F : \bar{D}(\bar{\rho}_\gamma, \bar{\rho}, \bar{\rho}) \to D(\rho_\gamma, \rho, \rho)$$

$$(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}, t) \to (\gamma, \varphi, t)$$

$$|\gamma - \bar{\gamma}| \leq \delta^{k+9}, \quad |\varphi - \bar{\varphi}| \leq \delta^{\frac{1}{2}k} \qquad (2,37)$$

$$\left|\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{\gamma}}\right|, \left|\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{\varphi}}\right|, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\gamma}}\right|, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\varphi}}\right| < 2 \qquad (2,38)$$

が存在して，FはHamiltonian（2,32）を次の形にかえる：

$$\bar{H}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}, t) = \bar{H}_0 + \tilde{\bar{H}}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}, t) \qquad (2,39)$$

ここで

$$\tilde{\bar{H}}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}, t) = \Sigma' \bar{H}_{mn}(\bar{\gamma})\, e^{i(m\bar{\varphi}+nt)}$$

は　$\bar{D}(\bar{\rho}_\gamma, \bar{\rho}, \bar{\rho}) \equiv \{(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}, t) ; |\bar{\gamma}| \leq \bar{\rho}_\gamma = \bar{\delta}^k, |\text{Im}\,\bar{\varphi}, t| < \bar{\rho} = \rho - 3\delta\}$で解析的であり，そこで不等式

$$|\tilde{\bar{H}}| \leq \bar{M} = \bar{\delta}^N \qquad (2,40)$$

をみたす。

又，$\dfrac{d\bar{H}_0}{d\bar{\gamma}} = \mu + \bar{\Omega}(\bar{\gamma})$ とするとき，$\bar{\Omega}(0) = 0$であり$\bar{\Omega}(\bar{\gamma})$は$|\bar{\gamma}| \leq \bar{\rho}_\gamma$で解析的かつ不等式

$$\bar{\delta} \leq \left|\frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{\gamma}}\right| \leq \bar{\delta}^{-1}$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

をみたす。

ここで $\quad \bar{\delta} = \delta^{\frac{5}{4}}$ ……………………………… (2.41)

<u>証 明</u> F は関数 $\tilde{F}(\bar{\gamma}', \varphi, t) = \Sigma' F_{mn}(\bar{\gamma}')\, e^{i(m\varphi+nt)}$ と定数 γ^* を使って次のように定義される。(F, γ^* は証明中に定義される)

$$\bar{\varphi} = \varphi + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \bar{\gamma}'}, \quad \gamma = \bar{\gamma}' + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}, \qquad \bar{\gamma} = \bar{\gamma}' - \bar{\gamma}^* \qquad \cdots\cdots (2.42)$$

よく知られているように，変数を $(\bar{\gamma}, \bar{\varphi})$, $(\bar{\gamma}', \bar{\varphi})$ に変換したときのHamiltonianをそれぞれ $\bar{H}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}, t)$, $\bar{H}'(\bar{\gamma}', \bar{\varphi}, t)$ とすれば，

$$\bar{H}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}, t) = \bar{H}'(\bar{\gamma}', \bar{\varphi}, t) = \hat{H}(\bar{\gamma}', \varphi, t).$$

ここで，

$$\hat{H}(\bar{\gamma}', \varphi, t) = H(\gamma(\bar{\gamma}', \varphi, t), \varphi. t) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(\bar{\gamma}', \varphi, t).$$

明らかに

$$\hat{H}(\bar{\gamma}', \varphi, t) = H_0(\bar{\gamma}') + \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3,$$

ここで

$$\hat{S}_1(\bar{\gamma}', \varphi, t) \equiv \mu \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \tilde{H}(\bar{\gamma}', \varphi, t)$$

$$\hat{S}_2(\bar{\gamma}', \varphi, t) \equiv H_0(\gamma) - H_0(\bar{\gamma}') - \mu(\gamma - \bar{\gamma}')$$

$$\hat{S}_3(\bar{\gamma}', \varphi, t) \equiv \tilde{H}(\gamma, \varphi, t) - \tilde{H}(\bar{\gamma}', \varphi, t). \qquad (2.43)$$

$\hat{S}_1 \equiv 0$ で $\tilde{F}(\bar{\gamma}', \varphi, t)$ を定義する：

$$F_{mn}(\bar{\gamma}') = \frac{i\ H_{mn}(\bar{\gamma}')}{\mu m + n}$$

$|\tilde{F}|$ を評価しょう：後に述べる補題2.2Eを用いれば(2.33)から

$$|H_{mn}(\bar{\gamma}')| \leq M e^{-\rho(|m|+|n|)}, \quad |\bar{\gamma}'| \leq \rho_\gamma$$

故に $\mu \in \Lambda_K$ と補題2,2F（後述：以下この補助定理2,2Dに必要な補題はまとめて後に述べる）に注意すれば，

$$|F_{mn}(\bar{\gamma}')| \leq \frac{M}{K} e^{-\rho(|m|+|n|)}(|m|+|n|)^2$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$=\frac{M}{K}e^{-\frac{\delta}{2}(|m|+|n|)}(|m|+|n|)^2\ e^{-(\rho-\frac{\delta}{2})(|m|+|n|)}$$

$$\leqq\frac{M}{K}\left(\frac{2}{e}\right)^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-2}e^{-(\rho-\frac{\delta}{2})}(|m|+|n|)$$

故に，補題2,2.Eから，（2.3 6）に注意して

$$|\overline{\gamma}'|\leqq\rho_\gamma,\ |\mathrm{Im}\ \varphi.\ t|\leqq\rho-\delta\ \text{において}$$

$$|\widetilde{F}(\overline{\gamma}',\varphi,t)<\frac{M}{K}\left(\frac{2}{e}\right)^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-2}<\delta^{-5}M. \qquad (2.4\,4)$$

さて，$|\overline{\gamma}'|\leqq\frac{\rho_\gamma}{2}$ なる $\overline{\gamma}'$ に対して，写像 $T_{\overline{\gamma}'}$ ：

$$T_{\overline{\gamma}'}:\varphi\longmapsto\overline{\varphi}=\varphi+\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\overline{\gamma}'}(\overline{\gamma}',\varphi,t)$$

但し，$T_{\overline{\gamma}'}$ の定義域は $|\mathrm{Im}\ \varphi|\leqq\rho-2\delta$ とする。このとき

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\varphi}=1+\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\overline{\gamma}'\partial\varphi}\neq 0$$

である。実際，補題2,2 Gから $|\overline{\gamma}'|\leqq\frac{\rho_\gamma}{2}$, $|\mathrm{Im}\ \varphi|\leqq\rho-2\delta$

において $\left|\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\overline{\gamma}'\partial\gamma}\right|<2\delta^{-5+N-k-1}<1.$ (2.3 6)

又，同じ補題から， $\left|\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\overline{\gamma}'}\right|\leqq\delta^{-5+N-k}<\delta^2$

を得るから，補題2,2 Hによって，$T_{\overline{\gamma}'}$ は

$$|\mathrm{Im}\ \varphi|\leqq(\rho-2\delta)-4\delta^2$$

において微分同型となる。従って，$T_{\overline{\gamma}'}^{-1}$ が

$$|\mathrm{Im}\ \overline{\varphi}|\leqq(\rho-2\delta-4\delta^2)-\delta^2$$

で定義され，

$$|\mathrm{Im}\ \varphi|\leqq\rho-2\delta-4\delta^2\ .$$

故に，$5\delta^2<\delta$ に注意すれば.

$$|\overline{\gamma}'|\leqq\frac{\rho_\gamma}{2},\quad|\mathrm{Im}\ \overline{\varphi}|\leqq\rho-3\delta$$

において正準変換：

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}) \longmapsto (\gamma, \varphi)$$

が定義でき，しかも（2.4 2）と補題2, 2.Gから

$$|\gamma| \leq \frac{\rho_\gamma}{2} + \delta^{-5+N-1} \leq \frac{3}{4}\rho_\gamma$$

$$|\mathrm{Im}\ \varphi| \leq \rho - 2\delta \qquad \cdots\cdots \quad (2.4\ 5)$$

次に$\overline{H}'(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t)$を考えよう：

$$\overline{H}'(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t) = H_0(\overline{\gamma}') + S_{20}(\overline{\gamma}') + S_{30}(\overline{\gamma}') + \widetilde{S}_2(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t) + \widetilde{S}_3(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t)$$

ここで，S_{io} はFourier 級数の定数項：

$$S_{io} \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\iint \hat{S}_i(\overline{\gamma}', \varphi(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t), t)\ d\overline{\varphi}\ dt \qquad (i = 2, 3)$$

又，$\hat{S}_i(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t) = \hat{S}_i(\overline{\gamma}', \varphi(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t), t) - S_{io}(\overline{\gamma}')$

$S_i(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t) \equiv \hat{S}_i(\overline{\gamma}', \varphi(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t), t)$を評価する。

$$\left(|\overline{\gamma}'| \leq \frac{\rho_\gamma}{2}, \ |\mathrm{Im}\ \overline{\varphi}| \leq \rho - 3\delta\right.$$

（2.4 3）（2.3 4）から

$$|S_2(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t)| = |H_0(\gamma) - H_0(\overline{\gamma}') - \mu(\gamma - \overline{\gamma}')|$$

$$\leqq \left|\int_{\overline{\gamma}'}^{\gamma} \Omega(R)\, dR\right| \leq \sup_{|R| \leq \frac{3}{4}\rho_\gamma} |\Omega(R)|\, |\gamma - \overline{\gamma}'|$$

$$\leq \frac{3}{4}\rho_\gamma \sup_{|R| \leq \frac{3}{4}\rho_\gamma} \left|\frac{d\Omega}{d\gamma}(R)\right| \cdot \left|\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \varphi}\right|$$

$$\leq \frac{3}{4}\rho_\gamma \cdot \delta^{-1}\delta^{-5+N-1} = \delta^{N+K-7} \qquad \cdots\cdots \quad (2.4\ 6)$$

∴ （2.3 5），（2.4 1）から

$$|S_2(\overline{\gamma}', \overline{\varphi}, t)| \leq \frac{1}{4}\delta^{-N} = \frac{1}{4}\overline{M} \qquad \cdots\cdots \quad (2.4\ 6)$$

同様にして

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$|S_3(\bar{\gamma}', \bar{\varphi}, t)| \leq \sup_{|R| \leq \frac{3}{4}\rho_\gamma} |\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \gamma}(R, \varphi, t)| |\gamma - \bar{\gamma}'|$$

$$\leq 4\delta^{-k}\delta^{N}\delta^{N-6} \leq \frac{1}{4}\bar{\delta}^{N} = \frac{1}{4}\bar{M} \qquad \cdots\cdots (2.47)$$

$$\bar{H}_0'(\bar{\gamma}') \equiv H_0(\bar{\gamma}') + S_{20}(\bar{\gamma}') + S_{30}(\bar{\gamma}')$$

$$\tilde{\bar{H}}'(\bar{\gamma}', \bar{\varphi}, t) \equiv \widetilde{S}_2(\bar{\gamma}', \bar{\varphi}, t) + \widetilde{S}_3(\bar{\gamma}', \bar{\varphi}, t)$$

とおけば

$$\bar{H}'(\bar{\gamma}', \bar{\varphi}, t) = \bar{H}_0'(\bar{\gamma}') + \tilde{\bar{H}}'(\bar{\gamma}', \bar{\varphi}, t)$$

このとき，(2.46)，(2.47)から

$|\bar{\gamma}'| \leq \dfrac{\rho_\gamma}{2}$, $|\mathrm{Im}\ \bar{\varphi}| \leq \rho - 3\delta$ において

$$|\tilde{\bar{H}}'(\bar{\gamma}', \bar{\varphi}, t)| \leq \bar{M}。 \qquad \cdots\cdots (2.48)$$

$$\frac{d\bar{H}_0'(\bar{\gamma}')}{d\bar{\gamma}'} = \mu + \omega(\bar{\gamma}')$$

ここで，$\omega(\bar{\gamma}') \equiv \Omega(\bar{\gamma}') + \dfrac{d}{d\bar{\gamma}'}(S_{20}(\bar{\gamma}') + S_{30}(\bar{\gamma}'))$

補題2.2Gと(2.46)，(2.47)から $|\bar{\gamma}'| \leq \dfrac{\rho_\gamma}{4}$ において，

$$|\omega(0)| \leq 4\delta^{-k}(\delta^{N+K-7} + \delta^{2N-k-7})$$

$$\leq \delta^{N-8} + \delta^{2N-2k-7}$$

$$|\frac{d^2}{d\bar{\gamma}'^2}(S_{20} + S_{30})| \leq 2(4\delta^{-k})^2(\delta^{N+K-7} + \delta^{2N-K-7})$$

$$\leq \delta^{N-K-8} + \delta^{2N-3K-8} < \delta^2 \qquad ((2.35))$$

従って

$$|\frac{d\omega}{d\bar{\gamma}'}| > |\frac{d\Omega}{d\bar{\gamma}'}| - \delta^2$$

$$> \delta - \delta^2 > \frac{\delta}{2} > \bar{\delta}$$

故に，$\bar{\gamma}^*$を$\omega(\bar{\gamma}^*) = 0$ で定義すれば，

$$|\bar{\gamma}^*| < \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-1} |\omega(0)| < \delta^{k+10} \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (2.49)$$

故に（2.42）から，$|\bar{\gamma}| \leq \bar{\delta}^{k}$ ならば $|\bar{\gamma}'| \leq \frac{\rho_{\gamma}}{4}$.

ところで，$\bar{\Omega}(\bar{\gamma}) = \omega(\bar{\gamma}')$ であるから

$$\left|\frac{d\bar{\Omega}(\bar{\gamma})}{d\bar{\gamma}}\right| = \left|\frac{d\omega}{d\bar{\gamma}'}(\bar{\gamma}')\right| > \bar{\delta}$$

$$\left|\frac{d\bar{\Omega}(\bar{\gamma})}{d\bar{\gamma}}\right| < \delta^{-1} + \delta^2 < \bar{\delta}^{-1} \quad (|\bar{\gamma}| \leq \bar{\delta}^{k})$$

（2.48）から $|\bar{\gamma}| \leq \bar{\delta}^{k}$，$|\operatorname{Im} \bar{\varphi}| \leq \rho - 3\delta = \bar{\rho}$

において，

$$|\tilde{\bar{H}}(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}, t)| \leq \bar{M}.$$

以上により，（2.40），（2.41）が示された。（2.38）は明らかであり，（2.37）も（2.49）に注意すれば明らかである。

Q. E. D.

定理2,2.Bの証明

補助定理2,2.Dから，次のような正準変換 F_n（$n=1,2,\cdots\cdots$）の列がとれることは明らかである。

$$F_n : \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \gamma_{n-1} = \gamma_{n-1}(\gamma_n, \varphi_n, t) \\ \varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}(\gamma_n, \varphi_n, t) \end{pmatrix}$$

F_n は $|\gamma_n| \leq \rho_{\gamma}^{(n)} \equiv \delta_{(n)}^{k}$，$|\operatorname{Im} \varphi_n, t| \leq \rho_{(n)} \equiv \rho - 3(\delta_{(0)} + \delta_{(1)} + \cdots + \delta_{(n-1)})$ を $|\gamma_{n-1}| \leq \rho_{\gamma}^{(n-1)}$，$|\operatorname{Im} \varphi_{n-1}, t| \leq \rho_{(n-1)}$ の中に1対1に写し，

$$\left|\frac{\partial \gamma_{n-1}}{\partial \gamma_n}\right| < 2, \quad \left|\frac{\partial \gamma_{n-1}}{\partial \varphi_n}\right| < 2, \quad \left|\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \gamma_n}\right| < 2, \quad \left|\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \varphi_n}\right| < 2 \quad \text{であり，}$$

$$|\gamma_{n-1} - \gamma_n| \leq \delta_{(n-1)}^{k+9}, \quad |\varphi_{n-1} - \varphi_n| \leq \delta_{(n-1)}^{\frac{1}{2}k}$$

をみたす。そして，Hamiltonian $H(\gamma, \varphi, t) \equiv H^{(0)}(\gamma_0, \varphi_0, t)$ は $H^{(n)}(\gamma_n, \varphi_n, t) = H_0^{(n)}(\gamma_n) + \tilde{H}^{(n)}(\gamma_n, \varphi_n, t)$ に変換される。ここで，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$|\widetilde{H}^{(n)}| \leq M_{(n)} \equiv \delta_{(n)}^{N}$$

$$\frac{dH_0^{(n)}}{d\gamma_n} = \mu + \Omega_n(\gamma_n) \qquad \Omega_n(0) = 0,$$

$$\delta_{(n)} < \left|\frac{d\Omega_n}{d\gamma_n}\right| < \delta_{(n)}^{-1}$$

ここに, $\gamma_0 \equiv \gamma$, $\varphi_0 \equiv \varphi$, $\delta_{(0)} \equiv \delta$, $\delta_{(n)} = \delta^{(\frac{5}{4})^n}$

さて, $\delta_{(0)} = \delta$ を十分小さく取って,

$$3(\delta_{(0)} + \delta_{(1)} + \delta_{(2)} + \cdots) < \frac{\rho}{2} \qquad \cdots\cdots (2.50)$$

をみたすようにする。

$$C_n \equiv F_1 \cdot F_2 \cdot \cdots \cdot F_n$$

とおけば

$$C_n : \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \gamma = R_n(\gamma_n, \varphi_n, t) \\ \varphi = \Phi_n(\gamma_n, \varphi_n, t) \end{pmatrix}$$

は $|\gamma_n| \leq \rho_\gamma^{(n)}$, $|\operatorname{Im} \varphi_n, t| \leq \rho_{(n)}$ で定義されている。

(2.50) から $\rho_{(n)} > \frac{1}{2}\rho$ であるから,

任意の n に対して C_n は $\gamma_n = 0$, $|\operatorname{Im} \varphi_n, t| \leq \frac{\rho}{2}$ で定義される。

$$R_n(0, \widetilde{\varphi}, t) \equiv \widetilde{R}_n(\widetilde{\varphi}, t)$$
$$\Phi_n(0, \widetilde{\varphi}, t) \equiv \widetilde{\Phi}_n(\widetilde{\varphi}, t)$$

とおく。

$\widetilde{R}_n$, $\widetilde{\Phi}_n$ は $|\operatorname{Im} \widetilde{\varphi}, t| \leq \frac{\rho}{2}$ で一様収束することを示そう:

$$\begin{aligned} &|\widetilde{R}_n(\widetilde{\varphi}, t) - \widetilde{R}_{n-1}(\widetilde{\varphi}, t)| \\ &= |R_n(0, \widetilde{\varphi}, t) - R_{n-1}(0, \widetilde{\varphi}, t)| \\ &= |R_{n-1}(\gamma_{n-1}(0, \widetilde{\varphi}, t), \varphi_{n-1}(0, \widetilde{\varphi}, t), t) \\ &\quad - R_{n-1}(0, \widetilde{\varphi}, t)| \\ &\leq \sup\left|\frac{\partial R_{n-1}}{\partial \gamma_{n-1}}\right| \cdot |\gamma_{n-1}(0, \widetilde{\varphi}, t) \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$+\sup\left|\frac{\partial R_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}}\right|\left|\varphi_{n-1}(0,\ \tilde{\varphi},\ t)-\tilde{\varphi}\right|$$

ところで，

$$\left|\frac{\partial R_n}{\partial \gamma_n}\right|=\left|\sum_{*_i=\gamma_i \text{ or } \varphi_i}\frac{\partial \gamma}{\partial *_1}\frac{\partial *_1}{\partial *_2}\cdot\cdots\cdot\frac{\partial *_{n-1}}{\partial \gamma_n}\right|<4^n$$

同様に

$$\left|\frac{\partial R_n}{\partial \varphi_n}\right|<4^n$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{R}_n(\tilde{\varphi},\ t)-\tilde{R}_{n-1}(\tilde{\varphi},\ t)\right|\\&<4^{n-1}\left(\rho_{\gamma}^{(n-1)}+\delta^{\frac{1}{2}k_{(n-1)}}\right)<4^n\ \delta^{\frac{1}{2}k_{(n-1)}}\\&=4^n\ \delta^{(\frac{5}{4})^{(n-1)}\times\frac{1}{2}k}\end{aligned}$$

故に，δを十分小さく取れば$\tilde{R}_n$は一様収束することがわかる。$\tilde{\Phi}_n$に関しても同様である。

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\tilde{R}_n(\tilde{\varphi},\ t)=R_\infty(\tilde{\varphi},\ t)\\&\lim_{n\to\infty}\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi},\ t)=\Phi_\infty(\tilde{\varphi},\ t)\end{aligned}\right\}\qquad(2.51)$$

とすれば，従ってR_∞，Φ_∞，は$\tilde{\varphi}$，tの解析関数である。

$$R_\infty(\tilde{\varphi}+2\pi,\ t)=R_\infty(\tilde{\varphi},\ t),$$

$$\Phi_\infty(\tilde{\varphi}+2\pi,\ t)=\Phi_\infty(\tilde{\varphi},\ t)+2\pi$$

であることは明らかであろう。

次に，$\gamma=R_\infty(\tilde{\varphi},\ t)$，$\varphi=\Phi_\infty(\tilde{\varphi},\ t)$ ($\tilde{\varphi}$，$t\in R/_{2\pi Z}$)は系（S）に対して不等なトーラスをなすことを示す。

この為には，$\gamma(t\ ;\gamma_0,\ \varphi_0)$，$\varphi(t\ ;\gamma_0,\ \varphi_0)$をt＝0のとき，$\gamma=\gamma_0$，$\varphi=\varphi_0$なる系（2.36）の解とするとき，

$$\gamma\Big(t\ ;R_\infty(\tilde{\varphi}_0,\ 0),\ \Phi_\infty(\tilde{\varphi}_0,\ 0)\Big)=R_\infty(\tilde{\varphi}_0+\mu t,\ t)$$

$$\varphi\Big(t\ ;R_\infty(\tilde{\varphi}_0,\ 0),\ \Phi_\infty(\tilde{\varphi}_0,\ 0)\Big)=\Phi_\infty(\tilde{\varphi}_0+\mu t,\ t)$$

なることを示せば十分である。今，

$\gamma_n(t;\gamma_{n.0},\varphi_{n.0})$，$\varphi_n(t;\gamma_{n.0},\varphi_{n.0})$ をt＝0のとき$\gamma_n=\gamma_{n.0}$，$\varphi_n=\varphi_{n.0}$

なる系（S）$_n$：

$$\dot{r}_n = -\frac{\partial H^{(n)}}{\partial \varphi_n}, \quad \dot{\varphi}_n = \frac{\partial H^{(n)}}{\partial r_n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (S)_n$$

の解とする。変換C$_n$は正準変換であるから，（S）$_n$の解はC$_n$によって（S）の解に写る。従って，

$$\begin{aligned} & r\left(t;\tilde{R}_n(\tilde{\varphi}_0, 0), \tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_0, 0)\right) \\ &= R_n\left(r_n(t;0,\tilde{\varphi}_0), \varphi_n(t;0,\tilde{\varphi}_0), t\right) \end{aligned}$$

φについても同様である。

ここで$n\to\infty$とすれば，左辺は解の初期値に関する連続性から，$r\left(t;R_\infty(\tilde{\varphi}_0, 0), \Phi_\infty(\tilde{\varphi}_0, 0)\right)$に収束する。右辺も$R_\infty(\tilde{\varphi}_0+\mu t, t)$に近づくことを示そう：

$$\begin{aligned} & \left|R_n\left(r_n(t;0,\tilde{\varphi}_0), \varphi_n(t;0,\tilde{\varphi}_0), t\right) - R_\infty(\tilde{\varphi}_0+\mu t, t)\right| \\ \leq & \left|R_n\left(r_n(t;0,\tilde{\varphi}_0), \varphi_n(t;0,\tilde{\varphi}_0), t\right) - R_n(0, \tilde{\varphi}_0+\mu t, t)\right| \\ & + \left|R_n(0, \tilde{\varphi}_0+\mu t, t) - R_\infty(\tilde{\varphi}_0+\mu t, t)\right| \end{aligned}$$

さて，　$|r_n| \leq \frac{1}{2}\rho_n^{(n)}$，$|\mathrm{Im}\ \varphi_n, t| \leq \rho_{(n)} - \delta_{(n)}$

において，

$$\left|\frac{\partial H^{(n)}}{\partial \varphi_n}\right| = \left|\frac{\partial \tilde{H}^{(n)}}{\partial \varphi_n}\right| \leq \delta_{(n)}^{N-1}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial H^{(n)}}{\partial r_n} - \mu\right| &\leq |\Omega_n| + \left|\frac{\partial \tilde{H}^{(n)}}{\partial r_n}\right| \\ &\leq \delta_{(n)}^{k-1} + 2\delta_{(n)}^{N-k} \leq 2\delta_{(n)}^{k-1} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} & |r_n(t;0,\tilde{\varphi}_0)| \leq \delta_{(n)}^{N-1}\cdot|t| < \frac{1}{2}\rho_r^{(n)} \\ & |\varphi_n(t;0,\tilde{\varphi}_0) - (\tilde{\varphi}_0+\mu t)| \leq 2\delta_{(n)}^{k-1}|t| \\ & \qquad\qquad (|t| \leq 2\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ & \left|R_n\left(r_n(t;0,\tilde{\varphi}_0), \varphi_n(t;0,\tilde{\varphi}_0), t\right) - R_\infty(\tilde{\varphi}_0+\mu t, t)\right| \\ \leq & \sup\left|\frac{\partial R_n}{\partial r_n}\right|\cdot|r_n(t;0,\tilde{\varphi}_0)| + \sup\left|\frac{\partial R_n}{\partial \varphi_n}\right|\times \\ & |\varphi_n(t;0,\tilde{\varphi}_0) - (\tilde{\varphi}_0+\mu t)| \\ & + |R_n(0,\tilde{\varphi}_0+\mu t, t) - R_\infty(\tilde{\varphi}_0+\mu t, t)| \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$< 4^n \cdot \delta_{(n)}^{N-1} \cdot |t| + 4^n \cdot \delta_{(n)}^{k-1} |t| + |\tilde{R}_n - R_\infty|$$

$$\to 0 \qquad (n \to \infty)$$

φに関しても全く同様である。

$\varphi \equiv \phi$，$R_\infty \equiv R$，$\Phi_\infty \equiv \Phi$ とおけば証明のすべては終る。

D. E. Q.

ここで，補助定理2,2.Dの証明に用いた，補題を一括して述べる。

補題2.2.E　$f(x, y) = \Sigma f_{mn} C^{i(mx+ny)}$

(イ)　もし $|\mathrm{Im}\ x, y| < \rho$ で $f(x, y)$ が解析的であり，$|f(x, y)| < M$ をみたすならば，

$$|f_{m,n}| < MC^{-\rho(|m|+|n|)}$$

(ロ)　もし $|f_{mn}| < MC^{-\rho(|m|+|n|)}$ ならば，$f(x, y)$ は $|\mathrm{Im}\ x, y| < \rho$ で解析的であり，$0 < \delta < \rho$ なる任意の δ に対して，$|\mathrm{Im}\ x, y| < \rho - \delta$ で

$$|f(x, y)| < 16\delta^{-2} M$$

証　明　イ）の証明：　$f_{mn} = \dfrac{1}{(2\pi)^2} \iint f(x, y) e^{-i(mx+ny)} dxdy$

において，積分路を $i\rho$ にずらせばよい。

ロ）の証明：　$|f| < \sum_{mn} MC^{-\delta(|m|+|n|)} = M(1 + 2\sum_{m>0} e^{-\delta m})^2$

$$= M(1+e^{-\delta})^2 (1-e^{-\delta})^2 < 16\delta^{-2} M .$$

補題2,2 F　$\forall C > 0$ に対して，

$$e^{-c\delta} C^2 < \left(\frac{2}{e}\right)^2 \delta^{-2} \quad (\delta > 0)$$

証　明　$f(x) = x - 2\log x$　は $x = 2$ で最少値を取る。従って，$e^x / x^2 \geqq e^2 / 2^2$．

ここで $x = c\delta$ とおけばよい。

補題2,2.G　f：領域Dにおいて解析的で $|f| \leqq M$ とする。このとき，領域D $-$ δ．即ち，δー近傍全体がDに入る点全体において，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq M\delta^{-1}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| \leq 2M\delta^{-2}.$$

証 明　Cauchyの積分公式から明らか。

補題2,2.H　$A: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，連続写像，かつ，$\forall x \in D$ に対して，$|Ax - x| < \varepsilon$ $\dfrac{dA}{dx} \neq 0$ とする。このとき，AはD－4εで微分同型である。

証 明　$x, y \in D - 4\varepsilon$ かつ $Ax = Ay = z$ とする。今，中心を線分xyの中点にもち半径2εである円板 S を考えれば，SはD－εに含まれる。線分xyの像 $Axy \subset S$ は閉曲線でZを含みかつ，S の内部でZに縮みえる。仮定により，$\dfrac{dA}{dx} \neq 0$ であるから（$AD \supset D - \varepsilon$ に注意して）線分xyはその端点を動かさずに1点に縮みえる。故に $x = y$.

q. e. d.

§2.3. Kolmogorov－Arnoldの定理

前節において，我々はブランコの安定性の問題を扱かったが，今節では，Arnold〔4〕に従って，それと類似のより一般的な問題を扱おう。今節で扱かわれる一般論の理解にあたっては，本章，第1，第2節，特に第2節は参考になるので，適宜参照されることを希望する。

さて，解析的なHamiltonian $H(p, q)$ をもつ，次の正準方程式により定義される系を考えよう：

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \cdots\cdots (2.52)$$

$$p = (p_1, \cdots, p_n) \quad q = (q_1, \cdots, q_n)$$

なお，相空間（p. q）はn次元Euclid空間 $\mathbb{R}^n$ の領域Dとn次元トーラス T^n との直積であると仮定する。（$p \in D$, $q \in T^n$）$H(p, q)$ がpのみの関数である：

$$H(p, q) = H_0(p) \qquad \cdots\cdots (2.53)$$

とすれば，系（2.52）は

$$\dot{p} = 0. \quad \dot{q} = \omega(p). \quad \omega = \frac{\partial H_0}{\partial p} = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \qquad \cdots\cdots (2.54)$$

となり直ちに積分可能である。実際，$p = p_0$（一定）は不変なトーラス T_ω（$\omega = \omega(p_0)$）を与える。この T_ω 上では運動は $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ を振動数にもつ概週期運動になる。（§1.2参照）

実際問題としては，多くの場合，例えば有名な3体問題にしろ，こういう場合には帰着できない。従って，積分可能な系（2.5 3）を摂動した系

$$H(p, q) = H_0(p) + \mu H_1(p, q) + \mu^2 \cdots \qquad (2.55)$$

を考察することが重要になる。ここで μ は小さなパラメーターを表わす。問題は摂動項 $h_1(p, q) = \mu H_1(p, q) + \mu^2 \cdots$ が，$t \to \infty$ になったときの解の挙動にいかなる影響を与えるかを調べることにある。例えば，摂動系（2.5 5）の解は，非摂動系（2.5 3）の解の近くに $t \to \infty$ としたときもとどまっているであろうか？

この種の問題は種々の分野に現われるが，特に天体力学研究に対しては重要な意味をもち（第3章参照），そこでは，いわゆる摂動法により近似的に調べられていた。その方法の要点を述べれば次の通りである。

適当に正準変換 $(p, q) \to (p', q')$ をほどこして，摂動系の ovder μ の項を消す。

$$H(p, q) = H_0'(p') + \mu^2 H_1'(p', q') + \cdots \qquad (2.56)$$

かかる操作をほどこすことにより，（2.5 6）の解の，積分可能な系 $H(p, q) = H_0'(p')$ からのずれは $\mu^2 t$ の ovder になる。必要ならば，さらに正準変換をほどこし摂動項をさらに小さくする。可能なかぎりこの操作をくりかえせば，最初の系（2.5 5）は最終的に積分可能な系

$$H(p, q) = H_0^{(\infty)}(p^{(\infty)}) \qquad (2.57)$$

に帰着される。

ところがこの操作を実行するにあたって主として2つの困難にぶつかる。その1つの困難はいわゆる"小さな分母"によって起る困難である：正準変換を母関数

$$p'q + \mu S(p', q),\quad S = \sum_{k \neq 0} S_k(p')\, e^{i(k, \delta)} \qquad (2.58)$$

を使って

$$p = p' + \mu \frac{\partial s}{\partial q},\quad q' = q + \mu \frac{\partial s}{\partial p'} \qquad (2.59)$$

の形で求めよう。この変換で Hamilonian（2.5 5）は，

$$H_0(p) + \mu \overline{H}_1(p) + \mu \widetilde{H}_1(p, q) + \mu^2 \cdots$$

$$= H_0(p') + \mu \overline{H}_1(p') + \mu \left[\frac{\partial H_0}{\partial p}(p') \frac{\partial s}{\partial q}(p', q) + \widetilde{H}_1(p', q) \right] + \mu^2 \cdots \qquad (2.60)$$

と変換される。

ここで，
$$\overline{H}_1(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \oint H_1(p, q)\, dq$$

$$\widetilde{H}_1(p, q) \equiv H_1(p, q) - \overline{H}_1(p)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

故に，（2.5 6）を得るには，

$$\left(\omega(p'),\ \frac{\partial s}{\partial q}(p',\ q) \right) + \widetilde{H}_1(p',\ q) = 0$$

あるいは

$$S_k(p') = \frac{i\,h_k(p')}{(\omega(p'),\ k)},\quad \widetilde{H}_1(p,\ q) = \sum_{k \neq 0} h_k(p)\, C^{i(k,\ q)} \qquad (2.6\,1)$$

をとかなければならない。母関数SのFouvier 級数の係数の分母に現われる（$\omega(p')$，k）はある$\omega(p')$ 対して，（$\omega(p')$，k）＝0 となりえる（共鳴！）。任意の$\omega(p')$に対しても，kを適当にとれば，任意に小さくなる。かかる小さな分母の存在は，上のような正準変換の存在に疑問を投げかける。

第2の困難は，こうして得られる正準変換を次々とほどこしていった場合，変換列の収束の問題である。

もし収束すれば，Hamiltonian は（2.5 7）の形になり系は積分可能であり，相空間は最初に述べた通り，不変なドーラスT_ω達に分かれる。ところが，一般には，1次従属なωを振動数とする。即ち，退化した概週期運動をのせている不変トーラスT_ωはつぶれてしまう。一般的に言って，Siegel〔17〕が示したように，この変換列は収束しないのである。

小さな分母によっておこる困難をさける為に考えられた方法は§ 2.2.の補題 2.2 Cに類似の次の補題に基づく。

補題 2.3.A　ほとんどすべてのベクトル$\omega = (\omega_1, \cdots \omega_n) \in R^n$に対して，ある$K = K(\omega) > 0$があって任意の整数，$k = (k_1, \cdots k_n) \neq 0$ に対して，不等式

$$|(\omega,\ k)| > \frac{K}{|k|^{n+1}},\quad |k| = |k_1| + \cdots + |k_n| \qquad (2.6\,2)$$

が成りたつ。

証明は容易であるので消略する。

この補題により，ほとんどすべてのベクトルωに対して（ω，k）$\neq 0$は保証されて，さらに$1/(\omega,\ k)$は｜k｜の巾によって上からおさえられる。従って級数Sの収束が保証される。実際$|\mathrm{Im}\ q| \leq \rho$で$|H_1| \leq M$ とすれば，

$$|h_k| \leq MC^{-|k|\rho} \qquad (\text{§ 2.2. 補題 2.2.E})$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

故に$\forall\delta>0$に対して,

$$|S_k| < \frac{ML}{K\delta^{\nu}} e^{-|k|(\rho-\delta)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{§ 2.2. 補題 2.2.E})$$

従って, $|\operatorname{Im} q| < \rho$ でSは収束し, かつ $|\operatorname{Im} q| \leqq \rho - 2\delta$ で

$$|S| \leqq \frac{ML}{K\delta^{\nu}}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\quad 〃 \quad)$$

ここで, L, νはいづれもnにのみ関係する定数である。

このようにして, 級数Sはほとんどすべての$\omega(p')$に対して収束するが, しかしながら, 得られた関数Sはp'に関して致る所不連続であり, 第2の困難は依然として未解決のままである。これらの困難を解決する為にKolmogorov 〔9〕は次のようなidea を与えた。

第1は, 不等式(2.62)をみたすω^*を振動数とする概週期運動を上にのせている, 1つの不変なトーラスT_{ω^*}を非摂動系(2.54)の同じω^*を振動数にもつ不変トーラス: $p=p^*$, $\omega(p^*)=\omega^*$の近くにさがすこと。(以後ω^*は固定する)

考察を$p=p^*$の近傍にかぎる為に我々は, (2.61)において, $\omega(p')$ のかわりにω^*でおきかえることが可能となる。このとき(2.60)の右辺には, 付加項:

$$\mu\left[\left(\omega(p')-\omega^*\right)\frac{\partial s}{\partial q}(p', q)\right]$$

が加わるが, 変数pを$|p-p^*| \lesssim \mu$ に限れば, この項のorderはμ^2 になる。

次に, この近傍に解析的な正準変換$(p, q)\to(p', q')$を導入し, Hamiltonian(2.55):

$$H(p, q) = H_0(p) + h_1(p, q)$$

が

$$H(p, q) \equiv H^{(1)}(p', q') = H_0^{(1)}(p') + h_1^{(1)}(p', q')$$

ここに $|h_1^{(1)}| \sim |h_1|^2$

と変換されるようにする。このことが可能であることはすでに述べたことから明らかである。

さらに $\dfrac{\partial H_0^{(1)}}{\partial p'}(p'^*)=\omega^*$なる$p'^*$を求め(かかることが可能なる為に, 我々は $\left|\dfrac{\partial\omega}{\partial p}\right| \neq 0$の仮定をおく) p'^*の近傍 $|p'-p'^*| \lesssim |h_1^{(1)}| \sim |h_1|^2$ で同様のことをくりかえす。こうして, 摂動項は巾の速さで小さくなっていく。この急速な収束が, 変換列の収束を可能にし, 最初に言った, 不変トーラスT_{ω^*}を見い出すことを可能にする。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

このようにして，我々は次のKolmogorov ー Arnoldの定理を得ることができる。くわしくはArnold〔3〕をみよ。

定理2.3.B　Hamiltoniar $H(p,q)$は領域F：

$p \in D(\text{compact} \subset C^n)$，$|\operatorname{Im} q| \leq \rho$

で解析的であるとし，$q=(q_1 \cdots q_n)$ に関して週期2πをもつとする。

$$H = H_0(p) + H_1(q, q)$$

とし，領域Fにおいて

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_j \partial p_j}\right) \neq 0$$

とすれば，任意の$\varepsilon > 0$ に対して $M = M(\varepsilon, F, H_0) > 0$ があって，もし領域Fにおいて，

$$|H_1(p, q)| \leq M$$

ならば，次の正準方程式：

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \cdots\cdots (2.63)$$

により定義される運動は次の性質をもつ：

(1°)　領域$\operatorname{Re} F = \{p \in F\ ;\ p$は real$\}$は次のように分割される：

$$\operatorname{Re} F = F_1 + F_2$$

ここで，F_1 は (2.63) に対して不変であり，F_2 は小さい：

$$\text{meas.}\ F_2 \leq \varepsilon\ \text{meas}\ \operatorname{Re} F$$

(2°)　F_1 はn次元解析的不変トーラスT_ω達に分割される。ここでT_ωはパラメーターQを使って次のように定義される：

$$p = p_\omega + f_\omega(Q), \qquad q = Q + g_\omega(Q)$$

ここで，f_ω, g_ωは$Q=(Q_1, \cdots, Q_n)$ に関して週期2πをもつ解析関数であり，ωはトーラスT_ωを決定するパラメーターである。

(3°)　不変トーラスT_ωはトーラス$p = p_\omega$からほとんどはなれない：

$$|f_\omega(Q)| < \varepsilon, \qquad |g_\omega(Q)| < \varepsilon.$$

(4°)　運動 (2.63) はトーラスT_ωの上では$\omega=(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ を週期にもつ概週期運動である：

$$\dot{Q} = \omega, \qquad \omega = \frac{\partial H_0}{\partial p}(p_\omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第3章 制限3体問題

力学系の近代的な理論は－flow の理論にせよ，いわゆる力学系のglobal theoryにしる―いづれも3体問題，即ちNewton の引力の法則に従って動く3つの質点の運動を調べる問題に端を発したと言ってもよい。本章では制限3体問題のいわゆるLagrange の平衡点の安定性の問題を扱う。

§3.1. 制限3体問題とLagrangeの平衡点

Newton の引力の法則に従いながら，平面上を運動する質量m_1，m_2，m_3 を有する質点p_1，p_2，p_3 を考える。今質点p_k （$k=1,2,3$）の座標を（x_k，y_k） とする。引力定数を1に正規化すれば運動方程式は：

$$m_k \ddot{x}_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k}$$
$$(k=1,\cdots,n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$
$$m_k \ddot{y}_k = -\frac{\partial U}{\partial y_k}$$

ここで

$$U \equiv -\sum_{1\leq k<l\leq 3} \frac{m_k m_l}{\sqrt{(x_k-x_l)^2+(y_k-y_l)^2}}$$

我々は，ここでさらに$m_3\to 0$とし，残る2体，p_1，p_2 はそれらの重心の回りを角速度ωで円軌動を描きながら動いていると仮定する。制限3体問題は質点p_3 の運動の状況，特に平衡点の付近の様子を問題にする。

さて，p_1，p_2 の重心を原点にし，角速度ωで回転する回転座標系において，p_3 の座標を（x，y）とすれば，（x，y）は次の方程式をみたす：

$$\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2 x=\frac{\partial U'}{\partial x}$$

$$\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2 y=\frac{\partial U'}{\partial y} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

ここで，

$$U' \equiv \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2},$$

$$\rho_k \equiv \sqrt{(x - x_k)^2 + y^2}, \quad (k = 1, 2)$$

$(x_k, 0)$ は P_k の座標.

今，簡単化の為に，$m_1 + m_2 = 1$，$x_2 - x_1 = 1$ と正規化し，$m_1 = 1 - \mu$，$m_2 = \mu$ とおけばKepler の法則から $\omega = 1$，従って運動方程式（3.2）は：

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \cdots\cdots (3.3)$$

ここで，

$$V = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}$$

この方程式（3.3）の平衡点を調べよう。それにはVのcritical point：

$$\frac{\partial V}{\partial x} \equiv x - \frac{(1-\mu)(x - x_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(x - x_2)}{\rho_2^3} = 0 \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \equiv y - \frac{(1-\mu)y}{\rho_1^3} - \frac{\mu y}{\rho_2^3} = 0 \qquad \cdots\cdots (3.5)$$

を見つければよい。

p_1，p_2 の重心が原点：$(1-\mu)x_1 + \mu x_2 = 0$ に注意すれば，$x_2 - x_1 = 1$ から，$x_1 = -\mu$，$x_2 = 1 - \mu$. このことから，方程式（3.4），（3.5）はそれぞれ

$$x\left(1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) + \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3}\right) = 0 \qquad \cdots\cdots (3.4)'$$

$$y\left(1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) = 0. \qquad \cdots\cdots (3.5)'$$

となる。（3.5）′ から次の2つの場合，（A），（B）にわかれる。

（A） $y = 0$ の場合：

方程式（3.4）′ をとくと次の3つの解が存在する：

（i） $x_2 < x$ （L_1）

（ii） $x_1 < x < x_2$ （L_2）

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

(iii) $x < x_1$ (L_3)

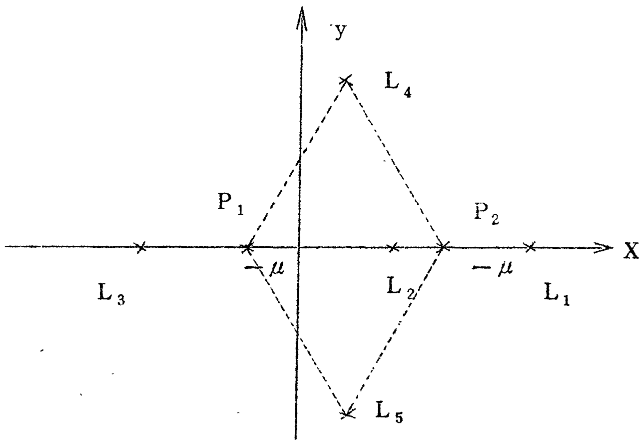
(B) $y \neq 0$ 即ち $\left(1-\frac{1-\mu}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}\right) = 0$ の場合：

方程式（3.4）′から簡単に

$$\rho_1 = \rho_2 = 1$$

がでる。この場合，p_1 ，p_2 を底辺とする正三角形の頂点に位置する。この解を Lagrange の正三角形解といい，この点を L_4 ，L_5 で示す。

以上をまとめれば，制限３体問題の平衡点は全部で５つあって（それらをLagrange の平衡点といい，略してL－point と呼ぶ）それらは下図（3.6）の通りである。



（3.6）

§3.2. 平衡点 L_4 ，L_5 .

次に我々はL－pointの付近の様子をさらにくわしく調べよう。さて，(x_0, y_0) を１つのL－pointの座標とし，その点からの p_3 の小さなずれを (ξ, η) で表わそう。V_x , V_y を (x_0, y_0) のまわりに変数 (ξ, η) でTaylor展開して方程式（3.3）に代入すれば次の方程式をうる：

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \xi(V_{xx})_0 + \eta(V_{xy})_0 + \cdots$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \xi(V_{yx})_0 + \eta(V_{yy})_0 + \cdots \qquad (3.7)$$

ここで，$(\quad)_0$ はカッコの中の量の点 (x_0, y_0) における値を示す。

ベクトル $\mathbb{X} = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \xi, \eta)$ を使って方程式（3.7）を書きかえれば：

$$\dot{\mathbb{X}} = A\mathbb{X} + O(|\mathbb{X}|^2) \qquad (3.8)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

ここに，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & (V_{xx})_0 & (V_{xy})_0 \\ -2 & 0 & (V_{yx})_0 & (V_{yy})_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aの固有値は次の固有方程式の根である：

$$\left(\lambda^2-(V_{xx})_0\right)\left(\lambda^2-(V_{yy})_0\right)+\left(2\lambda+(V_{xy})_0\right)\left(2\lambda-(V_{yx})_0\right)=0 \qquad \cdots\cdots (3.9)$$

さて，L_4 においては：

$$(V_{xx})_0=1-\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}+\frac{3(1-\mu)(x-x_1)^2}{\rho_1^5}+\frac{3\mu(x-x_2)^2}{\rho_2^5}=\frac{3}{4}$$

$$(V_{yy})_0=1-\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3}-\frac{\mu}{\rho_2^3}+\frac{3(1-\mu)y^2}{\rho_1^5}+\frac{3\mu y^2}{\rho_2^5}=\frac{9}{4}$$

$$(V_{xy})_0=(V_{yx})_0=\frac{3(1-\mu)(x-x_1)y}{\rho_1^3}+\frac{3\mu(x-x_2)y}{\rho_2^3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}-\mu\right)$$

従って方程式（3.9）は

$$4\lambda^4+4\lambda^2+27\mu(1-\mu)=0$$

$$\therefore\quad \lambda^2=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)} \qquad \cdots\cdots (3.10)$$

平衡点が安定*)である為には，Aの固有値が純虚数であることが必要である。**) 従って，

$$\mu(1-\mu)<\frac{1}{27} \qquad (3.11)$$

μが不等式（3.11）をみたす時，平衡点L_4（L_5 も全く同様）は安定である可能性がある。この問題は又，後で扱かわれるであろう。

ついでながら残りの平衡点L_1，L_2，L_3 についても，同様のAの固有値を調べてみると，正の実固有値をもつことがわかる。従ってL_1，L_2，L_3 はいづれも不安定である。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

*) 定義については第2章第1節(§2.1)を参照せよ。

**) Aの固有値で，純虚数でないものがあれば，1次系：

$$\dot{\mathbb{X}} = A\mathbb{X}$$

は不安定な，即ち，$t \to \infty$ あるいは $t \to -\infty$ になるに従って無限に遠くに逃げ去る解があることはすぐわかる。このとき，系（3.8）も不安定であることが示される。

§3.3. 標準形への移行，Birkhoffの定理

本節では，制限3体問題をはなれて一般論を展開する。即ち，平衡点をもつHamiltonianに適当な正準変換をほどこして，"標準形"にもっていくことを考えよう。

さて，原点を平衡点にもつHamiltonian 系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \frac{\partial H}{\partial y_k} \\ & \qquad\qquad k=1, \cdots, n \\ \dot{y}_k &= -\frac{\partial H}{\partial x_k} \end{aligned} \qquad (3.12)$$

ここで，

$$H = H^{(2)}(x, y) + H^{(3)}(x, y) + \cdots \qquad (3.13)$$

($H^{(s)}(x, y)$ は $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$ に関してS次の項を示す。)

方程式（3.12）を線型化した方程式：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(0, 0), & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}(0, 0) \\ \\ -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, 0), & -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}$$

は安定であると仮定する。即ち，右辺に現われる2n次行列 A_H の固有値はすべて純虚数 i. e. $\lambda_k = i\alpha_k$，$\lambda_{k+n} = -i\alpha_k$ ($k=1, \cdots, n$) であるとする。このとき我々は次の定理をえる。

<u>定理3.3.A</u>　もし行列 A_H のすべての固有値が純虚数，即ち，

$$\lambda_k = i\alpha_k, \ \lambda_{k+n} = -i\alpha_k \qquad k=1, \cdots, n$$

でかつ，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

すべての $0 < \sum_{k=1}^{n} |g_k| \leq N$ なる整数 $g_1, \cdots, g_n$

に対して $\sum_{k=1}^{n} g_k \alpha_k \neq 0$ ……………… (3.14)

とする。このとき，正準変換：$(x, y) \to (\xi, \eta)$ があって，原点の近傍で $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$，$\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ に関して，Hamiltonian(3.13) は次の形に変換される：

$$H = H^{(2)}(R) + H^{(3)}(R) + \cdots + H^{(N)}(R) + O_{N+1} \quad \cdots\cdots\cdots (3.15)$$

ここで，

$$R = (R_1, \cdots, R_n), \quad R_k = \xi_k^2 + \eta_k^2$$

O_{N+1} は (ξ, η) に関して order $N+1$ 以上の項よりなる。

証　明　よく知られているように適当な(正準)1次変換により，Hは次の形に変換される：

$$H = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{2}(x_\nu^2 + y_\nu^2) + H^{(3)}(x, y) + \cdots$$

$$= \sum_{\nu} \frac{\alpha_\nu}{2} R_\nu + O_3$$

さて，求める正準変換を母関数

$$W(x, \eta) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \eta_\nu + W^{(3)}(x, \eta) + \cdots + W^{(s)}(x, \eta) + \cdots \quad \cdots\cdots\cdots (3.16)$$

を使って

$$\xi_\nu = \frac{\partial W}{\partial \eta_\nu}, \quad y_\nu = \frac{\partial W}{\partial x_\nu} \quad \cdots\cdots\cdots (3.17)$$

の形で求め，この変換で，$H(x, y)$ は求める形をもった $\Gamma(\xi, \eta)$ に変換されたとする。即ち，次の方程式をWについてとこう：

$$H(x, W_x) = \Gamma(W_\eta, \eta) \quad \cdots\cdots\cdots (3.18)$$

$W^{(2)}$ はすでに $\Gamma^{(2)}$ が求める形になるように定めてあるから，$W^{(3)} \cdots W^{(s-1)}$ もすでに，$\Gamma^{(3)}, \cdots, \Gamma^{(s-1)}$ が求める形をもつように定められていると仮定し，$W^{(s)}$ を $\Gamma^{(s)}$ が求める形をもつように決めよう。その為に(3.18)のS次の項をくらべよう：

$$DW^{(s)}(x, \eta) + \Gamma^{(s)}(x, \eta) = P^{(s)}(x, \eta) \quad \cdots\cdots\cdots (3.19)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

ここに

$$D \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \left(x_\nu \frac{\partial}{\partial \eta_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)$$

であり，$P^{(s)}(x, \eta)$はHと$W^{(2)}$，…，$W^{(s)}$から決まるS次の斉次多項式である。

方程式（3.1 9）をとく為にすべての多項式を複素変数$\zeta_\nu = x_\nu + i\eta_\nu$，$\bar{\zeta}_\nu = x_\nu - i\eta_\nu$を使って書き表わしておく。

$$D\left(\prod_{D=1}^{n} \zeta_\nu^{k_\nu} \bar{\zeta}_\nu^{l_\nu}\right) = i\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu (k_\nu - l_\nu)\right) \prod_{D=1}^{n} \zeta_\nu^{k_\nu} \bar{\zeta}_\nu^{l_\nu} \qquad (3.2\,0)$$

即ち，$\prod_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^{k_\nu} \bar{\zeta}_\nu^{l_\nu}$はDの固有値$i\left(\sum_\nu \alpha_\nu (k_\nu - l_\nu)\right)$に属する，固有多項式であることと，

$$\prod_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu^{k_\nu} \bar{\zeta}_\nu^{k_\nu} = \prod_{\nu=1}^{n} (x_\nu^2 + \eta_\nu^2)^{k_\nu} \qquad (3.2\,1)$$

であることに注意して，多項式$P^{(s)}$を（3.2 1）の形をしている項をすべて含む部分$P_N^{(s)}$と残りの$P_R^{(s)} = P^{(s)} - P_N^{(s)}$とに分ける。このとき，方程式（3.1 9）は次の方程式と同値であることは容易にわかる：

$$DW^{(s)} = P_R^{(s)}, \quad \Gamma^{(s)} = P_N^{(s)} \qquad (3.2\,2)$$

第1の方程式は（3.2 0）に注意すれば容易にとける。

$\left(\sum \alpha_\nu (k_\nu - l_\nu) \neq 0 !\right)$ 又第2の方程式から，明らかに$\Gamma^{(s)}$は求める形をしている。

さて，この操作は$S = \sum_{\nu=1}^{n} (|k_\nu| + |l_\nu|) \leq N$になるまで行うことができる。又，Hが実関数の場合，母関数Wも実にとることができる。即ち，正準変換は実であることは容易に確かめえる。

q. e. d.

§3.4. L_4（L_5）の安定性．Arnold－Mosevの定理

L－point，L_4（L_5）の安定性の問題に戻ろう。

§3.2に示したごとく，もし

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}$$

ならば，方程式（3.8）の行列Aの固有値は純虚数であった。それを今，$i\alpha_1$，$i\alpha_2$，$-i\alpha_1$，$-i\alpha_2$とする。（行列Aは実行列であることに注意！）§3.3の結果を使う為に系（3.3）をHamiltonian 系にもっていこう。詳細については省略するが，$x = x_1$，$y = x_2$とその正

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

準共役変数，y_1，y_2 をもちい，さらに，原点をL_4 にもっていけば，系（3.3）は次のHamiltonian をもつ系に変換される：

$$H = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\alpha_\nu}{2} (x_\nu^2 + y_\nu^2) + H^{(3)}(x, y) + \cdots \qquad (3.23)$$

ここで，2次の項の係数α_1，α_2 は勿論上のα_1，α_2 と同一のものである。

さて，我々はここで，α_1，α_2 は次の条件をみたすものと仮定する： $0 < |g_1| + |g_2| \leq 4$ なる任意の整数，g_1，g_2 に対して

$$g_1 \alpha_1 + g_2 \alpha_2 \neq 0 \qquad (3.24)$$

この仮定の下で，前節の定理3.3.Aを使えば，Hamiltonian（3.23)は次の形にかきえる

$$H = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\alpha_\nu}{2} R_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{2} \frac{\beta_{\nu\mu}}{4} R_\nu \cdot R_\mu + O_5 \qquad (3.25)$$

ここで，$R_\nu = x_\nu^2 + y_\nu^2$，$O_5$ は5次以上の項よりなる。

次の定理はArnold〔4〕による。

定理3.4.A　もし，（3.25）をHamiltonian にもつ系に対して，

$$D \equiv \det \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_1 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv -(\beta_{11}\alpha_2^2 - 2\beta_{12}\alpha_1\alpha_2 + \beta_{22}\alpha_1^2) \neq 0 \qquad (3.26)$$

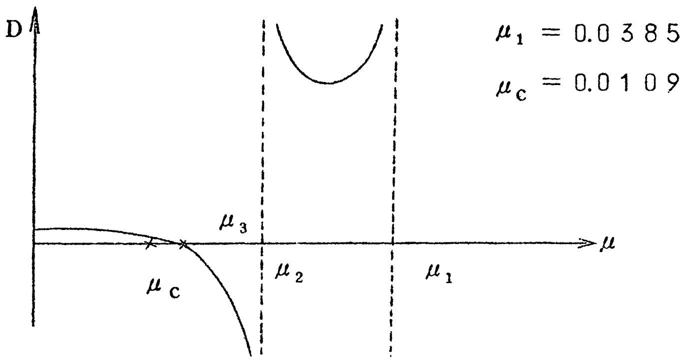
ならば，$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ (L_4)は安定な平衡点である。

注意　Dを実際に計算することは，かなり面倒であるが，制限3体問題のL_4 の場合，Deprit〔7〕によれば，Dは次式により与えられる。

$$D = -\frac{1}{8} \frac{36 - 541\alpha_1^2\alpha_2^2 + 644\alpha_1^4\alpha_2^4}{(1 - 4\alpha_1^2\alpha_2^2)(4 - 25\alpha_1^2\alpha_2^2)}$$

α_1，α_2 は勿論，パラメーターμの関数であって，Dをμを関数として，だいたいの様子をグラフに描けば，$0 < \mu < \mu_1$ $\left(\mu_1(1-\mu_1) = \frac{1}{27},\ \mu_1 < \frac{1}{2}\right)$なる$\mu$に対して，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123



従って，$0 < \mu < \mu_1$ なるμに対して，もし

$$\mu \fallingdotseq \mu_2\ ,\ \mu_3\ ,\ \mu_c$$

（$\mu = \mu_2$ ，μ_3 では条件（3.2 4）が破れる。）

ならばLagrangeの平衡点L_4 （L_5 ）は安定である。

定理3.4Aの証明の為には，第2章第2節で与えた定理2.2Bと類似の次のMoserのtwist mapping theremが必要である。我々はここでそれを証明なしに与えよう。
〔詳しくは Moser〔11〕をみよ〕

定理3.4.B　$M_\varepsilon : (R, \theta) \to (R_1, \theta_1)$

を

$$R_1 = R + \varepsilon^\sigma f(R, \theta, \varepsilon)$$

$$\theta_1 = \theta + \alpha + \varepsilon^\rho \gamma(R) + \varepsilon^\sigma g(R, \theta, \varepsilon) \qquad (3.27)$$

で与えられる円環（$1 \leqq R \leqq 2$ ，θ : mod 2π ）で定義される写像とする。ここに，$0 \leqq \rho < \sigma$ であり，f，gはθに関して週期2πをもつ関数とする。

もし，$\dfrac{d\gamma}{dR} \fallingdotseq 0$で$R = 1$ を囲む任意の閉曲線Cに対して，その像$M_\varepsilon C$とCが互いに交わり，（例えばM_εが面積を不変にするならば）かつ関数f，gが十分に高い階数まで微分可能であれば，十分小さいεに対して，$R = 1$を囲む（M_εに関して）不変な閉曲線Γが存在する。より正確には，

εを十分小さくとれば，$\gamma(1)$と$\gamma(2)$の間にあって，任意の整数，p，$q \fallingdotseq 0$に対して不等式

$$\left| \frac{\omega}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| > K \, | q |^{-\frac{5}{2}}$$

をみたすような任意のωに対して，写像M_εに対して不変な微分可能な閉曲線Γ_ω：

$$R = F_\omega(\phi, \varepsilon)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\theta = \phi + G_{\omega}(\phi,\ \varepsilon) \qquad \cdots\cdots \qquad (3.28)$$

ここで，F_{ω}，G_{ω}はϕに関して週期2πをもつ

が存在する。この閉曲線Γ_{ω}上の点のM_{ε}による変換はϕを$\phi+\omega$におきかえることと同値である。

定理3.4.Aの証明　変数x，yを$\frac{x}{\varepsilon}$，$\frac{y}{\varepsilon}$でおきかえると，Hamiltonian（3.25）は次のFにおきかえられる：

$$F = \varepsilon^{-2}H(\varepsilon x,\ \varepsilon y) = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\alpha_{\nu}}{2} R_{\nu} + \varepsilon^{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{2} \frac{\beta_{\nu\mu}}{4} R_{\nu} R_{\mu} + O(\varepsilon^{3}) \qquad \cdots\cdots \qquad (3.29)$$

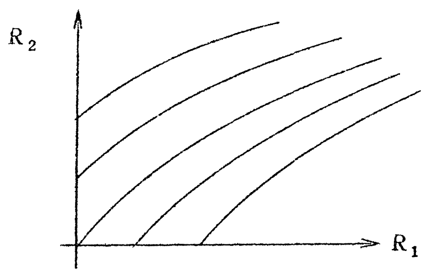
又，正準方程式は

$$\dot{R}_{\nu} = 2F_{\theta_{\nu}} = O(\varepsilon^{3})$$

$$\dot{\theta}_{\nu} = -2F_{R\nu} = -(\alpha_{\nu} + \varepsilon^{2} \sum_{\mu=1}^{2} \beta_{\nu\mu} R_{\mu}) + O(\varepsilon^{3}) \qquad \cdots\cdots \qquad (3.30)$$

ここで，$\theta_{\nu} = \tan^{-1} \frac{y_{\nu}}{x_{\nu}}$

エネルギー曲面：F＝一定はコンパクトな曲面ではない。〔$\alpha_1\ \alpha_2 < 0$ であることに注意する。$\alpha_1\ \alpha_2 > 0$ であれば，Hamiltonian（3.25）の二次の項は定符号になって安定性は直ちに出てくる。幸か不幸か，L_4 においてはそうでない！〕実際，F＝0は平衡点$x_{\nu} = y_{\nu} = 0$を通る，3次元面を定める。〔図（3.31）を参照〕



（3.31）

我々は，一つのエネルギー曲面：

$$F = C, \qquad ここで\ |c| < \frac{|\alpha_1|}{2} \qquad \cdots\cdots \qquad (3.32)$$

を考えよう。問題は，解曲線（軌道）がこれらのエネルギー曲面上で，遠くに逃げ去らないことを示すことにある。

さて，$R_1 = R$，$\theta_1 = \theta$，θ_2 を独立変数にして用い，（3.32）からR_2を求めれば，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$R_2 = \Phi(R, \theta, \theta_2) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(R - \frac{2c}{\alpha_1}\right) + O(\varepsilon^2) \qquad \cdots\cdots (3.3\,3)$$

これは，もし　$R = R_1$ を

$1 \leqq R \leqq 2$

に制限すれば，（3.3 2）から，十分小さい ε に対しては正である。

〔注意 ― $1 \leqq R \leqq 2$　は，元の変数 x，y にかえれば，

$\varepsilon^2 \leqq x_1^2 + y_1^2 \leqq 2\varepsilon^2$ を示す。〕

t のかわりに θ_2 を独立変数に用いれば，（3.3 0）から，

$$\frac{dR}{d\theta_2} = -\frac{F_\theta}{F_{R_2}}, \quad \frac{d\theta}{d\theta_2} = \frac{F_R}{F_{R_2}}. \qquad \cdots\cdots (3.3\,4)$$

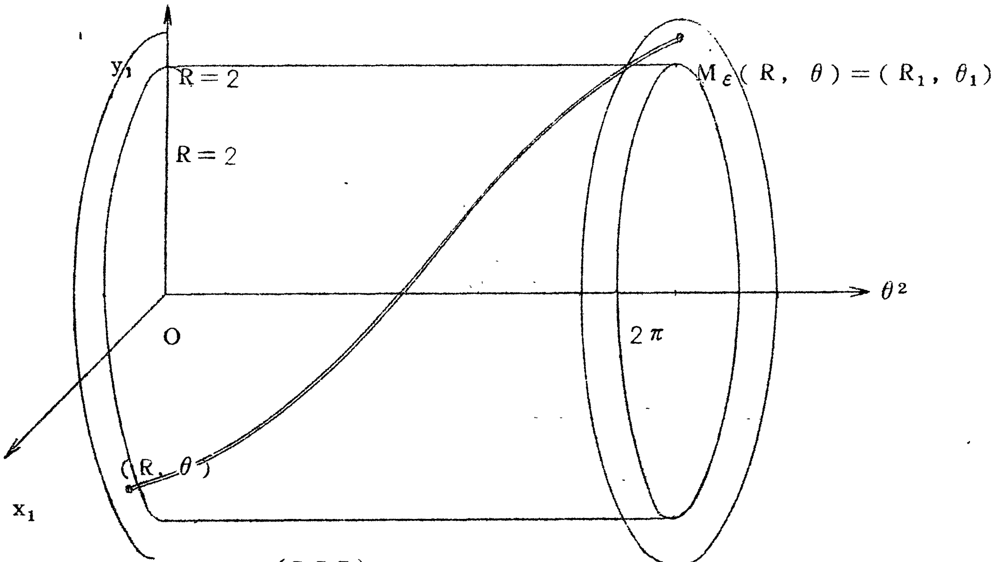
F = C の上では，この方程式は（3.3 3）から，

$$\frac{dR}{d\theta_2} = \Phi_\theta, \quad \frac{d\theta}{d\theta_2} = -\Phi_R. \qquad \cdots (3.3\,4)'$$

系（3.3 4）は自由度 1 の non－autonomous な Hamilton 系である。この系をとくことによって，我々は，円環（$1 \leqq R \leqq 2$，θ：mod 2π）上の写像 M_ε を次のように定義する。即ち，$\theta_2 = 0$ の点（R，θ）を通る解と $\theta_2 = 2\pi$ との交わりを（R_1，θ_1）とするとき，

$$M_\varepsilon(R, \theta) = (R_1, \theta_1)$$

で M_ε を定義する。（図（3.3 5）参照）



（3.3 5）

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

写像M_εを求める為に，（3.3 4）を（近似的に）解けば，

$$R_1 = R + O(\varepsilon^3)$$

$$\theta_1 = \theta + 2\pi \frac{F_{R_1}}{F_{R_2}} + O(\varepsilon^3)$$

$$= \theta + 2\pi \frac{\alpha_1 + \varepsilon^2 (\beta_{11} R_1 + \beta_{12} R_2)}{\alpha_2 + \varepsilon^2 (\beta_{12} R_1 + \beta_{12} R_2)} + O(\varepsilon^3) \qquad (3.3\,6)$$

$R_2 = \Phi(R, \theta, \theta_2)$を消去すれば，

$$\theta_1 = \theta + 2\pi \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{4\pi c\,\varepsilon^2}{\alpha_2^2}(\alpha_2 \beta_{12} - \alpha_1 \beta_{22}) - \frac{2\pi\varepsilon^2}{\alpha_2^2} DR + O(\varepsilon^3)$$

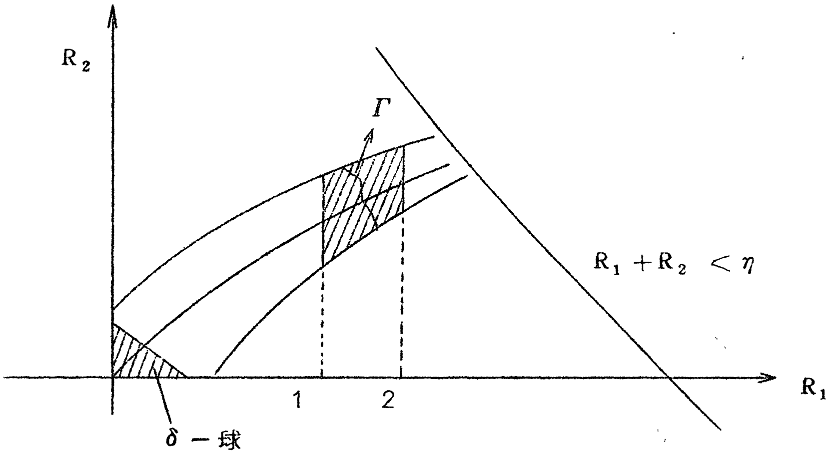
ここで，Dは定理3.4.Aの行列式（3.2 6）である。

我々は，この写像M_εに定理3.4.Bを適用することができる。$\frac{d\gamma}{dR} \neq 0$は$D \neq 0$により保障されるし，系（3.3 4）はHamiltonian系であったから，M_εはLiouvilleの定理により，面積$\int R\,d\theta$を保つ。従って，定理の条件はすべてみたされる。故に，$R=1$と$R=2$を分つ不変な閉曲線Γが（εを十分小さくとれば）存在する。このことから容易に，$\theta_2 = 0$に対して，この閉曲線Γの内部から出発する解曲線は，永久にΓの内部にとどまることがわかる。

このことが実際に，原点$x_\nu = y_\nu = 0$の安定性を保障することを次に示そう。

領域　$|F| < \frac{|\alpha_1|}{2}$,　$1 \leq R_1 \leq 2$ （3.3 7）

を考える。今示したことから，この中に，Fの各々の値に対して，不変な閉曲線，Γを見つけることができる。（図（3.3 8）を参照）



（3.3 8）

安定性をみる為に，原点の任意の近傍：

$$\sum_{\nu=1}^{2} (x_\nu^2 + y_\nu^2) < \eta \qquad (3.3\,9)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

を考える。$R_\nu = \varepsilon^{-2}(x_\nu^2 + y_\nu^2)$ であったから，εを十分小さくとれば，領域（3.37）はこの近傍に含まれる。$\delta=\delta(\eta)$を十分小さくとって，δ一球：

$$R_1 + R_2 < \delta$$

において，$|F| < \frac{|\alpha_1|}{2}$ であるようにすれば，明らかに，δ一球から出発する。解曲線は，領域 $|F| \leq \frac{|\alpha_1|}{2}$, $R_1 \leq 2$ から出ることはない。従って，与えられた近傍（3.39）から決して出ることはない。これは原点 $x_\nu = y_\nu = 0$ の安定性を示すものである。

q. e. d.

文　献

〔1〕 Abraham, R.：Foundations of Mechanics；Benjaminn, New York.（1967）

〔2〕 Arnold, V.：Small denominators I；Izv. Akad. Nauk. serie. Math. 25. 1.（1961）p21−86≅T. A. M. S. vol 46（1965）p213−284.

〔3〕 ―――――：Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov；Usp. Math. Nauk. V18N5（1963）p13−40≅Russ. Math. Surveys vol18N5（1963）p9−36.

〔4〕 ―――――：Small denominators Ⅲ；Usp. Math. Nauk. V18 N6（1963）p91∼196≅Russ. Math. Surveys vol18N6（1963）p85−193

〔5〕 ―――, Avez. A.：Problèmes ergodiqnes de la mécanique classique；Gauthier−Villars, Paris（1967）.

〔6〕 Birkhoff, G.：Dynamical systems；New York（1927）.

〔7〕 Deprit, A.：Stability of the Triangular Lagrangian Points；The Astronomical Journal. vol72N2 p173−179.

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

〔8〕 Ikada, N., Hida, T., Yoshizawa, H. : Flowの理論(上) Sem. on Prob. vol 12

〔9〕 Kolmogorov, A. : General theory of dynamical systems and classical mechanics, Amsterdam congress VI (1953) p315−333≅Appevdix D of Abraham 〔1〕

〔10〕 Landau, L., Lifshitz E. : 力学, 東京図書.

〔11〕 Moser, J. : On invariant curves of area−preserring mapping of an annulus, Nachr. Acad. Wissen. Göttingen N1 (1962).

〔12〕 ―――――― : A rapidly convergent iteration method and non−linear Partial differential equations. I. II. ; Ann Scuola. Normale. Sup. Pisa (1966) p265−315(I), p499−535(II)

〔13〕 ―――――― : Lectures on Hamiltonian Systems ; A. M. S. (1968)

〔14〕 Niwa, T. : Classical flows with discrete spectra ; to appear.

〔15〕 ―――――― : Proof of a theorem of V. I. Arnold : 京大修士論文 (1968).

〔16〕 Siegel, C. : Vorlesungen über Himmelsmechanik ; Springer. Berlin (1956).

〔17〕 ―――――― : Über die Existenz der einer Normalform analytischer Hamiltonsche Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung ; Math. Annalen. 128 (1954) p144−170

〔18〕 Whittacker, E. : Analytical dynamics ; Cambridge, (1927).

〔19〕 Yamanouchi, T. : 一般力学 ; 岩波

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第 II 部

C－system

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

§0 序　　文

第2部において，最近くわしく研究されているC－systemについてまとめたいと思う。しかし，なにぶんにも分野が広いので，著者の力量と読者の分野を考慮して，対象を計量的な分野に限ることにし，位相的な分野に対しては簡単に結果だけを述べるにとどめた。

C－system は最初，Anosovによって導入されたもので，定負曲率を持ったコンパクト・リーマン多様体上のgeodesic flowをモデルにしたものであり，取り扱い方が簡単で，かなり一般的であるため非常にくわしく研究されている。

C－system に関する論文は多くあるが，本書は特に次の3つに負う所が大きい。興味のある読者はお読になると良いと思う。D. V. Anosov〔2〕，V. I. Arnold and A. Arez〔3〕，A. Arez〔6〕.

予備知識としては十時〔10〕の内容を仮定した。だから本書で定義されていない言葉は〔10〕を参照してもらいたい。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

目　　　　　次

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第 1 章　定義と簡単な性質

§1　定義とC－構成

1. まずC－systemを定義しよう。Mをn次元コンパクト連結微分可能多様体，φをM上のdiffeomorphismとする。

定義1.1　(M, φ)がC－diffeomorphismであることは次のような2つのtangent plane field $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$が存在するときにいう。

(D, 1)　$TM_p=\mathfrak{X}_p\oplus\mathfrak{Y}_p$, $p\in M$

$\dim\mathfrak{X}_p=k\neq 0$, $\dim\mathfrak{Y}_p=l\neq 0$

(D, 2)　Mに適当な計量を入れて，任意の正整数nに対し，正定数a，b，λが存在して，

$$\xi\in\mathfrak{X}_p\text{に対し，}\ \|(\varphi^n)_*\xi\|\geq ae^{\lambda n}\|\xi\|,\ \|(\varphi^{-n})_*\xi\|\leq be^{-\lambda n}\|\xi\| \quad (1,1)$$

$$\xi\in\mathfrak{Y}_p\text{に対し，}\ \|(\varphi^n)_*\xi\|\leq be^{-\lambda n}\|\xi\|,\ \|(\varphi^{-n})_*\xi\|\geq ae^{\lambda n}\|\xi\|, \quad (1,2)$$

ここでTM_pはpにおけるMの接空間，φ_*はφの微分である。

ZをM上の完備ベクトル場とし，$\varphi_t=\mathrm{Exp}\,tZ$と置く。

定義1.2　(M, φ_t, Z)がC－flowであるとは次のような2つのtangent plane field $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$が存在するときにいう。

(F. 1)　$Z_p\neq 0$, $p\in M$

(F. 2)　$TM_p=\mathfrak{X}_p\oplus\mathfrak{Y}_p\oplus Z_p$

$\dim\mathfrak{X}_p=k\neq 0$, $\dim\mathfrak{Y}_p=l\neq 0$

(F. 3)　Mに適当な計量を入れて，任意の正の実数tに対し，正定数a，b，λが存在して，

$$\xi\in\mathfrak{X}_p\text{に対し，}\ \|(\varphi_t)_*\xi\|\geq ae^{\lambda t}\|\xi\|,\ \|(\varphi_{-t})_*\xi\|\leq be^{-\lambda t}\|\xi\| \quad (1,3)$$

$$\xi\in\mathfrak{Y}_p\text{に対し，}\ \|(\varphi_t)_*\xi\|\leq be^{-\lambda t}\|\xi\|,\ \|(\varphi_{-t})_*\xi\|\geq ae^{\lambda t}\|\xi\| \quad (1,4)$$

(D, 1), (D, 2), 又は(F, 1), (F, 2), (F, 3)をdiffeomorphism又はflowのC－条件，$\mathfrak{X}$を拡大する，$\mathfrak{Y}$を縮小するtangent plane fieldと呼ぶことにしよう。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

注意 1.1

(i) C－条件はMに入れる計量に従属しない。

(ii) 一般にC－system といった場合保存測度の存在を仮定しない。

(iii) M, φ, Zの滑らかさはC^2－ 級を仮定すれば以下の議論にさしつかえはない。

2. M_0 を(n－1)次元多様体, φ_0 をM_0 上のdiffeomorphismとする。多様体$M_0 \times [0, 1]$ の両側を$(m, 0) \sim (\varphi_0 m, 1)$ なる同値関係で同一視したn次元多様をMとする。

$$P ; M_0 \times [0, 1] \to M$$

を自然な写像とし, M上のflow φ_t を次の様に定義する。

$$\varphi_t p(m, s) = p(\varphi_0^{[t+s]} m, t+s-[t+s])$$

ここで [ ] はガウスの記号である。

flow (M, φ_t) は次の性質をもつ。

(i) (M, φ_t) は滑らかなflow である。

(ii) φ_0 が保存測度をもつならφ_t も保存測度をもつ。

(iii) φ_t は純点スペクトルをもつ。

(iv) φ_0 がC－diffeomorphismならφ_t はC－flowになる。

φ_0 がC－diffeomorphismの時, flow (M, φ_t)を(M_0, φ_0) によるC－構成という。

§2 簡単な性質

(M, φ)をC－diffeomorphism, (M, φ_t, Z)をC－flowとする。$\mathfrak{X}$を拡大するk－plane field, $\mathfrak{Y}$を縮小するl－plane fieldとする。

(1) $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$は一意的に定まる。

<u>証明</u>

$$\mathfrak{X}'_p \equiv \{X \in TM_p ; (1,1) 又は (1,3) を充す\}$$

$$\mathfrak{Y}'_p \equiv \{X \in TM_p ; (1,2) 又は (1,4) を充す\}$$

とすると, $\mathfrak{X}'_p \supseteq \mathfrak{X}_p$, $\mathfrak{Y}'_p \supseteq \mathfrak{Y}_p$である。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

(i) diffeomorphism の場合

$\mathcal{X}'_p \ni X' = X + Y,\ X \in \mathcal{X}_p,\ Y \in \mathcal{Y}_p$

とすると，$(\varphi^{-n})_* X' = (\varphi^{-n})_* X + (\varphi^{-n})_* Y$ であるから

$$\|(\varphi^{-n})_* X'\| \geq \|(\varphi^{-n})_* Y\| - \|(\varphi^{-n})_* X\|$$

$Y \neq 0$ とすると $\|(\varphi^{-n})_* Y\| \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ であるから上の不等式に矛盾する。（なぜなら $\|(\varphi^{-n})_* X'\|$，$\|(\varphi^{-n})_* X\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ ）

ゆえに $Y=0$，すなわち $\mathcal{X}'_p = \mathcal{X}_p$ である。

同様に φ^n を用いると $\mathcal{Y}'_p = \mathcal{Y}_p$ がいえる。

(ii) flow の場合

$\varphi_* Z_p = Z_{\varphi(p)}$ であるからMのoompact性により，

$$\|(\varphi^{-n})_* Z_p\| < A, \quad A\text{；定数}$$

あとはdiffeomorphismの場合と同じようにして $\mathcal{X}'_p = \mathcal{X}_p$，$\mathcal{Y}'_p = \mathcal{Y}_p$ がいえる。

(i) (ii) より，tangent plane field はC－条件を充すものとして一意的に定まることがわかる。

Q. E. D.

(2) $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ は φ，φ_t －不変である。すなわち $\varphi_* \mathcal{X}_p = \mathcal{X}_{\varphi(p)}$，$\varphi_* \mathcal{Y}_p = \mathcal{Y}_{\varphi(p)}$

証明

$\varphi_* \mathcal{X}_p$，$\varphi_* \mathcal{Y}_p$ がC－ 条件を充すことをいえばよい。

φ_* は1対1写像だから，$TM_{\varphi(p)} = \varphi_* \mathcal{X}_p + \varphi_* \mathcal{Y}_p$ である。

$\xi \in \mathcal{X}_p$，$n > 0$ に対して，$\|(\varphi^{n+1})_* \xi\| \geq a e^{\lambda(n+1)} \|\xi\|$，$\|\varphi_* \xi\| \geq a e^{\lambda} \|\xi\|$ であるから，

$$\|(\varphi^{n+1})_* \xi\| = \|(\varphi^n)_* \varphi_* \xi\| \geq a e^{\lambda} e^{n\lambda} \|\xi\| \geq a' \|\varphi_* \xi\| e^{n\lambda}$$

ここで $a' = a e^{\lambda} \cdot \inf \dfrac{\|\xi\|}{\|\varphi_* \xi\|}$ である。また $b' = b e^{\lambda} \cdot \sup \dfrac{\|\xi\|}{\|\varphi_* \xi\|}$ とすると $\varphi_* \mathcal{X}$，$\varphi_* \mathcal{Y}$ がC－条件を充していることがわかる。flow φ_t の場合はnの代りにtをとればよい。

Q. E. D.

(3) $\mathcal{X}_p$，$\mathcal{Y}_p$ はpに対して連続であり，$\dim \mathcal{X}_p$，$\dim \mathcal{Y}_p$ は一定である。

証明

点列 $p_n \xrightarrow{n\to\infty} p_0$ をとる。必要なら部分列をとることによって

$$\dim \mathcal{X}_{p_1} = \dim \mathcal{X}_{p_2} = \cdots = \dim \mathcal{X}_{p_n} = \cdots$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\dim \mathcal{Y}_{p_1} = \dim \mathcal{Y}_{p_2} = \cdots = \dim \mathcal{Y}_{p_n} = \cdots$$

と考えられる。やはり必要なら部分列るとると Euclide 空間におかれた平面の意味で $\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{p_n}$, $\lim_{n\to\infty} \mathcal{Y}_{p_n}$ が存在する。

$\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{pn} \subseteq \mathcal{X}_{p_0}$, $\lim_{n\to\infty} \mathcal{Y}_{p_0} \subseteq \mathcal{Y}_{p_0}$ をいおう。実際, $\xi_0 = \lim_{n\to\infty} \xi_n$, $\xi_n \in \mathcal{X}_{p_n}$ とすると, $n > 0$ に対して

$$\|(\varphi^n)_* \xi_0\| = \lim_{i\to\infty} \|(\varphi^n)_* \xi_i\| \leq \lim_{i\to\infty} a e^{n\lambda} \|\xi_i\| = a e^{\lambda n} \|\xi_0\|$$

これは（1）により $\xi_0 \in \mathcal{X}_{p_0}$ を示す。ゆえに $\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{pn} \subseteq \mathcal{X}_{p_0}$ である。 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{pn} \subseteq \mathcal{Y}_{p_0}$ も同様に示せる。

このことにより, $\dim \mathcal{X}_p$, $\dim \mathcal{Y}_p$ は上半連続になっている。一方, $\dim \mathcal{X}_p + \dim \mathcal{Y}_p = n$（flow の場合は $n-1$）であるから, $\dim \mathcal{X}_p$, $\dim \mathcal{Y}_p$ は連続である。すなわち定数である。（$\because$ Mは連結）

ゆえに $\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{pn} = \mathcal{X}_{p_0}$, $\lim_{n\to\infty} \mathcal{Y}_{pn} = \mathcal{Y}_{p_0}$ である。

以上により任意の点列 $p_n \xrightarrow{n\to\infty} p_0$ から $\lim \mathcal{X}_{p_n} = \mathcal{X}_{p_0}$, $\lim \mathcal{Y}_{p_n} = \mathcal{Y}_{p_0}$ となる部分列が取り出せることがわかる。ゆえに $\mathcal{X}_p$, $\mathcal{Y}_p$ は連続である。

Q. E. D.

（1）（2）（3）より次の事がわかる。

は拡大する不変な連続 k－plane field であり, は縮小する不変な連続 l－plane field である。ここで k, l は定数である。

注意 3.1

一般には $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ の C^1－class 以上の滑らかさは期待できない。（〔2〕を見よ）

(4) C－条件は（時間変換）に対して不変である。

証明

flow（M, φ_t, Z）の時間変換とは, α をM上の正値で滑らかな函数とすると,（M, Ψ_s, αZ）なる形の flow のことである。φ_t がC－flow のとき Ψ_s がC－flow になることを示す。

すなわち, φ_t に対する接空間の field $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, 定数 a, b, λ を定義（1,2）におけるように定め, Ψ_s に対する tangent plane field $\widetilde{\mathcal{X}}$, $\widetilde{\mathcal{Y}}$, 定数 $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{\lambda}$ を見つけ出すことにする。

φ_t,（φ_t）$_*$ は次の方程式で定義される。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\frac{dp}{dt} = Z_p \cdots\cdots(イ) \quad , \quad \frac{d\omega}{dt} = dZ_p(\omega)\cdots\cdots(ロ)$$

ここで$\omega \in TM_p$であり，$dZ_p(\omega)$ は局所的に$p=(x^1 \cdots\cdots x^n)$，$Z=(Z^1 \cdots\cdots Z^n)$ $\omega=(\omega^1 \cdots\cdots \omega^n)$とすると$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial z^1}{\partial x^i}\omega^i, \cdots\cdots \sum_{i=1}^n \frac{\partial z^n}{\partial x^i}\omega^i\right)$で表わされるものである。

同様にΨ_s，$(\Psi_s)_*$ は次の方程式で定義される。

$$\frac{dp}{ds} = \alpha(p)Z_p\cdots\cdots(ハ) \quad , \quad \frac{d\omega}{ds} = \alpha(p)\,dZ_p(\omega) + Z_p(d\alpha_p(\omega))\cdots\cdots(ニ)$$

$\xi \in \mathcal{Y}_p$とし，次の形のωが方程式(ニ)を充すように$\beta=\beta(t, p, \xi)$を選ぶ。

$$\omega=\omega(t, p, \xi)=(\varphi_t)_*\xi+\beta(t, p, \xi)Z_{\varphi_t p}$$

ここで$dt=\alpha ds$，すなわち$t=t(s, p)=\int_0^s \alpha(\Psi_\sigma p)d\sigma$ である。今後tとsはこの関係で結ばれているものとする。

$\frac{d}{dt}(\varphi_t)_*\xi = dZ_{\varphi_t p}(\varphi_t)_*\xi$であるから，

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d\omega}{dt} = \alpha(\varphi_t p)\Big(dZ_{\varphi_t p}(\varphi_t)_*\xi+\beta(t, p, \xi)\,dZ_{\varphi_t p}\cdot Z_{\varphi_t p}+$$

$$\frac{d\beta(t, p, \xi)}{dt}Z_{\varphi_t p}$$

一方，(ニ)より，

$$\frac{d\omega}{ds}=\alpha(\varphi_t p)\,dZ_{\varphi_t p}\Big((\varphi_t)_*\xi+\beta(t, p, \xi)Z_{\varphi_t p}\Big)+Z_{\varphi_t p}\Big(d\alpha_{\varphi_t p}$$

$$\Big((\varphi_t)_*\xi+\beta(t, p, \xi)Z_{\varphi_t p}\Big)\Big)$$

ゆえに２つの方程式から共通項を消せば，

$$\alpha(\varphi_t p)\frac{d\beta}{dt}=(d\alpha_{\varphi_t p}Z_{\varphi_t p})\beta+d\alpha_{\varphi_t p}(\varphi_t)_*\xi$$

これはβに関する１階の常微分方程式である。境界条件；$\beta(+\infty, p, \xi)=0$を入れて解くと，

$$\beta(t, p, \xi)=-\alpha(\varphi_t p)\int_t^{+\infty}\frac{d\alpha_{\varphi_t p}(\varphi_t)_*\xi}{\alpha(\varphi_t p)^2}\,dt$$

$(\varphi_t)_*\xi$ は$t\to+\infty$にしたがって指数的な速さで０に近ずくから，$-\infty < t < +\infty$ に対して解は収束する。

解$\beta(t, p, \xi)$の性質を調べて見よう。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

簡単な積分の評価によって，定数K ＞ 0が存在して，

$$\frac{|\beta(t, p, \xi)|}{\|\xi\|} \leq K \text{ , （任意の} -\infty < t < +\infty,\ p \in M,\ \xi \in TM_p \text{に対し）}$$

になることがわかる。

また積分変数の変換によって次の式が成立する。

$$\beta(t, p, \xi) = \beta(t-\sigma, \varphi_\sigma p, (\varphi_\sigma)_* \xi)$$

このことから，

$$(\Psi_s)_*(\xi + \beta(0, p, \xi) Z_p) = (\varphi_t)_* \xi + \beta(t, p, \xi) Z_{\varphi_t p} = (\varphi_t)_* \xi + \beta(0, \varphi_t p, (\varphi_t)_* \xi) Z_{\varphi_t p}$$

すなわち，$\widetilde{\mathcal{Y}}_p = \{ \widetilde{\xi} = \xi + \beta(0, p, \xi) Z_p ; \xi \in \mathcal{Y}_p \}$ とすると$\widetilde{\mathcal{Y}}$はΨ_s－不変になっている。同様に t の代りに－t を取ってやれば$\widetilde{\mathcal{X}}$が得られる。

さらに｜β｜の評価から，定数 r，R＞0 が存在して，

$$r\|\xi\| \leq \|\widetilde{\xi}\| \leq R\|\xi\| \text{, （任意の} \xi \in TM_p,\ p \in M \text{に対し）}$$

そこで$\widetilde{a} = r/R \cdot a$，$\widetilde{b} = R/r \cdot b$，$\widetilde{\lambda} = k\lambda$，（$k = \inf_{n \in p} \alpha(p)$） と置くと$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$はC－条件を充す。

実際，s＞0，$\widetilde{\xi} \in \widetilde{\mathcal{X}}_p$に対し，

$$\|(\Psi_s)_* \widetilde{\xi}\| \geq r\|(\Psi_s)_* \xi\| = r\|(\varphi_t)_* \xi\| \geq r a c^{\lambda t}\|\xi\| \geq \frac{r}{R} a c^{\lambda t}\|\widetilde{\xi}\|$$

$$= \frac{r}{R} a c^{\lambda \int_0^s \alpha(\Psi_\sigma p) d\sigma} \|\widetilde{\xi}\| \geq \frac{r}{R} a c^{k\lambda s}\|\widetilde{\xi}\|$$

残りの不等式も同様に示すことができる。

Q. E. D.

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第2章 位相的性質

§3. C－条件の安定性とfoliationの存在

この節ではC－条件はdiffeomorphismの十分小さな変化に対して不変であること，tangent plane fild，に対応するfoliation(葉体)が存在することを証明する。

1. Mをn次元コンパクト多様体とし，まずM上のdiffeomorphismの集合Diff(M)，ベクトル場の集合$\mathfrak{X}$(M)，k－plane fieldの集合にそれぞれ位相を入れよう。

(i) E，Fをn次元ユークリッド空間とし，UをEの開集合とするとき，UからFへの滑らかな写像fに対しC^r－ノルムを次の様に定義しよう。

$$\|f\|^{U}_{C^r} = \operatorname{SuP}_{U \ni u} \left\{ \sum_{k=0}^{r} | D^k f(u) | \right\} \qquad (3.1)$$

ここで$D^k f(u)$は$f(u)$のk階微分である。

Diff(M)$\ni \varphi$がchart(U_1, f_1)をchart(U_2, f_2)へ写像しているとき，$\|\varphi\|^{U_1}_{C^r} = \| f_1^{-1} \cdot \varphi \cdot f_2 \|^{U_1}_{C^r}$とする。

Mが有限個のchart $\Lambda = \{ (U_i, f_i) \}$ $(i = 1 \cdots N)$で覆われているものとして，φのC^r－ノルムを次の様に定義する。

$$\|\varphi\|_{C^r} = \sum_{i=1}^{N} \|\varphi\|^{U_i}_{C^r} \qquad (3,2)$$

(ii) 次に$\mathfrak{X}$(M)にノルムを入れる。

$\mathfrak{X}$(M) $\ni$Xがchart(U, f)において$\sum_{i=1}^{n} \xi^i \dfrac{\partial}{\partial X^i}$で表わされているとき，

$$\|X\|^{U}_{C^r} = \operatorname{SuP}_{P \leftarrow U} \left\{ \sum_{k=0}^{r} \sum_{i=1}^{n} | D^k \xi^i | \right\} \qquad (3,3)$$

として，XのC^r－ノルムを次のように定義する。

$$\|X\|_{C^r} = \sum_{i=1}^{N} \|X\|^{U_i}_{C^r} \qquad (3,4)$$

(iii) M上にk－plane field $\mathscr{X}$，l－plane field Υが存在しているものとする。(ここで$k + l = n$)

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

U_p を $U_p \cap \mathcal{Y}_p = 0$ なるk－planeとするとき $\alpha(U_p)$; $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ となる線型写像が自然に定まる。

U, U′ をk－plane field とし，次の様に置く。

$$\| U_p - U'_p \| = \underset{\xi \in {}_p,\ \|\xi\|=1}{\mathrm{SuP}} \| \alpha(U_p)\xi - \alpha(U'_p)\xi \| \quad \cdots\cdots \quad (3.5)$$

$$\| U - U' \| = \underset{P \in M}{\mathrm{SuP}} \| U_p - U'_p \| \quad \cdots \quad (3.6)$$

これによってk－plane field の集合に位相を入れる。

注意 3,1

(1) (i)，(ii)において位相はΛの取り方によらない。

(2) k－plane field の集合は (iii)の位相に対して完備になっている。

2. 種々の位相に対して次の様な関係がある。

Diff(M)∋ φ, Ψとし，$\| \varphi - \Psi \|_{C^2} < \varepsilon$ であるとき，

(1) $\| \varphi_* - \Psi_* \|_{C^1} < \varepsilon$,（$\varphi_*$ に対して同様に位相が定義できる。） (3.7)

(2) φをC－diffeomorphismとし，定義 1,1 で用いた記号をそのまま用いると，

$$\| \mathcal{X} - \Psi_* \mathcal{X} \| < C_1 \varepsilon, \text{ ここで } C_1 = \frac{1}{a e^{\lambda}} \sup \frac{\| \varphi_* \xi \|}{\| \varphi_* \| \cdot \| \xi \|} \quad (3.8)$$

(3) $\mathcal{X}' = \lim_{n \to +\infty} (\varphi^n)_* \mathcal{X}$ とすると

$$\| \mathcal{X} - \mathcal{X}' \| < C_2 \cdot \varepsilon, \text{ ここで } C_2 = \frac{C_1}{a} \cdot \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda} - 1} \quad \cdots\cdots \quad (3.9)$$

3. 次のlemmaを証明しょう。

lemma 3.1

R_1, R_2 をn次元ユークリッド空間とし，$R_i = X_i + Y_i$, $\dim X_i = k$, $\dim Y_i = l$ ($i = 1, 2$) と2つの空間に別れているとする。

A ; $R_1 \to R_2$ を線型写像とし，$AX_1 = X_2$, $AY_1 = Y_2$ とする。正の定数μ, σが存在して，

$X_1 \ni x$ に対して，$\| Ax \| \geq \mu \| x \|$

$Y_1 \ni y$ に対して，$\| Ay \| \geq \sigma \| y \|$

であるならば，R_1 上のk－plane U, U′ ($U \cap Y_1 = 0$, $U' \cap Y_1 = 0$) に対し，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\| AU - AU' \| \leq \mu^{-1}\sigma \| U - U' \| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3,10)$$

証明

$$\| AU - AU' \| = \sup_{\substack{x \in X_2 \\ \|x\| \leq 1}} \| \alpha(AU)x - \alpha(AU')x \|$$

$$= \sup_{\substack{x \in X_2 \\ \|x\| \leq 1}} \| A[\alpha(U)A^{-1}x] - A[\alpha(U')A^{-1}x] \|$$

$X_2 \ni x$, $\|x\| \leq 1$ に対し, $A^{-1}x \in X_1$, $\|A^{-1}x\| \leq \mu^{-1}$ であるから,

$$\leqq \sup_{\substack{x \in X_1 \\ \|x\| \leq \mu^{-1}}} \| A[\alpha(U) - \alpha(U')]x \|$$

$$= \mu^{-1} \sup_{\substack{x \in X_1 \\ \|x\| \leq 1}} \| A[\alpha(U) - \alpha(U')]x \|$$

$[\alpha(U) - \alpha(U')]x \in Y_1$ であるから,

$$\leq \mu^{-1}\sigma \sup_{\substack{x \in X_1 \\ \|x\| \leq 1}} \| [\alpha(U) - \alpha(U')]x \| = \mu^{-1}\sigma \| U - U' \|$$

Q. E. D.

lemma 3,1 より次の定理が証明できる。

定理3,1

(M, φ) をC－diffeomorphismとすると，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し，$\| \varphi - \Psi \|_{C^2} < \varepsilon$ であるような Ψ はC－diffeomorphismである。

証明

U, U' をM上のk－planeのfieldとし，$\| \mathcal{X} - U \| < \delta$, $\| \mathcal{X} - U' \| < \delta$ であって，δ を十分小さくとっておいて $U_p \cap \mathcal{Y}_p = 0$, $U'_p \cap \mathcal{Y}_p = 0$ $(p \leftarrow M)$ になっているとする。

lemma 3,1 より，十分大きなnに対し，$0 < \theta < 1$ なる定数が存在して，

$$\| (\varphi^n)_* U - (\varphi^n)_* U' \| \leq \theta \| U - U' \| \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3,11)$$

実際，$R_1 = TM_{\varphi^{-n}(p)}$, $X_1 = \mathcal{X}_{\varphi^{-n}(p)}$, $Y_1 = \mathcal{Y}_{\varphi^{-n}(p)}$, $R_2 = TM_p$, $X_2 = \mathcal{X}_p$, $Y_1 = \mathcal{Y}_p$, $\mu = ac^{\lambda n}$, $\sigma = bc^{-\lambda n}$, $\theta = a^{-1}bc^{-2\lambda n}$ と置いて見ればよい。

$\| \varphi - \psi \|_{C^2} < \varepsilon$ であるから，$\| \varphi_* - \psi_* \|_{C^1} < \varepsilon$ となり，(3,11) を用いると次の不等式が成立する。

$$\| \psi_*^n U - \psi_*^n U' \| \leq \theta' \| U - U' \| \quad (0 < \theta' < 1) \quad \cdots\cdots \quad (3,12)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

実際，

$$\|\psi_*^n U-\psi_*^n U'\| = \|\psi_*^n U-\varphi_*^n U+\varphi_*^n U+\varphi_*^n U'-\varphi_*^n U'-\psi_*^n U'\|$$
$$= \|\varphi_*^n-\psi_*^n\|\,\|U-U'\|+\|\varphi_*^n U-\varphi_*^n U\|$$
$$\leq (\varepsilon+\theta)\,\|U-U'\|$$

ここで$U=\mathscr{X}$，$U'=(\psi^n)_*\mathscr{X}$と置くと，εを十分小さくすると$\|\mathscr{X}-\psi_*\mathscr{X}\|<C_1\varepsilon$であるから，$\|\mathscr{X}-(\psi^n)_*\mathscr{X}\|<\delta$とできる。

すなわち，$\|(\psi^n)_*\mathscr{X}-(\psi^{2n})_*\mathscr{X}\|\leq\theta'\delta$

このことと縮小写像の定理により，$\mathscr{X}'=\lim_{n\to\infty}(\psi^n)_*\mathscr{X}$が存在することがわかる。

本質的なちがいがなく，$\mathscr{Y}'=\lim_{n\to\infty}(\psi^n)_*\mathscr{X}$の存在がいえる。

また，$\mathscr{X}'$，$\mathscr{Y}'$はその作り方からψー不変であることがわかる。

この$\mathscr{X}'$，$\mathscr{Y}'$が（D，1），（D，2）を充すことをいおう。

$\mathscr{X}'_p+\mathscr{Y}'_p=TM_p$は明らかである。Nを十分大きく取って，

$ac^{\lambda N}>c^{\lambda}$，$b\cdot c^{-\lambda N}<c^{-\lambda}$になるようにする。

またεを十分小さくとって，次のような定数a_1が存在するようにする。

$\xi\in\mathscr{X}'_p$に対して，$\|\psi_*\xi\|\geq a_1\|\xi\|$，$\|(\psi^2)_*\xi\|\geq a_1c^{\lambda}\|\xi\|$，…，…

$\|(\psi^N)_*\xi\|\geq a_1c^{\lambda N}\|\xi\|$，$a_1>0$

実際，

$$a_1=\inf_{\substack{\xi\in\mathscr{X}'_p\\ 1\leq k\leq N}}\frac{\|\psi_*^k\xi\|}{\|\xi\|}$$

とすればa_1はaに十分近いから$a_1>0$になり得る。

ここで$a_1c^{\lambda N}=\lambda_1$とし，任意の正整数$n=Ng+r$（$g\geq 0$，$0\leq r<N$）に対して，$\xi\in\mathscr{X}'_p$ならば，

$$\|(\psi^n)_*\xi\|=\|((\psi^N)^g)_*(\psi^r)_*\xi\|\geq c^{\lambda_1 g}\|(\psi^r)_*\xi\|\geq a_1c^{\lambda r}c^{\lambda_1 g}\|\xi\|$$

$$a'=\inf_{0\leq r<N}a_1c^{\lambda r}\cdot c^{-\frac{\lambda_1}{N}r},\quad c^{\lambda'}=c^{\frac{\lambda_1}{N}}$$

と置くと，$\|(\psi^n)_*\xi\|\geq a'c^{\lambda' n}\|\xi\|$

残りの不等式も同様に証明できる。

Q．E．D．

注意3.2

(1)　Cー条件の安定性とは定理3,1の内容を指す。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

(ii) C－flow に対しても定理3,1と同様の事柄が成立する。

ただしflow の位相としては対応するベクトル場のC^1－ノルムを用いる。

4. 次にtangent plane field $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$に接するfoliation x, yの存在を証明しょう。

ここでtangent plane field の定義をはっきり述べよう。

定義3,1 V_pがM上のk－plane field であるとは，$\omega_1 \cdots \omega_{n-k}$ を一次独立な1階の閉微分型式とするとき，V_p が$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{n-k} = 0$で与えられているときである。すなわち，$V_p = \{ X \in TM_p \ ; \omega_1(X) = \omega_2(X) = \cdots = \omega_{n-k}(X) = 0 \}$

定義3,2 k－plane field V_p が完全可積分であるとは，任意の$P \in M$に対して，Pの近傍UとU上のC^∞－函数$x^1 \cdots x^{n-k}$ が存在して，UにおいてV_p が$dx^1 = dx^2 \cdots = dx^{n-k}$で与えられるときである。

次の定理はよく知られている。

定理 V_p を完全可積分なC^r－級のk－plane field とすると，任意の$P \in M$に対して，Pを通るC^{r+1}－級の最大積分多様体$\mathscr{V}_p$ が唯一つ存在する。

$\mathscr{V}_p$ の集まりをV_p に接するfoliationと言い，$\mathscr{V}$と書く事にする。各々の$\mathscr{V}_p$ はfoliation $\mathscr{V}$のleafと呼ばれる。

定理3,2 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ は完全可積分である。

<u>証明</u>

$\mathscr{X}$に対してfoliation $\mathfrak{X}$を直接構成する。

任意の$P \in M$に対して，chart (U_p, f_p) を次の様に取る。

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad f_p(P) = 0 \in R^n \\ \text{(ii)} \quad (f_p)_* \mathscr{X}_p \text{は} f_p(U_p) \text{において} \quad x^{k+1} = \cdots = x^n = 0 \ \text{となっている。} \end{cases}$$

さらにU_p を十分小さく取って，k－plane$(f_p)_* \mathscr{X}_p$が l－plane $x' =$一定……$x^k =$一定，に交叉している様にできる。

$\mathscr{L}_p$ を$f_p(U_p)$上で$x^{k+1} =$一定，……$x^n =$一定によって定義されたfoliationとする。

Mはコンパクトであるから，有限個のchart $\{ (U_{p_i}, f_{p_i}) \} i = 1 \cdots N$によって覆われる。

$(f_{p_i}^{-1})_* \mathscr{L}_{p_i}$はU$_{p_i}$上のfoliationになっている。$\mathfrak{X}' | U_{p_i} = (f_{p_i}^{-1})_* L_{p_i}$ によって局所的につながっているfoliation $\mathfrak{X}'$が得られる。($\mathfrak{X}'$ は完全なfoliationではない，すなわち，$U_{p_i} \cap U_{p_i} \ni P$に対して，$\mathfrak{X}'_p$は2枚以上あることになる。)

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$\mathcal{X}'$ を $\mathfrak{X}'$ に接する k − plane field とする。(これも完全な k − plane field ではない)

$\mathcal{X}'$ の作り方から，$\mathcal{X}'$ は各 U_{p_i} 上において $\mathcal{X}$ に十分近い事がわかる。すなわち，(3,1 2)が成立する条件を充している。

ゆえに，

$$(f_{p_i})_*(\varphi^n)_*\mathcal{X}'|U_{p_i} \xrightarrow[\longrightarrow]{n\to\infty} (f_{p_i})_*\mathcal{X}|U_{p_i} \quad (\text{一様収束})$$

ここで次の Perron による定理が必要である。

定理 (Perron)

$R^n = R^k \times R^l \supset A$ を有界領域とし，A上の C^1−級の filiation の列 $\mathfrak{X}_n$; $y = y(0) + f_n(x, y(0))$，$(x \in R^k,\ y \in R^l)$ に対して，$\mathcal{X}_n$ を $\mathfrak{X}_n$ に接する k − plane field とする。

$\mathcal{X}_n$ が一様に $\mathcal{X}$ に収束するならば，$\mathfrak{X}_n$ は A において一様にある C^1 一級の foliation $\mathfrak{X}$; $y = y(0) + f(x, y(0))$ に収束して，$\mathfrak{X}$ は $\mathcal{X}$ に接している。

この定理を用いると，ある foliation $\mathfrak{X}$ が存在して，

$$\varphi^n\mathfrak{X}_n \mid U_{p_i} \xrightarrow[\longrightarrow]{n\to\infty} X \mid U_{p_i}$$

また $\mathfrak{X}$ は $\mathcal{X}$ に接しているのであるから，$U_{p_i} \cap U_{p_j} \ni P$ に対しても $\mathfrak{X}_p$ は一枚しかでてこない。すなわちこの $\mathfrak{X}$ は完全なる foliation であり，$\mathfrak{X} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n\mathfrak{X}'$ で得られる。

しかも $\mathcal{X}_p$ は P に対して連続であるから，各 leaf $\mathfrak{X}_p$ は C'−部分多様体である。

$\mathcal{Y}$ に対しても，これに接する foliation $\mathfrak{Y}$ が存在することは同様に示せる。

Q. E. D.

§4 位相的性質

この節では結果だけを述べて証明は行なわない事にしょう。

1. まず Anosov〔1．2〕による定理をあげよう。

定理 4.1　C − system は構造的安定である。

定理 4.2　C − system は可算個の周期的 orbit を持つ。

定理 4.3　不変測度を持つ C − system の周期点は M で稠密になっている。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

注意4.1

構造的安定というのは昔からRoughnessとして把えられていたもので次の事を指す。

φをC－systemとし，φ'をφにC^2－ノルムの意で十分近いsystemであるとき，恒等写像に近いhomeomorphism k が存在して，

$$\varphi' = k^{-1} \cdot \varphi \cdot k$$

となっている。

C－systemの構造を決定するものとして，A. Avez による次の定理を述べる。

定理4.4 Mをコンパクトで連結，方向づけ可能な2次元多様体とし，φをM上のC－diffeomorphismとすると，system(M, φ)は2次トーラスπ^2上のエルゴード的な代数的aufomorphismにtopological conjugate している。

定理4.5 Diffc(M)はDiff(M) の開集合である。

(Diff(M)はMのdiffeomorphismの全体，Diffc(M)はMのC－diffeomorphism の全体を表わす。

注意4.2

定理4.5は定理3.1より明らかである。

2. 次にC－systemが乗っている多様体の性質をあげる。

まずAvez〔6〕による次の定理をあげる。

定理4.6 (M, φ_t)をC－flowとすると$\chi(M)=0$である。

($\chi(M)$はMのEuler－Poincare′の特性量である)

定理4.7 (M, φ)をC－diffeomorphismとし，k(拡大するtangent field の次元)が奇数ならば，X(M)＝0である。

定理4.7 (M, φ)をC－diffeomorphismとし，dim M＝nとすると，Mの普遍的被覆多様体はn次元ユークリッド空間R^nに同相である。

注意4.3

定理4.7はSmaleによって与想され，Avez によって証明されたということになっているが，どうもその証明があやしいらしい。

Sem. on Probab.
Vol.30　1969年
P1-123

第３章　計量的性質

§5　結　果

1.（M, φ），（M, φ_t, Z）をそれぞれC－diffeomorphism，C－flow とする。Mに適当なリーマン計量を入れて，Ωをその計量より導かれる体積要素とする。

定義5,1　φ又はφ_t が保測的であるとは次の事をいう。

$$\varphi^*\Omega=\pm\Omega \text{又は} (\varphi_t)^*\Omega=\pm\Omega$$

この章ではφ，φ_t は保測的とし，μをΩから導かれたリーマン測度とする。（すなわちφ，φ_t は測度μを保っている）μは正規化されていてμ（M）＝1となっているものとする。

$\mathcal{X}$を拡大するk－plane field，$\mathcal{Y}$を縮小するl－plane field，$\tilde{\mathcal{Y}}=\mathcal{Y}\oplus Z$を拡大する（k＋1）－plane field，$\tilde{\mathcal{Y}}=\mathcal{Y}\oplus Z$を縮小する（l＋1）－plane field とし，a，b，λは定義1,1，定義1,2と同様なものとする。

$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$，$\tilde{\mathcal{X}}$，$\tilde{\mathcal{Y}}$は完全積分可能であるから，$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$，$\tilde{\mathcal{X}}$，$\tilde{\mathcal{Y}}$に接しているfoliationを$\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$，$\tilde{\mathfrak{X}}$，$\tilde{\mathfrak{Y}}$とし，M∋Pを通るleatを$\mathfrak{X}_p$，$\mathfrak{Y}_p$，$\tilde{\mathfrak{X}}_p$，$\tilde{\mathfrak{Y}}_p$と書くことにする。

定理5.1　$\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$，$\tilde{\mathfrak{X}}$，$\tilde{\mathfrak{Y}}$は絶対連続である。

定理5.2　C－systemはエルゴード的である。

定理5.3　C－diffeomorphismに対応するfoliation$\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$はmetrical transitive である。

定理5.4　C－diffeomorphismはK－automorphismである。

定理5.5　C－flow が固有値を持つとき，その固有函数は連続であり，（n－1）次元部分多様体M_0とM_0上のC－diffeomorphism φ_0が存在してflow（M, φ_t）は（M_0，φ_0）によるC－構成である。

定理5.6　C－flow が固有値を持たないとき，対応するfoliation $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$はmetrical tramsitive である。

定理5.7　定理5.6の時，C－flowはK－flow である。

定理5.5，定理5.7より次の２者択一の定理が成立する。

定理5.8　C－flow は次の２つの内どちらかが成立する。

(i)　K－flow になる。

(ii)　Mの（n－1）次元部分多様体M_0 とM_0 上のC－diffeomorphism φ_0 が存在して，flow は（M_0，φ_0）によるC－構成である。すなわち純点スペクトルを持つ。

2．ここでfoliationの絶対連続性の定義をしよう。

$\mathcal{F}$をk－plane field $\mathbb{F}$に接しているfoliation，S^{n-k}を（n－1）次元球，i_t^1，i_t^2；$S^{n-k} \longrightarrow M$を１パラメーターで変化する$S^{n-k}$のMへのうめ込みとする。$i_t^1(S^{n-k})=\Pi_t^1$，$i_t^2(S^{n-k})=\Pi_t^2$とし，$\Pi_t^1$，$\Pi_t^2$ は$\mathcal{F}$と交叉しているとすると，foliationの各leafにそってΠ_t^1からΠ_t^2への写像f_t が定義できる。（十分小さなδに対して，dis(Π_t^1，Π_t^2）＜δ であれば可能である。）

定義5.2　foliation $\mathcal{F}$はf_tのJacobian $J(f_t)$が（p, t）に関して連続な時，絶対連続であるという。

注意5.1

(i)　滑らかなfoliationは絶対連続である。

(ii)　絶対連続性の名の由来は次の事実による。

$\Pi_t^1 \supset A$ を可測集合とするとき，

$$\mathrm{mes}\ f_t(A)=\int_A \varphi_t(p)\,dp \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (5,1)$$

となる。ここで$\varphi_t(p)$は（p，t）に関して連続な函数である。

本書では定理5.1の証明は行なわないが，ただ次の事実を以下の議論で用いる。

X，Yが絶対連続であるとし，その次元はk＋l＝nであるとする。（U，ψ）をchartとし，UはXとYのleafによって囲まれているものとする。Xδ，Yδを一辺の長さδの方体で，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$\dim X\delta = k$, $\dim Y\delta = l$ とし，$\psi(U) = X\delta \times Y\delta$ になっているものとする。（ f_t が存在するように δ は十分小さいとする）

$\psi(p) = (x, y)$ と書くことにするとき，$\mathfrak{X}$ はUにおいて y ＝一定，$\mathfrak{Y}$ は x ＝一定で定義される。（これを標準的chartという。）

この様な標準的chartでMを覆って考えると，正値区分的連続函数 $f(x, y)$ が存在して，M＞A可測集合に対して，

$$\mu(A) = \int_{\psi(A)} f(x, y)\,dx\,dy \qquad (5.2)$$

実際，$\mathfrak{X}$ のleaf上の測度を $g(x, y)\,dx$，$\mathfrak{Y}$ のleaf上の測度を $h(x, y)\,dy$ とすると $\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$ の絶対連続性から $g(x, y)$，$h(x, y)$ は (x, y) に関して区分的連続になり，$\{\theta_i(x, y)\}$，$i = 1, \cdots \min(k, l)$ を X_p と Y_p の間の角度とすると，

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^{\min(k, l)} \sin\theta_i(x, y)\,g(x, y)\,h(x, y) \qquad (5.3)$$

となっているから $f(x, y)$ は区分的に連続である。

この事から，$\mu(A) = 0$ と $\mathfrak{X}$ 又は $\mathfrak{Y}$ のほとんどすべてのleafとの交わりの測度が0ということは同値である。

注意5,2　C－flowに対して $\tilde{\mathfrak{X}}$ と $\mathfrak{Y}$（$k + 1 + l = n$）に対して同様の事が成立する。

§6　定理5,2，定理5,3　の証明

証明のために多くのlemmaが必要である。

Lを $\mathfrak{X}_p$ 上の曲線とし，$\mathfrak{X}_p$ 上にMの計量を導入するとC－条件より次の事がわかる。

$$t > 0 \text{ に対して，長さ} \cdot \varphi_t L \geqq e^{\lambda t} \cdot \text{長さ} \cdot L \qquad (6,1)$$

L' を $\mathfrak{Y}_p$ 上の曲線とすると，

$$t > 0 \text{ に対して，長さ} \cdot \varphi_t L' \leqq e^{-\lambda t} \cdot \text{長さ} L' \qquad (6,2)$$

ここで $a = 1$，$b = 1$ と考えて一般性を失っていない。今後 φ_t だけで議論するが特にことわらないかぎり φ に対しても成立している。（ t を n に置き代えればよい。）

$B_r^k(p)$ を $\mathfrak{X}_p$ 上の半径 r，中心 p の球，$B_r^l(p)$ を $\mathfrak{Y}_p$ 上の半径 r，中心 p の球とする。以下

rを固定して考える。

leaf上の曲線の長さの変化の評価によって次の事がいえる。

$$\varphi_{-t}B^k_{e^{\lambda t}r}(\varphi_t p)\subset B^k_r(p),\ B^l_r(p)\supset \varphi_t B^l_{e^{\lambda t}r}(\varphi_{-t}p) \qquad \cdots\cdots \qquad (6.3)$$

fをM上の函数，NをMの部分集合とするとき

$$\omega^k_f(r\,|\,N^c)=\sup_{\substack{p,\,p'\in M-N\\ p'\in B^k_r(p)}}|f(p)-f(p')|,$$

$$\omega^l_f(r\,|\,N^c)=\sup_{\substack{p,\,p'\in M-N\\ p'\in B^l_r(p)}}|f(p)-f(p')|$$

$$\omega^k_f(r)=\sup_{\substack{p,\,p'\in M\\ p'\in B^k_r(p)}}|f(p)-f(p')|,$$

$$\omega^l_f(r)=\sup_{\substack{p,\,p'\in M\\ p'\in B^l_r(p)}}|f(p)-f(p')|$$

$$\omega^k_f(r,p)=\sup_{p'\in B^k_r(p)}|f(p)-f(p')|,$$

$$\omega^l_f(r,p)=\sup_{p'\in B^l_r(p)}|f(p)-f(p')|$$

と置く。$\omega_f(r)$は次の様な性質を持つ。

(i) $\omega_f(r)\geqq 0$, $\omega_f(0)=0$

(ii) $\omega_f(r)$はrに関して非減小函数である。

(iii) fが連続なら$\omega_f(r)\xrightarrow{r\to 0} 0$

$U_t f(p)=f(\varphi_t p)$ でU_t を定義すると次のlemmaが成立する。

lemma 6,1

$$\omega^k_{U_{-t}f}(e^{\lambda t}r,p)\leqq\omega^k_f(r,\varphi_{-t}p),\ \omega^l_{U_t f}(e^{\lambda t}r,p)\leqq\omega^l_f(r,\varphi_t p)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

証明

$$\omega^k_{U_t f}(e^{\lambda t} r, p) = \sup_{p' \in B^k_{e^{\lambda t} r}(p)} |f(\varphi_{-t} p) - f(\varphi_{-t} p')| = \sup_{p' \in \varphi_{-t} B^k_{e^{\lambda t} r}(p)}$$

$$|f(\varphi_{-t} p) - f(p')|$$

(6,3) より

$$\leq \sup_{p' \in B^k_r(\varphi_{-t} p)} |f(\varphi_{-t} p) - f(p')| = \omega^k_f(r, \varphi_{-t} p)$$

残りも同様に示すことができる。

Q. E. D.

$\omega^k_f(r) = \sup_{p \in M} \omega^k_f(r, p)$, $\omega^l_f(r) = \sup_{p \in M} \omega^l_f(r, p)$ であるから lemma 6,1 より次の lemma が成立する。

lemma 6, 2

$$\omega^k_{U_{-t} f}(e^{\lambda t} r) \leq \omega^k_f(r), \quad \omega^l_{U_t f}(e^{\lambda t} r) \leq \omega^k_f(r)$$

ここで f は φ_tー 不変な2乗可積分函数とする。($f \in L^2(M, \mu)$)

lemma 6, 3　任意の $\varepsilon > 0$ に対し，次の様な可測集合 N_ε, N'_ε が存在する。

(i)　$\mu(N_\varepsilon) < \varepsilon$, $\mu(N'_\varepsilon) < \varepsilon$

(ii)　$\omega^k_f(r | N^c_\varepsilon) \leq 3\varepsilon$, $\omega^l_f(r | N'^c_\varepsilon) \leq 3\varepsilon$

証明

連続函数の全体 L^2 において稠密であるから，次の様な連続函数 g が存在する。

$$f = g + h, \quad h \in L^2(M, \mu), \quad \| h \|^2 < \varepsilon^3$$

$\omega^k_g(r) \xrightarrow{r \to 0} 0$ であるから，t を十分大きく取ると $\omega^k_g(e^{-\lambda t} r) < \varepsilon$ になるようにできる。ゆえに lemma 6, 2 より，

$$\omega^k_{U_{-t} g}(r) \leq \omega^k_g(e^{-\lambda t} r) < \varepsilon$$

ここで，$N_\varepsilon = \{P \in M ; |U_{-t} h(p)| \geq \varepsilon\}$ とすると N_ε は可測集合になる。U_{-t} はユニタリ作用素であるから $\| U_{-t} h \|^2 = \| h \|^2 < \varepsilon^3$ となり，

$$\varepsilon^3 > \int_{N_\varepsilon} |U_{-t} h(p)|^2 \, d\mu(p) \geq \mu(N_\varepsilon) \cdot \varepsilon^2$$

であるから，$\mu(N_\varepsilon) < \varepsilon$ であることがわかる。

次に，P, $P' \in M - N_\varepsilon$, $P' \in B^k_r(p)$ とすると，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$|f(p)-f(p')|=|U_{-t}f(p)-U_{-t}f(p')|=|(U_{-t}g+U_{-t}h)(p)-(U_{-t}g+U_{-t}h)(p')|$$
$$\leq |U_{-t}g(p)-U_{-t}g(p')|+|U_{-t}h(p)+|U_{-t}h(p')|$$
$$\leq \omega^k_{U_{-t}g}(r)+\varepsilon+\varepsilon\leq 3\varepsilon$$

これは$\omega^k_f(r|N^c_\varepsilon)\leq 3\ \varepsilon$であることを示している。

N'_εの存在は$N'_\varepsilon=\{P\in M;\ |U_t h(p)|\geq\varepsilon\}$と置けば同様に示めすことができる。

Q. E. D.

lemma 6,3におけるεを$\varepsilon/2^n$で置き代えてやれば次のlemmaが成立する。

lemma 6,4

(i) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{\varepsilon}{2^n}})<\varepsilon$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} N'_{\frac{\varepsilon}{2^n}})<\varepsilon$

(ii) $\omega^k_f(r|(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{\varepsilon}{2^n}})^c)=0$, $\omega^l_f(r|(\bigcup_{n=1}^{\infty} N'_{\frac{\varepsilon}{2^n}})^c)=0$

さらにlemma 6,4のεを$\varepsilon/2^m$で置き代てやれば次のlemmaが成立する事がわかる。

lemma 6,5　φ_t－不変な函数f ($f\in L^2(M)$) に対して次の様な可測集合N, N′が存在する。

(i) $\mu(N)=\mu(N')=0$

(ii) $\omega^k_f(r|N^c)=0$, $\omega^l_f(r|N'^c)=0$

── 定理5,2の証明 ──

φ, φ_t がエルゴード的であることを証明するためにはφ, φ_t－不変な函数f ($f\in L^2(M)$) がほとんどいたる所で一定であることを示せばよい。

lemma 6,5はfが$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$のleaf上でほとんどいたる所一定であることを示している。$\mathfrak{X}$と$\mathfrak{Y}$のleafは各点において交わっていて，φの場合は$\mathfrak{X}$と$\mathfrak{Y}$のleafによってMがうめつくされているから，fはほとんどいたる所一定になる。

一方φ_tの場合は，fがφ_t－不変であるから，fは$\tilde{\mathfrak{X}}$と$\tilde{\mathfrak{Y}}$のleaf上でほとんどいたる所一定である。そしてMは$\tilde{\mathfrak{X}}$と$\mathfrak{Y}$のleafによってうめつくされているから，fはほとんどいたる所一定になる。

Q. E. D.

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

定理5,3を証明するためにはさらにlemmaが必要である。

lemma 6,6 任意の$f \in L^2(M)$, $\varepsilon > 0$, $r > 0$に対し, $t > t_0$ のtに対して次の様な可測集合N_ε^t, N'^t_ε が存在するような$t_0 = t_0(f, E, r)$が存在する。

(i) $\mu(N_\varepsilon^t) < \varepsilon$, $\mu(N'^t_\varepsilon) < \varepsilon$

(ii) $\omega^k_{U_{-t}f}\left(r \mid (N^t_\varepsilon)^c\right) < 3E$, $\omega^l_{U_t f}\left(r \mid N'^t_\varepsilon)^c\right) < 3\varepsilon$

証明

$f = g + h$, gは連続, $h \in L^2$, $\| h \|^2 < \varepsilon^3$ とできる。

t_0 としては$\omega^k_g(e^{-\lambda t_0} r) < \varepsilon$ となるものを一つ取る。

lemma 6,2より, $t > t_0$ に対し,

$$\omega^k_{U_{-t}g}(r) \leq \omega^k_g(e^{-\lambda t} r) < \varepsilon \text{ , } \omega^l_{U_t g}(r) \leq \omega^l_g(e^{-\lambda t} r) < \varepsilon$$

$N^t_\varepsilon = \{ P \in M ; \mid U_{-t} h(p) \geq \varepsilon \}$ とすればN^t_E は可測集合であり,

$$\varepsilon^3 > \int_{N^t_\varepsilon} | U_{-t} h(p) | d\mu(p) \geq \varepsilon^2 \ \mu(N^t_\varepsilon)$$

であるから, $\mu(N^t_\varepsilon) < \varepsilon$ である。

次に, P, $P' \in M - N^t_\varepsilon$, $P' \in B^k_r(p)$に対し,

$$| U_{-t} f(p) - U_{-t} f(p') | \leq | U_{-t} g(p) - U_{-t} g(p') | + | U_{-t} h(p) | + | U_{-t} h(p') |$$
$$\leq \omega^k_{U_{-t}g}(r) + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon$$

これは$\omega^k_{U_{-t}f}\left(r \mid (N^t_\varepsilon)^c\right) < 3E$ であることを示している。

残りは$N'^t_\varepsilon = \{ P \in M ; | U_t h(p) | \geq \varepsilon \}$ と置けば同様に示す事ができる。

lemma 6,7 任意の可測集合A, $r > 0$, $\varepsilon > 0$に対し, tを十分大きく取ると次の様な可測集合N^t_ε, N'^t_εが存在する。

(i) $\mu(N^t_\varepsilon) < \varepsilon$, $\mu(N^t_\varepsilon) < \varepsilon$

(ii) P, $P' \in M - N^t_\varepsilon$, $P' \in B^k_r(p)$ の時, PとP' は同時に$\varphi_t A$ に含まれるか又は含まれない。

(iii) P, $P' \in M - N'^t_\varepsilon$, $P' \in B^l_r(p)$ の時, PとP' は同時に$\varphi_{-t} A$ に含まれるか又は含まれない。

証明

$\chi_A(p)$をAの特性函数とし, これをlemma 6,6に適用する。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

lemma 6,6より，$t > t_0$ なる t に対して，

$$\omega^{k}_{U_{-t}\chi_A}\left(r \mid (N^{t}_{\varepsilon})^{c}\right) < 3 \quad , \; \omega^{l}_{U_t\chi_A}\left(r \mid (N'^{t}_{\varepsilon})^{c}\right) < 3\varepsilon$$

ここで $3\varepsilon < 1$ とすると $\omega_{\chi_A} < 1$ になる。一方 $\chi_A(p)' = 1$ 又は 0 であるから，結局 $\omega_{\chi_A} = 0$ となる。

$U_t X_A(p) = X_{\varphi_{-t}A}$ になる事に注意すれば，

$$\omega^{k}_{X_{\varphi_t A}}\left(r \mid (N^{t}_{\varepsilon})^{c}\right) = 0, \; \omega^{l}_{X_{\varphi_{-t}A}}\left(r \mid (N'^{t}_{\varepsilon})^{c}\right) = 0$$

この事は (ii) (iii) が成立する事を示している。

Q. E. D.

この後はC−diffeomorphism だけを考える。

$\mathfrak{X}$の leaf で生成されていて可測な集合を性質（∗）を充しているということにしょう。

lemma 6,8

$\beta > 0$ が存在して，性質（∗）を充すAは $\mu(A) = 0$ か又は $\mu(A) > \beta$ のどちらかになっている。

証明

Aが性質（∗）を充しているとすると，$\varphi^{-n}A$も性質（∗）を充している。$E > 0$ に対し，nを十分大きく取っておくと lemma 6,7 より，可測集合 N'^{n}_{ε}，$\mu(N'^{n}_{\varepsilon}) < \varepsilon$，が存在して lemma 6,7 の (iii)の性質を充している。

(U, ψ)を§5で与えた標準的chartとする。すなわち，$\psi(U) = X_\delta \times Y_\delta$，（$X_\delta$，$Y_\delta$ ；一辺の長さδの方体，$\dim X_\delta = k$，$\dim Y_\delta = l$）であって，$\psi(p) = (x, y)$，（$x \in X\delta$，$y \in Y\delta$）で表わされているとするとき，$\mathfrak{X}_p$ は $y =$ 一定，$\mathfrak{Y}_p$ は $x =$ 一定で定義されている。

(5,2) より，ε に対して $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ が存在して，

$$m\left(\psi(N'^{n}_{\varepsilon} \cap U)\right) < \varepsilon'$$

とできる。ここでmは $X_\delta \times Y_\delta$ 上の測度である。

$f(p) = X_{\varphi^{-n}A}(p)$とする。pを$(x, y)$と同一視して $f(x, y)$ という書き方を用いることにする。この時，$\varphi^{-n}A$が$\mathfrak{X}$の leaf によって生成されていることから，任意の x，x′，y に対し，$f(x, y) = f(x', y)$，になり，また(x, y)，(x, y')　$N'^{n}_{\varepsilon} \cap U$に対し，$f(x, y) = f(x, y')$となることは lemma 6,7 の (iii) からいえる。（$\delta < r$となっ

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

ていればよい。)

一方，(5,2)より，次の様な$x_0 \in X_\delta$の存在がいえる。

$$m'\,[\psi(N'^{n}_{\varepsilon}\cap U)\quad(x_0\times Y\delta)]<\varepsilon''$$

ここでm'はY_δ上の測度であり，ε''は$\varepsilon'\delta^{-k}$のorderをもつものとする。

ゆえに$f(x,y)$は$\psi(N'^{n}_{\varepsilon}\cap U)\cap(x_0\times Y_\delta)\}\times X_\delta$」の外で一定になっている。実際，上の集合をLとし，$L\not\ni(x_1,y_1),(x_2,y_2)$とすると，$(x_0,y_1),(x_0,y_2)\notin L$である。ゆえに$(x_0,y_1),(x_0,y_2)\notin\psi(N'^{n}_{\varepsilon}\cap U)$であるから，

$$f(x_1,y_1)=f(x_0,y_1)=f(x_0,y_2)=f(x_2,y_2)$$

となっていることがわかる。

ここでLの測度$m(L)$を評価しょう。

$$m(L)<m(\psi(N'^{n}_{\varepsilon}\cap U)+m'\,[\psi(N'^{n}_{\varepsilon}\cap U)\quad(x_0\times Y\delta)]\cdot m''X_\delta$$
$$<\varepsilon+\varepsilon''\cdot C\delta^{k}\qquad(6,4)$$

ここで，m''はX_δ上の測度，Cは定数である。

(6,4)は$m(L)<d\cdot\varepsilon$，(d；定数)であることを示している。

$f(x,y)$は$\varphi^{-n}A$の特性函数であり，Lの外では一定であるから，任意の$0<\alpha<1$に対して，$\alpha\to0$に従ってεを十分小さく，nを十分大きくとることにすれば，次の2つの内のどちらかが成立する。

$$\mu(U\cap\varphi^{-n}A)>(1-\alpha)\cdot\mu(U)\qquad(6,5)$$

$$\mu(U\cap\varphi^{-n}A)<\alpha\cdot\mu(U)\qquad(6,6)$$

Mはコンパクトであるから有限個のChart$\{(U_i,\psi_i)\}$($i=1\cdots N$)で覆うことができる。$\mu(U_i)>0$　($i=1\cdots N$)であるとする。

すべてのU_iに対して(6,6)が成立するとき，

$$\mu(A)=\mu(\varphi^{-n}A)<\alpha\sum_{i=1}^{N}\mu(U_i)$$

またすくなくとも1つのU_iに対して(6,5)が成立するとき，

$$\mu(A)=\mu(\varphi^{-n}A)>(1-\alpha)\mu(U_i)$$

Aに対して，この内のどちらかが成立する。すなわち任意の$0<\alpha<1$に対して，$\mu(A)<\alpha\sum_{i=1}^{N}\mu(U_i)$か又は$\mu(A)>(1-\alpha)\cdot\min_i\mu(U_i)$になる。$\alpha\to0$とすると，$\mu(A)=0$か又は$\mu(A)>\min_i\mu(U_i)=\beta$となる。

Q. E. D.

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

注意6,1　$\mathscr{Y}$の leaf で生成された可測集合に対しても lemma 6,8が成立する。

$\mathscr{X}$の leaf で生成されていて可測で，$0<\mu(A)<1$ なる集合Aのことを性質（**)を充しているということにしょう。

― 定理5,3の証明 ―

$\mathscr{X}$がmetrical transitive であることを証明するためには性質(**) を充す集合が存在しない事を示せばよい。

性質(**) を充す集合Aが存在しているとすると，性質(**) を充し，性質(**) を充す部分集合を持たない集合Bが存在する。実際，Aが性質(**) を充す部分集合を持たないならAでよい。Aが性質(**) を充す部分集合A′ を持ったとき，A－A′ も性質(**) を充しているからA′ とA－A′ の内測度の小さい方に対して，性質(**) を充す部分集合を持つかどうか調べてゆけばよい。性質(**) を充す集合の測度はβより大きいのであるから，この操作は有限個で終る。

φはエルゴード的であるから，$\mu(B\cap\varphi^n B)>0$となるnが存在する。$B\cap\varphi^n B$ は性質(**)を充しているから，Bの性質より，$\mu(B\cap\varphi^n B)=\mu(B)$ となる。これは$\varphi^n B=B$ (modo) を示している。すなわち，Bはφ^n― 不変である。

一方φ^n もまたC－diffeomorphism になるから，エルゴード的である。ゆえに，$\mu(B)=0$か又は1でなければならない。

ゆえに性質(**) を充す集合は存在しない。

$\mathscr{Y}$がmetrical transitive である事も同様に示すことができる

Q. E. D.

§7　定理5,4，定理5,5，定理5,6　の証明

1. 任意の$P_0\in M$に対し，Uを十分小さなP_0 の近傍とする。$U\ni p_1$，$\mathscr{X}_{p_0}\ni p_1$ なる任意のp_1 に対して，$\mathscr{X}$の leaf にそって，$\widetilde{\mathscr{Y}}_{p_0}|U$から$\widetilde{\mathscr{Y}}_{p_1}|U$への連続写像$F_{p_0,p_1}$ が存在する。

このとき次の lemma が成立する。

lemma 7,1　tangent plane field$\mathscr{X}\oplus\mathscr{Y}$が完全可積分であるための必要十分条件は，任意の$p_0\in M$，$p_1\in\mathscr{X}_{p_0}$ に対して，$F_{p_0,p_1};\widetilde{\mathscr{Y}}_{p_0}\to\widetilde{\mathscr{Y}}_{p_1}$ が大域的に存在することである。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

証明

$\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$が完全可積分であるとき，$\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$に接するfoliationを$\mathscr{X}\ \mathscr{Y}$とする。このとき，任意の$p_0\in M$, $p_1\in\mathscr{X}_{p_0}$に対して，$p_1\ \in(X\cap Y)_{p_0}$であるから，写像$F'_{p_0,\,p_1}$；$\mathscr{Y}_{p_0}\to\mathscr{Y}_{p_1}$ が定義できる。これをφ_t で移してゆけば，$F'_{\varphi_t p_0,\varphi_t p_1}$；$\mathscr{Y}_{\varphi_t p_0}\to\mathscr{Y}_{\varphi_t p_1}$ が得られる。この$F'_{\varphi_t p_0,\varphi_t p_1}$（$-\infty<t<+\infty$）を一緒にすれば写像$F_{p_0,p_1}$；$\widetilde{\mathscr{Y}}_{p_0}\to\widetilde{\mathscr{Y}}_{p_1}$ が得られる。

逆にF_{p_0,p_1}；$\widetilde{\mathscr{Y}}_{p_0}\to\widetilde{\mathscr{Y}}_{p_1}$ が大域的に存在するとき，

$$S_{p_0}=\bigcup_{p_1\in\mathscr{X}_{p_0}}F_{p_0,p_1}(\mathscr{Y}_{p_0})=\bigcup_{p_1\in\mathscr{X}_{p_0}}\mathscr{Y}_{p_1}$$

とすると，このS_{p_0}が$\mathscr{X}\ \mathscr{Y}$のleaf になっている。

実際，

$$\varphi_t S_{p_0}=\bigcup_{p_1\in\mathscr{X}_{\varphi_t p_0}}F_{\varphi_t p_0,p_1}(\mathscr{Y}_{\varphi_t p_0})=\bigcup_{p_1\in\mathscr{X}_{\varphi_t p_0}}\mathscr{Y}_{p_1}=S_{\varphi_t p_0}$$

であり，φ_t はエルゴード的であるから，S_{p_0} が滑な事が容易に示せる。

Q. E. D.

lemma 7.2　$\mathscr{X}\wedge\mathscr{Y}$のleafでコンパクトなものが存在するとき，flow（M, φ_t）はC－構成される。

証明

M_0 を$\mathscr{X}\wedge\mathscr{Y}$のleafでコンパクトなものとする。このとき，$\varphi_t$ はエルゴード的であり，$\mathscr{X}\ \mathscr{Y}$はφ_t－ 不変であるから，

$\varphi_t M_0=M_0$となるtが存在する。これらのtの内の一つτを取って，$\mu(\bigcup_{0\leq t<\tau}\varphi_t M_0)>0$，とできる。

また，$\bigcup_{0\leq t<\tau}\varphi_t M_0$は$\varphi_t$－ 不変であるから，$\varphi_t$ のエルゴード性より，

$$M=\bigcup_{0\leq t<\tau}\varphi_t M_0\qquad(\mathrm{modo})$$

明らかにφ_t はM_0 上のC－diffeomorphismになっている。

ゆえに時間を$1/\tau$にする事によって，（M, φ_t）は（M_0，φ_t）によるC－構成になっている。

lemma 7.3　C－flow が固有函数fを持つとき，測度0の点を除いた所で，fは$\mathscr{X}$と$\mathscr{Y}$の

leaf 上で一定である。

<u>証明</u>

$$f(\varphi_t p) = e^{i\lambda t} f(p) \qquad (\lambda \neq 0) \text{とする。}$$

$t_n = 2\pi n / \lambda$ とすると，$f(\varphi_{t_n} p) = f(p)$ である。

lemma 6,6 により，十分大きなnに対し，N_ε^n が存在して，$\mu(N_\varepsilon^n) < \varepsilon$，$\omega_f^k(r \mid (N_\varepsilon^n)^c) < 3\varepsilon$，（$\because U_{t_n} f = f$）

lemma 6,4，lemma 6,5と同様にやると，可測集合Nが存在して，$\mu(N) = 0$，$\omega_f^k(r \mid N^c) = 0$ となる。

同様に，可測集合N'が存在して，$\mu(N') = 0$，$\omega_f^l(r \mid N'^c) = 0$，

Q. E. D.

── 定理5,5の証明 ──

C－flow(M, φ)が固有函数fを持つとき，

$$f(\varphi_t p) = e^{i\lambda t} f(p) \qquad (\lambda \neq 0)$$

lemma 7,3より，$f(p)$は$N \cup N'$の外では，$\mathfrak{X}$と$\mathfrak{Y}$のleaf上で一定である。すなわち，任意の$p_0, p_1 \notin N \cup N'$に対して，$F_{p_0, p_1}$が定義されている所では，常に，

$$f(p_0) = f(F_{p_0, p_1}(p_2)) \tag{7,1}$$

（ここで，$p_2 \in \widetilde{\mathfrak{Y}}_{p_0}$，$p_2$，$F_{p_0, p_1}(p_2) \notin N \cup N'$）

ところで，Uをp_0の十分小さな近傍とし，$U \ni p_1$とすると，F_{p_0, p_1}はU内において定義され，しかも連続である。f_Uを$U - N \cup N'$においてはfに一致し，$U \cap N \cup N'$において（7,1）を充す様に定めた函数とすると，f_UはUにおいて連続になっている。しかもfはUにおいてはf_Uにほとんどいたる所一致している。

この様なUの有限個$\{U_i\}$でMを覆ってやると，それに対応してf_{U_i}が定まる。この様なf_{U_i}を結いだ函数f'はほとんどいたる所fに一致する。すなわち連続な固有函数になっている。

またf'の取り方から，任意の$p_0, p_1 \in M$に対して（7,1）を充している。そこで逆に（7,1）でF_{p_0, p_1}を定義すると，f'が連続的な固有函数である事から，$\widetilde{\mathfrak{Y}}_{p_0}$から$\widetilde{\mathfrak{Y}}_{p_1}$への大域的な写像として与えられる。ゆえに，lemma 7,1より，foliation $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$が存在する。

$\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$の各leafは$f' =$一定で定義されるものであるから，ほとんどのleafはコンパクトである。（f'の連続性と，Mのコンパクト性からいえる）

ゆえにlemma 7,2からflow(M, φ_t)はC－構成されている。

Q. E. D.

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

2. ここでC－flow（M, φ_t）は連続スペクトルを持つものとする。（弱混合性を持つ）

lemma 7,4　B, U_1, U_2 …U_Nを測度が正の可測集合とすると，数列$t_n \to \infty$ と定数$\delta >$ 0が存在して，

$$\mu(\varphi_{-t_n} B \cap U_i) > \delta \qquad (\forall n, i)$$

証明

内容を強めて，次の事を示す。

可測で密度0の集合$J \subset [0, +\infty)$が存在して，

$$\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \notin J}} \mu(T^{-t} B \cap U_i) = \mu(B)\mu(U_i), \qquad (i = 1 \cdots N)$$

ここで密度0とは次の事を指す。

$$\frac{1}{t} m(J \cap [0, t)) \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \qquad (m\text{は実数上の測度})$$

実際，φ_t の弱混合性により，BとU_i に対して，密度0の集合$J_i \subset [0, \infty)$が存在して，

$$\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \notin J_i}} \mu(\varphi_{-t} B \cap U_i) = \mu(B)\mu(U_i)$$

ゆえに$J = J_1$ …… J_N とすればよい。

Q. E. D.

lemma 7,5　AをXのleafからなるボレル集合とし，

$m_\tau(p) = \frac{1}{2\tau} \mathrm{mes}\{t ; |t| \leq \tau, \varphi_t p \in A\}$とすると，この$m_\tau(p)$は次の性質をもつ。

i）可測函数

ii）$\mathfrak{X}$のleaf上で一定

iii）$m_\tau(p) \xrightarrow{\tau \to 0} 1 \qquad \tilde{\forall} p \leftarrow A$

証明

i）　$M \times [-\tau, \tau] \to M$, $(p, t) \longrightarrow \varphi_t p$ ，は滑らかな写像である。$p \times [-\tau, \tau]$の上の写像による像とAとの共通部分は$\{t ; |t| \leq \tau, \varphi_t p \in A\}$ に一致している。この事とFibini の定理を用いれば$m_\tau(p)$の可測性がいえる。

ii）　Xがφ_t－不変である事から明らかである。

iii）　$m_\tau(p) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \chi_A(\varphi_t p)\, dt$

であるから，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\int_A m_\tau(p)\,d\mu(p) = \frac{1}{2\tau}\int_M\left(\int_{-\tau}^{\tau}\chi_A(\varphi_t p)\ \chi_A(p)\,dt\right)d\mu(p)$$

$$= \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\left(\int_M \chi_A(p)\ \chi_A(\varphi_t p)\,d\mu(p)\,dt\right.$$

$f \in L^2(M)$ に対して，$\|U_t f - f\|_{L^2} \xrightarrow{t\to 0} 0$ であるから，

$$\int_M \chi_A(p)\ \chi_A(\varphi_t p)\,dp = (\chi_A,\ U_t\chi_A) \xrightarrow{t\to 0} (\chi_A,\ \chi_A) = \mu(A)$$

ゆえに，

$$\int_A m_\tau(p)\,d\mu(p) \xrightarrow{\tau\to 0} \mu(A)$$

Q. E. D.

lemma 7, 6　Aを$\mathcal{X}$の leaf からなる可測集合で，$0<\mu(A)<1$ とするとき，$\mathcal{X}$の leaf からなる可測集合B，($0<\mu(B)<1$) と $\tau>0$ が存在して $C=\bigcup_{|t|\leq\tau}\varphi_t B$ と置くと，C は$\mathcal{X}$の leaf からなる可測集合で，$0<\mu(C)<1$ となっている。

証明

$D=M-A$ とし，$m_\tau(p)=\frac{1}{2\tau}\,\mathrm{mes}\{t;|t|\leq\tau,\ \varphi_t p\in D\}$ とする。

$$B=\{p;p\in A,\ m_\tau(p)>\frac{9}{10}\}$$

$$E=\{p;p\in D,\ m_\tau(p)>\frac{9}{10}\}$$

lemma 7, 5 の iii) から，十分小さな τ に対して，$\mu(B)>0$，$\mu(E)>0$ である。またB，EはXの leaf からなる可測集合であることは lemma 7, 5 の i)，ii) から明らかである。

この様なBとτに対して，$C=\bigcup_{|t|\leq\tau}\varphi_t B$ とすると，Cは$\mathcal{X}$の leaf からなる可測集合で，$\mu(C)>0$ である。

$E\cap C=\phi$ を示めせば，$\mu(C)<1$ がいえる。

もし，$E\cap C\neq\phi$ であるとすると，$|s|\leq\tau$，$p\in B$，$\varphi_s p=p'\in E$ となる様な p と Λが が存在する。しかしこれは不可能である。

実際，この様な p，$s>0$ が存在したとする。

区間 $\{\varphi_t p;s-\tau\leq t\leq\tau\}$ に含まれているAとDの点の測度を調べて見ると，

$$\mathrm{mes}\{t;s-\tau\leq t\leq\tau,\ \varphi_t p\in D\}\leq\mathrm{mes}\{t;-\tau\leq t\leq\tau,\ \varphi_t p\in D\}$$

$$\leq\frac{1}{10}\cdot 2\tau=\frac{1}{5}\tau$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\mathrm{mes}\{t;-\tau\leq t\leq\tau-s,\ \varphi_t p'\in A\}\leq\mathrm{mes}\{t;-\tau\leq t\leq\tau,\ \varphi_t p'\in A\}$$

$$\leq\frac{1}{10}\cdot 2\tau=\frac{1}{5}\tau$$

$A\cup D=M$であるから，

$$\mathrm{mes}\{\varphi^t p;\ s-\tau\leq t\leq\tau\}\leq\frac{1}{5}\tau+\frac{1}{5}\tau<\tau$$

一方，$\tau-(s-\tau)=2\tau-s>\tau$であるから，これは矛盾する。

ゆえに，$C\cap E=\phi$

Q. E. D.

— 定理5,6の証明 —

$\mathfrak{X}$のleafからなる可測集合Aで，$0<\mu(A)<1$になるものが存在しているとする。このとき，lemma 7,6より，B，C，τが存在する。

ここでMが標準的なchartの族$\{(U_i,\ f_i)\}$ $(i=1\cdots N)$で覆われているものとする。flowに対しては，$f_i(U_i)=X^k\times Y^{l+1}$となっている。

B，$U_1\cdots U_N$にlemma 7,4を適用すると，$\Delta>0$，$t_n\to\infty$が存在して，

$\mathrm{mes}\ f_i(\varphi_{-t_n}B\cap U_i)>\Delta$　$(i=1\cdots N)$

ゆえに，$\delta>0$が存在して，

$$\mathrm{mes}\{x;\ x\times Y^{l+1}(f_i(\varphi_{-t_n}C\cap U_i)\}>\delta\quad(i=1\cdots N)\tag{7,1}$$

lemma 6,7により，十分大きなt_nを取ると，$N_\varepsilon^{t_n}$，$\mu(N_\varepsilon^{t_n})<\varepsilon$が存在して，$N_\varepsilon^{t_n}$の外では，$x\times Y^{l+1}<f_i(\varphi_{-t_n}C\cap U_i)$か又は，$x\times Y^{l+1}<f_i(U_i-\varphi_{tn}C\cap U_i)$かのどちらかが成り立っている。

また，εを十分小さく，t_nを十分大きくすると，

$$f_i(N_\varepsilon^{tn}\cap U_i)<\delta\quad(i=1\cdots N)$$

とできる。ゆえに$x_n\in X^k$が見つかって，$x_n\times Y^{l+1}$　$f_i(\varphi_{-tn}C\cap U_i)$であり，$\mathrm{mes}\ [f_i(N_\varepsilon^{tn}\cap U_i)\cap(x_n\times Y)]$は十分小さい。

$f_i(N_\varepsilon^{tn}\cap U_i)\cup\{X^k\times[f_i(N_\varepsilon^{tn}\cap U_i)\cap(x_n\times y)]\}\not\ni(x,y)$ならば，$f_i(\varphi_{-tn}C\cap U_i)\ni(x,\ y)$である。実際，$(x,y)$と$(x_n,y)$は同時に$f_i(\varphi_{-tn}C\cap U_i)$に入るか入らないかになり，一方$(x_n,y)$は$f_i(\varphi_{-tn}C\cap U_i)$に入っている。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

ゆえに，

$$\text{mes}\,[X^k \times Y^{l+1} - f_i(\varphi_{-tn} C \cap U_i)] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

すなわち，　$\mu(U_i - \varphi_{-tn}C) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\mu(M-C) = \mu(M-\varphi_{-tn}C) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(U_i - \varphi_{-tn}C) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

これは，$0<\mu(C)<1$ に矛盾する。ゆえに仮定の様なAは存在しない。

3.

— 定理5,4の証明 —

段階をおって証明する。

(1)　generafor　ζを構成する。

Uを$\mathfrak{X}$と$\mathcal{Y}$の leaf によって囲まれた近傍であって，$\mu(U)>0$，（Uの直径）$\leq d$，（d；定数）であるものとする。

ηをU上の$\mathcal{Y}$の leaf よりなる可測分割とし，$\tilde{\eta}=\{\eta, M-U\}$とする。可測分割$\zeta$は次のように与える。

$$\zeta = \bigvee_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n}\tilde{\eta}$$

このζがgenerafor であるための3つの条件を充していることを示めそう。

(2)　φはエルゴード的であるから，$\bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n}U = M$（modo）である。このことから，$\zeta$の要素はすべてYの leaf の連結した部分集合であることがわかる。

さらに，次の事は明らかである。

$$\varphi\zeta = \bigvee_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n+1}\tilde{\eta} = \bigvee_{n=-1}^{\infty} \varphi^{-n}\tilde{\eta} > \zeta$$

(3)　$\overset{\infty}{\vee}\varphi^n\zeta = \varepsilon$ であることを示めそう。

この事を示すためには，次の様な可測集合Nが存在する事をいえばよい。

(i)　$\mu(N)=0$，(ii)　任意のp_1，$p_2 \in M-N$に対し，kが存在して，p_1とp_2が$\varphi^k\zeta$の別の要素に含まれている。

$N_1=\{p\in M;\ \varphi^n p \in U$ になるnが有限個にしかない$\}$ と置くと，φのエルゴード性により，$\mu(N_1)=0$である。

$N_2=\{p\in M;\ C_{\varphi^n\zeta}(p)$ の直径が$n\to 0$の時0に収束しない$\}$と置く。ここで$C_\zeta(p)$はζの要素であってpを含むものを表わす。φの性質によって，N_2の様な集合は$\mathcal{Y}$の leaf で生

成されているものにかぎることがわかる。一方$\mathcal{Y}$はmetrical tramsitive であるから，$\mu(N_2)=0$か又は1である。

また$N_2 \cup U=\phi$であり，$\mu(U)>0$であるから，$\mu(N_2)=1$ではあり得ない。ゆえに$\mu(N_2)=0$である。

$$N = N_1 \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi^n N_2$$

と置くことにする。明らかに$\mu(N)=0$である。

任意のp_1，$p_2 \in M-N$に対して，$\varphi^k p_1 \in U$，$\varphi^k p_2 \in U$を同時に充すkが存在するとする。（存在しなければ示せたことになる）

その様なkに対して，$\varphi^k p_1$と$\varphi^k p_2$がζの同じ要素に入る時が問題である。Nの与え方から，$\varphi^k p_1$，$\varphi^k p_2 \in M-N$であり，$C_{\varphi^n\zeta}(\varphi^k p_1)$と$C_{\varphi^n\zeta}(\varphi^k p_2)$の直径は$n\to\infty$のとき0に収束する。

ゆえに，十分大きなnに対し，

$$C_{\varphi^n\zeta}(\varphi^k p_1)\text{の直径} \leq \mathrm{dis}(\varphi^k p_1, \varphi^k p_2)$$

となっている。これは$\varphi^k p_1$と$\varphi^k p_2$が$\varphi^n\zeta$の別の要素に含まれていることを示している。すなわちp_1とp_2は$\varphi^{n-k}\zeta$の別の要素に含まれている。

(4) $\bigwedge_{-\infty} \varphi^n\zeta=\nu$であることを示めそう。

$\mathfrak{M}(Y)=\mathfrak{N}$であるから，$(\bigwedge_{-\infty}\varphi^n\zeta)=(\mathcal{Y})$がいえればよい。

ここで，$\mathfrak{M}(\zeta)$は可測分割ζによって生成された完備σ−代数であり，$\mathcal{Y}$は$\mathcal{Y}$のleafによる分割をも示しているものとする。

明らかに"$\geq$"は成立しているから，"$\leq$"を示すことにする。すなわち，任意の$A\in\mathfrak{M}(\bigwedge_{-\infty}\varphi^n\zeta)$は$A\in\mathfrak{M}(Y)$であることを示す。このため，Sinai〔9〕による次の局所化定理が必要になってくる。

局所化定理

$U=\{U_\alpha\}$を可算局所baseとし，$\xi_\alpha=\mathcal{Y}\mid U_\alpha$（$\mathcal{Y}$のleafによる可測分割を$U_\alpha$に制限したもの）とする。

hをM上の可測函数とするとき，任意のαに対し，U_α上で考えてhが$\mathfrak{M}(\xi_\alpha)$−可測ならば，hは$\mathfrak{M}(\mathcal{Y})$−可測である。

ここで$U=\{U_\alpha\}$が可算局所baseであるとは，U_αの個数が可算個であって，Uがσ−代数のbaseであり，すべてのU_αに対し，$\mu(U_\alpha\cap A)=0$，$\mu(U_\alpha\cap(M-A))=0$の内どちらかが成立するような可測集合A（$0<\mu(A)<1$）が存在しないものである。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

証明に戻ろう。Vを$\mathfrak{X}$と$\mathcal{Y}$の leaf によって囲まれている開近傍としょう。このようなVの可算個で可算局所 base が構成できることはMのコンパクト性から容易にわかる。

$\varphi^n\zeta \xrightarrow{n\to\infty} \varepsilon$ であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対し，mを十分大きく取ると次の様な $V^{(\varepsilon)}\in(\varphi^m\zeta)$が存在する。

(i) $V^{(\varepsilon)}\subset V$,　(ii) $\mu(V^{(\varepsilon)})>\mu(V)-\varepsilon$

$\xi^{(\varepsilon)}=\mathcal{Y}\,|\,V^{\varepsilon}$ とすると，

$$\bigwedge_{-\infty}^{+\infty}\varphi^n\zeta\,|\,V^{(\varepsilon)} \leq \bigwedge_{-\infty}^{m}\varphi^n\zeta\,|_{V^{(\varepsilon)}} = \bigwedge_{-\infty}^{0}\varphi^n(\varphi^m\zeta)\,|_{V^{(\varepsilon)}} \overset{(*)}{\leq} \xi^{(\varepsilon)}$$

$\varepsilon\to 0$とすると，

$$\bigwedge_{-\infty}^{+\infty}\varphi^n\zeta\,|_V \leq \xi,\ \text{すなわち，}\ \mathfrak{M}(\wedge\varphi^n\zeta)\,|_V \leq \mathfrak{M}(\xi)$$

ゆえに局所化定理により，$\mathfrak{M}(\wedge\varphi^n\zeta)\leq\mathfrak{M}(\mathcal{Y})$

以上，ζがgemerafor であることが示めされた。

Q. E. D.

注意

(*)の部分の不等式は次の事実による。

$\Gamma(p)$をpを含む$\mathcal{Y}$の leaf とすると，　$p\in V$に対し，数列，$0<n_1<n_2<\cdots\to\infty$ が存在して$\Gamma(p)=\bigcup_k \varphi^{-n_k}C_{\mathcal{Y}|V}(\varphi^{n_k}p)$，$(\varphi^{n_k}p\in V)$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第４章　Geodesic Flow

§8　Geodesic flow の定義

1. Mをn次元リーマン多様体，gをMの基本テンソル，∇をリーマン接続，TM_p，($p \in M$)をpにおける接空間，$TM = \bigcup_{p \in M} TM_p$をMの接バンドルとする。TMには標準的な方法で微分構造が入る。すなわち，($x^1 \cdots x^n$)をp($\in M$)の回りの局所座標とし，$TM_p \ni v$，$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$とすると，vの回りの局所座標として($x^1 \cdots x^n$, $v^1 \cdots v^n$)を取ればよい。TMを多様体と考えたときWと書く事にする。

πをWからMへの自然な写像とする。（すなわち，$\pi(v) = p$）　このときπ_*はTWからWへの自然な写像になっている。

$TW_v \ni X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} \xi^{n+i} \frac{\partial}{\partial v^i}$，$W \to v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$　とするとπ_*を局所座標で表わせば，

$$\pi_*(X) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (8,1)$$

次にTWからWへの写像Kを局所座標によって次の様に定義する。

$$K(X) = \sum_{i,j,k=1}^{n} (\xi^{n+i} + \Gamma^i_{jk} \xi^j v^k) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (8,2)$$

ここで，Γ^i_{jk}はChristoffelの記号である。

このπ_*，Kに関して次のlemmaが成立する。

lemma 8,1　任意のη，$\zeta \in TM_p$に対して，$\pi(X) = \eta$，$K(X) = \zeta$となる様な$X \in TW_v$（$\pi(v) = p$）がvに対して唯一つ定まる。

π_*，Kを用いてW上にリーマン計量$\tilde{g}$を次の様に入れる。

$$\tilde{g}(X, Y) = g(\pi_* X, \pi_* Y) + g(KX, KY) \qquad X, Y \in TW_v \qquad (8,3)$$

Wが$\tilde{g}$を基本テンソルに持つリーマン多様体になることは容易にわかる。（〔7〕を見よ）

2. geodesic flowはW上の次のベクトル場によって定義される。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\begin{cases} \pi_* S_v = v \\ K S_v = 0 \quad (v \in W) \end{cases} \qquad \text{(8,4)}$$

このようなベクトル場Sが存在することはlemma 8,1によって保証されている。Sはgeodesic sprayと呼ばれる。

$W \ni v = (x^i, v^i)$ とし，(8,1)，(8,2) によって S_v を求めると，

$$S_v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i,\ j,\ k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} v^j v^k \frac{\partial}{\partial v^i} \qquad \text{(8,5)}$$

これを $(v^i, -\Gamma^i_{jk} v^i v^k)$ で表わすことにする。

(8,5) によって，geodesic flowを定義する微分方程式は次の様になっている。

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v^i \\ \dot{v}^i = -\Gamma^i_{jk} v^j v^k \end{cases} \qquad \text{(8,6)}$$

(8,6) より，$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$

これはベクトルの足の軌跡がMのgeodesic になっていることを示している。

ゆえにSによって与えられるflowは古典的に与えられたgeodesic flowに一致していることがわかる。

$W_1 = \{ v \in W ; \| v \| = 1 \}$ とすると，W_1 はWの正規な部分多様体である。W_1 がgeodesic flowの不変多様体であることは次のlemmaから明らかである。

lemma 8.2 W上のベクトル場Xが W_1 に接しているための必要十分条件は，$g(v, KX_v) = 0 \quad (v \in W_1)$ である。

証明

$W_1 \ni v = (\chi^i, v^i)$，$X_v = (a^i, a^{n+i})$ とし，$f(v) = g_{ij} v^i v^j$ とすると，(ここで g_{ij} はgの成分)

$$X_v(f) = a^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i v^j + 2 a^{n+i} g_{ij} v^j$$

$$= a^k (\Gamma_{i,\ kj} + \Gamma_{j,\ ki}) v^i v^j + 2 a^{n+i} g_{ij} v_j$$

$$= a^k (g_{il} \Gamma^l_{kj} + g_{jl} \Gamma^l_{ki}) v^i v^j + 2 a^{n+i} g_{ij} v_i$$

$$= 2 g_{ij} \Gamma^i_{kl} a^k v^l v^j + 2 a^{n+i} g_{ij} v^j$$

$$= 2 g_{ij} v^j (a^{n+i} + \Gamma^i_{kl} a^k v^l)$$

$$= 2 g (v, K X_v)$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

（計算の過程では（i)-成分だけを書き，アインシュタインの規約を用いている）

Q. E. D.

普通W_1 に制限したものをgeodesic flowと言っている。W_1 に制限したものをM上のgeodesic flowと言う事にしょう。

3. geodesic flowの保測性を示めそう。そのためには，div S＝0を示めせばよい。

Sasaki〔8〕による次のlemmaが必要である。

lemma 8,3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_{ab}}{\partial x^i} \cdot G^{ab} = 4\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha i} \\ \dfrac{\partial G_{ab}}{\partial v^i} \cdot G^{ab} = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a,\ b\ ;\ 1,2\cdots\cdots 2n \\ i,\ \alpha\ ;\ 1,2\cdots\cdots n \end{pmatrix}$$

（ここでG_{ab} は$\tilde{g}$の共変成分，G^{ab} は$\tilde{g}$の反変成分である。）

lemma 8,3を用いてdiv S_v を計算すると，$S_v=(v^i,\ -\Gamma^i_{ik}v^k v^i)$であるから，

$$\mathrm{div}\ S_v = \frac{2v^i}{2x^i} + \frac{2(-\Gamma^i_{jk}v^j v^k)}{2v^i} + 2\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha i}v^i$$

$$= -2\,\Gamma^i_{ij}v^j + 2\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha i}v^i = 0$$

ゆえにW上でgeodesic flowの保測性が言えた。

次にW_1 上に制限したgeodesic flowの保測性を示めそう。

一般にM^nをn次元リーマン多様体，fをM^n 上の滑らかな函数とし，M^{n-1}をf＝一定で定義された（n－1）次元部分多様体とする。XをM^n 上のベクトル場とし，M^{n-1}に接しているとする。NをM^{n-1}の単位外法線のベクトル場とする。このとき次のlemmaが成立する。

lemma 8,4

$$\mathrm{div}\ X\,|\,M^{n-1} = \mathrm{div}\ X - g(\nabla_N X,\ N) = \mathrm{div}\ X + g(X,\ \nabla_N N)$$

geodesic flowの場合，div S＝0であるから，$\tilde{g}(S,\ \tilde{\nabla}_N N)=0$ がいえれば，div S｜W_1＝0になる。（$\tilde{\nabla}$はWのリーマン接続）

W_1 に対して，Nは，$\pi_* N_v = 0$，$KN_v = v$で定義されるものにあたる。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\tilde{g}(S, \tilde{\nabla}_N N) = g(\pi_* S, \pi_* \tilde{\nabla}_N N) + g(KS, K\tilde{\nabla}_N N)$$
$$= g(\pi_* S, \pi_* \tilde{\nabla}_N N) = g(\pi_* S, \nabla_{\pi_* N} \pi_* N) = 0$$

ゆえにM上のgeodesic flowは保測的である。

§9 負の曲率をもつコンパクト・リーマン多様体のgeodesic flow

この節でgeodesic flowに関するAnosovの定理を証明しょう。

Mをn次元コンパクト・リーマン多様体で，すべてのsectional curvatureが負であるとする。

$R(X, Y) = -\nabla_X \cdot \nabla_Y + \nabla_Y \cdot \nabla_X + \nabla_{[X,Y]}$ を曲率テンソルとし，直交している単位ベクトル$e_1, e_2 \in TM_p$に対し，$g(R(e_1, e_2)e_1, e_2) < 0$ になる。Mはコンパクトであるから，任意のp，e_1，e_2に対して，定数 $\lambda > 0$ が存在して，

$$g(R(e_1, e_2)e_1, e_2) < -\lambda^2 \qquad \cdots \qquad (9,1)$$

定理9,1

負の曲率をもつコンパクト・リーマン多様体上のgeodesic flowはC－flowである。

証明

段階的に証明していこう。

(1) geodesic spray S に対し，$\varphi_t = \mathrm{Exp}\, tS$とする。まず$(\varphi_t)_*$ の行動を知らなければならない。

$$W_1 \ni v(0) = (x^i(0), v^i(0)),\ TW_{1v} \ni Y(0) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} + y^{n+i}(0) \frac{\partial}{\partial v^i} \right\}$$

（これを$(y^i(0), y^{n+i}(0))$で表わす），$\varphi_t v(0) \equiv v(t) = (y^i(t), v^i(t))$，$(\varphi_t)_* Y(0) \equiv Y(t) = (y^i(t), y^{n+i}(t))$ とする。

$S_v = (v^i, -\Gamma^i_{jk} v^j v^k)$であるから，$\varphi_t$ は次の微分方程式で定義される。

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = v^i \\ \dfrac{dv^i}{dt} = -\Gamma^i_{jk} v^j v^k \qquad (i, j, k = 1 \cdots n) \end{cases} \qquad \cdots\cdots \quad (9,2)$$

$(\varphi_t)_*$ に対応するベクトル場は$dS = (dv^i, d(-\Gamma^i_{jk} v^i v^k))$ であり，dS のYにおけ

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

るベクトルはdS(Y)である。一方，$dx^i(Y)=y^i$，$dv^i(Y)=y^{n+i}$ であるから，$(\varphi_t)_*$ は次の方程式で定義されている。

$$\begin{cases} \dfrac{dy^i}{dt}=y^{n+i} \\ \dfrac{dy^{n+i}}{dt}=-\dfrac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}\, y^l v^j v^k-2\Gamma^i_{jk} v^j y^{n+k} \end{cases} \qquad \cdots\cdots (9,3)$$

$\pi_* Y(t)$，$KY(t)$ に対して次の lemma が成立する。

lemma 9,1

$$\frac{D}{dt}\pi_* Y(t)=KY(t) \qquad \cdots\cdots (9,4)$$

$$\frac{D}{dt}KY(t)=R(v(t),\pi_* Y(t))v(t)=0 \qquad \cdots\cdots (9,5)$$

ここで $\dfrac{D}{dt}=\nabla_{\pi_* s}$ である。（$\pi_* s$ に関する共変微分）

<u>証明</u>

i）　$\pi_* Y=\sum_{i=1}^{n} y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ であるから，（11,2），（11,3）を用いると，

$$\frac{D}{dt}\pi_* Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dy^i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}y^j\frac{dx^k}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y^{n+i}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}y^j v^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i}=KY$$

（以後，まぎらわしい場合を除いてΣは書かず，また計算の途中では（i）－ 成分だけを書くことにしょう。）

ii）　$$\frac{D}{dt}KY=\frac{d(y^{n+i}+\Gamma^i_{jk}y^j v^k)}{dt}+\Gamma^i_{jl}(y^{n+j}+\Gamma^j_{km}y^k v^m)\frac{\partial x^l}{dt}$$

（11,2），（11,3）より

$$=-\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}y^l v^j v^k-2\Gamma^i_{jk}v^i y^{n+k}+\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}v^l y^j v^k+$$

$$+\Gamma^i_{jk}y^{n+j}v^k-\Gamma^i_{jk}\Gamma^k_{lm}y^j v^l v^m+\Gamma^i_{jk}y^{n+j}v^k+\Gamma^i_{jl}y^{n+j}v^k+$$

$$+\Gamma^i_{jl}\Gamma^j_{km}y^k v^m v^l$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$= -\left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl}\right) v^j y^l v^k$$

$$= -R^i_{jlk} v^j y^l v^k = -R(v, \pi_* Y) v$$

Q. E. D.

(2) tangent plane field $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$を与えよう。

$W_1 \ni v$に対して，U_v を次の様に与える。

$$U_v = \{ X \in TW_v \,;\, g(\pi_* X, v) = 0,\ g(KX, v) = 0 \}$$

これはW_1 の接ベクトルで，Sに直交しているものの全体である。明らかにU_v は $TW_{1\,v}$の部分空間になっている。またU_v はφ_t− 不変（$(\varphi_t)_* U_v = U_{\varphi_t v}$）である。実際，

$$\frac{d}{dt} g(\pi_* X, v) = g\left(\frac{D}{dt}\pi_* X, v\right) + g\left(\pi_* X, \frac{D}{dt} v\right) = g(KX, v) = 0$$

$$\frac{d}{dt} g(KX, v) = g\left(\frac{D}{dt} KX, v\right) + g\left(KX, \frac{D}{dt} v\right) = g(-R(v, \pi_* X) v, v) =$$

$$= 0$$

そこで$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$を次の様に与える。

$$\mathfrak{X}_v = \{ Z \in U_v \,;\, (\varphi_t)_* Z \xrightarrow{t \to -\infty} 0 \}$$

$$\mathfrak{Y}_v = \{ Z \in U_v \,;\, (\varphi_t)_* Z \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \}$$

明らかに$\mathfrak{X}_v$, $\mathfrak{Y}_v$はU_v の部分空間になっている。実はこの$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$が拡大，縮小している tangent plane field になっているのである。まず$TW_{1\,v} = \mathfrak{X}_v \oplus \mathfrak{Y}_v \oplus S_v$ を示めそう。

今後，$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, $\langle X, X \rangle = \| X \|^2$ と書く事にする。

(9,4)，(9,5) より

$$\frac{D^2}{dt^2} \pi_* Y + R(v, \pi_* Y) v = 0$$

$$\langle R(v, \pi_* Y) v, \pi_* Y \rangle = -\left\langle \frac{D^2}{dt^2} \pi_* Y, \pi_* Y \right\rangle$$

$$= -\frac{d}{dt}\left\langle \frac{D}{dt} \pi_* Y, \pi_* Y \right\rangle + \left\| \frac{D}{dt} \pi_* Y \right\|^2$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|\pi_* Y\|^2 + \|\frac{D}{dt}\pi_* Y\|^2$$

ゆえに

$$\frac{d^2}{dt^2}\|\pi_* Y\|^2 = -2 < R(v, \pi_* Y)v, \pi_* Y > + 2\|KY\|^2 \qquad (9,6)$$

特に $Y \in U_v$ のとき，$<v, \pi_* Y> = 0$ であるから

$$\frac{<R(v, \pi_* Y)v, \pi_* Y>}{\|\pi_* Y\|^2} \leq -\lambda^2$$

ゆえに

$$\frac{d^2}{dt^2}\|\pi_* Y\|^2 \leq 2\lambda^2\|\pi_* Y\|^2 \qquad (9,7)$$

また（9,5）より，

$$\|\frac{D}{dt}KY\| \leq A\|\pi_* Y\| \qquad (9,8)$$

ここで，$A = \max_{\|\pi_* Y\|=1,\ v \in w_1} \|R(v, \pi_* Y)v\|$ である。

さらに，

$$\frac{d}{dt}\|\pi_* Y\| = \frac{d}{dt}<\pi_* Y, \pi_* Y> = 2<\pi_* Y, \frac{D}{dt}\pi_* Y> = 2<\pi_* Y, KY>$$

であるから，

$$\left|\frac{d}{dt}\|\pi_* Y\|^2\right| \leq 2\|\pi_* Y\|\cdot\|KY\| \qquad (9,9)$$

（9,8）より

$$2\|KY\|\left|\frac{d}{dt}\|KY\|\right| = \left|\frac{d}{dt}\|KY\|^2\right| = \left|2<KY, \frac{D}{dt}KY>\right| \leq 2A\cdot\|KY\|\cdot$$

$$\cdot\|\pi_* Y\|$$

ここで $\|KY\| \neq 0$ とすると，

$$\left|\frac{d}{dt}\|KY\|\right| \leq A\|\pi_* Y\| \qquad (9,10)$$

次の lemma が成立する。

lemma 9,2 $\|\pi_* Y(t)\|$ が $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ で単調減少であるなら，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$\|KY(0)\| \leq 2\sqrt{A}\ \|\pi_* Y(0)\|$ である。

証明

$\|\pi_* Y\|$ の単調減少性により，$\dfrac{d}{dt}\|\pi_* Y\|^2 < 0 \quad \left(0 < t < \dfrac{1}{\sqrt{A}}\right)$

ゆえに（9,9）より，$0 < t < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ において $\|KY\| \neq 0$ となる。

（9,10）より，$0 < t < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ において $\left|\dfrac{d}{dt}\|KY(t)\|\right| \leq A\|\pi_* Y(t)\| \leq$

$A\|\pi_* Y(0)\|$

この事により，

$$\|KY(t)\| \geq \|KY(0)\| - A\|\pi_* Y(0)\| \cdot t \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{A}}\right)$$

ゆえに，

$$\|KY(t)\|^2 \geq \|KY(0)\|^2 - 2A\|\pi_* Y(0)\| \cdot \|KY(0)\|\, t$$

（9,6）において，$-2 < R(v, \pi_* Y)v, \pi_* Y> \ > 0$ であるから，

$$\frac{d^2}{dt^2}\|\pi_* Y\| \geq 2\|KY\|^2$$

である。ゆえに，

$$\frac{d^2}{dt^2}\|\pi_* Y(t)\|^2 \geq 2\|KY(t)\|^2 \geq 2\|KY(0)\|^2 - 4A\|\pi_* Y(0)\| \cdot \|KY(0)\|$$

これを 0 から s まで積分すると，$\left(0 \leq s \leq \dfrac{1}{\sqrt{A}}\right.$

$$\left.\frac{d}{dt}\|\pi_* Y(t)\|^2\right|_0^s \geq 2\|KY(0)\|^2 s - 2A\|\pi_* Y(0)\| \cdot \|KY(0)\| s^2$$

（9,9）より $\left|\dfrac{d}{dt}\|\pi_* Y(0)\|^2\right| \leq 2\|\pi_* Y(0)\| \cdot \|KY(0)\|$ であるから，

$$\frac{d}{ds}\|\pi_* Y(s)\|^2 \geq 2\|KY(0)\|^2\ s - 2A\|\pi_* Y(0)\| \cdot \|KY(0)\|^2\ s - 2\|\pi_* Y(0)\| \cdot \|KY(0)\|$$

ここにおいて $s = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ とおくと，$\dfrac{d}{dt}\|\pi_* Y(t)\|^2 \leq 0$ であるから，

$$0 \geq \frac{2\|KY(0)\|^2}{\sqrt{A}} - 4\|\pi_* Y(0)\| \cdot \|KY(0)\|$$
$$= \frac{2\|KY(0)\|}{\sqrt{A}}\{\|KY(0)\| - 2\sqrt{A}\|\pi_* Y(0)\|\}$$

Q. E. D.

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

(9,7) より $\frac{d^2}{dt^2}\|\pi_*Y\|^2>0$ であるから $\|\pi_*Y\|^2$ は凸ー函数である。

$Y\in\mathfrak{X}_v$ とすると，$\|\pi_*Y\|^2+\|KY\|^2\xrightarrow{t\to-\infty}0$ であるから，$\|\pi_*Y\|^2\xrightarrow{t\to-\infty}0$ となり，凸性から，$\|\pi_*Y(-t)\|^2$ は単調減少になっていることがわかる。同様に $Y\in\mathfrak{Y}_v$ なら，$\|\pi_*Y(t)\|^2$ が単調減少になっている。

lemma 9,2にこの事をあてはめて見ると，任意の t に対して，

$$Y\in\mathfrak{X}_v \text{ のとき,} \quad \|KY\|\leq 2\sqrt{A}\,\|\pi_*Y\|$$
$$Y\in\mathfrak{Y}_v \text{ のとき,} \quad \|KY\|\leq 2\sqrt{A}\,\|\pi_*Y\| \qquad (9,11)$$

また次の事がわかる。

$$\mathfrak{X}_v\cap\mathfrak{Y}_v=0 \qquad (v\in W_1) \qquad (9,12)$$

（凸であって単調減少と単調増加が同時に起るような函数は存在しないことによる。）

ここで，$TM_p\ni v$ に対して，$TM_p(v)$ を次のように与える。

$$TM_p(v)=\{\eta\in TM_p\ ;\ <\eta,\ v>=0\}$$

$TM_p(v)$ を用いれば，U_v は次の様にもいえる。

$$U_v=\{X\in TW_v\ ;\ \pi_*X,\ KX\in TM_p(v)\}$$

lemma 9,3

任意の $\eta_0\in TM_p(v)$ に対し，$\pi_*Y=\pi_*Y'=\eta_0$ となる $Y\in\mathfrak{X}_v$，$Y'\in\mathfrak{Y}_v$ が存在する。

証明

$\mathfrak{Y}_v\ni Y'$ の存在だけを示めそう。$\mathfrak{X}_v\ni Y$ の存在は時間を逆に取ってやればよい。$\pi_*Y'=\eta_0$ $KY'=\zeta_0$ としたときに $\mathfrak{Y}_v\ni Y'$ となるような $\zeta_0\in TM_p(v)$ を構成する。

$\eta_n(0)=\eta_0$，$\eta_n(n)=0$ $(n=1,2\cdots\cdots)$ を境界条件にもつ方程式 (9,4)，(9,5) の解を $\{\eta_n(t),\ \zeta_n(t)\}$ とする。

$\|\eta_n(t)\|^2$ は $0\leq t\leq n$ において凸で単調減少である。

$n>\frac{1}{\sqrt{A}}$ なる n に対して，lemma 9,2より，$\|\zeta_n(0)\|\leq 2\sqrt{A}\|\eta_0\|$

ゆえに $\{\zeta_n(0)\}$ の収束する部分列 $\{\zeta_{n_k}(0)\}$ が存在する。

$\lim_{n_k\to+\infty}\zeta_{n_k}(0)=\zeta_0$ とするとこれが求めるものである。

実際，$\{\eta(t),\ \zeta(t)\}$ を境界条件 $\eta(0)=\eta_0$，$\zeta(0)=\zeta_0$ の方程式 (9,4)，(9,5) の解とする。明らかに，任意の t に対し，$\lim_{n_k\to+\infty}\eta_{n_k}(t)=\eta(t)$

$\lim_{t\to+\infty}\|\eta(t)\|=0$ を示す。もし定数 $a>0$ が存在して $\|\eta(t)\|>a$ ならば，(9,7) より $\frac{d^2}{dt^2}\|\eta(t)\|^2>2\lambda^2a^2$ であるから，$\lim_{t\to+\infty}\|\eta(t)\|=+\infty$ となり，これは

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$\|\eta(t)\|^2$ の減少性に矛盾する。ゆえに $\lim_{t\to+\infty}\|\eta(t)\|=0$

また（9,11）より $\|\zeta(t)\|\leq 2\sqrt{A}\|\eta(t)\|$ であるから $\lim_{t\to+\infty}\|\zeta(t)\|=0$

ゆえに，$\lim_{t\to+\infty}\|Y'(t)\|=0$，すなわち $Y'\in\mathscr{Y}_v$ である。

Q. E. D.

$\dim TM_p(v)=n-1$ であるから，lemma 9,3より，$\dim\mathscr{X}_v\geq n-1$，$\dim\mathscr{Y}_v\geq n-1$，一方 $\dim U_v=2n-2$ であるから（9,12）より，

$$U_v=\mathscr{X}_v\oplus\mathscr{Y}_v,\quad \dim\mathscr{X}_v=\dim\mathscr{Y}_v=n-1$$

すなわち，$TW_{1\,v}=\mathscr{X}_v\oplus\mathscr{Y}_v\oplus S_v$ （9,13）

以上，tangent plane field $\mathscr{X}_v$，$\mathscr{Y}_v$ が得られた。

(3) $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$ がそれぞれ拡大，縮少している事を示そう。そのためによく知られた次の lemma が必要である。

lemma 9,4　$r(t)$ を $t\geq 0$ で定義された，C^2 ー級の実函数とし，$r(t)\geq 0$，$\ddot{r}(t)\geq 2\lambda^2 r(t)$，$r(0)=r_0$，$\dot{r}(0)=\dot{r}_0>0$ であるとき，

$$r(t)\geq r_0\ \mathrm{ch}\sqrt{2}\,\lambda t+\frac{1}{\sqrt{2}\,\lambda}\dot{r}_0\ \mathrm{sh}\sqrt{2}\,\lambda t$$

lemma 9,4より

$$r(t)\geq r_0\ \mathrm{ch}\sqrt{2}\,\lambda t+\frac{1}{\sqrt{2}\,\lambda}\dot{r}_0\ \mathrm{sh}\sqrt{2}\,\lambda t$$

$$\geq r_0\frac{e^{\sqrt{2}\lambda t}+e^{-\sqrt{2}\lambda t}}{2}=\frac{1}{2}r_0e^{\sqrt{2}\lambda t}(1+e^{-2\sqrt{2}\lambda t})\geq\frac{1}{2}r_0e^{\sqrt{2}\lambda t}$$

$\mathscr{X}_v\ni Y$，$r(t)=\|\pi_*Y(t)\|^2$ とすると（9,7）よりこの $r(t)$ が lemma 9,4の条件を充している事がわかる。ゆえに，

$$\|\pi_*Y(t)\|^2\geq\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}\lambda t}\|\pi_*Y(0)\|^2\qquad(t\geq 0)$$

（9,11）により，

$$\begin{aligned}\|Y(0)\|^2=\|\pi_*Y(0)\|^2+\|KY(0)\|^2&\leq(1+4A)\|\pi_*Y(0)\|^2\\&\leq 2(1+4A)e^{-\sqrt{2}\lambda t}\|\pi_*Y(t)\|^2\\&\leq 2(1+4A)e^{-\sqrt{2}\lambda t}\|Y(t)\|^2\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

ゆえに，

$$\|Y(t)\| \geq \frac{1}{\sqrt{2(1+4A)}} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda t} \|Y(0)\|, \quad (t \geq 0)$$

また $t \leq 0$ のときは，初期値 $\|\pi_* Y(0)\|^2$ と $\|\pi_* Y(t)\|$ との評価を初期値 $\|\pi_* Y(t)\|$ と $\|\pi_* Y(0)\|$ との評価におき代えてやれば，

$$\|\pi_* Y(t)\|^2 \leq 2 e^{\sqrt{2}\lambda t} \|\pi_* Y(0)\|^2, \quad (t \leq 0)$$

(9,11) により，

$$\|Y(t)\|^2 \leq (1+4A)\|\pi_* Y(t)\|^2 \leq 2(1+4A) e^{\sqrt{2}\lambda t} \|\pi_* Y(0)\|^2$$
$$\leq 2(1+4A) e^{\sqrt{2}\lambda t} \|Y(0)\|^2$$

ゆえに，

$$\|Y(t)\| \leq 2(1+4A) e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda t} \|Y(0)\|, \quad (t \leq 0)$$

$\mathcal{Y}_v \ni Y$ のときは，$r(t) = \|\pi_* Y(-t)\|^2$ とすれば同様にC－条件の(F，3)を充していることがいえる。

ゆえに $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ はそれぞれ拡大，縮少する tangent plane field であることが示めされた。

以上，定理9,1が証明された。

Q. E. D.

注意9,1

定理9,1とC－flowに関する二者択一の定理(定理5,8)とArnoldのrotation number に関する定理(〔4〕)を用いると，n次元コンパクト・リーマン多様体上のgeodesic flowはK－flowであることがいえる。

§10 horocycle flow

1. dim $M=2$ の場合を考えよう。(M に対して W, W_1 は§8で定義したものである) $W \ni v$ に対し，v と直交し，長さが等しいベクトルを $u(v)$ とする。(v に対し，右手系になる様に u が唯一つ定まる)，k を定数とし，次のベクトル場で定義されるflowを考えよう。

$$\begin{cases} \pi_* H_v = v \\ K H_v = k u \end{cases} \qquad (10,1)$$

このflowは，geodesic curvatureが k の曲線にそって接ベクトルを移動するもので

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

ある。（ k＝0のときはgeodesic flowと一致する）この様なベクトル場を$H^{(k)}$と書いて，これでflowをも表わすことにする。flow $H^{(k)}$はW_1 に制限でき，しかも保測的である事がいえる。

lemma 9,1と同様な次のlemmaが成立する。

lemma 10,1

$$\frac{D}{dt}\pi_* Y(t)_v = KY(t)_v \qquad (10,2)$$

$$\frac{D}{dt}KY(t)_v = -R(v, \pi_* Y(t)_v)v + kK\tilde{Y}(t)_u \qquad (10,3)$$

（ここで，$\pi_* Y_v = \pi_* \tilde{Y}u$，$\langle KY_v, K\tilde{Y}u\rangle = 0$ である。）

ここでflow $H^{(k)}$をW_1 に制限して考えよう。すなわち（10,1），（10,2），（10,3）において，$\|v\| = \|u\| = 1$，$\langle v, KY\rangle = 0$となっている。

$TM_{\pi(v)} \ni \pi_* Y$，KYであるが，$TM_{\pi(v)}$は（ v， u ）で張られているから，$\pi_* Y$，KYは次の様に置き代える事ができる。

$$\begin{cases} \pi_* Y = x \cdot v + y \cdot u \\ KY = z \cdot u \end{cases} \qquad (10,4)$$

（10,4）を（10,2）に代入して，

$$\frac{D}{dt}\pi_* Y = \dot{x}\cdot v + x\cdot\frac{Dv}{dt} + \dot{y}u + y\frac{Du}{dt} = zu$$

$$\dot{x}\ v + kx\cdot u + \dot{y}u - kyv = zu$$

$$\therefore \quad (\dot{x} - ky)v + (\dot{y} + kx - z)u = 0$$

これより，

$$\begin{cases} \dot{y} + kx = z \\ \dot{x} = ky \end{cases} \qquad (10,5)$$

また（10,4）を（10,3）に代入して，

$$\frac{D}{dt}KY = \dot{z}u - kzv = -R(v, xv + yu)v + kK\tilde{Y}u$$

uとの内積を取ると

$$\dot{z}\langle u, u\rangle - kz\langle v, u\rangle = -x\langle R(v, v)v, u\rangle - y\langle R(v, u)v, u\rangle + $$
$$+ k\langle K\tilde{Y}u, u\rangle$$

ここで$\langle u, u\rangle = 1$，$\langle v, u\rangle = 0$，$\langle R(v, v)v, u\rangle = 0$，$\langle K\tilde{Y}u, u\rangle = 0$であるから，$\langle R(v, u)v, u\rangle \equiv c(v)$と置くと，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\dot{z}+c(v)y=0 \qquad \cdots\cdots \qquad (10,6)$$

(10,5) と (10,6) より

$$\ddot{y}+[c(v)+k^2]\,y=0 \qquad \cdots\cdots \qquad (10,7)$$

定理10,1 Mが2次元コンパクト・リーマン多様体で，$\lambda>0$が存在して，$c(v)+k^2\leqq -\lambda^2$ であるとき，flow $H^{(k)}$はC－flow であり，さらにK－flowである。

証明

(10,7) より

$$\frac{d^2}{dt^2}y^2=-2[c(v)+k^2]\,y^2+2\dot{y}^2$$

ゆえに，

$$\frac{d^2}{dt^2}y^2\geqq 2\lambda^2 y^2 \qquad \cdots\cdots \qquad (10,8)$$

（これはgeodesic flowにおける (9,7) に対応している。）

(10,5) より，

$$\left.\begin{array}{l}|\dot{x}|=|k|\,|y| \\ |\dot{z}|\leqq A\,|y| \qquad \left(A=\sup_{v\in W_1}|c(v)|\right)\end{array}\right. \qquad \cdots\cdots \qquad (10,9)$$

$$\mathfrak{X}_v=\{TW_{1\,v}\ni Y\,;\,(\varphi_t)_*Y\xrightarrow{t\to-\infty}0\}$$

$$\mathfrak{Y}_v=\{TW_{1\,v}\ni Y\,;\,(\varphi_t)_*Y\xrightarrow{t\to+\infty}0\} \qquad (\varphi_t=\mathrm{Exp}\,tH^{(k)})$$

この$\mathfrak{X}_v$，$\mathfrak{Y}_v$が拡大，縮少しているtangent plane field であることは次の様にしてわかる。

まず，(10,9) が (9,8) に対応していることを見れば，lemma 9,2から，$\mathfrak{Y}_v\ni Y$又は$\mathfrak{Y}_v\ni Y$に対応して，

$$\left\{\begin{array}{l}|x|\leqq 2\sqrt{|k|}\,|y| \\ |z|\leqq 2\sqrt{A}\,|y|\end{array}\right. \qquad \cdots\cdots \qquad (10,10)$$

$\|Y\|^2=x^2+y^2+z^2$ であるから，y^2 の凸性から，

$$\mathfrak{X}_v\cap\mathfrak{Y}_v=0$$

また，$(\varphi_t)_*H^{(k)}_v=H^{(k)}_{\varphi_t v}$，$\|H^{(k)}_{\varphi_t v}\|=\|v\|^2+k^2\,\|u\|^2=1+k^2$であるから，

$H^{(k)}_v\cap\mathfrak{X}_v=0$，$H^{(k)}_v\cap\mathfrak{Y}_v=0$がいえる。

ゆえに，$\dim\mathfrak{X}_v\geqq 1$，$\dim\mathfrak{Y}_v\geqq 1$ がいえれば，$\mathfrak{X}_v$，$\mathfrak{Y}_v$，$H^{(k)}_v$ によって$TW_{1\,v}$が張われていることがわかる。しかしその事は (10,10) とlemma 9,3から簡単にいえる。

(10,8)，(10,10) とlemma 9,4から$\mathfrak{X}_v$，$\mathfrak{Y}_v$がC－条件 (F，3) を充していること

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

も定理9,1の場合と同様に示すことができる。

Q. E. D.

2. ここで$c(v)=-1$の場合を考える。すなわちMを定負曲率-1をもつ2次元コンパクト・リーマン多様体とする。

このとき$k=1$とした$H^{(1)}$をhorocycle flowという。このhorocycle flow$H^{(1)}$のエントロピーが0であることをKouchinirenkoの定理を用いて証明しよう。

定理10,2 horocycle flowのエントロピーは0である。

<u>証明</u>

(10,5),(10,7)より,$\dot{y}+x=z$, $\dot{x}=y$, $\ddot{y}=0$である。

Kouchinirenkoの定理により,$\|Y(t)\|$がtの多項式でおさえられていることを示せばよい。($\|Y(t)\|^2=x^2+y^2+z^2$)

実際,方程式を解けば,$x=\frac{1}{2}at^2+bt+c$, $y=at+b$, $z=\frac{1}{2}at^2+(a+b)t+c$ ($a=\dot{y}(0)$, $b=y(0)$, $c=x(0)$)

ゆえに定理は証明された。

Q. E. D.

定理10,1,定理10,2と古典的な結果によって次の事がいえる。

定理10,3 Mが定負曲率をもって2次元コンパクト・リーマン多様体とするとき,M上のflow$H^{(k)}$はkによって次の3つの場合がでてくる。

(i) $k^2-1<0$のとき,$H^{(k)}$はC-flow, K-flowである。

(ii) $k^2-1=0$のとき,$H^{(k)}$は0-エントロピー,σ-ルベック・スペクトルを持つ。

(iii) $k^2-1>0$のとき,すべてのorbitは閉じている。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

第５章　C－systemのエントロピー

§11　C－systemのエントロピー

1. C－systemのエントロピーはSinai〔9〕の方法をC－systemに適用すれば次の様なものとして求まる。

(M, φ, μ)をC－diffeomorphismとし，$\lambda(p)$を$\mathfrak{X}_p$上の単位方体の体積のφによる変化率とすると，φのエントロピー$H(\varphi)$は次のものになる。

$$H(\varphi) = \int_M \log \lambda(p)\, d\mu(p) \tag{11,1}$$

(M, φ_t, μ)をC－flowとする。$\lambda_t(p)$を$\mathfrak{X}_p$上の単位方体の体積のφ_tによる変化率とする。

$$\alpha(p) = \frac{d}{dt}\lambda_t(p)\Big|_{t=0}, \qquad h = \int_M \alpha(p)\, d\mu(p)$$

とするとφ_tのエントロピー$H(\{\varphi_t\})$は次の様になる。

$$H(\{\varphi_t\}) = h \cdot \log_2 e \tag{11,2}$$

（ただし，これらは$\mu(M)=1$となっているものとして計算したものである。）

（11,1），（11,2）を具体的なC－systemに適用して見よう。

2. 2次元トーラス$\mathbb{T}^2$を考え，$\mathbb{T}^2$上のautomorphism T_0を次の様に与える。

$$T_0 \ ; \ \begin{array}{l} x \rightsquigarrow 2x+y \\ y \rightsquigarrow x+y \end{array} \tag{11,3}$$

すなわちT_0は行列$\begin{pmatrix} 2 ; & 1 \\ 1 ; & 1 \end{pmatrix}$で表わされるものである。

fをC^2－級の周期的（$f(x) = f(x+1)$）な実函数とし，$f(0)=0$，$f'(0) \neq 0$であるとする。

このfに対し，$\mathbb{T}^2$上のautomorphism T_fを次の様に与える。

$$T_f \ ; \ \begin{array}{l} x \rightsquigarrow x' = 2x+y \\ y \rightsquigarrow y' = x+y+f(2x+y) \end{array} \tag{11,4}$$

fの周期性から，T_fが$\mathbb{T}^2$上のautomorphismになっている事は容易にいえる。またT_fが測度を保っていることは，T_fのJacobianが1になることからわかる。（T_fはT_0の滑らかな変形である）

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

この様なT_0，T_fに対して次の定理が成立する。

定理11,1

十分小さなfに対して，$H(T_f) \leq H(T_0)$

証明

T_0がC－diffeomorphismであることはよく知られている。だから定理3,1により，十分小さなfに対して，T_fもまたC－diffeomorphismになる。この様なT_fに対しては(11,1)が使える。

(11,4)より

$$(T_f)^* \quad ; \quad \begin{array}{l} dx \longrightarrow dx' = 2dx + dy \\ dy \longrightarrow dy' = dx + dy + Df(2x+y)\,dx' \end{array} \qquad \cdots (11,5)$$

となっている。$k(x, y)$をT_fの拡大するtangent plane fieldの方向の角度とし，$k'(x, y) = k(T_f(x, y))$とすると，

$$(T_f)^* \quad ; \quad (dx, kdx) \longrightarrow (dx', k'dx') \qquad \cdots\cdots (11,6)$$

となっている。

$$dx' = 2dx + kdx = (2+k)\,dx$$

$$k'dx' = dy' = dx + kdx + Df(2x+y)\,dx' = (1+k)\,dx + Df \cdot dx'$$

であるから，

$$k' = \frac{1+k}{2+k} + Df \qquad (Df = Df(2x+y)) \qquad \cdots\cdots (11,7)$$

である。$\lambda(x, y)$を次の様に置く。

$$\lambda(x, y) = \frac{\sqrt{dx^2 + dy'^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\sqrt{k'^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{dx'}{dx} = \frac{\sqrt{k'^2+1}}{\sqrt{k^2+1}}(2+k) \qquad \cdots\cdots (11,8)$$

この$\lambda(x, y)$が(11,1)におけるλにあたる。ゆえに(11,1)を適用すると，

$$H(T_f) = \iint \log \lambda(x, y)\,dxdy = \iint \log \sqrt{k'^2+1}\,dxdy - \iint \log \sqrt{k^2+1}\,dxdy + \iint \log(2+k)\,dxdy$$

一方T_fはエルゴード的であるから，

$$\iint \log \sqrt{k'^2+1}\,dxdy = \iint \log \sqrt{k^2+1}\,dxdy$$

ゆえに，

$$H(T_f) = \iint \log(2+k)\,dxdy \qquad \cdots\cdots (11,9)$$

ここで$\mu = 2+k$と置き，$f \equiv 0$のとき(T_0のとき)のλ，μ，kをそれぞれλ_0，μ_0，k_0とすると，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$k'_0 = k_0 \ , \ \lambda_0 = 2 + k_0 = \mu_0$$

T_0 と T_0^* は行列として等しいから，λ_0 は T_0 の固有値である。

すなわち，$\lambda_0^2 - 3\lambda_0 + 1 = 0$，であって $\lambda_0 > 1$ であるから結局，

$$\lambda_0 = \mu_0 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \qquad \cdots\cdots \quad (11,10)$$

また（0,0）は不動点であるから，$\lambda(0,0) = \mu(0,0)$，$k'(0,0) = k(0,0)$ である。

一方，

$$T_f^*(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 + 2Df(0) & 1 + Df(0) \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \quad (11,11)$$

であるから，$\mu^2(0,0) - (3 + Df(0))\mu(0,0) + 1 = 0$ である。$Df(0) \neq 0$ を仮定しているから，$\mu(0,0) \neq \mu_0$ であることがわかる。

そこで，$\nu(x, y) = \mu(x, y) - \mu_0$ と置くと，$\nu(0,0) \neq 0$ である。すなわち，

$$\iint \nu^2 \, dxdy > 0 \qquad \cdots\cdots \quad (11,12)$$

$\| f \|_{C^1} \longrightarrow 0$ のとき $\| \nu \|_{C^0} \longrightarrow 0$ であることが要易にわかる。（ここで $\| \quad \|_{C^r}$ は C^r ノルムを表わす。）

そこで，

$$\mu' = 2 + k' = 2 + \frac{\mu - 1}{\mu} + Df = 3 - \frac{1}{\mu} + Df$$

であるから，ν' を ν で展開すると，

$$\nu' = 3 - \frac{1}{\mu_0 + \nu} - \mu_0 + Df = 3 - \frac{1}{\mu_0\left(1 + \frac{1}{\mu_0}\right)} - \mu + Df$$

$$= 3 - \frac{1}{\mu_0} - \mu_0 + \frac{\nu}{\mu_0^2} - \frac{\nu^2}{\mu_0^3} + 0(\nu^2) + Df$$

（11,10）より，$3 - \frac{1}{\mu_0} - \mu_0 = 0$ であるから，

$$\nu' = \frac{1}{\mu_0^2}\nu - \frac{1}{\mu_0^3}\nu^2 + 0(\nu^2) + Df \qquad \cdots\cdots \quad (11,13)$$

一方，

$$\iint \nu' \, dxdy = \iint \nu \, dxdy$$

$$\iint Df(2x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f_y(2x+y)\,dy\right) dx = \int_0^1 [f(2x+1) - f(2x)]\,dx$$
$$= 0$$

であるから，（11,13）より，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\iint \nu \, dxdy = \frac{1}{\mu_0^2} \iint \nu \, dxdy - \frac{1}{\mu_0^3} \iint \nu^2 \, dxdy + \iint O(\nu^2) \, dxdy$$

$$\therefore \iint \nu \, dxdy = -\frac{1}{\mu_0(\mu_0^2 - 1)} \iint \nu^2 \, dxdy + \iint O(\nu^2) \, dxdy \quad (11,14)$$

(11,9) より

$$H(T_f) = \iint \log \mu \, dxdy = \iint \log(\mu_0 + \nu) \, dxdy$$

$$\log(\mu_0 + \nu) = \log \mu_0 + \log\left(1 + \frac{\nu}{\mu_0}\right) = \log \mu_0 + \frac{\nu}{\mu_0} - \frac{\nu^2}{2\mu_0^2} + O(\nu^2)$$

であるから，

$$H(T_f) = \log \mu_0 + \frac{1}{\mu_0} \iint \nu \, dxdy - \frac{1}{2\mu_0^2} \iint \nu^2 \, dxdy + \iint O(\nu^2) \, dxdy$$

(11,14) から

$$= \log \mu_0 - \frac{1}{\mu_0^2(\mu_0^2 - 1)} \iint \nu^2 \, dxdy - \frac{1}{2\mu_0^2} \iint \nu^2 \, dxdy + O\left(\iint \nu^2 \, dxdy\right)$$

$$= \log \mu_0 - \frac{\mu_0^2 + 1}{2\mu_0^2(\mu_0^2 - 1)} \iint \nu^2 \, dxdy + O\left(\iint \nu^2 \, dxdy\right)$$

$H(T_0) = \log \lambda_0 = \log \mu_0$ であるから (11,12) より，十分小さい ν (すなわち十分小さい f) に対して，

$$H(T_f) - H(T_0) < 0$$

Q. E. D.

3. 次に§10の2.における flow $H^{(k)}$ を考えよう。($k^2 < 1$)

(10,5)，(10,7) より

$$\begin{cases} \dot{y} + kx = z \\ \dot{x} = ky \\ \ddot{y} + (k^2 - 1)y = 0 \end{cases} \quad (11,15)$$

$\mathcal{X}_p$ 上のベクトルYの長さの動きを方程式 (11,15) を解いて調べる。

初期値 x(0) = y(0) = z(0) = 1 で (11,15) を解けば，拡大していることを考慮して，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$x = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} e^{\sqrt{1-k^2}\, t}$$
$$y = e^{\sqrt{1-k^2}\, t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11,16)$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} e^{\sqrt{1-k^2}\, t}$$

ゆえに（１１,１６）より

$$\| Y(t) \| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\frac{2}{1-k^2}}\, e^{\sqrt{1-k^2}\, t}$$

$\| Y(0) \| = \sqrt{\dfrac{2}{1-k^2}}$ であるから，$\| Y(t) \| / \| Y(0) \| = e^{\sqrt{1-k^2}\, t}$ である。

ゆえに，$\lambda_t(p) = e^{\sqrt{1-k^2}\, t}$ となる。このとき，

$$\alpha(p) = \frac{d}{dt} \lambda_t(p) \Big|_{t=0} = \sqrt{1-k^2}$$

Mの全測度を１とすると，

$$h = \int_M \alpha(p)\, d\mu(p) = \int_M \sqrt{1-k^2}\, d\mu(p) = \sqrt{1-k^2}$$

すなわちｆｌｏｗ $H^{(k)}$ のエントロピーH（$H^{(k)}$）は次の様になる。

$$H(H^{(k)}) = \sqrt{1-k^2} \cdot \log_2 e$$

注意１１,１

$H(H^{(1)}) = 0$ であることは定理１０,２で証明されているから，$H(H^{(k)})$ はkに関して連続である。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

文 献 表

〔1〕 D. V. Anosov ; Roughness of geodesic flows on a compact Riemannian manifold of negative curvature, Sov. Math. Dokl. V3. N4. (1962), P. 1068～1069

〔2〕 〃 ; Geodesic flows on closed Riemannian manifold of negative carvature, Trudy Instituta Steklova V. 90 (1967)

〔3〕 V. I. Arnold and A. Avez ; Problémes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars. Paris (1966)

〔4〕 V. I. Arnold ; Remarks on rotation nambers, Sibirski, Mat. Zhurnal, V2, N6 (1961)

〔5〕 〃 ; Some remarks on flows of line elements and frames, Sov. Math. Dokl. V2. (1961) P. 562～564

〔6〕 A. Avez ; Ergodic theory of dynamical system, V. I, II, Lecture note at Univ. of Minnesota. (1966)

〔7〕 P. Dombrowski ; On the geometry of the tangent bundle, J. Reine Angew. Math. 210 (1962) P. 73～88

〔8〕 S. Sasaki ; On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds I, II, Tohoku Math. J. V10 (1958) P. 338～354 ; Tohoku Math. J. V14 (1962) P. 146～155

〔9〕 Ja. G. Sinai ; Dynamical system with countably multiple Lebeque spectrum II, Izv. Akad. Nauk. 30 (1966) P. 15～68

〔10〕 十時東生 ; flowとエントロピー, Sem. on Prob. V20. (1964)

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

附　　　録

定負曲率を持つ Riemann 面上の geodesic flow

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

negative curvature を持つ compact manifold 上の geodesic flow の研究は C－flow の研究としてなされているわけであるが，ここでは，geodesic flow が ergodic になることを最初に証明した E. Hopf ; Ergodentheorie. の Kapital V ; Ergodentheorie und die geodätischen Linien auf Flächen konstanter negativer Krümmung，の紹介を行なう。証明は調和函数の理論を使って行なわれる。必要とされる知識としては，Fuchsian group と調和函数の初歩的なことである。必要ならば，前者については〔1〕，後者については普通の函数論の教科書を参照していただけばよいが，本稿を読む上ではほとんどその必要はないと思う。

主定理は 2.に示すものであるが，manifold が必ずしも compact ではない点を注意しておきたい。

1. 双曲的非ユークリッド平面

考える空間を定めることから始めよう。$z=x+iy=(x, y)$ 平面内において $K=\{z ; |z|<1\}$，$C=\{z, |z|=1\}$ とおく。K上に次の metric を入れる。

$$ds=\frac{2|dz|}{1-z\bar{z}} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

(1)は，(x, y) について書けば，$ds^2=(dx^2+dy^2)/(1-(x^2+y^2))^2$ と同じものである。Kとその上の metric (1)とを合せたものを双曲的非ユークリッド平面Kと呼ぶ。この平面は又，上半平面，$\{(x, y), y>0\}$ に metric $ds^2=(dx^2+dy^2)/y^2$ を入れたものと同等である。

双曲的非ユークリッド平面Kの曲率が－1であることはよく知られている。（たとえば，〔2〕P. 163,にも示されている。）

(1)に対応して，K上の volume element $d\sigma$ は次の式。

$$d\sigma=\frac{4\,dx\,dy}{(1-z\bar{z})^2} \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

非ユークリッド平面Kにおいては次のことが成立している。

(i) KをKの上に写す正則写像の全体を A(K) で示すと，A(K) の元Sは metric (1)を不変に保つ。更にK上の等距離写像の全体を I(K) とし，$\theta : z\rightarrow\bar{z}$ とすると，I(K) ＝A(K) ＋ θA(K) となる。（〔3〕. P. 56.定理）

なおここで，A(K) の元Sは一般に

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$S(z)=\frac{az+c}{cz+\bar{a}} \qquad a\bar{a}-c\bar{c}=1 \qquad \cdots\cdots (3)$$

の形をしている。

(ii) K上のgeodesic は，Cに直交する（ユークリッド）円弧である。これは，$z=0$を通るgeodesic がユークリッド直線であることと，(i)のA(K) の性質とを使って容易に示される。従って，2点間のgeodesicはuniqueである。

次に，$S\in A(K)$ によって，Poisson differential

$$\frac{1-z\bar{z}}{|\zeta-z|^2}|d\zeta| \qquad \cdots\cdots (4)$$

が不変に保たれることを示そう。知られている事実として，複比 $[z_1, z_2, z_3, z_4]=(z_3-z_1)\cdot(z_4-z_2)/(z_3-z_2)\cdot(z_4-z_1)$ はSで不変である。従って，

$$\frac{dz_1\ dz_2}{(z_1-z_2)^2}=-[z_1, z_2, z_1+dz_1, z_2+dz_2] \qquad \cdots\cdots (5)$$

はSで不変。こゝで$z_1=\zeta$, $z_2=z$ とおいて(1)で割ると(4)が出る。（なお，Hopf は同じようにして (i)も証明している。）

K上のgeodesic flowを定義しよう。

$\tilde{\Omega}=\{P=(z, \varphi);$ liner element, i, e, $Z\in K$, $\varphi\in R\ \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\}$, Pは K上の点と方向を合せたものであり，$\varphi$はX軸とその方向とのなす角度である。Pにより，Zを通るφ方向のgeodesic が唯一つきまる。$\tilde{\Omega}$上のflow $P\to P_t$ を，$P=(z, \varphi)$に対して，$t=0$のときZ上にある点が，Pによってきまるgeodesic にそって速度1で移動したとき，$t=t$で到達する位置と方向を$P_t=(z_t, \varphi_t)$として定義する。空間Kが完備なので，$-\infty<t<+\infty$に対してflowが定義される。このflowを$\{T_t\}$と示す。

$S\in A(K)$ のとき，それに対応して$\tilde{\Omega}$上の変換T(S) が次のように定まる。

$$T(S)\ ;\ (z, \varphi)\ \longrightarrow\ (S(z), \varphi+\arg S'(z)) \qquad \cdots\cdots (6)$$

この変換は，$dS(z)=S(z+dz)-S(z)=S'(z)\,dz+\cdots$ において，$\arg\ dS(z)\fallingdotseq\arg\{S'(z)\,dz\}=\varphi+\arg\ S'(z)$ となっていることから分るように，Sから自然に定まるものである。

GをA(K) の部分群とするとき，(6)によって$\tilde{\Omega}$上の変換からなる群$\Gamma(G)=\{T(S)\ ;\ S\in G\}$が定まる。

$\tilde{\Omega}$上に次の測度を入れて，$\tilde{\Omega}$を確率空間とする。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$dm = d\sigma\, d\varphi \qquad \cdots\cdots \quad (7)$$

$S \in A(K)$ は，$d\sigma$ を不変にし，等角故$d\varphi$ も不変にするから，dmを不変に保つ。すなわち$\widetilde{\Omega}$上の変換$T(S)$ は測度dmを不変に保つ。

$\widetilde{\Omega}$に新しい座標（η_1，η_2，s）を次のようにして定める。

η_1；（z，φ）によって決まるgeodesic の始点。

η_2；　　　　〃　　　　　　の終点。

s；弧（η_1，η_2）の中点z_0 からzまでの符号を込めた距離。

この決め方から分るように，η_1，$\eta_2 \in C$，$-\infty < s < +\infty$である。この座標は旧座標と次の式によって１対１に対応付けられる。（弧（η_1，η_2）とは，始点η_1，終点η_2のK内のgeodesic。）

$$s = \log\left[\eta_1,\ \eta_2,\ z,\ z_0\right],\quad z_0 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2 + |\eta_1 - \eta_2|},\quad \varphi = \arg\frac{(z-\eta_1)(z-\eta_2)}{\eta_1 - \eta_2}$$

この式は，任意の（$\mathring{z}$，φ）が適当な$T(s)$ によって（0,0）に写されることを使って，初等幾何学的に証明される。以下ではこの式を必要とはしないが，対応（z，φ）$\longleftrightarrow$（η_1，η_2，s）が解析的であることを注意しておきたい。

（η_1，η_2，s）座標においては，$T(S)$は次のようになる。

$$T(S)\ ;\ (\eta_1,\ \eta_2,\ s) \longrightarrow \big(S(\eta_1),\ S(\eta_2),\ s + f_S(\eta_1,\ \eta_2)\big) \qquad \cdots\cdots \quad (8)$$

（proof）　$S(\eta_1)$，$S(\eta_2)$になることは明らか。弧（η_1，η_2）の中点z_0 と弧$\big(S(\eta_1)$ $S(\eta_2)\big)$の中点z'_0 に対して，距離$d\big(S(z_0),\ z'_0\big)$は，（η_1，η_2）とSとによってきまる。それをf_S（η_1，η_2）とおく。Sはds を不変に保つから$d\big(S(z_0),\ S(z)\big) = d(z_0,\ z) = s$。従って，$d\big(z'_0,\ S(z)\big) = d\big(z'_0,\ S(z_0)\big) + d\big(S(z_0),\ S(z)\big) = f_S(\eta_1,\ \eta_2) + s$，

（Q. E. D.）

$\widetilde{\Omega}$上の測度dmは，新座標を使って次のように表される。

$$dm = C \cdot \frac{|d\eta_1|\,|d\eta_2|}{|\eta_1 - \eta_2|^2}\, ds \qquad \cdots\cdots \quad (9)$$

C：定数

（proof）まず，(8)式の右辺が$T(S)$ 不変であることを言う。

$|d\eta_1|\,|d\eta_2| / |\eta_1 - \eta_2|^2$ は(5)よりSで不変。従ってTでも不変である。ds は，(8)のsの項が一次であるからT－不変。

一方，(8)の左辺はT－不変であることがすでに分っている。$\widetilde{\Omega}$は３次元故，３次のformは１次

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

元である。従って，なめらかな函数$f(\eta_1, \eta_2, s)$によって，

$$dm = f(\eta_1, \eta_2, s)\frac{|d\eta_1||d\eta_2|}{|\eta_1 - \eta_2|^2}ds \qquad \text{のはづ。}$$

dmも$|d\eta_1||d\eta_2|ds/|\eta_1 - \eta_2|^2$もT－不変であるから$f$もT－不変。しかるに，任意の$(\eta_1, \eta_2, s)$と$(\eta_1', \eta_2', s')$に対して，$T(\eta_1, \eta_2, s) = (\eta_1', \eta_2', s')$となる$T(S)$が存在するから，$f$は定数でなければならない。

(Q. E. D.)

新座標(η_1, η_2, s)においては，flow$\{T_t\}$は，

$$T_t ; (\eta_1, \eta_2, s) \to (\eta_1, \eta_2, s+t) \qquad \cdots\cdots \quad (10)$$

である。

(9)と(10)とにより，測度dmがflow$\{T_t\}$の不変測度になっていることが分る。

2. 主定理

－1の定曲率を持つ2次元Riemannian多様体の普遍被覆は，1.で述べた双曲的非ユークリッド平面Kになることか知られている。逆に，K上において，I(K)の適当な部分群（不連続群）による商空間を考えれば，完備な－1の定曲率を持つ2次元多様体を作ることができる。

こゝでは，特にGがA(K)の部分群で，第1種Fuchsian groupのときについて考察する。（この限定は，本質的な制限ではないのであるか，その説明は省略する。又，3次元空間内には完備な－1の定曲率曲面は存在しないことも注意しておく。）

このとき，Gの基本領域と呼ばれる領域Rが定まって，次の性質を持っている。

(i) Rは$z=0$を含むK内の領域であって，Gのすべての元のisometric circleの外部にある。

(ii) Rの境界は，2つづつ組になった，互に共役なisometric circleである。

(iii) Rの内点には互に共役な点は存在しない。

(iv) Rに共役な領域の全体は，互に共有点を持たない可算個の領域からなり，それらはKをうめつくす。

詳しくは，〔1〕を参照してほしいが，簡単な説明を加えておく。2つの点，領域等が共役とは，Gの元によって互に写されることである。isometric circleはCに直交する円弧になっている。RをGによるKの商空間と同一視する。

Gに対応する$\Gamma = \Gamma(G)$による$\tilde{\Omega}$の商空間Ωが決まる。1.で見たように，Gの元は等距離写像で

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

あるのでこのΩはR上のlinear elementの全体と同一視でき，Γの元がdmを不変に保っているので，$\widetilde{\Omega}$上のflow $\{T_t\}$ をΩ上に自然に写すことができる。このflow をやはり$\{T_t\}$で示すことにする。これにより$\{T_t\}$は，-1の定曲率を持つ2次元多様体R上のgeodesic flowである。

特に我々は，$\sigma(R) < \infty$ の場合を取り扱かう。たとえば，Rが有限個の弧で囲まれている場合には，たとえRの頂点がC上にあってもm(R) $< \infty$ が示される。（これは，Kを上半平面$\{(x, y)\ y>0\}$に頂点が∞点に行くように写して面積を計算してみれば分る。）.

主定理　上のようにして定めたΩ上のflow $\{T_t\}$（i, e, R上の geodesic flow)はergodic である。

これが我々の目標とする定理である。考えている平面が，完備ではあるが，compact とは限らないところを注目しょう。

3. 主定理の変形

上の定理を同値な命題におきかえて，調和函数の理論を使える形にする。

Th. 1. 主定理は次の命題と同値である。

命題(a)　Aを2次元トーラス(η_1, η_2)上の可測集合で，
$\iint A\,|d\eta_1|\,|d\eta_2| > 0$ であり，G−不変（i, e, $(\eta_1, \eta_2) \in A$のとき$(S(\eta_1), S(\eta_2)) \in A$）とする。
$\Rightarrow$Aはトーラス上の全測度を持つ。

(proof)

命題(a)⇒主定理　$M \subset \Omega$；m−可測で$\{T_t\}$−不変；m(M) >0 なる集合Mをとる。MとΓ共役な点全体を$\widetilde{M}$とすると$\widetilde{M}$は$\widetilde{\Omega}$の可測集合で$\{T_t\}$不変であり，T_tは(10)の式故，(η_1, η_2, s)空間内で考えるとき$\widetilde{M}$は$\widetilde{M}$の(η_1, η_2)空間への射影Aにより，$\widetilde{M} = A \times (-\infty, \infty)$なるcylinder set である。m(M) >0 よりAの測度は正であるから命題(a)により全測度を持つことになり，従って$\widetilde{M} = \widetilde{\Omega}$ (mod.0)。

逆　$A \times (-\infty, \infty) \subset \widetilde{\Omega}$は$\Gamma$−不変でdm測度正。従って，その$\Omega$上への射影も正測度を持つ。主定理のergod性により，それはmod.0でΩと等しい。すなわち$A \times (-\infty, \infty) = \widetilde{\Omega}$(mod.0)。これはAが全測度を持つことを示している。

(Q. E. D.)

Th. 2. Th. 1.の命題(a)は，次の命題(b)と同値である。

命題(b)
G；第1種Fuchs群
U(z, w)；{(z, w) | |z|<1, |w|<1}で定義されたzとwについてそれぞれ調和な有界函数でG－不変。i, e, S∈Gに対し，

$$U(S(z), S(w)) \equiv U(z, w) \qquad (11)$$

Uの境界値(のちに説明)が存在して，その値がトーラス $|\zeta|=|\gamma|=1$ 上の正測度を持つ集合の上で0に等しい。
$\Longrightarrow U \equiv 0$。

(proof) (b)⇒(b)も言えるが，それには命題(b)よりも強い定理を使うことになり，又我々が必要とするのは(b)⇒(a)だけであるので，それだけを証明する。

(b)⇒(a)。Aを(a)の仮定を満たす可測集合で全測度を持たないものとする。このとき，Aの測度が0になることを言えばよい。

UをAの定義函数とする。仮定よりUは可測で，G－不変。

$$\forall S \in G, \quad U(S(\eta_1), S(\eta_2)) = U(\eta_1, \eta_2) \quad \cdots\cdots \qquad (12)$$

Poisson 積分を考える。一般に，$u(\zeta)$がC上の可積分函数とするとき，

$u(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|\zeta|=1} u(\zeta)\dfrac{1-z\bar{z}}{|\zeta-z|^2}|d\zeta|$ は$\{z, |z|<1\}$で調和になる。従って，$|z|<1$, $|\gamma|=1$ に対して，

$$U(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} U(\zeta, \gamma)\frac{1-z\bar{z}}{|\zeta-z|^2}|d\zeta| \quad \cdots\cdots \qquad (13)$$

とおくと，$U(z, \gamma)$はほとんどすべてのγに対して，γをfixしたとき$\{z, |z|<1\}$において，zについての調和函数である。

$$|U(z, \gamma)| \leq \frac{1}{2\pi}\int |U(\zeta, \gamma)\frac{1-z\bar{z}}{|\zeta-z|^2}|d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi}\int\frac{1-z\bar{z}}{|\zeta-z|^2}|d\zeta| = 1$$

(1のPoisson積分)

であるから，$U(z, \gamma)$は絶対値が1より小さく，z：fixに対しては$|\gamma|=1$上でγについて可測である。そこで$|w|<1$として，

$$U(z, w) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\gamma|=1} U(z, \gamma)\frac{1-w\bar{w}}{|\gamma-w|^2}|d\gamma| \quad \cdots\cdots \qquad (14)$$

とおくと，同様にして$U(z, w)$は$|z|<1$, $|w|<1$，において有界(絶対値1より小)でz及びwについて調和な函数である。wについて調和なことは(14)式がPoisson 積分であるか

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

らであり，zについては，(14)で微分を考えるとき，微分と積分の順序を変えられることからである。

$U(z, w)$はPoisson 2重積分，

$$U(z, w) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{|\gamma|=|\zeta|=1} U(\zeta, \gamma)\frac{1-z\bar{z}}{|\zeta-z|^2}\cdot\frac{1-w\bar{w}}{|\gamma-w|^2}\,|d\zeta|\,|d\gamma|。$$

(4)のPoisson − differentialがS−不変であることと条件(12)とこの式から，$U(z, w)$はG−不変でしかも有界な調和函数である。すなわち$U(z, w)$は命題(b)の条件(11)を満している。

$U(\zeta, \gamma)$，$|\zeta|=|\gamma|=1$が$U(z, w)$，$|z|<1$，$|w|<1$の境界値とは，

$$\lim_{r=p=1}\iint_{|\zeta|=|\gamma|=1}|U(r\zeta, p\gamma)-U(\zeta, \gamma)|^2\,|d\zeta|\,|d\gamma| = 0 \quad \cdots\cdots \quad (15)$$

が成立することである。今の場合には，最初にAの定義函数として与えた$U(\zeta, \gamma)$に対して，(15)が成立している。そのことの証明は，一変数のときの同様の式，

$$\lim_{r=1}\int_{|\zeta|=1}|u(r\zeta)-u(\zeta)|^2\,|d\zeta| = 0 \quad \cdots\cdots \quad (16)$$

を証明するのとまったく同様にできる。これについては下で説明を与える。

(15)が言えたとすると，$U(z, w)$の境界値が存在して最初に与えられた$U(\zeta, \gamma)$に等しい。従って$U(z, w)$は命題(b)の条件をすべて満足していることになり，$U(z, w)\equiv 0$。従って$U(\zeta, \gamma)=0$ a，e，これはAの測度が0であることを示している。

(Q. E. D.)

(16)は，$u(\zeta)$が$|\zeta|=1$上で2乗可積分のとき，そのPoisson 積分$u(z)$に対して(16)式が成立することを言うにある。

$\zeta = e^{i\theta}$，$z = re^{i\varphi}$，$f_r(\theta) = (1-r^2)/(1-r^2-2r\cos\theta)$

とおくと，

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\cdot f_r(\theta-\varphi)\,d\theta \qquad \text{であり，}$$

$f_r(\theta)$は (i) $f_r(\theta)>0$，$0\leq\gamma<1$， (ii) 1のPoisson 積分。

(iii) $r\to 1$につれて測度$f_r(\theta)$は$\theta=0$に集中する。という性質を持つ。性質 (ii)とSchwarz の不等式より，

$$|u(re^{i\varphi})-u(e^{i\varphi})|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(e^{i(\varphi-\theta)})-u(e^{i\varphi})|^2 f_r(\theta)\,d\theta$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

. $\forall\varepsilon>0$に対してLebesgue の定理により $^\exists\delta$, $|\theta|<\delta$のとき

$$\int_0^{2\pi}|u(e^{i(\varphi-\theta)})-u(e^{i\varphi})|^2\,d\varphi<\varepsilon \qquad \text{とできる。}$$

性質 (iii)により，rが1に近いとき

$$\int_0^{2\pi}|u(re^{i\varphi})-u(e^{i\varphi})|^2\,d\varphi\leqq M\cdot\varepsilon. \qquad M\text{は}\|u\|\text{により決まる定数。}$$

(Q. E. D.)

2変数の函数の境界値については，$U(\zeta,\gamma)$，$|\zeta|=|\gamma|=1$，$U(z,\gamma)$，$|z|<1$，$|\gamma|=1$，$U(\zeta,w)$，$|\zeta|=1$，$|w|<1$，の3つがあることを注意しよう。たとえば$|z|<1$なるzをfix したとき，(16)により$U(z,\gamma)$が定まる。

命題(b)でいう境界値とは，これら3つを含めたものである。

又，調和函数があって境界値を持つとき，その境界値からPoisson 積分によって得られる調和函数はもとのものに等しい。

4. 命題(b)の証明

距離，面積は，ことわりのない限り(1)のmetric によるものである。

K_1により，$Z=0$を中心とし半径1なる円の内部を示すものとする。その面積を$\sigma(K_1)$で示すと次式になる。

$$\sigma(K_1)=\pi(e^1+e^{-1}-2) \qquad \cdots\cdots (17)$$

この式は次のようにして得る。K_1はユークリッドにおいても円であるからその半径をrとする。1，$\sigma(K_1)$をrによって表わすと，

$$1=\int_0^r\frac{2\,dr}{1-r^2}=\log\frac{1+r}{1-r},\quad \sigma(K_1)=\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{dr\,d\theta}{(1-r^2)^2}=4\pi\frac{r^2}{1-r^2}\text{。}$$

この両者からrを消去する。

3つのLemmaを準備する。Gは2.で説明したGである。

<u>Lemma 1.</u> Gによって決まる定数aが存在して，

$\forall B$: $K=\{z\,;\,|z|<1\}$内の可測集合でG－不変に対し，

$$\frac{\sigma(B\cap K_1)}{\sigma(K_1)}<a\cdot\sigma(B\cap R) \qquad \text{がなりたつ。}$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

こゝにRはGの基本領域。

Lemma 2. $u(z) \geqq 0$ がKで有界で調和でG－不変な函数。

$u(z)$ の境界値 $u(\zeta)$ が，正測度の集合の上で0に等しい。

$\Rightarrow$ $u \equiv 0$。

（注．このu（z）は(16)のときの条件にあうからu（ζ）が存在。）

P. Lemma $U(z, w)$；命題(b)の条件を満たしている。

$U(0, \gamma) = 0$ を満たすような γ は，$|\gamma| = 1$ 上で正測度をもつ。

こゝで $U(0, \gamma)$ は $U(z, w)$ の境界値。（3.の最后を参照。）

以上の3つのLemmaを使って命題(b)を証明する。

（proof of 命題(b)） $E = \{\gamma ; |\gamma| = 1, U(0, \gamma) = 0\}$ とおく。

P. Lemma によりEの測度は正である。

調和函数 $u(z)$ に対するHarnack の不等式

$$\frac{R-r}{R+r} u(z') \leqq u(z) \leqq \frac{R+r}{R-r} u(z')$$

において，特に $z' = 0$ を考えると，r，R，は $0 < r < R < 1$ に任意にとれるので，$R \longrightarrow 1$ として，

$$\frac{1-r}{1+r} u(0) \leqq u(z) \leqq \frac{1+r}{1-r} u(0)$$

これをmetric (1)によって表わせば，(17)の下で見たことより，

$$e^{-d(0, z)} u(0) \cdot \leqq u(z) \cdot \leqq e^{d(0, z)} u(0)。$$

この不等式により，$U(z, w)$ をzについての調和函数とみて，

$$e^{-d(0, z)} \cdot U(0, w) \cdot \leqq U(z, w) \cdot \leqq e^{d(0, z)} \cdot U(0, w). \quad \cdots (18)$$

$E_z = \{\gamma ; |\gamma| = 1, U(z, \gamma) = 0\}$ とおくと(18)と(16)より，$E_z = E \pmod 0$ が分る。

$U(z, w)$ に対する条件(11)のG－不変性と(4)のPoisson － differential のS－不変性とにより，次の等式が成立する。

$$U(S(0), w) = U(0, S^{-1}(w)) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\gamma|=1} U(0, S^{-1}(\gamma)) \frac{1 - S^{-1}(w)\overline{S^{-1}(w)}}{|S^{-1}(\gamma) - S^{-1}(w)|^2}$$

$$|dS^{-1}(\gamma)|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|\gamma|=1} U(0, S^{-1}(\gamma)) \frac{1 - w\bar{w}}{|\gamma - w|^2} |d\gamma|$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

この式は，$U(0, S^{-1}(\gamma))$ が $U(0, S^{-1}(w))$ の境界値であることを示している。すなわち，$U(0, S^{-1}(\gamma))$ は $U(S(0), w)$ の境界値である。ところで，$U(S(0), w)$ の境界値 $U(S(0), \gamma)$ は(16)により L^2 の意味で unique に決まっているはづであるから $U(0, S^{-1}(\gamma)) = U(S(0), \gamma)$ a. e. 従って，

$$E_{S(0)} = \{\gamma ; U(S(0), \gamma) = 0\} = \{\gamma ; U(0, S^{-1}(\gamma)) = 0\} = \{S(\gamma') ; U(0, \gamma') = 0\} = S(E). \quad (\mathrm{mod}\ 0)$$

一方，$E_z = E\ (\mathrm{mod}\ 0)$ であったから，$\forall S \in G$ に対し $S(E) = E\ (\mathrm{mod}\ 0)$。すなわち E は G－不変である。

$u(z)$ を，境界値 $u(\zeta)$ が E 上で 0，その他で 1，として Poisson 積分により決まる調和函数とすれば，Poisson － differential の不変性から，$u(z)$ は G－不変となる。そして $u(z)$ は Lemma 2. の条件を満たす。よって $u(z) \equiv 0$。従って，$u(z)$ の境界値も $u(\zeta) = 0$, a, e, となり，E は全測度を持つ。

E の定義から，このことは $U(0, w)$ の境界値 $U(0, \gamma) = 0$, a, e, を示している。最大値の原理から $U(0, w) \equiv 0$, $|w| < 1$。そして，(18)式より，$U(z, w) \equiv 0$。

(Q. E. D.)

5. 3つの Lemma の証明

(proof of Lemma 1.)

G が不連続群であることより，G の元の数は可算個である。

R 内には互に共役な点は存在しないから，$z = 0$ は G の固定点ではない。

$N(z, 1) = z$ に共役な点で K_1 内にある点の数 i, e, $d(0, S(z)) \leqq 1$ なる $S \in G$ の数とする。$d(0, S(z)) = d(S^{-1}(0), z)$ により，これは又，z からの距離が 1 以内にある 0 の共役点の数でもある。

一方次のことが言える。" G に依存して決まる定数 b が存在して，$\forall S \in G$ に対して，$d(0, S(0)) \geqq 2b$ となる。"

このことは，一般に不連続群においては，それの isometric circle は C に直交しており，その半径が ε より大なるものは有限個しかなく（こゝに ε は任意の正数），0 はすべての isometric cirde の外部にあることから分る。

上のことは，0 の 2b 近傍には 0 の共役点が存在しないということであり，S は等距離写像故，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

S(0) も又2b近傍内に共役な点を持たない。従って$N(z,l)$は，K_{l+b}内に互に交わらずに存在しうる半径bの円の数の最大個数よりも小である。

$$\therefore\quad N(z,l) \leq \frac{\sigma(K_{l+b})}{\sigma(K_b)} = \frac{\sigma(K_{l+b})}{\sigma(K_l)\cdot\sigma(K_b)}\cdot\sigma(K_l)$$

$$\frac{\sigma(K_{l+b})}{\sigma(K_l)\cdot\sigma(K_b)} = \frac{e^{l+b}+e^{-(l+b)}-2}{(e^{l}+e^{-l}-2)(e^{b}+e^{-b}-2)}\cdot \xrightarrow[l\to\infty]{} \frac{e^{b}}{e^{b}+e^{-b}-2}$$

従って，bに依存して定数aが定まり，

lが大ならば，$N(z,l) < a\cdot\sigma(K_l)$ $\cdots\cdots$ (19)

とできる。

$\Phi(z)$をK_lの定義函数とすると，$N(z,l)=\sum_{S\in G}\Phi(S(z))$ となる。Bを，G－不変なK内の任意の可測集合として$R\cap B$での積分を求めると，

$$\iint_{R\cap B} N(z,l)\,d\sigma(z) = \sum_{S\in G}\iint_{R\cap B}\Phi(S(z))\,d\sigma(z) = \sum_{S}\iint_{S(R\cap B)}\Phi(z)\,d\sigma(z) \qquad (20)$$

こゝでσがS－不変であることを使っている。

Rが基本領域であり，BがG－不変であることから，

$$\sum_S S(R\cap B) = \sum_S S(R)\cap B = B\sum_S S(R) = B.$$

従って(20)式の右辺は$\sigma(B\cap K_l)$に等しい。これで次式が言えた。

$$\iint_{R\cap B} N(z,l)\cdot d\sigma(z) = \sigma(B\cap K_l) \qquad (21)$$

(19)より，$\iint_{R\cap B} N(z,l)\cdot d\sigma(z) < a\cdot\sigma(K_l)\cdot\sigma(R\cap B)$であることにより，(21)式と合せて，

$$\frac{\sigma(B\cap K_l)}{\sigma(K_l)} < a\cdot\sigma(R\cap B)$$

(Q. E. D.)

(proof of Lemma 2.)

$\sigma(R)$が有限として考えている。

Rが完全にK内にあるときには自明である。なぜなら，$u(z)$はG－不変であるから，R又はその境界上で最大値をとる。最大値の定理から$u(z)$は定数である。従って仮定からこの定数は0になる。

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

RがC＝{ z ; | z |＝1 }上に頂点を持つときに証明しょう。

補助の函数 $h_\varepsilon(t) = \begin{cases} (1-t\varepsilon^{-1})^2 & 0 \leq t < \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \leq t \end{cases}$ ……………… (22)

を使う。$0 \leq h_\varepsilon(t) \leq 1$ で下に凸な函数であることに注意しておこう。$h_\varepsilon(t)$ に対して次の2つの等式が成立する。

$$\lim_{l=\infty} \frac{1}{\sigma(K_l)} \iint_{K_l} h_\varepsilon(u(z))\, d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|} h_\varepsilon(u(\zeta))\, |d\zeta| \qquad (23)$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{|\zeta|=1} h_\varepsilon(u(z))\, |d\zeta| = \underset{|\zeta|=1}{\mathrm{Ma}\beta} \{u(\zeta)=0\} \qquad (24)$$

MaβはC上の測度

(23)式の証明を行なう。$f_\varepsilon(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} h_\varepsilon(u(r\zeta))\,|d\zeta|$ とおくと，$f_\varepsilon(r)$ は2変数(ε, r)について有界。

$0 \leq \frac{dh_\varepsilon}{dt} < \frac{2}{\varepsilon}$ と(16)とにより次の不等式が分る。

$$f_\varepsilon(r) - f_\varepsilon(1) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} |h_\varepsilon(u(r\zeta)) - h_\varepsilon(u(\zeta))|\,|d\zeta|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{\varepsilon}\int_{|\zeta|=1} |u(r\zeta) - u(\zeta)|\,|d\zeta| \xrightarrow[r\to 1]{} 0$$

すなわち，εをfix したとき，

$$f_\varepsilon(r) \to f_\varepsilon(1) \qquad (r \to 1) \qquad (25)$$

(23)の左辺の式は，lをユークリッドのrによって直せば，

$\int_0^r \frac{r}{1-r^2} f_\varepsilon(r)\,dr \Big/ \int_0^r \frac{r}{1-r^2}\,dr$ に等しい。すなわち(23)の左辺は，$f_\varepsilon(r)$ のK_l におけるr＝1に密度の集中している測度についての平均である。それ故，(25)と，$f_\varepsilon(r)$ の有界性により(23)が次のように言える。$\forall\delta$ に対し $\exists r_0 < \forall r_1 < 1$ なる r_1 に対して $|f_\varepsilon(r_1) - f_\varepsilon(1)| < \delta$ とできるから，このとき，

$$\left| f_\varepsilon(1) - \int_0^{r_1} \frac{r}{1-r^2} f_\varepsilon(r)\,dr \Big/ \int_0^{r_1}\frac{r}{1-r^2}\,dr \right|$$

$$\leq \int_0^{r_1}\frac{1}{1-r^2}\,|f_\varepsilon(1) - f_\varepsilon(r)|\,dr \Big/ \int_0^r \frac{r}{1-r^2}\,dr$$

$$= \int_0^{r_0}\frac{1}{1-r^2}\,|f_\varepsilon(1) - f_\varepsilon(r)|\,dr \Big/ \int_0^{r_1}\frac{r}{1-r^2}\,dr$$

$$+ \int_{r_0}^{r_1}\frac{1}{1-r^2}\,|f_\varepsilon(1) - f_\varepsilon(r)|\,dr \Big/ \int_0^{r_1}\frac{r}{1-r^2}\,dr$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

の最后の式で，$f_\varepsilon(r)$ が有界なことに注意すれば，r_1 をさらに十分大にとればその値は 2δ より小にできる。$f_\varepsilon(1)$ は(23)の右辺である。

(24)の証明は次の不等式からなされる。

$$\underset{|\zeta|=1}{\mathrm{Ma}\beta}\{u(\zeta)=0\}\leq\int_{|\zeta|=1} h_\varepsilon(u(\zeta))|d\zeta|\leq\underset{|\zeta|=1}{\mathrm{Ma}\beta}\{u(\zeta)<\varepsilon\}$$

この右辺は，$\varepsilon\to 0$ のとき $\mathrm{Ma}\beta\{u(\zeta)=0\}$ になる。

$B_\varepsilon=\{z\,;\,|z|<1,\ u(z)<\varepsilon\}$ とおく。h_ε の定義(22)より，(23)式の左辺については次の不等式が成立。

$$\frac{1}{\sigma(K_1)}\iint_{K_1} h_\varepsilon(u(z))\,d\sigma(z)\leq\frac{\sigma(B_\varepsilon\cap K_1)}{\sigma(K_1)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

$u(z)$ はG－不変であるから B_ε もG－不変である。従ってLemma 1. により，

$$\frac{\sigma(B_\varepsilon\cap K_1)}{\sigma(K_1)}<a\cdot\sigma(B_\varepsilon\cap R) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

(26)(27) により，(23)の左辺について次の評価式をうる。

$$\frac{1}{\sigma(K_1)}\iint_{K_1} h_\varepsilon(u(z))\,d\sigma(z)\quad<a\cdot\sigma(B_\varepsilon\cap R)$$

この式の右辺は ε について単調減少である。従って(23)(24) より，

$\mathrm{Ma}\beta(u(\zeta)=0\}\ \leq a\cdot\sigma(B\cap R)$.　$B=\{z\,;\,|z|<1,\ u(z)=0\}$

一方Lemmaの仮定より，$\mathrm{Ma}\beta\{u(\zeta)=0\}>0$ である。すなわち $\sigma(B\cap R)>0$。これは，$u(z)=0$ なる点が無限に存在することを示している。調和函数の平均値の定理（Gaussの定理）

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{i\theta})\,d\theta$$

において，与えられている $u(z)$ が $u(z)\geq 0$ であることに注意すれば，1点 z_0 で $u(z_0)=0$ ならば．その近傍では $u(z)=0$ となる。connectedであることにより，$u(z)\equiv 0$ となる。

(Q. E. D)

(proof of P. Lemma)　このLemmaの証明の方針は，Lemma 2. の証明と同様である。Lemma 2. の証明の中では，(23)，(24)を必要としたが，P. Lemmaの証明のためには，それと同様な次の式を必要とする。$h_\varepsilon(t)$ を(22)で定義されているものとし，P. Lemmaの仮定のもとで，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$M_\varepsilon(l) = \frac{1}{\sigma^2(K_l)} \iint_{K_l} \iint_{K_l} h_\varepsilon(U(z, w))\, d\sigma(z)\, d\sigma(w) \quad \cdots\cdots \quad (28)$$

とおいたとき，

$$\lim_{\varepsilon=0} \lim_{l=\infty} M_\varepsilon(l) = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname*{Ma\beta}_{|\zeta|=|\gamma|=1} \{U(\zeta;\gamma)=0\} \quad \cdots\cdots \quad (29)$$

この式の証明は，(23)(24) の証明と同様である。ただし，(16)のかわりに(15)を使う。

(1) Rが$\{z;|z|<1\}$内に含まれている場合。

$S(R)$，$S\in G$の和は$\{z;|z|<1\}$を覆う。その数は可算個故，それらに番号をつけて，

$0\in R=R_0$，R_1，R_2 ………とする。

これに対応させてGの元にも番号をつけて，S_ν，$\nu=1, 2,$ ………

$$S_\nu(R_\nu)=R \quad \cdots\cdots \quad (30)$$

となるように決める。

DをRの直径とする。今，RがK内にあるとしているから，Dは有限の値である。(1)がS－不変であるから，Dは各R_νの直径でもある。従って，

$$\bigcup_{R_\nu\subset K_l} R_\nu \supset K_{l-D}。$$

これにより，次の不等式が成り立つ。

$$M_\varepsilon(l-D) \leq q(l) \frac{1}{\sigma^2(K_l)} \sum_{\nu,\mu} \iint_{R_\nu} \iint_{R_\mu} h_\varepsilon(U(z, w))\, d\sigma(z)\, d\sigma(w) \quad \cdots \quad (31)$$

こゝに，和Σは，$R_\nu\subset K_l$，$R_\mu\subset K_l$．なるすべての(ν, μ)についてであり，

$$q(l) = \frac{\sigma^2(K_l)}{\sigma^2(K_{l-D})} \quad \cdots\cdots \quad (32)$$

$Z\in R_\nu$とすると(30)より$d(o, S_\nu(z))\leq D$である。UがG－不変であることとHarnackの不等式(18)とにより，

$$U(z, w)=U(S_\nu(z), S_\nu(w))\geqq e^{-d(o, S_\nu(z))}U(o, S_\nu(w))\geqq e^{-D}U(o, S_\nu(w))。$$

従って，函数$h_\varepsilon(t)$ が t について否増大であることを使って，

$$h_\varepsilon(U(z, w))\leq h_\varepsilon\left(e^{-D}(o, S_\nu(w))\right) \qquad z\in R_\nu \quad \cdots\cdots \quad (33)$$

函数 $\qquad h_\varepsilon(e^{-D}U(o, w)) \quad \cdots\cdots \quad (34)$

は，wの函数として，調和函数と下に凸な函数との合成函数である。一般に$h(x, y)=H(u(x, y))$ なる合成函数において，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$\triangle h = \left(\frac{d^2 H}{du^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} + \frac{dH}{du}\triangle u$$

となる。Hが下に凸でuが調和なときには$\triangle u = 0$故，$\triangle h \geqq 0$となる。このことから函数(34)は，$\{w ; |w| < 1\}$ において劣調和な函数であることが分る。

$h_\varepsilon(t)$ と，$u(\zeta)$ を境界値に持つ有界な調和函数$u(z) \geqq 0$に対して，(23)の証明のときと同じように，(16)により，

$$\lim_{r=1}\int_{|\zeta|=1} |h_\varepsilon(u(r\zeta)) - h_\varepsilon(\zeta)|^2 \, |d\zeta| = 0。$$

これを使って，$h_\varepsilon\{e^{-D}U(o, w)\}$ の境界値は$h_\varepsilon\{e^{-D}U(o, \gamma)\}$ になる。

今，$h_\varepsilon\{e^{-D}U(o, \gamma)\}$ を境界値とするwについての調和函数

$$V_\varepsilon(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\gamma|=1} h_\varepsilon\{e^{-D}U(o, \gamma)\} \frac{1 - w\bar{w}}{|\gamma - w|^2} |d\gamma|$$

を考えると，境界値の等しい調和函数と劣調和函数とに対する不等式として，次の不等式が成立する。

$$h_\varepsilon\{e^{-D}U(o, w)\} \leq V_\varepsilon(w) \qquad \cdots\cdots (35)$$

定義から，

$$V_\varepsilon(o) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\gamma|=1} h_\varepsilon\{e^{-D}U(o, \gamma)\} |d\gamma| \qquad \cdots\cdots (36)$$

であり，(33) (35) より

$$h_\varepsilon(U(z, w)) \leq V_\varepsilon(S_\nu(w)) \qquad \cdots\cdots (37)$$

(31)と(37)と$V_\varepsilon \geqq 0$とより，

$$M_\varepsilon(1-D) \leq \frac{q(1)}{\sigma^2(K_1)}\sum_{\nu,\mu} \iint_{R_\nu}\iint_{R_\mu} V_\varepsilon(S_\nu(w)) \, d\sigma(z) \, d\sigma(w)$$

$$\leq \frac{q(1)}{\sigma(K_1)} \sum_\nu \iint_{R_\nu}\left\{\frac{1}{\sigma(K_1)}\iint_{K_1} V_\varepsilon(S_\nu(w)) d\sigma(w)\right\} d\sigma(z) \qquad (38)$$

こゝで，$R_\mu \subset K_1$ であることを使った。

ところで，$V_\varepsilon(S_\nu(w))$ も$\{w ; |w| < 1\}$ で調和である。それは，V_ε の定義式に戻って，UのG－不変性と，Poisson － differential のS－不変性とから分る。そこで，$V_\varepsilon(S_\nu(w))$に平均値の定理を使って，

$$V_\varepsilon(S_\nu(o)) = \frac{1}{\sigma(K_1)}\iint_{K_1} V_\varepsilon(S_\nu(w)) \, d\sigma(w)$$

従って(38)式より，

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$M_\varepsilon(1-D) \leqq \frac{q(1)}{\sigma(K_1)} \sum_\nu \sigma(R_\nu) \quad V_\varepsilon(S_\nu(o))$$

$$= \frac{q(1)}{\sigma(K_1)} \sigma(R) \sum_\nu V_\varepsilon(S_\nu(o)) \qquad \cdots\cdots \quad (39)$$

今，$R_\nu{}' = S_\nu(R)$ と定義する。$R = S_\nu(R_\nu)$ であったから，$R_\nu \subset K_1$ とすると $d(R_\nu{}', R) = d(R, R_\nu) < 1$ 。従って，$d(R_\nu{}', o) < 1 + D$ となり，$R_\nu{}' \subset K_1 + 2D$ である。

$\sigma(R) = \sigma(R_\nu{}')$ であるから，(39)により，

$$M_\varepsilon(1-D) \leqq \frac{q(1)}{\sigma(K_1)} \sum_\nu \sigma(R_\nu{}') \quad V_\varepsilon(S_\nu(o))$$

$$= \frac{q(1)}{\sigma(K_1)} \sum_\nu \iint_{R_\nu{}'} V_\varepsilon(S_\nu(o)) \; d\sigma(w) \qquad \cdots\cdots \quad (40)$$

$V_\varepsilon(S_\nu(w)) \geqq 0$ に(18)の上のHarnack の不等式を使って，

$$V_\varepsilon(S_\nu(o)) \leqq e^{d(w', o)} V_\varepsilon(S_\nu(w'))$$

この式で $w' = S_\nu^{-1}(w)$ ，$w \in R_\nu{}'$，とおくと，$w' \in R$ 故 $d(w', o) \leqq D$ なることから，

$$V_\varepsilon(S_\nu(o)) \leqq e^D V_\varepsilon(w) \qquad w \in R_\nu{}' \qquad \cdots\cdots \quad (41)$$

(41)及び，$R_\nu{}' \subset K_1 + 2D$， 平均値の定理により(40)は次のようになる。

$$M_\varepsilon(1-D) \leqq \frac{q(1)}{\sigma(K_1)} \sum_\nu e^D \iint_{R_\nu{}'} V_\varepsilon(w) \quad d\sigma(w)$$

$$\leqq e^D \frac{q(1)}{\sigma(K_1)} \iint_{K_1+2D} V_\varepsilon(w)\, d\sigma(w) = e^D \cdot q(1) \frac{\sigma(K_1+2D)}{\sigma(K_1)} V_\varepsilon(o)$$

ところで，

$$q(1) \frac{\sigma(K_{1+2D})}{\sigma(K_1)} = \frac{\sigma(K_1)\sigma(K_{1+2D})}{\sigma^2(K_{1-D})} = \frac{(e^1+e^{-1}-2)(e^{1+2D}+e^{-(1+2D)}-2)}{(e^{1-D}+e^{-(1-D)}-2)^2}$$

$$\xrightarrow[1\to\infty]{} e^{4D} = c > 0 。$$

すなわち，$\displaystyle\lim_{1=\infty} M_\varepsilon(1-D) \leqq c \cdot V_\varepsilon(o) \qquad c > 0 \qquad \cdots\cdots \quad (42)$

(29)，(42)，(24)を順次使って，

$$\frac{1}{4\pi^2} \underset{|\zeta|=|\gamma|=1}{\mathrm{Ma}\,\beta} \{U(\zeta, \gamma) = 0\} = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{1=\infty} M_\varepsilon(1)$$

$$\leqq \lim_{\varepsilon=0} C \cdot V_\varepsilon(o) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{C}{2\pi} \int_{|\gamma|=1} h_\varepsilon\{e^{-D} U(o, \gamma)\} \, |d\gamma| =$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$= \frac{C}{2\pi} \underset{|\gamma|=1}{\mathrm{Ma}\beta} \{U(o,\ \gamma)=0\}$$

すなわち

$$\frac{1}{4\pi^2} \underset{|\zeta|=|\gamma|=1}{\mathrm{Ma}\beta} \{U(\zeta,\ \gamma)=0\} \leq \frac{C}{2\pi} \underset{|\gamma|=1}{\mathrm{Ma}\beta} \{U(o,\ \gamma)=0\} \quad \cdots \quad (43)$$

この式で，Cが正の定数であることに注意すれば，P. Lemmaの結論がなりたっている。

(2) RがC＝{ z ; | z | ＝1 } 上に頂点を持つ場合。

この場合，(1)に帰省させて証明を与える。

RはC上に頂点を持つが，$\sigma(R)<\infty$ である。そこで，Rを次のように2つに分ける。

$$\begin{cases} R=R^{(1)}\cup R^{(2)}, \quad R^{(1)}\cap R^{(2)}=\phi. \quad R^{(1)}\ni 0 \\ \sigma(R^{(2)})<\delta, \quad \delta\text{は任意に与えられた正の数。(fix)} \\ R^{(1)}\text{は，有限の直径}D(\delta)\text{を持つ。} \end{cases}$$

そして，$B=\sum_\nu R_\nu^{(2)}$, $R_\nu^{(2)}=S_\nu^{-1}(R^{(2)})$, $\nu=0.1.2\cdots$ とおくと，BはG－不変であり，$K=\{z\ ;\ |z|<1\}$ はBと$R_\nu^{(1)}$, $\nu=0.1.2\cdots\cdots$ で覆われる。又，$D=D(\delta)$ は任意の$R_\nu^{(1)}$の直径でもある。$\left(R_\nu^{(1)}=S_\nu^{-1}(R^{(1)})\right)$。

$K_{1-D}\subset\sum_\nu R_\nu^{(1)}+B\cap K_{1-D}$,（$\Sigma$は，$R_\nu^{(1)}\subset K_1$ について）である。従って(28)で定義した$M_\varepsilon(1)$ により$M_\varepsilon(1-D)$ を計算すると，

$0\leq h_\varepsilon\leq 1$ に注意して，

$$M_\varepsilon(1-D)=\frac{1}{\sigma^2(K_{1-D})}\left\{\iint_{B\cap K_{1-D}}\iint_{K_{1-D}} h_\varepsilon(U(z,\ w))\,d\sigma(z)\,d\sigma(w)\right.$$

$$\left.+\iint_{K_{1-D}-B}\iint_{K_{1-D}} h_\varepsilon(U(z,\ w))\,d\sigma(z)\,d\sigma(w)\right\}$$

$$\leq\frac{1}{\sigma^2(K_{1-D})}\left\{\sigma(B\cap K_{1-D})\sigma(K_{1-D})+\iint_{K_{1-D}-B}\iint_{B\cap K_{1-D}} h_\varepsilon(U)\,d\sigma(z)\right.$$

$$\left.d\sigma(w)+\iint_{K_{1-D}-B}\iint_{K_{1-D}-B} h_\varepsilon(U)\,d\sigma(z)\,d\sigma(w)\right\}$$

$$\leq\frac{1}{\sigma^2(K_{1-D})}\left\{\sigma(B\cap K_{1-D})\sigma(K_{1-D})+\sigma(K_{1-D})\sigma(B\cap K_{1-D})\right.$$

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

$$+\sum_{\nu,\mu}\iint_{R_\nu^{(1)}}\iint_{R_\mu^{(1)}} h_\varepsilon(U(z,w))\,d\sigma(z)\,d\sigma(w)\Big\}$$

$$=\frac{2\sigma(B\cap K_{1-D})}{\sigma(K_{1-D})}+\frac{q(1)}{\sigma^2(K_1)}\sum_{\nu,\mu}\iint_{R_\nu^{(1)}}\iint_{R_\mu^{(1)}} h_\varepsilon(U(z,w)\,d\sigma(z)\,d\sigma(w)$$

最后の式の第一項を$M_\varepsilon^{(2)}(1-D)$．第二項を$M_\varepsilon^{(1)}(1-D)$ とおく。

$R_\nu^{(1)}$ $\nu=0.1.2\cdots\cdots$は有界であるから，(1)Rが有界な場合，で行なった評価が同じようにできて，(38)以下の評価式がなりたち，(41)の式の下の不等式がなりたつ。

$$M_\varepsilon^{(1)}(1-D)\leq e^D q(1)\frac{\sigma(K_{1+2D})}{\sigma(K_1)}V_\varepsilon(o).\quad\leq C(D)\ V_\varepsilon(o)\qquad\cdots\cdots\cdots (44)$$

又，$M_\varepsilon^{(2)}(1-D)$ についてはLemma 1. によって，

$$M_\varepsilon^{(2)}(1-D)=\frac{2\sigma(B\cap K_{1-D})}{\sigma(K_{1-D})}\leq 2a\cdot\sigma(B\cap R)\quad<2a\cdot\delta\qquad\cdots\cdots (45)$$

(44)，(45)により　$M_\varepsilon(1-D)\leq 2a\delta+C(D)V_\varepsilon(o)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (46)

(29)，(46)，(36)，(24)を順次使って，

$$\frac{1}{4\pi^2}\underset{|\zeta|=|\gamma|=1}{Ma\beta}\{U(\zeta,\gamma)=0\}=\lim_{\varepsilon=0}\lim_{l=\infty}M_\varepsilon(l)$$

$$\leq\lim_{\varepsilon=0}\{2a\cdot\delta+C(D)V_\varepsilon(o)\}=2a\delta+\lim_{\varepsilon=0}\frac{C(D)}{2\pi}\int_{|\gamma|=1}h_\varepsilon$$

$$\{e^{-D}U(o,\gamma)\}\,|d\gamma|$$

$$=2a\cdot\delta+\frac{C(D)}{2\pi}\underset{|\gamma|=1}{Ma\beta}\{U(o,\gamma)=0\}$$

すなわち，

$$\frac{1}{4\pi^2}\underset{|\zeta|=|\gamma|=1}{Ma\beta}\{U(\zeta,\gamma)=0\}-2a\cdot\delta\leq\frac{C(D)}{2\pi}\underset{|\gamma|=1}{Ma\beta}\{U(o,\gamma)=0\}\quad\cdots (47)$$

Lemmaの仮定から，(47)の左辺の第一項は正である。δは任意に小さくとれるから，(47)の左辺は正にできる。従って右辺も正。C（D）はD 従ってδに依存して決まる正の数。故に，

$$\underset{|\gamma|=1}{Ma\beta}\{U(o,\gamma)=0\}\quad>0$$

（Q．E．D．）

Sem. on Probab.
Vol.30 1969年
P1-123

以上で使われたLemmaの証明が終り，従って主定理が完全に証明されたわけである。

E. Hopf は，第2種Fuchs群のときには（このとき測度は$+\infty$）dissipativeであることを示しているが，省略する。

参考文献

〔1〕 Ford；Automorphic functions.

〔2〕 フランダース；微分形式の理論，岩波.

〔3〕 松島与三；多様体入門，裳華房.