Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 31

Dirichlet space とその表現

福 島 正 俊

1 9 6 9 年 2 月

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

はじめに

Mark:v 過程の研究へのL^2 − theoreticな接近を可能にする一つのわく組としてL^2 − Dirichlet spaceの理論がある。第1章ではこの一般論を扱かう。

ところでL^2 − Dirichlet spacs の理論と強Markor 過程論との間には明白なgap がある。 このgap はL^2 − theory のわくの中だけでは測度０の不確定さを乗り越えることが出来ないという事情から生ずる。

第２章はこのgap をうめるために１つの試みである。 第２章の課題は与えられた一般のL^2 − Dirichlet space に対してこれと同値な正則又は標準的Dirichlet spaceを構成することにある。 regular Dirichlet space に対してはBeurling−Deny〔3〕の型のkernel−free potential theory が対応する。 Canonical Dirichlet spaceは正則であるのみならずそれに対してRay resolvent〔36〕が対応し，従がつて強Markov 過程が対応する。

第3章はregular Dirichlet space に関するpotential論である。第３章を設けた理由は，我々の意味での正則性がBeurling−Deny〔3〕のそれよりやや一般になつていて〔３〕の議論がそのまま適用出来ないことと，〔３〕では諸定理が証明なしに述べられていたことによる。

さて第２章のような表現を考えた直接の動機は，Brown運動の境界問題に関連した次の諸問題〔１５〕

(I) 吸収壁Brown運動の強Markov的拡張に対応しうるresolventの一定の族をDirichlet space の一定の族(lateral condition)によつて決定すること，

(II) 個々のresolventに応じた状態空間の自然な拡張とそれにともなう強Markov過程の構成，

(III) (II)に於ける強Markov 過程の構造を(I)に於けるlateral conditionとの関連に於て調べること，のうち(II)と(III)を実行するための一般的なわく組を作ることにあつた。

論文〔１４〕と〔１６〕の内容をこの方向で深めることによつて第２章の表現論の真の有効性が確かめられるわけであるが，残念ながらここではそれに触れる余裕がなかつた。

第２章に関連して更に残された基本的な問題は

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

1章 Dirichlet space

§1. L^2 −resolvent と Dirichlet space

局所compact な空間X及びX上のRadon測度mを固定する。今後単にX上の関数といえば，X上のm−可測な複素数値関数を指すこととする。$C_0(X)$はX上の関数であつて連続且つ台がcompact なもの全体を表わす。X上の関数で絶対値の自乗がmに関して可積分なものの全体を$L^2(X)$と書く。$L^2(X)$の内積を$(\ ,\ )_X$で表わす。つまり，

$$(1.1)\quad (u,v)_X=\int_X u(x)\overline{v(x)}m(dx)。$$

定義1.1 (L^2 −resolvent)

$L^2(X)$上の線型有界作用素の系$\{G_\alpha, \alpha>0\}$が次の条件を満足するとき，これをL^2 − resolventと呼ぶ。

(R・1) sub−Markov性

G_αは実関数を実関数に移し且つ$0\leq u\leq 1$，$m-a.e$なら$0\leq\alpha G_\alpha u\leq 1$，$m-a.e.$

(R・2) resolvent方程式・

$$G_\alpha-G_\beta+(\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta=0 \quad , \quad \alpha,\beta>0.$$

(R・3) 対称性・

$$(G_\alpha u,v)_X=(u,G_\alpha v)_X \quad , \quad \alpha>0 \quad ,u,v\in L^2(X)$$

定義1.2 (normal contraction)

X上の関数u，vの間に次の関係があるとき，vをuのnormal contraction と呼ぶ。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$|v(x)|\leqq|u(x)| \qquad \forall x\in X$$

$$|v(x)-v(y)|\leqq|u(x)-u(y)| \qquad \forall x,y\in X$$

定義1.3 (Dirichlet space)

Pair(F,ε)が次の条件を満足するとき，これをL^2−Dirichlet space (又は単にDirichlet space)と呼ぶ。

(D・1) Fは$L^2(X)$のlinear subspace

(D・2) εはF上の非負双一次形式である。

各$\alpha>0$を固定するごとに，Fは内積

(1.2) $\varepsilon^{\alpha}(u,v)=\varepsilon(u,v)+\alpha(u,v)_X$

に関し複素Hilbelt 空間をなす。

(D・3) X上の関数u，vがあつてuはFに属しvはuのnormal contraction であるならば$v\in F$且つ $\varepsilon(v,v)\leqq\varepsilon(u,u)$。

注意1.1

X上の関数uとその複素共役$\overline{u}$は互いに他のnormal contraction である。Dirichlet space(F,ε)に於ては(D・3)の条件により$u\in F$なら$\overline{u}\in F$であり且つ$\varepsilon(u,u)=\varepsilon(\overline{u},\overline{u})$が成立つ。

ところでL^2−resolventとDirichlet space の間には1対1の対応がある。先ずDirichlet space(F,ε)が与えられたとしよう。

定義2.3により各$\alpha>0$と各$u\in L^2(X)$に対し，次の関係を満す$G_\alpha u\in F$が一意的に存在する。

(1.3) $\varepsilon^{\alpha}(G_\alpha u,v)=(u,v)_X \quad , \qquad \forall v\in F$

ここにε^{α}は(1.2)によつて定義されるF上の内積である。式(1.3)は$L^2(X)$上の線型作用素G_αを定義するが，更に

定理1.1 (i) Dirichlet space(F,ε)に対して(1.3)によつて定義される$\{G_\alpha,\alpha>0\}$はL^2−resolventである。

(ii) $\widetilde{L}$を$L^2(X)$のdense snbset とすると$G_\alpha(\widetilde{L})$はFのdense subset

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

である。[2)]

この定理の後半は（ 1.3 ）式より明らかである。前半を証明するために

補題 1.1 （ 1.3 ）で定まる$G_\alpha u$はF上の２次形式

（ 1.4 ） $\Phi(v)=\varepsilon(v,v)+\alpha(v-\frac{1}{\alpha}u,\ v-\frac{1}{\alpha}u)_X$

を最小にする一意解である。

証明

これは次式から従がう。

（ 1.5 ） $\Phi(v)=\Phi(G_\alpha u)+\varepsilon^\alpha(G_\alpha u-v,\ G_\alpha u-v)$. $v\in F$.

定理 1.1(i)の証明 定義 1.1の（ R・1 ）～（ R・3 ）及びG_α の有界性を示せばよい。

（ R・1 ）. $u\in L^2(X)$を実関数とする。注意 1.1 より

$\varepsilon(\overline{G_\alpha u},\ \overline{G_\alpha u})=\varepsilon(G_\alpha v,G_\alpha u)$, 従がつて$\Phi(\overline{G_\alpha u})=\Phi(G_\alpha u)$である。

補題 1.1によつて$\overline{G_\alpha u}=G_\alpha u$, つまり$G_\alpha u$ は実となる。 次に $u\in L^2(X)$が

$0\leqq u\leqq 1$ $m-a\cdot e$を満すとせよ。

$w=(G_\alpha u\vee 0)\wedge\frac{1}{\alpha}$ とおくとwは$G_\alpha u$ のnormal contraction.

故に $w\in F$且つ$\varepsilon(w,w)\leqq\varepsilon(G_\alpha u,G_\alpha u)$.

一方 $0\leqq\frac{u}{\alpha}\leqq\frac{1}{\alpha}$ だから $(w-\frac{1}{\alpha}u,w-\frac{1}{\alpha}u)_X\leqq(G_\alpha u-\frac{1}{\alpha}u,$
$G_\alpha u-\frac{1}{\alpha}u)_X$ 。 従がつて

不等式 $\Phi(w,w)\leqq\Phi(G_\alpha u,G_\alpha u)$ が得られた。

再び補題 1.1により $w=G_\alpha u$ $m-a\cdot e$,つまり $0\leqq G_\alpha u\leqq\frac{1}{\alpha}$ を得る。

2） Fのmetricは$\sqrt{\varepsilon^\alpha(u,u)}$によつて定義する。このmetricはどの$\alpha>0$に対しても互いに同値である。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

〔R，2，〕 $\alpha, \beta > 0$，$u \in L^2(X)$として（1.3）により

$$\varepsilon^{\alpha}(G_\alpha u - G_\beta u, v) = \varepsilon^{\alpha}(G_\alpha u, v) - \varepsilon^{\beta}(G_\beta u, v) - (\alpha-\beta)(G_\beta u, v)_X$$

$$= -(\alpha-\beta)\varepsilon^{\alpha}(G_\alpha G_\beta u, v)_X\ .$$

つまり

$$\varepsilon^{\alpha}(G_\alpha u - G_\beta u + (\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta u\ ,\ v)_X = 0$$

vはFの任意の元であつたから，これより（R，2）が従がう。

（R・3） $u, v \in L^2(X)$すると

$$(G_\alpha u\ ,\ v)_X = (\overline{v\ ,G_\alpha u})_X = \varepsilon^{\alpha}(\overline{G_\alpha v . G_\alpha u})$$

$$= \varepsilon^{\alpha}(G_\alpha u, G_\alpha v) = (u\ ,\ G_\alpha v)_X\quad .$$

最後に（1.3）より　$u \in L^2(X)$に対し

$$\alpha(G_\alpha u\ ,\ G_\alpha u)_X \leqq (G_\alpha u\ ,\ u)_X \leqq \sqrt{(G_\alpha u\ ,\ G_\alpha u)_X}\sqrt{(u, u)_X}$$

だから

$$(1.6)\qquad (G_\alpha u\ ,\ G_\alpha u)_X \leqq \frac{1}{\alpha^2}(u\ ,\ u)_X$$

つまりG_αはnorm $\leqq 1/\alpha$の有界作用素であることがわかる。　$q.e.d.$

逆に勝手なL^2−resolvent$\{G_\alpha, \alpha > 0\}$が与えられたとしよう。G_αに対応するDirichlet spaceを作るためにいくつかの準備が必要である。

定義によりG_αは$L^2(X)$上の有界作用素であるが更に

補題1.2　G_αのoperator normは$1/\alpha$より大きくない。即ち（1.6）式が$u \in L^2(X)$に対して成立する。

証明　$C_0(X)$は$L^2(X)$内でdenseであるから（1.6）は$u \in C_0(X)$について示しておけば充分である。又uは実関数としてよい。

$w \in C_0(X)$，$0 \leqq w \leqq 1$，$wu = u$ なるwをとる。G_αのpositivityより

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$G_\alpha(u-tw)^2(x)\geqq 0\quad,\quad m\text{-}a\cdot e$$

が全ての実数tについて成立する。従がつて

$$(G_\alpha u(x))^2\leqq G_\alpha w^2(x)\cdot G_\alpha u^2(x)\quad.\quad m\text{-}a\cdot e\,.$$

Sub−Markov 性と対称性により

$$(G_\alpha u,\ G_\alpha u)_X\leqq(G_\alpha w^2,\ G_\alpha u^2)_X\leqq(G_\alpha^2 w^2,\ u^2)_X$$

$$\leqq\frac{1}{\alpha^2}(u\,,u)_X\ .$$

さて$L^2(X)$上の線型有界対称作用素

(1.7) $A_\beta^\alpha=\beta(\beta G_{\beta+\alpha}-I)\quad,\quad\alpha\geqq 0\quad,\quad\beta>0$

を導入する。 Iは恒等写像。A_β^0 を単にA_β と書く。
$u,\ v\in L^2(X)$に対し

(1.8) $\varepsilon_\beta^\alpha(u\,,v)=(-A_\beta^\alpha u\,,v)_X\ ,\alpha\geqq 0\quad,\beta>0$

とおく。 $\varepsilon_\beta^0(u\,,v)$ を単に$\varepsilon_\beta(u\,,v)$ と書く。
$u\in L^2(X)$に対し

(1.9) $\varepsilon(u\,,u)=\lim_{\beta\to+\infty}\varepsilon_\beta(u\,,u)$

とおき

(1.10) $F=\{u\in L^2(X)\,;\,\varepsilon(u\,,u)<+\infty\}$

とする。

(1.9)がwell−definedであり($F\,,\varepsilon$)がDirichlet space となることを示すのがこの節の主な課題である。

補題1.3 $u\in L^2(X)$とする。

(1.11) $\varepsilon_\beta^\alpha(u\,,u)\geqq 0\,.$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$(1.12)\quad \frac{d}{d\beta}\varepsilon_\beta^\alpha(u,u)=\frac{1}{\beta^2}(A_\beta^\alpha u,A_\beta^\alpha u)_X\geqq 0$$

証明 A_β^α の対称性より $\varepsilon_\beta^\alpha(u,u)$ は実数である。更に補題 1.2 と Schwartz の不等式により

$$|(G_\alpha u,u)_X|\leqq\frac{1}{\alpha}(u,u)_X,\quad \alpha>0,\quad u\in L^2(X).$$

これは (1.1 1) を意味する。resolvent 方程式 (R・2) を使つて (1.1 2) が示される。先ず G_α は $\alpha>0$ に関し operator norm($L^2(X)$ 上の) の意味で連続である。 実際

$$\|G_\alpha-G_{\alpha'}\|_{L^2(X)}\leqq|\alpha'-\alpha|\,\|G_\alpha\|_{L^2(X)}\cdot\|G_{\alpha'}\|_{L^2(X)}$$

$$\leqq|\alpha'-\alpha|\frac{1}{\alpha\alpha'}\xrightarrow[\alpha'\to\alpha]{}0$$

更に $\dfrac{1}{\alpha-\alpha'}(G_\alpha-G_{\alpha'})=-G_\alpha G_{\alpha'}$ であるから

$$(1.13)\quad \frac{d}{d\alpha}G_\alpha=-G_\alpha^2\quad .$$

但し $\dfrac{d}{d\alpha}$ は operator norm の意味での強微分．そこで $u\in L^2(X)$ に対し G_α の対称性を使つて

$$\frac{d}{d\beta}\varepsilon_\beta^\alpha(u,u)=\frac{d}{d\beta}\{\beta(u,u)_X-\beta^2(G_{\beta+\alpha}u,u)_X\}$$

$$=(u,u)_X-2\beta(G_{\beta+\alpha}u,u)_X+\beta^2(G_{\beta+\alpha}u,G_{\beta+\alpha}u)_X$$

$$=(\beta G_{\beta+\alpha}u-u,\beta G_{\beta+\alpha}u-u)_X\ .$$

これは (1.1 2) に他ならない。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

補題 1.4

(i) 次式を満す$X\times X$上のRadon測度$\sigma_\beta(dx,dy)$が一意的に存在する。

$$(1.14)\quad (G_\beta u,v)_X=\int_X\int_X\sigma_\beta(dx,dy)u(x)\overline{v(y)}\ ,$$

$$\forall u,v\in L^2(X)。$$

(ii) σ_βは対称であり，そのXへのprojectionは$\frac{1}{\beta}m$にdominateされる。
つまり

$$(1.15)\quad \int_X\int_X\sigma_\beta(dx,dy)u(x)\overline{v(y)}=\int_X\int_X\sigma_\beta(dx,dy)v(x)\overline{u(y)}\ ,$$

$$u,v\in C_0(X).$$

$$(1.16)\quad \beta\sigma_\beta(E\times X)\leq m(E)\ ,$$

EはXの任意のBorel set.

(iii) $u\in L^2(X)$に対し$\varepsilon_\beta^\alpha(u,u)$は次の様に表わされる。

$$(1.17)\quad \varepsilon_\beta^\alpha(u,u)=\frac{1}{2}\beta^2\int_X\int_X\sigma_{\beta+\alpha}(dx,dy)|u(x)-u(y)|^2$$

$$+\frac{\beta}{\beta+\alpha}\alpha(u,u)_X+\frac{\beta}{\beta+\alpha}\beta\int_X(1-(\beta+\alpha)k_{\beta+\alpha}(x))$$

$$|u(x)|^2m(dx)\ ,$$

但し$k_{\beta+\alpha}(x)$は$\sigma_{\beta+\alpha}$のXへのprojectionのmに関する密度関数である。
(ii)により$k_{\beta+\alpha}(x)\leq\frac{1}{\beta+\alpha}\quad m\text{-}a.e$である。

証明　最初に(1.14)が$u,v\in C_0(X)$に対し成立つことを示そう。$X\times X$上の関数族

$$\left\{\sum_{i=1}^n u_i(x)\overline{v_i(y)}\ ;\ u_i,v_i\in C_0(X)\ ,\ n=1,2,\cdots\cdots\right\}$$

は$C_0(X\times X)$内で一様収束の意味でdenseである。そこで$\sum_{i=1}^n u_i(x)\overline{v_i(y)}$に複素数

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$\sum_{i=1}^{n}(G_\beta u_i, v_i)$を対応さすと，これは明らかに線型，正の写像であり，$C_0(X\times X)$上の線型正値汎関数に一意的に拡張される。従がつて任意の$u, v\in C_0(X)$に対して(1.14)を満すRadon測度が一意的に存在する。

このことから(1.15)，(1.16)が従がう。(1.15)はG_αの対称性から明らか。(1.16)については

$$\beta\int_X\int_X\sigma_\beta(dx,dy)u(x)=\sup_{\substack{0\le v\le 1\\ v\in C_0(X)}}\beta\int_X\int_X\sigma_\beta(dx,dy)u(x)v(y)$$

$$=\sup_{\substack{0\le v\le 1\\ v\in C_0(X)}}\beta(u, G_\beta v)_X\le\int_X u(x)m(dx),\quad {}^{\forall}u\in C_0^{+}(X)\quad ,$$

同様にして次のことがわかる。

$E\subset X$，$F\subset X$としEかFかどちらかが測度mに関する零集合であるならば直積集合$E\times F$は測度σ_βに関して零集合である。

従がつてu，vが共にm−可測関数ならば$X\times X$上の関数$u(x)\overline{v(y)}$はσ_β−可測となる。

$u, v\in L^2(X)$に対し等式(1.14)が成立つことを示そう。先ず$u\in C_0(X)$を固定し，$v\in L^2(X)$に$L^2(X)$−収束する列$v_n\in C_0(X)$を選べば$C_0(X)$の元に対する(1.14)式より$u(x)\overline{v_n(y)}$は測度σ_βに関しL^1−収束することがわかる。故に$u(x)v(y)$はL^1に属し同時に$u\in C_0(X)$と$v\in L^2(X)$に対する(1.14)式が成立することがわかる。 $u\in L^2(X)$に対しても全く同じことを行なえばよい。　　　　$q.e.d.$

補題1.3より$u\in L^2(X)$に対しては$\varepsilon_\beta^\alpha(u, u)$は非負で$\beta$と共に単調非減少である。従がつて(1.9)及び(1.10)によつてε及びFがwell−defined である。

更にu，$v\in F$に対しては

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$(1.18)\begin{cases}\varepsilon(u,v)=\lim_{\beta\to\infty}\varepsilon_\beta(u,v)\\[2ex] \varepsilon^\alpha(u,v)=\lim_{\beta\to\infty}\varepsilon^\alpha_\beta(u,v)\quad,\quad \alpha>0\end{cases}$$

が存在し　且つ

$$(1.19)\quad \varepsilon^\alpha(u,v)=\varepsilon(u,v)+\alpha(u,v)_X$$

が成立つ。　この関係は補題 1.4 の（1.17）式より容易にわかる。

定理 1.2　L^2-resolvent $\{G_\alpha,\alpha>0\}$ に対して（1.9），（1.10）及び（1.18）で定義される pair (F,ε) は次の性質をもつ。

(i)　(F,ε) は Dirichlet space.

(ii)　$G_\alpha(L^2(X))\subset F$.　又　$u\in F$ ならば $\beta G_\beta u$ は $\beta\to+\infty$ のとき u に収束する　但し収束の意味は任意に固定した $\alpha>0$ に対し metric $\sqrt{\varepsilon^\alpha(u,u)}$ に関する強収束である。従がつて勿論 $L^2(X)$ の意味でも強収束する。

(iii)　G_α は (F,ε) に関し方程式（1.3）を満す。

証明

(i)　F は明らかに内積 $\varepsilon^\alpha(u,v)$ に関して pre-Hilbert space となる。完備でもあることを示そう。u_n を (F,ε^α) の Cauchy 列とする。u_n は任意の $\beta>0$ について metric ε^α_β の意味での Cauchy 列でもある。ところが（1.8）と（1.17）より

$$\frac{\beta\alpha}{\beta+\alpha}(u,u)_X\leqq\varepsilon^\alpha_\beta(u,u)\leqq 2\beta(u,u)_X$$

である。　だから u_n の $L^2(X)$ の意味での極限 $u\in L^2(X)$ が存在し u_n は u に ε^α_β の意味でも収束する。　従がつて各 $\beta>0$ に対し

$$\varepsilon^\alpha_\beta(u_n-u,u_n-u)=\lim_{m\to+\infty}\varepsilon^\alpha_\beta(u_n-u_m,u_n-u_m)$$

$$\leqq\overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \varepsilon^\alpha(u_n-u_m,u_n-u_m)\quad.$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

最後の項はnを充分大きくとればβに無関係にいくらでも小さく出来る。このようにして$u \in F$かつu_nがuにε^{α}の意味で収束することが導びかれる。

（F，ε）がDirichlet space であることをいうにはあと定義1.3の（D．3）の条件を確かめればよい。

$u \in F$としvをuのnormal contraction とする。明らかに$v \in L^2(X)$であり又補題1.4に於ける（1.17）の式より

$$\varepsilon_{\beta}(v, v) \leqq \varepsilon_{\beta}(u, u) .$$

$\beta \to +\infty$とすれば$v \in F$及び$\varepsilon(v, v) \leqq \varepsilon(u, u)$を知る。

(ii) 先ず $\alpha > 0$に対し 等式

$$(1.20) \quad \varepsilon^{\alpha}(G_{\alpha} v, G_{\alpha} v) = (v, G_{\alpha} v)_X < +\infty \quad , \forall v \in L^2(X) .$$

$$(1.21) \quad \varepsilon^{\alpha}(G_{\alpha} u, u) = (u, u)_X \quad , \forall u \in F .$$

を示そう。（1.20）は特に$G_{\alpha}(L^2(X)) \subset F$であることを含んでいる。

resolvent方程式とG_{α}の対称性によつて

$$\varepsilon_{\beta}^{\alpha}(G_{\alpha} v, G_{\alpha} v) = \beta(G_{\alpha} v - \beta G_{\beta+\alpha} G_{\alpha} v, G_{\alpha} v)_X$$

$$= \beta(G_{\beta+\alpha} v, G_{\alpha} v)_X = (v, \beta G_{\beta+\alpha} G_{\alpha} v)_X$$

$$= (v, G_{\alpha} v)_X - (v, G_{\beta+\alpha} v)_X .$$

一番最後の項は補題1.2とSchwartz の不等式により$\beta \to +\infty$のとき0に収束する。これは（1.20）を意味する。（1.21）は

$$\varepsilon_{\beta}^{\alpha}(G_{\alpha} u, u) - (u, u)_X = \beta(G_{\beta+\alpha} u, u)_X - (u, u)_X$$

$$= -\frac{1}{\beta} \varepsilon_{\beta}^{\alpha}(u, u) \to 0 \quad , \quad \beta \to +\infty \quad .$$

（1.20）と（1.21）を使えば$u \in F$と固定した$\alpha_0 > 0$に対して$\beta > \alpha_0$として

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$\varepsilon^{\alpha_0}(\beta G_\beta u-u,\ \beta G_\beta u-u)\leqq\varepsilon^{\beta}(\beta G_\beta u-u,\ \beta G_\beta u-u)$$

$$=\beta^2\ \varepsilon^{\beta}(G_\beta u,\ G_\beta u)-2\beta\varepsilon^{\beta}(G_\beta u,\ u)+\varepsilon^{\beta}(u,\ u)$$

$$=\beta^2\ (u,\ G_\beta u)_X-2\beta(u,\ u)_X+\varepsilon^{\beta}(u,\ u)$$

$$=-\varepsilon_\beta(u,\ u)+\varepsilon(u,\ u)\ \rightarrow\ 0,\ \beta\rightarrow+\infty.$$

つまり$\beta G_\beta\ u$はnormε^{α_0}の意味でuに強収束する。

(iii) $v\in L^2(X)$ ， $w\in F$ とする。 L^2 の意味で

$\beta G_{\beta+\alpha}w\ \rightarrow\ w$ ， $\beta\rightarrow+\infty$ であるから

$$\varepsilon_\beta^\alpha(G_\alpha v,\ w)=\beta(G_{\beta+\alpha}v,\ w)_X=(v,\ \beta G_{\beta+\alpha}w)_X$$

$$\rightarrow\ (v,\ w)_X\ ,\ \beta\rightarrow+\infty\ .$$

つまり $\varepsilon^\alpha(G_\alpha v,\ w)=(v,\ w)_X$ でありこれは(1.3)式に他ならない。又この式は(1.20)及び(1.21)を含んでいる。 q.e.d.

注意 1.2 (1対1対応)

(i) L^2 −resolventと(L^2 −)Dirichlet space の間には次の対応により1対1の対応がつく。

$$\{(F,\ \varepsilon)\}\ \underset{(1.9)(1.10)}{\overset{(1.3)}{\rightleftarrows}}\ \{(G_\alpha,\ \alpha>0)\}$$

実際 定理1.1と定理1.2でわかつたことを図式にすると以下のようになる。

$$\underset{}{(F,\ \varepsilon)}\ \xrightarrow[]{\text{定理1.1}\ (1.3)}\ (G_\alpha,\ \alpha>0)\ \underset{(1.3)\ \text{定理1.2}}{\overset{\text{定理1.2}\ (1.9)(1.10)}{\rightleftarrows}}\ (\tilde F,\ \tilde\varepsilon)$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

1対1の対応を示すために $(F, \varepsilon)=(\widetilde{F}, \widetilde{\varepsilon})$ をいえばよい。G_α は式(1.3)を通じてどちらの空間とも関係しているから定理1.1(ii)の如くにして，$R=G_\alpha(L^2(X))$ はどちらの空間内でもdense.

且つ $u=G_\alpha v\in R$ に対しては

$$\varepsilon^\alpha(u, u)=(u, v)_X=\widetilde{\varepsilon}^\alpha(u, n).$$

従がつて $(F, \varepsilon)=(\widetilde{F}, \widetilde{\varepsilon})$.

(ii) 上の注意から次のことがわかる。

(F, ε) をDirichlet spacs，$(G_\alpha, \alpha>0)$ を対応する L^2−resolvent，補題1.4によつて G_α から定まる測度を σ_β とする。 このとき

$$u\in F \rightleftarrows \begin{cases} u\in L^2(X); \\ (1.17)\text{の右辺がある}\alpha\geqq 0\text{を固定したとき} \\ \beta\text{に関し一様有界}. \end{cases}$$

又この場合(1.17)の右辺の β に関する極限が存在しそれは $\varepsilon^\alpha(u, u)$ に等しい。

注意1.3 (実 L^2−Dirichlet space の複素化)

我々が扱かつているのは詳しくいえば複素 L^2−resolventと複素 L^2−Dirichlet space と呼ぶべきものである。

今までの結果は'複素'を'実'におきかえてそのまま成立する。 ところで実 L^2−Dirichlet space と複素−L^2−Dirichlet space の間には自然な1対1対応がある。後者について係数体を実数に制限し関数を実数値のものだけに制限すれば前者が得られる。逆に前者は後者に埋め込めることが出来る。実際，実 L^2−Dirichlet space (F, ε) が与えられたとき，$v+iv\ (u, v\in F)$ の全体を改めて F とし

$\varepsilon(u_1+iu_2, v_1+iv_2)$ を $\varepsilon(u_1, v_1)+i\varepsilon(u_2, v_1)$

$-i\varepsilon(u_1, v_2)+\varepsilon(u_2, v_2)$ によつて定義すれば複素 L^2−Dirichlet spaceが得られる。これは丁度前者によつて定まる実 L^2−rssolventを複素 L^2 上のresolventに拡張しその上で(1.9)(1.10)を通じて定まる複素

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

L^2 −Dirichlet space に他ならない。この様な操作を実L^2 −Dirichlet spaceの複素化と呼ぶ。

この節の最後にDirichlet space に関する基本的な補題を2つ述べておこう。

X上の実関数u, vに対して$(u\vee v)(x)=\max(u(x),v(x))$ $(u\wedge v)(x)=\min(u(x),v(x))$によつて$u\vee v$, $u\wedge v$を定義する。X上の実関数uに対し$(0\vee u)\wedge 1$をuのunit contractionと呼ぶ。nを任意の自然数としたとき$((-n)\vee u)\wedge n$をuのn−truncationと呼ぶ。

明らかにunit contractionやtruncation はnormal contraction の特別なものである。

今(F, ε)を(複素)L^2 −Dirichlet space とする。Fの元uが実関数のとき上の注意によりuのunit contraction$v$はFに属し$\varepsilon(v,v)\leqq\varepsilon(u,u)$が成立する。逆に,(unit contractionとDirichlet space)

<u>補題1.5</u>

pair(F, ε)が定義1.3の条件のうち(D・1),(D・2)を満すとする。更に条件(D・3)′ $u\in F$なら$\bar{u}\in F$, 又, $u\in F$が実関数ならuのunit contraction vもFに属し $\varepsilon(v,v)\leqq\varepsilon(u,u)$,
が満されるとする。 このとき(F, ε)はDirichlet space となる。

<u>証明</u> 定理1.1の証明に於ては条件(D・3)の代りにより弱い条件(D・3)′ を用いていたことに注意しよう。即ち(1.3)によつて定義される。

$L^2(X)$上の作用素$\{G_\alpha, \alpha>0\}$ はL^2 −resolventになる。このL^2 −resolventから(1.9)(1.10)を通じて定まるDirichlet space が(F, ε)に他ならない(注意1.3参照)。

補題1.5 はDirichlet space の定義として(D・1),(D・2)及び(D・3)′ を採用してよいことを示している

<u>補題1.6</u>

(F, ε)をDirichlet space とする。

$u\in F$に対しuのn−truncation をu_n とおくと$u_n\in F$かつ$\varepsilon(u_n,u_n)\uparrow\varepsilon(u,u)$, $n\to\infty$.

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

証明 u_n はuのnormal contraction だから$u_n \in F$であり $\varepsilon(u_n, u_n) \leqq \varepsilon(u, u)$, $n<m$ならu_n はu_mのnormal contraction だから$\varepsilon(u_n, u_n)$ はnに関し単調で

$\lim_{n\to\infty}\varepsilon(u_n, u_n) \leqq \varepsilon(u, u)$・一方$(F, \varepsilon)$に対応する$L^2$−resolventから(1.8)によつて決まる2次形式をε_βとすれば注意1.2により$\varepsilon_\beta(v, v) \uparrow \varepsilon(v, v)$, $\beta\to+\infty$, $\forall v\in F$・

従がつて

$$\varepsilon_\beta(u, u)=\lim_{n\to\infty}\varepsilon_\beta(u_n, u_n) \leqq \lim_{n\to\infty}\varepsilon(u_n, u_n).$$

ここで$\beta\to+\infty$として補題1.6を得る。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

§2 Dirichlet space と semi—group

X, mを前節の通りとする。(F, ε)を$L^2(X)$に関するDirichlet space とする。

(F, ε)に対し，式(1.3)によつて対応するL^2—resoloentを$\{G_\alpha, \alpha>0\}$とする。今

$$(2.1)\quad L_0^2(X)=\{u\in L^2(X)\ ;\ \lim_{\alpha\to+\infty}\alpha G_\alpha u=u\}$$

とおく。極限は$L^2(X)$での強収束の意味である。定理1.1(ii)と定理1.2(ii)とによつてわかることは $G_\alpha(L^2(X))\subset F\subset L_0^2(X)$であり，$G_\alpha(L^2(X))$は$L_0^2(X)$内でdenseであるから

$$(2.2)\quad L_0^2(X)=\overline{F}$$

が成立つ。但し，closure は$L^2(X)$での強収束の意味である。Hille—Yosidaの定理により

定理2.1　$L_0^2(X)$上の有界対称線型作用素の系 $\{T_t\ ;\ t\geq 0\}$ が存在し次の性質を満す。

(i) $T_tT_s=T_{t+s}$, $\forall t, s>0$, $T_0=I$, $T_t\underset{t\downarrow 0}{\longrightarrow} I$ $\|T_t\|_{L_0^2(X)}\leqq 1$,
$\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t u\,dt=G_\alpha u$, $u\in L_0^2(X)$

(ii) Aを$\{T_t\ ;\ t\geq 0\}$のinfinitesimal generator とすると，$D(A)=G_\alpha(L_0^2(X))\subset F$ であり

$$(2.3)\quad \varepsilon(u, u)=(-Au, u)_X,\ u\in D(A)$$

が成立する。

(iii) T_t は実関数を実関数に移し且つ $u\in L_0^2(X)$, $0\leqq u\leqq 1$ m—$a\cdot e$ ならば
$0\leqq T_t u\leqq 1$ m—$a\cdot e$

証明　resolvent G_β により(1.7)によつて$L_0^2(X)$上の有界作用素 $A_\beta=\beta(\beta G_\beta-I)$ を導入するとHille—Yosida の理論から

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(2.4) $\lim_{\beta\to\infty} A_\beta u = Au$, $\forall u \in D(A)$

(2.6) $\lim_{\beta\to\infty} e^{tA_\beta} = T_t$ ($L_0^2(X)$ 上での強収束)

ε の定義(1.9)と(2.4)より(2.3)が直ちに従がう。又 $e^{tA_\beta}\cdot u = e^{-\beta t}\cdot e^{\beta^2 G_\beta}\cdot u$, G_β の性質(R . 1)及び上の等式(2.6)より定理2.1(iii)が従がう。

定理2.1は一般論からの帰結であるが，このsemi-group $\{T_t\,;\,t \geqq 0\}$ は(F , ε)との関連でやや特別な性質をもつ。次の定理がそれである。

定理2.2 前定理で定まつたsemi-gronp $\{T_t\,;\,t \geqq 0\}$ は $L_0^2(X)$ を F の中に移す。又任意の $u \in F$ に対し

(2.7) $\varepsilon(T_t u, T_t u) \uparrow \varepsilon(u, u)$, $t \downarrow 0$

更に任意の $u \in L_0^2(m)$, $t > 0$ に対し

(2.8) $\varepsilon(T_t u, T_t u) \leqq \frac{1}{2t}\{(u, u)_X - (T_t u, T_t u)_X\}$

証 明 (i) $u \in F$ とする。このとき $T_t u \in F$ で(2.7)が成立することを示そう。
ε の定義(1.9)及び補題1.3の(1.1 2)式によりこれは次のことを示すのに等しい。

$$(2.9)\begin{cases} T_t u \in L^2(X) \quad \text{且つ} \\ \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2}(A_\beta T_t u, A_\beta T_t u)_X d\beta \uparrow \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2}(A_\beta u, A_\beta u)_X d\beta \\ (<+\infty),\ t \downarrow 0 \end{cases}$$

$T_t u \in L_0^2(X)$ だから，明らかに $T_t u \in L^2(X)$
T_t と A_β は $L_0^2(X)$ 上で可換であり，又 $A_\beta u \in F \subset L_0^2(X)$ であるから各 $\beta > 0$ について $(A_\beta T_t u, A_\beta T_t u)_X = (T_t A_\beta u, T_t A_\beta u)_X \xrightarrow[t\downarrow 0]{} (A_\beta u, A_\beta u)_X$. ところがこの収束は単調非減少である。実際，$t > 0$, $s > 0$ とすると

$(A_\beta T_{t+s} u, A_\beta T_{t+s} u)_X = (T_s A_\beta T_t u, T_s A_\beta T_t u)_X$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$\leqq (A_\beta T_t u, A_\beta T_t u)_X$

故に monotone convergence theorem により（2.9）を得る。

(ii) $u \in L^2_0(X)$ とする。このとき $T_t u \in F$ で（2.8）が成立つことを示す。再び（1.1 2）式によりこれは次の主張と同値である。

$$
(2.10)\begin{cases} T_t u \in L^2(X) \quad \text{且つ} \\ \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2}(A_\beta T_t u, A_\beta T_t u)_X d\beta \leqq \frac{1}{2t}\{(u, u)_X \\ \qquad -(T_t u, T_t u)_X\} \end{cases}
$$

（2.1 0）を示すための準備として $u \in L^2_0(X)$ に対し

$$
(2.11)\quad \frac{d}{d\beta}(e^{tA_\beta}u, e^{tA_\beta}u)_X
$$

$$
= -2t\frac{1}{\beta^2}(A_\beta e^{tA_\beta}u, A_\beta e^{tA_\beta}u)_X
$$

を示そう。（1.7）と（1.1 3）により operator norm に関する強微分の意味で

$$
\frac{d}{d\beta}A^n_\beta = nA^{n-1}_\beta \cdot \frac{d}{d\beta}A_\beta = -nA^{n-1}_\beta(\beta G_\beta - I)^2 = -\frac{n}{\beta^2}A^{n+1}_\beta
$$

故に u, $v \in L^2_0(X)$ に対して

$$
\frac{d}{d\beta}(e^{tA_\beta}u, v)_X = \sum_{v \geqq 0}\frac{t^n}{n!}\frac{d}{d\beta}(A^n_\beta u, v)_X
$$

$$
= -\sum_{n \geqq 1}\frac{t}{\beta^2}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A^{n+1}_\beta u, v)_X = -\frac{t}{\beta^2}(A^2_\beta \cdot e^{tA_\beta}u, v)_X
$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(2.11)はこの式からわかる。

さて(2.6)及び(2.11)から次のことがわかる。

(2.12) $(e^{tA_\beta}u, e^{tA}u)_X \downarrow (T_t u, T_t u)_X, \ u \in L_0^2(X)$
$(\beta \uparrow +\infty)$

(2.11)と(2.12)より

$$\frac{1}{\beta^2}(A_\beta T_t u, A_\beta T_t u)_X = \frac{1}{\beta^2}(T_t A_\beta u, T_t A_\beta u)_X$$

$$\leqq \frac{1}{\beta^2}(e^{tA_\beta} A_\beta u, e^{tA_\beta} A_\beta u)_X$$

$$= \frac{1}{\beta^2}(A_\beta e^{tA_\beta} u, A_\beta e^{tA_\beta} u)_X$$

$$= -\frac{1}{2t}\frac{d}{d\beta}(e^{tA_\beta}u, e^{tA_\beta}u)_X$$

従つて

$$\int_0^\infty \frac{1}{\beta^2}(A_\beta T_t u, A_\beta T_t u)_X d\beta$$

$$\leqq -\frac{1}{2t}\int_0^\infty \frac{d}{d\beta}(e^{tA_\beta}u, e^{tA_\beta}u)_X d\beta$$

$$= -\frac{1}{2t}\left\{\lim_{\beta\to\infty}(e^{tA_\beta}u, e^{tA_\beta}u)_X - \lim_{\beta\to 0}(e^{tA_\beta}u, e^{tA_\beta}u)_X\right\}$$

$$= \frac{1}{2t}\left\{(u, u)_X - (T_t u, T_t u)_X\right\} \qquad q.e.d$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

§3 Dirichlet ring

X, mを§1のものとする。X上の関数でmに関し本質的な有界なものの全体を$L^\infty(X)$と書く。$u \in L^\infty(X)$ に対し

(3.1) $\|u\|_\infty = \underset{x \in X}{\text{ess.sup}} |u(x)|$

とおく。

さて，$L^2(X)$ に関するDirichlet space (F, ε)が与えられたとしよう。

(3.2) $F^{(b)} = F \cap L^\infty(X)$

とおく。

$u \in F^{(b)}$ に対して

(3.3) $|||u|||_\alpha = \sqrt{\varepsilon^\alpha(u, u)} + \|u\|_\infty$, $\alpha > 0$

とおく。

<u>定義3.1</u>

$(F^{(b)}, ||| \ |||_\alpha, \alpha > 0)$ をDirichlet spau (F, ε)から導びかれるDirichlet ringと呼ぶ。

この言葉は次の定理が成立つことによつている。次の定理の証明がこの節の主な目的である。

<u>定理3.1</u> $\alpha > 0$を固定する。

(i) $(F^{(b)}, ||| \ |||_\alpha)$ はnormed ring である。つまりこれは複素数体上のBanach spaceであつて次の条件を満す。

u, $v \in F^{(b)}$ならば $u \cdot v \in F^{(b)}$であつて

(3.4) $|||uv|||_\alpha \leqq |||u|||_\alpha \cdot |||v|||_\alpha$

(ii) $u \in F^{(b)}$に対して

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$(3.5)\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|||u^n|||_\alpha} = \|u\|_\infty$$

この定理の証明のために

補題3.1 $u_1, u_2 \cdots\cdots, u_n \in F$ 及びX上の関数wの間に次の関係があるとする。

$$(3.6)\quad \begin{cases} |w(x)| \leqq \sum_{i=1}^{n} |u_i(x)| & , {}^{\forall}x \in X \\ |w(x)-w(y)| \leqq \sum_{i=1}^{n} |u_i(x)-u_i(y)| & , {}^{\forall}x, y \in X \end{cases}$$

このとき $w \in F$であり，且つ

$$(3.7)\quad \sqrt{\varepsilon^\alpha(w,w)} \leqq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varepsilon^\alpha(u_i, u_i)}, \ \alpha \geqq 0$$

証 明 §1の最後の注意（注意1.2(ii)）により次のことを示せば充分である。

$$(3.8)\quad \begin{cases} w \in L^2(X), \\ \sqrt{\varepsilon^\alpha_\beta(w,w)} \leqq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varepsilon^\alpha_\beta(u_i, u_i)} & , {}^{\forall}\beta > 0 \end{cases}$$

但し，ε^α_β は補題1.4に於ける（1.17）式の右辺を表わすとする。

$w \in L^2(X)$ であることは（3.6）の初めの不等式から明らか。（1.17）式の右辺で $u=w$と置いたものつまり$\varepsilon^\alpha_\beta(w,w)$の第1項，第2項及び第3項を各々$a$，$b$及び$c$で表わす。同様に$u=u_i$に対応する各項を a_i, b_i, c_i で表わす。

証明したい不等式（3.8）は

$$a+b+c \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i+b_i+c_i}\right)^2$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

である。不等式（3.7）により

$$\iint_{XX}\sigma_{\beta+\alpha}(dx\,,dy)\,|w(x)-w(y)|^2$$

$$\leqq\iint_{XX}\sigma_{\beta+\alpha}(dx\,,dy)\,(\sum_{i=1}^{n}|u_i(x)-u_i(y)|)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\iint_{XX}\sigma_{\beta+\alpha}(dx\,,dy)\,|u_i(x)-u_i(y)|^2$$

$$+2\sum_{i<j}\iint_{XX}\sigma_{\beta+\alpha}(dx\,,dy)\,|u_i(x)-u_i(y)|\,|u_j(x)-u_j(y)|$$

従がつて，Schwartz の不等式により

$$a\leqq\sum_{i=1}^{n}a_i+2\sum_{i<j}\sqrt{a_i}\sqrt{a_j}$$

同様の不等式が同様の方法で b と b_i ，c と c_i の間に成立する。故に
不等式 $\sqrt{a_i}\ \sqrt{a_j}+\sqrt{b_i}\sqrt{b_j}+\sqrt{c_i}\ \sqrt{c_j}\leqq\sqrt{a_i+b_i+c_i}$
$\sqrt{a_j+b_j+c_j}$ を使つて

$$a+b+c\leqq\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i)+2\sum_{i<j}\sqrt{a_i+b_i+c_i}\ \sqrt{a_j+b_j+c_j}$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i+b_i+c_i}\ )^2 \qquad q.e.d$$

定理3.1の証明

(i) $F^{(b)}$ が norm $|||\ \ |||_\alpha$ に関して完備であることを示そう。$u_n\in F^{(b)}$ が $|||\ \ |||_\alpha$ に関し Cauchy 列をなすとする。そうすれば $u\in L^\infty_\epsilon(X)$ と $\tilde{u}\in F$ が存在し

$$\|u_n-u\|_\infty\to 0\,,\quad n\to+\infty$$

$$\varepsilon^\alpha(u_n-\tilde{u}\,,u_n-\tilde{u})\to 0\quad,\quad n\to+\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

u_n はuに$m-a\cdot e$で収束する。u_n は$\tilde{u}$にL^2 収束するから部分列を適当に選ぶとやはり$\tilde{u}$に$m-a\cdot e$で収束する。従がつて $u=\tilde{u}$ $m-a\cdot e$ つまり $u\in F^{(b)}$であつて $|||u_n-u|||_\alpha\to 0$, $n\to+\infty$

次にu, $v\in F^{(b)}$とせよ。

$w=u\cdot v$, $A=\|u\|_\infty$, $B=\|v\|_\infty$, $u_1=B\cdot u$, $u_2=A\cdot v$ とおく。明らかにu_1, $u_2\in F^{(b)}$であり，又 $|w(x)|\leqq|u_1(x)|+|u_2(x)|$, $\forall x\in X$, $|w(x)-w(y)|\leqq|u_1(x)-u_1(y)|+|u_2(x)-u_2(y)|$, $\forall x, y\in X$ が成立する。補題3.1により $w\in F$で 且つ

$$\sqrt{\varepsilon^\alpha(w,w)}\leqq B\sqrt{\varepsilon^\alpha(u,u)}+A\sqrt{\varepsilon^\alpha(v,v)}$$

が成立する。勿論 $w\in L^\infty(X)$ でもあるからwは$F^{(b)}$に属し

$$|||w|||_\alpha=\sqrt{\varepsilon^\alpha(w,w)}+\|w\|_\infty$$

$$\leqq B\sqrt{\varepsilon^\alpha(u,u)}+A\sqrt{\varepsilon^\alpha(v,v)}+A\cdot B$$

$$\leqq(\sqrt{\varepsilon^\alpha(u,u)}+A)(\sqrt{\varepsilon^\alpha(v,v)}+B)=|||u|||_\alpha\cdot|||v|||_\alpha$$

(ii) $u\in F^{(b)}$とする。$A=\|u\|_\infty$ とおく。$A\fallingdotseq 0$としてよい。

$A^n=\|u^n\|_\infty\leqq|||u^n|||_\alpha$ であるから

$$(3.9)\quad A\leqq\sqrt[n]{|||u^n|||_\alpha},\quad n=1,2,\cdots\cdots\cdots$$

一方

$$|u(x)^n-u(y)^n|\leqq|u(x)-u(y)|\,|u(x)^{n-2}u(y)+\cdots\cdots\cdots$$

$$+u(x)u(y)^{n-2}|\leqq nA^{n-1}|u(x)-u(y)|,\quad \forall x, y\in X,$$

$$|u(x)^n|\leqq nA^{n-1}|u(x)|,\ \forall x\in X,$$

であるからu^n は$nA^{n-1}u$のnormal contraction である。従がつて

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$\sqrt{\varepsilon^{\alpha}(u^n, u^n)} \leqq nA^{n-1}\sqrt{\varepsilon^{\alpha}(u, u)}$$

故に

$$|||u^n|||_{\alpha} = \|u^n\|_{\infty} + \sqrt{\varepsilon^{\alpha}(u^n, u^n)}$$

$$\leqq A^n + nA^{n-1}\sqrt{\varepsilon^{\alpha}(u, u)}$$

$$\sqrt{|||u^n|||_{\alpha}} \leqq A \cdot \sqrt{1 + \frac{n}{A}\sqrt{\varepsilon^{\alpha}(u, u)}}$$

この右辺は$n \to +\infty$のときAに収束する。(3.9)と合わせて(3.5)を得る。

この節の最後にDirichlet subspaceとsubring について触れておく。

定義3.2 (Dirichlet subspace)

(F, ε)をDirichlet space とする。

Fのclosed linear subspace Fがnormal contraction をとる操作に関し閉じているときF_1をFのDirichlet subspace という。

明らかにDirichlet subspaceはそれ自身1つのDirichlet space をなす。

定理3.2 (subspaceとsubring)

F_1をDirichlet space (F, ε)のDirichlet subspaceとする。Lを$(L^{\infty}(X); \|\ \|_{\infty})$ のclosed subringとする。このとき

$F_1 \cap L$ はDirichlet ring $(F^{(b)}, |||\ |||_{\alpha})$のclosed subringとなる。

この定理が成立つことは定理3.1の証明を見れば明らかである。特に$C(X)$をX上の連続関数で無限遠で0になるものの全体とすれば $F \cap C(X)$は$F^{(b)}$のclosed subring である。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

注意3.1 （実Dirichlet ringの複素化）

我々の扱かつているのは詳しくいうと複素L^2—Dirichlet spaceと複素L^∞から導びかれる複素Dirichlet ringである。この節の結果は"複素"を"実"におきかえてそのまま成立する。

実Dirichlet ringの複素化とは，対応する実Dirichlet spaceの複素化（注意1.3）と複素L^∞とから導びかれる複素Dirichlet ringのことを指す。

複素Dirichlet ringはその要素の複素共役を又その中に含むという意味で対称である。しかも複素共役の$|||\ \ |||_\alpha$—normはもとのそれに等しい。又定理3.2に於て特にLが上の意味で対称ならば$F_1\cap L$は対称となる（注意1.1参照）

§4 $\varepsilon^1_{L^2}$の直和分解と対応するDirichlet ringの分解

L^2—Dirichlet spaceの典型的なものとして関数空間$\varepsilon^1_{L^2}$がある。

n次元ユークリッド空間R^nの任意の領域Dを固定する。Dの有界性は仮定しない。R^n上のLebesgue測度をdxで表わし，dxに関するD上の実L^2—spaceを$L^2(D)$とかく。その内積は$(\ \ ,\ \ )_D$で表わすことにする。

$$\varepsilon^1_{L^2}(D)=\{u\in L^2(D)\ ;\ \frac{\partial}{\partial x_i}u\in L^2(D),\ i=1,2,\cdots\cdots,n\}$$

とおく。ただし$\frac{\partial}{\partial x_i}u$は$u$の超関数としての微分をあらわす。

$u,v\in\varepsilon^1_{L^2}(D)$に対して

$$(4.1)\quad (u,v)_{D,1}=\frac{1}{2}\int_D\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx$$

とおく。$C_0^\infty(D)$でもつてD上の台がcompact，無限回可微分な実数値関数の全体をあらわす。$C_0^\infty(D)\subset\varepsilon^1_{L^2}(D)$であるが，$C_0^\infty(D)$の$\varepsilon^1_{L^2}(D)$内でのmetric $\sqrt{(u,u)_{D,1}+(u,u)_D}$に関するclosureを$D^1_{L^2}(D)$とかく。

次の定理の証明はShiga—T.Watanabe〔36;appendix〕でなされている。Dが有界の場合にはFukushima〔16〕にもある。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

定理4.1 （$\varepsilon^1_{L^2}$ の直和分解）

(i) （$\varepsilon^1_{L^2}(D)$，$(\ ,\ )_{D,1}$）および（$D^1_{L^2}(D)$，$(\ ,\ )_{D,1}$）は各々実$L^2(D)$に関するDirichlet space である。

(ii) u，$v\in\varepsilon^1_{L^2}$ に対し

$$(4.2)\quad (u,v)^{\alpha}_{D,1}=(u,v)_{D,1}+\alpha(u,v)_D,\ \alpha>0$$

とおく。各$\alpha>0$に対し Hilbert space（$\varepsilon^1_{L^2}$，$(\ ,\ )^{\alpha}_{D,1}$）は次の様に直和に分解される。

$$(4.3)\quad \varepsilon^1_{L^2}=D^1_{L^2}\oplus H_\alpha$$

ただし

$$(4.4)\quad H_\alpha=\{u\in\varepsilon^1_{L^2};(\alpha-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i})u=0\}$$

$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u$ はuの超関数としての微分である。

注意4.1

次のことが知られている〔16〕〔36〕。D上での吸収壁brown運動のαー位Green関数を$G^0_\alpha(x,y)$，$\alpha>0$，x，$y\in D$，$x\neq y$，とする。

$u\in L^2(D)$に対し

$$(4.5)\quad G^0_\alpha u(x)=\int_D G^0_\alpha(x,y)u(y)\,dy$$

とおくと$\{G^0_\alpha,\alpha>0\}$はDirichlet space（$D^1_{L^2}$，$(\ ,\ )_{D,1}$）に§1の意味で対応するL^2ーresolvent である。次に

$$(4.6)\quad \widetilde{H}_\alpha=\{u\in\varepsilon^1_{L^2};u\text{は2回微分可能で}(\alpha-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2})u=0\}$$

とおく。このとき（$\widetilde{H}_\alpha$，$(\ ,\ )^{\alpha}_{D,1}$）は再生核をもつHilbert spaceとなる

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

([14;Lemma 2.1])。

その再生核を$R_\alpha(x,y)$, $x,y\in D$とする。つまり

(4.7) $(R_\alpha(x,\cdot),v)^{\alpha}_{D,1}=v(x)$, $\forall v\in\widetilde{H}_\alpha$。

$u\in L^2(D)$に対し

(4.8) $R_\alpha u(x)=\int_D R_\alpha(x,y)u(y)\,dy$

(4.9) $G_\alpha u(x)=G^0_\alpha u(x)+R_\alpha u(x)$

とおく。このとき$\{G_\alpha, \alpha>0\}$はDirichlet space $(\varepsilon^1_{L^2}, (\ ,\ )_{D,1})$に§1の意味で対応する$L^2$-resolvent になり,又,(4.9)は$G_\alpha u$の$D^1_{L^2}$と$H_\alpha$への直和分解を与えている。

さてDirichlet space $\varepsilon^1_{L^2}$に対して,§3によりDirichlet ring $\{\varepsilon^1_{L^2}\cap L^\infty(D), |\!|\!|\ |\!|\!|_\alpha, \alpha>0\}$が対応している。ここに

(4.10) $|\!|\!|u|\!|\!|_\alpha=\sqrt{(u,u)^\alpha_{D,1}}+\operatorname*{ess-sup}_{x\in D}|u(x)|$

$\varepsilon^1_{L^2}$ $(D^1_{L^2})$の元であつて有界連続なものの全体を$R^{(c)}$ $(R^{(c)}_0)$ とかく。$R^{(c)}$および$R^{(c)}_0$は$\varepsilon^1_{L^2}\cap L^\infty(D)$のclosed subring である(定理3.2)。$R^{(c)}$のことをRoyden ring と呼ぶ。

一般に$(R, \|\ \|)$ を可換ノルム環としIをそのidealとする(§6参照)。同値関係$x\sim y \Longleftrightarrow x-y\in I$による$R$の同値類の全体を$R/I$で表わす。類の間の積(和)は代表元の積(和)の属す類と定め,類の定数倍も同様に定めることによりR/Iは可換環となる。これをRのIによるresidue class ring という。

特にIがclosed ideal のときR/Iに次式によりnorm $\|\ \|$ を導入するとR/Iは又可換ノルム環となる。([26] p68)

(4.11) $\|X\|=\inf_{x\in X}\|x\|$, $X\in R/I$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

今後closed ideal Iによるresidue class ringというときはこのようにしてnormed ring 化したもののことを指すとする。

定理4.2 (subring の分解)

$\alpha>0$を固定する。Rをring$\{\varepsilon^1_{L^2}\ L^2, |||\ |||_\alpha\}$のsubringとする。$R$を$\{\varepsilon^1_{L^2}\ (\ ,\ )^\alpha_{D,1}\}$のsubapaceと考えて$R$の$D^1_{L^2}$へのprojectionを$I$, RのH_αへのprojectionを$R_{\alpha,h}$とおく。このとき

(i) $I\subset R$と仮定すると以下が成立する。

a) IはRのideal

b) residue class ring R/Iは$R_{\alpha,h}$と環同型である。ただし$R_{\alpha,h}$は次の積$\otimes$に関するring とみなす。

$$(4.12)\quad u\otimes v=P_{H_\alpha}(u\cdot v),\ u,v\in R_{\alpha,h}$$

ここにP_{H_α}はH_αへのprojection をあらわす。

(ii) Rがclosed subring, $I\subset R$と仮定すると以下が成立する。

a) IはRのclosed ideal

b) residue class ring R/Iは$\{R_{\alpha,h}, |||\ |||_\alpha\}$と環同型, isometry である。特に$\{R_{\alpha,h}, \|\ \|_\alpha\}$はnormed ring である。ただし$R_{\alpha,h}$は積(4.12)に関するring とみなす。

系 (Royden ring の分解)

$\alpha>0$を固定する。Royden ring $R^{(c)}$は$\{\varepsilon^1_{L^2}, (\ ,\ )^\alpha_{D,1}\}$のsubset として次のように直和分解される。

$$(4.13)\quad R^{(c)}=R^{(c)}_0\oplus H^{(b)}_\alpha$$

ただし, $H^{(b)}_\alpha$はH_αの元で有界連続なものの全体。$R^{(c)}_0$は$R^{(c)}$のclosed ideal になる。residue class ring $R^{(c)}/R^{(c)}_0$は$(H^{(b)}_\alpha, |||\ |||_\alpha)$と環同型, isometry になる。ただし, $H^{(b)}_\alpha$の中の積は(4.12)によつて定めるものとする。

定理4.2を証明するために$\varepsilon^1_{L^2}$の元の境界値に関するDoob[10]の結果を援用す

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

る。

$u\in\mathcal{E}^1_{L^2}$ に対し，次の条件を満す $u^*\in\mathcal{E}^1_{L^2}$ をuのrefinement という。
(1) $u^*=u$ $a\cdot e$ on D，(2) u^*はD上でouter capacity 0 の集合を除いてfine—continuous。Deny—Lions〔8〕によれば任意の$u\in\mathcal{E}^1_{L^2}$ はそのrefinement をもつ。u_1^*，u_2^* が $u\in\mathcal{E}^1_{L^2}$ のrefinementであればouter capacity 0 の集合を除いて $\overset{1}{u_1}=u_2^*$。

さて，H_α の元は（ 4.6 ）で定義された$\widetilde{H}_\alpha$ とその中にそのversion をもつ。今後H_α を$\widetilde{H}_\alpha$ と同一視する。こう約束すると，$u\in H_\alpha$ のrefinement はu自身に他ならない。

MをDのMartin 境界〔27〕 とする。M上の測度μ，$D\times M$上の核$K(x,\xi)$を〔　〕のものとする。

補題 4.1 （Doob 〔10〕）

(i) $u\in\mathcal{E}^1_{L^2}$，u^*をuのrefinement とする。u^*は$\mu-a\cdot e$のMの点でNain 〔29〕 の意味でのfine—limit をもつ。これをγu^* とかくと$\gamma u^*\in L^2(M,\mu)$ u_1^*，u_2^* がuのrefinement ならば $\gamma u_1^*=\gamma u_2^*$ $\mu-a\cdot e$ on M。

(ii) $u\in D^1_{L^2}$ であるための必要充分条件は

$$u\in\mathcal{E}^1_{L^2}\ \text{かつ}\ u^*=0\quad \mu-a\cdot e\ \text{on}\ M$$

が成立することである。

(iii) $u\in\mathcal{E}^1_{L^2}$ がD上で調和であるとする。$u^*=u$ であるが

$$(4.14)\quad u(x)=H(\gamma u)(x)=\int_M K(x,\xi)(\gamma u)(\xi)\mu(d\xi)$$

補題 4.2

uが有限でα— harmonic とする。つまり

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)u(x)=0$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

このとき

(i) $^{\exists}\gamma u \in L^{\infty}(M, \mu)$

$$(4.15) \quad u(x) = H_{\alpha}(\gamma u)(x) = \int_M K_{\alpha}(x, \xi)(\gamma u)(\xi)\mu(d\xi)$$

ただし

$$(4.16) \quad K_{\alpha}(x, \xi) = K(x, \xi) - \alpha\int_D G_{\alpha}^0(x, y) K(y, \xi) dy$$

(ii) $\sup_{x \in D} |u(x)| = \operatorname{ess-sup}_{\xi \in M} |\gamma u(\xi)|$

この補題の証明は省略

<u>定理 4.2 の証明</u>

(i) $I \quad R$と仮定する。$u \in R$, $v \in I$とすれば $uv \in R$ であるが，補題4.1より $\gamma v^* = 0$ だから $\gamma((uv)^*) = \gamma u^*$, $\gamma v^* = 0$。再び補題4.1より$uv \in D^1_{L^2}$ したがつて$uv \in I$。これでIがRのideal であることがわかつた。

Rから$R_{\alpha, h}$ の上へのprojection

$$(4.17) \quad P_{H\alpha} : u \in R \rightarrow P_{H\alpha} u \in R_{\alpha, h}$$

を線型写像と考えたときこのkernelはIに等しい。つまりR/I と$R_{\alpha, h}$ は線型空間として同型である。$R_{\alpha, h}$ に(4.12)により積を入れれば写像(4.17)が環同型をひきおこすことは明らかである。

(ii) Rがclosed ，$I \subset R$と仮定する。Iがclosed であることをいうためには $R_{\alpha, h} = R - I$ がclosed であることをいえばよい。

ところで補題4.2よりわかることは，まずuが有界かつα－harmonic ならば

$$(4.18) \quad \sup_{x \in D} |u(x)| = \mu\text{-}\operatorname{ess-sup}_{\xi \in M} |\gamma u(\xi)|$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

さらに有界かつα—harmonic な関数列$u_n(x)$がD上で一様収束すれば，その極限関数もD上で有界かつα—harmomic である。

そこで$u_n \in R_{\alpha,h}$がnorm $|||\ |||_\alpha$ の意味でcauchy 列をなせばこれは勿論一様収束するからその極限vは有界かつα—harmonic。Rが$|||\ |||_\alpha$ に関し閉じているとしているから$v \in R$。したがつて

$v \in R_{\alpha,h}$。

次に（4.17）によつてひきおこされる環同型がR/I と$R_{\alpha,h}$ のisometry をも与えることを示そう。$\dot{u} \in R/I$ ，$\dot{u}=I+v$，$v \in R_{\alpha,h}$ としよう。定義（4.11）により$|||\dot{u}|||_\alpha=\inf_{u_0 \in I} |||u_0+v|||_\alpha$ である。証明すべき式は

$$(4.19)\quad |||\dot{u}|||_\alpha = |||v|||_\alpha$$

明らかに $|||\dot{u}|||_\alpha \leqq |||v|||_\alpha$ 。 一方，$\forall u_0 \in I$，$(u_0+v, u_0+v)^\alpha_{D,1}$
$=(u_0, u_0)^\alpha_{D,1}+(v, v)^\alpha_{D,1} \geqq (v, v)^\alpha_{D,1}$，
$\underset{x\in D}{\text{ess-sup}} |u_0(x)+v(x)| \geqq \mu\text{-}\underset{\xi\in M}{\text{ess-sup}} |\gamma(u_0+v)^*(\xi)|$
$=\mu\text{-}\underset{\zeta\in M}{\text{ess-sup}} |\gamma v(\xi)|$。（4.18）により最後の式は$\sup_{x\in D} |v(x)|$に等しい。わかつたことは $|||u_0+v|||_\alpha \geqq |||v|||_\alpha$。q，e，d

<u>注意4.2</u> 定理4.2の証明の最後の部分で次の不等式を使つている。

$$(4.20)\quad \underset{x\in D}{\text{ess-sup}} |w(x)| \geqq \mu\text{-}\underset{\xi\in M}{\text{ess-sup}} |\gamma w^*(\xi)|$$

ただし，$w \in \varepsilon^1_{L^2}$，$w^*$ はwのrefinement。この不等式を証明しておこう。

refinement w^*は次の性質をもつ（Deny—Lions ［8］）。

$\exists K_n$: compact，$K_n \uparrow$，$X-\bigcup_n K_n$ のouter capocity は0，w^* は各K_n上で連続。したがつて $\underset{x\in D}{\text{ess-sup}} |w(x)| = \underset{x\in D}{\text{ess-sup}} |w^*(x)| =$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$\sup_{x\in \cup K_n} | w^*(x) |$ 。一方，(Ω, X_t, P_x) をR^n上のBrown運動，τ_D をDから のexit timeとすると X_{τ_D-}はΩからM上への可測写像でこの写像によるP_{x_0} (x_0 はDの固定点)のinduced measure がM上の測度μにほかならない。しかも $P_{x_0}(\lim_{t\to t_D} w^*(X_t)=\gamma w^*(X_{tD-})\,;X_t\in \underset{n}{\cup} K_n,\ 0\leqq {}^\forall t<t_D)=1$。

したがつて，

$$\sup_{x\in \underset{n}{\cup} K_n} | w^*(x) | \geqq | \gamma w^*(X_{tD-}) |, \quad P_{x_0}-a.e$$

$$\sup_{x\in \underset{n}{\cup} K_n} | w^*(x) | \geqq | \gamma w^*(\xi) |, \quad \mu-a.e。$$

q.e.d

定理4.2とその証明により次のことがわかる。Rをring $(\varepsilon^1_{L^2}\cap L^\infty, |||\ |||_\alpha)$の closed subringとし$I$および$R_{\alpha,h}$ を定理4.2のものとする。$I\subset R$と仮定する。M上の関数族$F_M^{(b)}$ を(4.21) $F_M^{(b)}=\{\varphi\,;\varphi=\gamma u,\ u\in R_{\alpha,h}\}$によつて定義する。$R_{\alpha,h}$ の元は全て有界かつα－harmonic であるから補題4.2により

(4.22) $R_{\alpha,h}=H_\alpha(F_M^{(b)})$

が成立する。$\varphi\in F_M^{(b)}$ に対し

(4.23) $|||\varphi|||_{M,\alpha}=|||H_\alpha\varphi|||_\alpha$

とおく。等式(4.18)とその後の注意により$F_M^{(b)}$はnorm$|||\ |||_{M,\alpha}$ に関するBanach spaceとなるが，さらに

<u>定理4.3</u> (境界上に導びかれるnormed ring)

$(F_M^{(b)}, |||\ |||_{M,\alpha})$はnormed ring であり，かつresidue class ring R/I と環同型，isometryである。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

証 明 定理4.2により，$(R_{\alpha,h}, ||| \; |||_{\alpha})$ と $(F_M^{(b)}, ||| \; |||_{M,\alpha})$ が環同型，isometry であることをいいさえすればよい。ただし $R_{\alpha,h}$ には(4.12)による積を導入している。$F_M^{(b)}$ が普通の積により環をなすことおよび写像 γ が $R_{\alpha,h}$ と $F_M^{(b)}$ の環同型を与えることは次式からわかる。$u, v \in R_{\alpha,h}$ に対して $\gamma(u \otimes v) = \gamma(P_{H\alpha}(u \cdot v) = \gamma(u \cdot v) = \gamma u \cdot \gamma v$。$\gamma$ がisometry を与えることは定義式(4.23)による。$q.e.d.$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

2章 Dirichlet spaceの表現

§5 いくつかの定義と注意

この節では，Dirichlet space を扱かう場合，基礎空間X，基礎のRadon測度mを合わせて（X，m，F，ε）の様に記することにする。

前節と同じく，locally compact な空間Xとその上のRadon測度を与えたときmに関する複素L^2 一空間を$L^2(X)$，台がcompact な連続関数の全体を$C_0(X)$，無限遠で0であるような連続関数の全体を$C(X)$とかくことにする。Xがcompact である場合は$C_0(X)$も$C(X)$もX上の連続関数の全体に等しい。

定義5.1 (regular Dirichlet space)

（X，m，F，ε）が正則(regular) なDirichlet spaceであるとは，次の条件が満されていることである。

(i) Xは局所compact，Hausdorff 空間で第2可算公理を満足する。

(ii) mはX上のいたる所dense な Radon測度，即ち任意の空でないopen subsetのm測度は真に正である。

(iii) （F，ε）は$L^2(X)$に関するDirichlet space。

(iv) $F\cap C(X)$ は$C(X)$内で一様収束の意味でdenseである。

(v) $F\cap C(X)$はF内でnorm ε^{α}（$\alpha>0$）の意味でdenseである。

注意5.2 (Beurling — Deny の定義)

Beurling — Deny[3]によるDirichlet space のもとの定義（[7]に於てはregular functional spaceと呼ばれているもの）は以下の通りであり，定義5.1のものと類似であるが，いくつかの点でくい違つている。

即ち，Xは局所compact（可分性は仮定しない）。mの条件は(ii)と同じ。(iii)に相当して（F，ε）をmに関して局所有限な関数族からなるHilbert spaceとし，さらに定義1.3の（D.3）の条件を要求する。又，任意のcompactum Kに対し，定数C_Kが存在し

$$\varepsilon(u,u)\leq C_K\int_K|u(x)|m(dx)$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

最後に正則性の条件としては(iv)，(v)の条件より強いもの，つまり(iv)(v)に於けるCをC_0にかえた条件を要求している。

定義 5.2 （Ray resolvent）

Xを locally compact な Hausdorff 空間で第2可算公理を満すとする。$C(X)$上の線型作用素$\{G_\alpha\ ;\ \alpha>0\}$が次の条件を満すとき，これを$X$上の Ray resolvent と呼ぶ。

(i) G_α は $C(X)$ を $C(X)$に移す sub-Markov resolvent である。即ち，G_α は実関数を実関数に移し，$u\in C(X)$で$0\leqq u\leqq 1$なら，$0\leqq \alpha G_\alpha u\leqq 1$ であり又，G_α は resolvent 方程式を満す。

(ii) $C^+(X)$を$C(X)$の元で非負なものの全体とする。

$C^+(X)$の部分集合C_1で次の性質をもつものが存在する。

(a) C_1 は可算集合

(b) C_1 はXの点を分離する。つまり$x, y\in X$，$x\neq y$なら，$\exists u\in C_1$，$u(x)\neq u(y)$

(c) $\forall x\in X$，$\exists u\in C_1$，$u(x)\neq 0$

(d) $\forall u\in C_1$，$\forall \alpha>0$，

(5.1) $\alpha G_{\alpha+1}u\leqq u$

注意 5.3 （resolvent kernel）

X上の Ray resolvent $\{G_\alpha,\ \alpha>0\}$が与えられたとする。各$x\in X$毎に，$u\in C(X)$に対し，$G_\alpha u(x)$を対応さすと，これは$C(X)$上の正値線型汎関数であるから

(5.2) $G_\alpha u(x)=\int_X G_\alpha(x, dy)\,u(y)$，　$u\in C(X)$

を満す Radon 測度$\{G_\alpha(x, dy),\ \alpha>0\}$が存在する。これは次の性質をもつ。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(5.3) $\begin{cases} \text{各}x\in X\text{毎に}G_\alpha(x,\cdot)\text{は}X\text{上のBorel測度，各Borel set} \\ E\subset X\text{に対し，}G_\alpha(\cdot,E)\text{は}X\text{上のBorel可測関数，任意の} \\ \text{Borel set }E\subset X\text{に対し，}0\leqq\alpha G_\alpha(x,E)\leqq 1,\ \text{更に，} \\ \text{resolvent方程式} \\ G_\alpha(x,E)-G_\beta(x,E)+(\alpha-\beta)\int_X G_\alpha(x,dy)G_\beta(y,E) \\ \quad =0 \end{cases}$

一般にこれらの性質を満すものをX上のresolvent kernel と呼ぶ。

(5.2)によつて対応するresolvent kernelが

(5.4) $\alpha G_\alpha(x,X)=1,\qquad \forall\alpha>0,\qquad \forall x\in X$

を満すとき，もとのRay resolvent は conservctive であるという。

<u>注意5.4</u> (Ray resolvent と Compact space)

Ray resolventのもとの定義(Ray [34])に於てはXはCompact metric space, G_α は Conservationとしている。我々の定義5.2はこれより広いわけであるが，次の様にして，この場合に帰着出来る。

X及び$\{G_\alpha, \alpha>0\}$が定義5.2の条件を満すとする。(5.2)によつて，X上のresolvent kernel $\{G_\alpha(x,dy),\alpha>0\}$ を定義する。

空間Xを拡張して

(5.5) $\bar{X}=X\cup\{\infty\}$

とおく。但し，Xがcompact のときは$\{\infty\}$は孤立点としてつけ加える。Xがcompact でないときは，$\bar{X}$は一点compact 化とする。いずれの場合も$\bar{X}$はcompact metric space となる。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$C(\overline{X})$ を $\overline{X}$ 上の連続関数全体とし，$\overline{u}\in(\overline{X})$ に対して，

$$
(5.6)\begin{cases}\overline{G_\alpha}\,\overline{u}(x)=\int_X G_\alpha(x,dy)\,\overline{u}(y)+\dfrac{1-\alpha G_\alpha(x,X)}{\alpha}\,\overline{u}(\infty) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , x\in X \\ \overline{G_\alpha}\ \overline{u}(\infty)=\dfrac{1}{\alpha}\,\overline{u}(\infty)\end{cases}
$$

とおく。明らかに，$\overline{G_\alpha}$ は G_α の拡張である。

さて，$\{\overline{G_\alpha},\ \alpha>0\}$ が定義 5.2 の意味で，compact metric space $\overline{X}$ 上の Conservatioe な Ray resolvent になつていることを示そう。

$\overline{G_\alpha}$ が sub－Markov 性をもち，且つ resolvent 方程式を満すことは，$G_\alpha(x,dy)$ の性質（5.3）よりすぐにわかる。Conservatiue であることも明らか。$\overline{G_\alpha}(C(\overline{X}))\subset C(\overline{X})$ であることは，X が compact のときは明らかである。X が non－compact の場合，$\overline{u}\in C(\overline{X})$ に対し，$v(x)=\overline{u}(x)-\overline{u}(\infty)$ とおくと，$\lim_{x\to\infty} v(x)=0$ であるから，$v|_X\in C(X)$。

（5.6）を書きかえると，$x\in X$ のとき，$\overline{G_\alpha}\ \overline{u}(x)=G_\alpha v(x)+\dfrac{1}{\alpha}u(\infty)$。

$G_\alpha v\in C(X)$ であるから，$\lim_{x\to\infty}\overline{G_\alpha u}(x)=\dfrac{1}{\alpha}\overline{u}(\infty)=\overline{G_\alpha}\,\overline{u}(\infty)$， このようにして，$\overline{G_\alpha}\ \overline{u}\in C(\overline{X})$ であることがわかつた。

最後に定義 5.2(ii)の条件を満す C_1 を考える。C_1 の各元を $\{\infty\}$ で 0 とおいて $\overline{X}$ 上の関数に拡張する。

このようにして拡張された関数全体に $\overline{X}$ 上で恒等的に 1 に等しい関数をつけ加えて得られる関数族を $\overline{C_1}$ とする。$\overline{C_1}$ は容易にわかるように，$\overline{X}$ と $\overline{G_\alpha}$ に関して定義 5.2(ii)の条件を全て満足する。

注意 5.5 （強 Markov 過程の対応）

よく知られている様に Compact metric space X 上の Conservative

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

Ray resolventに対しては自然な仕方でX上の右連続な強Markov 過程が対応する([34])。従がつて，注意5.4により，定義5.2の意味でのRay resolventに対しては，$\overline{X}=X\cup\{\infty\}$上の右連続な強Markov 過程が対応することになる。この際$\overline{G_\alpha}$の定義(5.6)からわかるように$\{\infty\}$は特別な性質を持つ。Markov 過程の言葉でいえば，$\{\infty\}$はtrap であり，killing pointと呼ばれるものである。

定義5.3 (Canonical Dirichlet space)

(X, m, F, ε)が標準的(canonical) Dirichlet space であるとはこれが次の性質をもつことである。

(i) (X, m, F, ε)はregular Dirichlet space である。

(ii) 次の条件を満すX上のRay resolvent $\{G_\alpha, \alpha>0\}$が存在する。

(a) $\alpha>0$, $u\in L^2(X, m)\cap C(X)$ に対して，$G_\alpha u$ はFに属し，又$(F; \varepsilon)$に関し，方程式(1.3)を満す。

(b) 定義5.2(ii)の条件(a),(b),(c),(d)を満す関数族$C_1\subset C^+(X)$であつて，特に$C_1\subset F$なるものを選ぶことが出来る。

注意5.6 (Ray resolvent とL^2−resolvent)

Ray resolventの定義域を次の様にして拡張しておく。(5.2)によつて定まるresolvent kernel を$\{G_\alpha(x, dy), \alpha>0\}$とし，Borel可測関数$u\in L^2(X)$に対し，$G_\alpha u(x)$, $x\in X$ を再び積分(5.2)によつて定義する。このとき次の不等式が成立つ。

$$(5.7)\qquad (G_\alpha u, G_\alpha u)_X \leqq \frac{1}{\alpha^2}(u, u)_X, \quad u\in L^2(X)$$

uはBorel可測。

さて，canonical Dirichlet space に対応するRay resolventを$\{G_\alpha, \alpha>0\}$とし，§1の意味で対応するL^2−resolvent を$\{\widetilde{G}_\alpha, \alpha>0\}$とすれば，

$$(5.8)\qquad G_\alpha u(x)=\widetilde{G}_\alpha u(x), \ \text{m-a.e.}, \quad u\in L^2(X)$$

uはBorel 可測。

実際，定義5.3(ii)(a)の条件により，$u\in C_0(X)$に対しては(5.8)が成立する。あと

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

は (5.7) 及び (1.6) に注意すればよい。

次節以下では，L^2— Dirichlet space が与えられたとき，これを regular 又は canonical な Dirichlet space として表現する問題を扱かう。表現という意味をはつきりさすために，

定義 5.4 (同値な Dirichlet spaces)

対応する Dirichlet rings が環同型で等距離的であるときに Dirichlet spaces は同値であるという。

詳しく言うと2つの Dirichlet spaces (X, m, F, ε), $(X', m', F', \varepsilon')$ が同値であるとは，次の条件が満されることである。定義 3.1 によつて対応する Dirichlet ring を各々 $(F^{(b)}, ||| \ |||_\alpha, \alpha>0)$, $(F^{(b)'}, ||| \ |||_\alpha', \alpha>0)$ とするとき

$$(5.9)\quad \begin{cases} \exists \Phi \ ; \ F^{(b)} \longrightarrow F^{(b)'} \\ \qquad \text{ring isomorph, onto} \\ ||| u |||_\alpha = ||| \Phi u |||_\alpha', \quad \forall u \in F^{(b)}, \quad \forall \alpha > 0. \end{cases}$$

定義 5.5 (正則 (標準的) 表現)

2つの Dirichlet space (X, m, F, ε), $(X', m', F', \varepsilon')$ が同値であり，後者が regular (canonical) であるとき後者は前者の regular (canonical) な表現であるという。又このとき X' を前者の表現空間と呼ぶ。

注意 5.7 (同値な Dirichlet spaces の間の関係)。

2つの Dirichlet space (X, m, F, ε), $(X', m', F', \varepsilon')$ が同値であるとする。対応する Dirichlet rings の間の同型，等距離写像を Φ とする。

このとき次の諸関係が成立する。

F の $L^2(X)=L^2(X;m)$ 内での closure を $L_0^2(x)$; $F^{(b)}=F\cap L^\infty(X)$ の $L^\infty(X)$ 内での (一様 norm による) closure を $L_0^\infty(X)$ とする。§1 によつて，

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(X, m, F, ε) に対応する $L^2(X)$−resolvent を $\{G_\alpha,\ \alpha>0\}$, § 2によつて対応する $L_0^2(X)$ 上の semi−groupを $\{T_t,\ t\geqq 0\}$ とする，同様にして $(X', m', F', \varepsilon')$ に対応する諸量を各々 $L_0^2(X')$, $L_0^\infty(X')$, $\{G_\alpha',\ \alpha>0\}$, $\{T_t',\ t\geqq 0\}$ とする。

ring 間の写像 Φ は次の性質を持つ諸写像に拡張される。

$$(5.10)\quad \begin{cases} \Phi\ :\ F \longrightarrow F' & \text{linear, onto} \\ & \text{one to one} \\ \varepsilon(u, v)=\varepsilon'(\Phi u,\ \Phi v), & \forall u, v \in F \end{cases}$$

$$(5.11)\quad \begin{cases} \Phi\ :\ L_0^2(X) \longrightarrow L_0^2(X') & \text{linear, onto} \\ & \text{one to one} \\ (u, v)_X=(\Phi u, \Phi v)_{X'}, & \forall u, v \in L_0^2(X) \end{cases}$$

$$(5.12)\quad \begin{cases} \Phi\ :\ L_0^\infty(X) \longrightarrow L_0^\infty(X') & \text{linear, onto} \\ & \text{one to one} \\ \Phi \text{ は ring isomtrph} & \\ \|u\|_\infty=\|\Phi u\|_\infty', & \forall u \in L_0^\infty(X) \end{cases}$$

(5.1 0)，(5.1 1) 及び (5.1 2) の写像を区別して各々 Φ_1，Φ_2 及び Φ_3 とし，もとの ring 間の写像を Φ とすると，

$$(5.13)\quad \begin{cases} \Phi_2\,|_F=\Phi_1, \quad \Phi_1\,|_{F^{(b)}}=\Phi \\ \Phi_3\,|_{F^{(b)}}=\Phi \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

更に次の関係が成立する。

(5.14) $\Phi^{-1}G_\alpha'\Phi u=G_\alpha u$, $\forall u\in L_0^2(X)$。

(5.15) $\Phi^{-1}T_t'\Phi u=T_t u$, $\forall u\in L_0^2(X)$。

(5.10)〜(5.15)の証明

Φを$F^{(b)}$から$F^{(b)\prime}$への環同型，等距離写像とする。定理3.1の(3.6)式より

(5.16) $\| u \|_\infty=\| \Phi u \|_\infty'$, $\forall u\in F^{(b)}$

又，従がつて，任意の$\alpha>0$につき

(5.17) $\varepsilon^\alpha(u,u)=\varepsilon^{\alpha,1}(\Phi u,\Phi u)$, $\forall u\in F^{(b)}$

Φは$F^{(b)}$から$F^{(b)\prime}$への環同型であり，$F^{(b)}$の$\| \ \|_\infty$−normによるclosure $L_0^\infty(X)$は$\| \ \|_\infty$−normに関しnormed ringであるから(5.16)は(5.12)を意味する。

一方補題3.2より，$F^{(b)}$はε^α−normに関し(αは任意に固定した正数)F内denseであるからΦは(5.17)によつて，FからF'上への線型写像に拡張出来て，任意の$\alpha>0$と任意の$u\in F$につき(5.17)が成立する。その拡張を再びΦと書くと得られる結論は

(5.18) $$\begin{cases}\varepsilon(u,v)=\varepsilon'(\Phi u,\Phi v)\\ (u,v)_X=(\Phi u,\Phi v)_{X'}\end{cases}\qquad \forall u,v\in F$$

このようにして(5.10)が得られた。同様にして(5.18)の2番目の式から(5.11)が得られる。

(5.14)を示そう。$u\in L_0^2(X)$とする。任意の$v\in F'$に対して(1.3)より

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha,\prime}(G_\alpha'\Phi u,v)&=(\Phi u,v)_{X'}=(u,\Phi^{-1}v)_X\\ &=\varepsilon^\alpha(G_\alpha u,\Phi^{-1}v)=\varepsilon^{\alpha,\prime}(\Phi G_\alpha u,v)\end{aligned}$$

故に　$G_\alpha'\Phi u=\Phi G_\alpha u$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(5.15)は(5.14)と(2.6)より従がう。実際 $A_\beta=\beta(\beta G_\beta-I)$,

$A_\beta'=\beta(\beta G_\beta'-I)$ とおくと,

$\Phi^{-1}A_\beta'\Phi=A_\beta$ on $L_0^2(X)$ であるから

$$\Phi^{-1}T_t'\Phi u=\lim_{\beta\to+\infty}\Phi^{-1}(\exp tA_\beta')\Phi u=\lim_{\beta\to+\infty}(\exp tA_\beta)u$$

$$=T_t u,\qquad u\in L_0^2(X)。$$

§6. 一般論から準備——可換ノルム環の表現

次節以後の議論に必要な範囲内でノルム環についての基礎定理をまとめておこう。証明は省略するがLoomis〔26〕の中の対応する頁をあげておく。

$(R,\ \|\ \|)$ を複素可換ノルム環とする。つまり,(1)Rは複素数体上の可換環[1],(2)Rは norm $\|\ \|$に関する複素Banach space, (3)$x,y\in R$のとき $\|xy\|\leqq\|x\|\cdot\|y\|$, の3つの条件が満されているとする。

<u>注意6.1</u> (単位元のnorm)

Rが積に関する単位元eをもてば,(3)より$\|e\|\geqq 1$となる。しかしRに次の条件を満す新らしいnorm $|||\ |||$を定義して$(R,|||\ |||)$を再たびnormed ring にすることが可能である(〔28〕p48)。

(4) Rが単位元eをもてば$|||e|||=1$

(5) $|||x|||\leqq\|x\|$, $\forall x\in R$。更にRが単位元eをもてば,$\|x\|/\|e\|\leqq|||x|||$, $\forall x\in R$。normed ring に関する一般論は条件(4)も仮定して展開される。しかし,この節に述べる結果だけならば関係(5)のおかげで,条件(4)は不要なものになる。我々の具体的対象であるDirichlet ring(§3)は一般に(4)を満さない。

---

1) ここでは普通の意味でのalgebra を ring (環)と呼ぶことにする。§3に於てすでにこの意味でring, subring等の言葉を使つている。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

定義 6.1 (character space of R)

(i) Rから複素数体への恒等的に 0 でない環準同型写像φのことをRのcharacterと呼ぶ。即ちφがcharacterとは

(1) $\varphi \not\equiv 0$ (2) $\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$, $x, y \in R$,

α, βは複素数, (3) $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in R$, の3つの条件が満される写像である。

(ii) Rのcharacter全体の集合を$\mathfrak{m}$とする。

各$x \in R$に対し

$$(6.1) \qquad \varphi(x)=\hat{x}(\varphi), \qquad \varphi \in \mathfrak{m}$$

によつて, $\mathfrak{m}$上の複素数値関数$\hat{x}$を定義する。Rから, $\hat{R}=\{\hat{x}\,;\, x \in R\}$へのこの対応は明らかに環準同型である。$\hat{R}$を$R$の(関数環としての)表現という。

Character space $\mathfrak{m}$ に位相をうまく入れることが次の問題になる。そのために

定義 6.2 (regular maximal ideal of R)

(i) $I \subset R$がRのidealであるとは

$$\forall x, y \in I \Longrightarrow x+y \in I$$

$$\forall x \in R, \quad \forall y \in I \Longrightarrow xy \in I$$

(ii) ideal I が proper とは, $I \neq R$ のこと。

(iii) ideal I が maximal (極大)とは, Iがproperで, Iは他のどんなproper idealにも含まれないこと。

(iv) ideal I が regularであるとは, $u \in R$, $xv-x \in I$, $x \in R$。

定理 6.1 ([26] p69)

Rのcharacter と R の regular maximal idealは次の対応により1

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

対1に対応する。character φ に対して

$$(6.2)\qquad M_\varphi=\{x;\varphi(x)=0\}$$

はregular maximal idealである。regular maximal ideal M に対し，Rからresidue－class ring R/Mへの自然な準同型写像

$$(6.3)\qquad \varphi_M ; R \to R/M$$

は，Rのcharacterになる（R/Mは複素数体に同型になる）。

定理6.1はRのcharacter space $\mathfrak{m}$ が，Rのregular maximal ideal全体と同一視出来ることを意味している。更に（6.3）から得られる結論は

<u>補題6.1</u>（〔26〕p69）

Rのcharacter φ は（R，$\|\ \|$）から複素数体へのnormが1以下の線型写像である。即ち

$$(6.4)\qquad |\varphi(x)|\leqq\|x\|\ ,\qquad \forall x\in R$$

この補題のおかげで，character space $\mathfrak{m}$ に自然な位相を入れることが出来る。実際$\mathfrak{m}$はRのdual space R^*の単位球のsubset であるから$\mathfrak{m}$にweak*－topology を次の様にして入れる。

各$\varphi\in\mathfrak{m}$の近傍として

$$(6.5)\qquad N(\varphi;x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n;\varepsilon)$$
$$=\{\Psi:|\hat{x}_k(\Psi)-\hat{x}_k(\varphi)|<\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots\cdots,n\}$$

をとる。但し，$\varepsilon>0$, $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\in R$，$\hat{x}_k$ は x_k の $\hat{R}$ への表現。

ところで，R上の零写像をφ_0 と書くと，$\mathfrak{m}\cup\{\varphi_0\}$は R^* の単位球のclosed subset（weak*－topologyで）であることがわかるので，$\mathfrak{m}$はcompactか locally compactになる。今後character space $\mathfrak{m}$ は（6.5）によつて位相ずけられたものとして扱う。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

定理6.2 ([26] p52, p70)

(i) mはlocally compact である。

特にRが単位元をもてばmはcompact になる。

(ii) Rの表現$\hat{R}$は$C(m)$ の subringである。但し，$C(m)$ はm上の(複素数値)連続関数で無限遠でDになるものの全体を表わす。

(iii) $\hat{R}$はmの点を分離する。さらにどの点，$p\in m$に対しても， $\exists x\in R$, $\hat{x}(p)\neq 0$.

(iv) $x\in R$に対し

$$(6.6) \qquad |x(p)|\leqq\|x\|, \qquad \forall p\in m。$$

注意6.2

mの位相(6.5)は次の条件によつて完全に特徴づけられる。

$\begin{cases} (1) & m\text{はlocally compact} \\ (2) & R\text{の任意の要素は}m\text{上の連続関数であつて無限遠で}0\text{に等しい。} \end{cases}$

これは定理6.2が成立することによる([28], p12, 5G 参照)。

定義6.3

(i) Rのsubset K がRの生成団(system of generators)とはKを含む(Rが単位元eをもつときはKとeとを含む)最小のclosed subring がRと一致することである。

(ii) Rが半単純(semi-simple)とはRのregular maximal ideals の intersection が $\{0\}$ となること。

補題6.2

Rが可算個の要素からなる生成団をもてば，mは第2可算公理を満すlocally compact Hausdorff空間となる。

実際(6.5)と同値なmの基本近傍系として

$$(6.7) \quad \{x_{n_k}(\Psi)-r_{m_k}|<1/p, \quad k=1, 2, \cdots\cdots, l, \quad p\text{は自然数}\}$$

をとることが出来る。但し，$K=\{x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\}$は$R$の生成団，$\{r_m\}$は複素有理数の全体。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

補題6.3 （〔26〕, p76）$x \in R$に対し

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \sup_{p\in m} |\hat{x}(p)| \tag{6.8}$$

注意6.3 定理6.1と補題6.3よりわかるように，次の3つの条件は互いに同値である。

(1) Rはsemi－simple

(2) Rは$\hat{R}$への環準同型写像（6.1）は環同型写像

(3) $x \in R$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$ ならば，$x = 0$

定義6.4

(i) RからRへの対応$x \longrightarrow x^*$が次の条件を満すとき，これをinvolution と呼ぶ。

(1) $x^{**} = x$

(2) $(x+y)^* = x^* + y^*$

(3) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$

(4) $(xy)^* = y^* x^*$

(ii) involution* をもつRがこのinvolution に関して完全対称であるとは各$x \in R$につき

$$\hat{x^*}(p) = \overline{\hat{x}(p)} \qquad \forall p \in m \tag{6.9}$$

が成立することである。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(iii) $x \in R$と$y \in R$が互いに他の準逆元であるとは

$$(6.10) \qquad x+y-xy=0$$

補題 6.4 ([26], p89)

involution* をもつRが完全対称であるための必要充分条件は任意の$x \in R$に対して，$-x^*x$ が準逆元をもつことである。

定理 6.3 ([26], p89, [18], p80)

Rがsemi－simple，完全対称とする。

(i) 対応(6.1)はRから$\hat{R}$への環同型を与え，$\hat{R}$は$C(\mathfrak{m})$内で(一様ノルムの意味で)denseである。

又Rのエルミット要素($x=x^*$なるx)の全体をR^r，$\hat{R}$の要素で実数値をとるものの全体を$\hat{R}^r$とせば，(6.1)はR^rを$\hat{R}^r$の上に移す。$\hat{R}^r$は$C^r(\mathfrak{m})$ ($C(\mathfrak{m})$の元で実数値をとるものの全体)の中でdenseである。

(ii) Rが単位元を含めば，$\mathfrak{m}$はcompoct，Rが単位元を含まなければ，$\mathfrak{m}$はcompactでない。

(iii) R_1がRをclosed subringとして含むノルム環であるとする。このときRの任意のcharacterはR_1のcharacterに拡張出来る。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

補題 6.5

完全対称なRがnケのエルミット要素$\{x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n\}$を生成団にもてば，$\mathfrak{m}$は$F-\{0\}$なる形の$n$次元実ユークリッド空間$R^n$の部分集合と同相である。ここに$F$は$R^n$の有界閉集合，$D$は$R^n$の原点を表わす。

証明　$\bar{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}\cup\{\infty\}$を$\mathfrak{m}$の一点 compact 化とする（$\mathfrak{m}$がコンパクトのときは孤立点として$\{\infty\}$を加える）。$x\in R$に対し，$\hat{x}(\infty)=0$とおくと，$\hat{x}$は$\bar{\mathfrak{m}}$上の連続関数とみなされる。

$$(6.11)\qquad \bar{\mathfrak{m}} \ni p \rightarrow (\hat{x}_1(p), \hat{x}_2(p), \cdots\cdots\cdots, \hat{x}_n(p)) \in R^n$$

は$\bar{\mathfrak{m}}$から，R^nの有界閉集合Fへの連続写像である。この写像は一対一である。実際，$p_1, p_2 \in \bar{\mathfrak{m}}$が$F$の同じ点に移れば，$(\hat{x}_1, \cdots\cdots\cdots \hat{x}_n)$の任意の多項式は，$p_1$，$p_2$で同じ値をとり，結局，$\hat{x}(p_1)=\hat{x}(p_2)$，　$\forall x\in R$。故に定理 6.2(iii)より$p_1=p_2$。このようにして$\bar{\mathfrak{m}}$とFとが同相であることがわかる。

この節の最後にR上の正の線型汎関数について触れておく。完全対称なR上の複素線型汎関数φが，$\varphi(xx^*)\geqq 0$，　$\forall x\in R$，を満すとき，φは正の汎関数と呼ばれる。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

Rが半単純で単位元をもつとき（従がつて$\mathfrak{m}$がcompact のとき）にはR上の正線型汎関数と$\mathfrak{m}$上のRadon測度とは一対一に対応することが知られている（〔28〕, p97）。しかしRが一般に単位元を持たぬ時には事情は複雑になる。以下にあげるPlancherelの定理の拡張は有用である。

定理 6.4 （〔26〕, 99）

Rがsemi－simpleで完全対称であるとする。

$\widetilde{R}$をR内のdense な idealとし，lを$\widetilde{R}$上の正の線型汎関数とす。このとき次の条件を満す$\mathfrak{m}$上のBaire測度μが一意的に存在する。

lに関して正定値な任意の$y \in \widetilde{R}$に対し

$$(6.12)\quad \begin{cases} \hat{y} \in L_1(\mu) \\ l(yx) = \int_{\mathfrak{m}} \hat{x}\,\hat{y}\,d\mu, \qquad \forall x \in R \end{cases}$$

ここに，$y \in \widetilde{R}$がφに関して正定値とは，$l_y(x) = l(yx)$によつて定義されるR上の線型汎関数l_yが正かつ有界なことである。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

§ 7. Dirichlet subring とその character space

再びDirichlet space (X, m, F, ε)を考えよう。これから導かれるDirichlet ring（§3.）を$\{F^{(6)}, /\!/\!/\ /\!/\!/_\alpha, \alpha>0\}$とする。$F_1$を$(F, \varepsilon)$のDirichlet subspaceとし$L$を$(L^\infty(X), /\!/\ /\!/_\infty)$のclosed subringとする。$L$は複素共役をとる操作に関し閉じているとする。

この節では記号Rは上の性質をもつF_1とLの共通部分を表わすものと約束しておく。

補題 7.1

(i) Rは$(F^{(6)}, /\!/\!/\ /\!/\!/_\alpha)$内のclosed subringであり半単純かつ完全対称である。

(ii) Rはfunction lattice（束）である。つまり

$$(7.1)\quad \left.\begin{array}{l} u, v \in R \\ u, v\text{が実} \end{array}\right\} \to u \vee v, \quad u \wedge v \in R$$

証 明

(i) Rがclosed subringであることは定理3.2で証明されている。次に（3.5）より$u \in R$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{/\!/\!/ u /\!/\!/_\alpha} = 0$ ならば$/\!/ u /\!/_\infty = 0$ となり$u = 0$。これはRが半単純であることを意味する（注意6.3）。さてRは複素共役を取る操作をinvolutionにもつ環である（F_1がこの操作に関して閉じていることは注意1.1による）。Rがこのinvolutionに関して完全対称であることを示すには補題6.4と式（6.10）により

$$(7.2)\quad u \in R \quad \text{なら} \quad \frac{|u|^2}{1+|u|^2} \in R,$$

であることをいえばよい。

$u \in R$とすれば$|u|^2 \in R = F_1 \cap L$，ところが，すぐにわかるように$\dfrac{|u|^2}{1+|u|^2}$は$|u|^2$のnormal contractionである。したがつて$\dfrac{|u|^2}{1+|u|^2} \in F_1$。

一方，$\|u\|_\infty = a$とおくと

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$\frac{|u|^2}{1+|u|^2} = \frac{1}{a^2+1} \sum_{n=0}^{\infty} |u|^2 \left(\frac{a^2-|u|^2}{a^2+1}\right)^n$$ であり，

この級数はX上で一様収束する。ところが部分和はLに属するから一様極限$\frac{|u|^2}{1+|u|^2}$もLに属する。だから $\frac{|u|^2}{1+|u|^2} \in R$。

(ii) Rは線型空間であり

$$u \vee v = \frac{1}{2} \{ u+v+|u-v| \},$$

$$u \wedge v = \frac{1}{2} \{ u+v-|u-v| \}$$

であるから(7.1)を示すためには

(7.3) $u \in R \to |u| \in R$

をいえば充分である。$u \in R$とする。$|u|$はuのnormal contraction だから$|u| \in F_1$。

Lは一様収束と複素共役に関し閉じたringであるからもし$1 \in L$ならば$u \in L$から$|u| \in L$が従がうことはよく知られている。

Lが0以外の定数を含まない場合でも

(7.4) $\bar{L} = \{ u+\lambda \, ; u \in L, \lambda$は複素数$\}$

とおけば$\bar{L}$は束となる。特に$u \in L$ならば$|u| = v+\lambda$, $\exists v \in L$, と書けるが，$|\lambda|^2 = u \cdot \bar{u} - 2R_e(\bar{\lambda} v) - v \cdot \bar{v} \in L$ だから$\lambda = 0$，つまり$|u| \in L$となる。(7.3)がわかった。q.e.d。

補題7.1のおかげでRに前節の諸定理が適用出来る。重複をいとわず定理としてまとめると

定理7.1

Rのcharacter space を X' とおく。

(i) $R \ni 1$ならばX'はcompact, Hausdorff. $R \not\ni 1$ならばX'はlocally compact, non-compact, Hausdorff.

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

Rが可算ケの生成団をもてばX'は第2可算公理を満す。Rがnケの実関数を生成団ににもてばX'はn次元実ユークリッド空間の適当な有界閉集合から原点を除いたものに同相である。

(ii) $C(X')$によつてX'上の複素数値連続関数で無限遠で0になるものの全体を表わす。$C(X')$には一様normを附加して考える。このとき

(7.5) $\Phi\,;\,R\to C(X')$

なる連続な環同型写像が存在しΦは実関数を実関数に移し複素共役を複素共役に移す。$\Phi(R)$はX'の点を分離し，$\forall x\in X'$，$\exists u\in R$，$(\Phi u)(x)\neq 0$。特に$\Phi(R)$は$C(X')$内のdense subringである。

(iii) Rの$(L^{\infty}(X),\ \|\ \|_{\infty})$内でのclosureを$\widetilde{L}$とおく。$\widetilde{L}$は$(L,\ \|\ \|_{\infty})$のclosed subringであるが，同型写像(7.5)は

(7.6) $\Phi\,:\,(\widetilde{L},\ \|\ \|_{\infty})\ \to\ (C(X'),\ \|\ \|_{\infty})$

なる環同型，等距離，ontoの写像に一意的に拡張できる。Φは複素共役を複素共役に移す。

(iv) 環同型(7.5)はlattice isomorphである。すなわちRと共に$\Phi(R)$も束をなし

(7.7) $$\left.\begin{array}{l} u,\ v\in R \\ u,\ v\text{が実}\end{array}\right\}\to \begin{array}{l}\Phi(u\vee v)=\Phi(u)\vee\Phi(v)\\ \Phi(u\wedge v)=\Phi(u)\wedge\Phi(v)\end{array}$$

証　明

(i) 定理6.3(ii)，補題6.2および補題6.5

(ii) 定理6.3(i)，定理6.2(iii)

(iii) (3.5)と(6.8)より$u\in R$に対し

(7.8) $$\|u\|_{\infty}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|\|u^{n}\|\|_{\alpha}}=\sup_{x'\in X'}|(\Phi u)(x')|$$

(ii)によつて$\Phi(R)$は$C(X')$内でdenseだから主張(iii)は明らかなものである。

(iv) 補題7.1(ii)の証明の後半の部分と同じ理由で$\widetilde{L}$は束をなす。(iii)の性質をもつ環同型写

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

像(7.6)がlattice isomorph であることはよく知られている($\widetilde{L}$が1を含まない場合でも(7.4)のように定数を附加した所にΦを広げておけば$u\in\widetilde{L}$に対し$\Phi(|u|)=|\Phi(u)|$が得られる)。

ところが写像(7.5)は(7.6)のRへの制限であり又補題7.1(ii)によりRはlattice であるから$\Phi(R)$もlattice になり(7.7)が成立する。q・e・d

表現定理7.1を使つてえられる重要な結論として

定理7.2

Rは初等関数族である。すなわちRはlattice であるのみならず次の性質をもつ。

$$(7.9)\quad \left.\begin{array}{l} u\in R \\ u\text{が実} \end{array}\right\} \rightarrow u\wedge 1\in R$$

証 明

$1\in R$なら(7.9)は補題7.1(ii)に含まれる。$1\notin R$の場合を考える。uが実で$u\in R=F_1\wedge L=F_1\wedge\widetilde{L}$とする。明らかに$u\wedge 1$は$u$のnormal contraction だから$u\wedge 1\in F_1$。

次に(7.4)のように$\widetilde{L}$に定数を附加した環を考え(7.6)を$\Phi(1)=1$とおくことによりその上に拡張する。拡張したΦはX'上の有界連続関数の全体の上への等距離,環同型となる。もちろんlattice isomorph。

ところで$u\in\widetilde{L}$に対し$u\wedge 1=v+\lambda$, $\exists v\in\widetilde{L}$, λは複素数,と書けるが$\Phi(u)\wedge 1=\Phi(u\wedge 1)=\Phi(v)+\lambda$。故に

$$\lambda=\Phi(u)\wedge 1-\Phi(v)\in C(X')$$

X'はnon-compact であり$C(X')$の元は無限遠で0であるから$\lambda=0$。このようにして$u\wedge 1\in\widetilde{L}$であることがわかつた。 q・e・d

系

$$\left.\begin{array}{l} u\in R \\ u\text{は実} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \forall a\geqq 0\quad u\vee a\in R,\ \Phi(u\vee a)=\Phi(u)\vee a, \\ \qquad\quad u\wedge a\in R,\ \Phi(u\wedge a)=\Phi(u)\wedge a。\end{array}$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

注意7.1

定理7.1(iii)は次のことを意味している。X' はRのcharacter space であるのみならず$\widetilde{L}$のcharacter space でもある。写像(7.6)はring($\widetilde{L}$, $\| \|_{\infty}$)のcharacter space 上への表現にほかならない。$\widetilde{L}$は半単純，完全対称。

ここでもとの局所compact 空間XとRのcharacter space X' の関係を調べよう。

簡単のためにmはeverywhere denseとし，さらに

(7.10) Rの全ての元はX上で有界連続，とする。

定理7.3

mはeverywhere dense であるとする。Rが(7.10)を満すとする。このとき，

(7.11) $q : X \rightarrow X'$

なる連続写像が存在し次の性質をもつ。

(1) 任意の$u \in R$を$x \in X$に対して

(7.12) $u(x) = (\Phi u)(qx)$

但しΦは(7.5)の写像。

(2) $q(X)$はX' のdense subset

証 明

$x \in X$を固定する。$u \in R$に対し複素数$u(x)$を対応さすとこれは明らかにRのcharacter だから(6.1)により$\exists x' \in X'$,

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$\Phi u(x')(=x'(u))=u(x),\quad {}^{\forall}u\in R$$

対応$x\to x'$ をqとおく。これはXからX' の中への一意写像で（7.12）を満す。次に$x_0\in x_0'=q(x_0')$としてqのx_0に於ける連続性を示そう。X'に於けるx_0'の任意の近傍は（6.5）によつて次の形に書けている。

$$N(x_0')=\{x'\in X';\ |\Phi u_k(x')-\Phi u_k(x_0')|<\varepsilon,\ k=1,2,\cdots\cdots,n\}$$

ここに$\varepsilon>0$, u_1, u_2, ……, $u_k\in R$ ，ところが

$$N(x_0')\supset\{x'\in q(X);\ |\Phi u_k(x')-\Phi u_k(x_0')|<\varepsilon,\ k=1,2,\cdots,n\}$$
$$=q(U(x_0))。$$

ただし

$$U(x_0)=\{x\in X;\ |u_k(x)-u_k(x_0)|<\varepsilon,\ k=1,2,\cdots,n\}$$

$u_1,\cdots,u_n$ はx_0で連続だから$U(x_0)$はx_0の近傍である。qの連続性がわかつた。

次に$q(X)$がX' の中でdenseでないとしよう。X' はlocally compact なHausdorff空間であるから完全正規空間であり$u_0\neq 0$, $u_0(x)=0$ on $q(X)$なる$u_0\in C(X')$が存在する。$C(X')$ はX' の無限遠で0になる連続関数を表わす。ところが同型対応（7.6）はRのuniform closure $\widetilde{L}$から$C(X')$上へのonto, isometryであつたから先ず等式（7.12）が$u\in\widetilde{L}$に対しても成立することに注意しつつ

$$\sup_{x'\in X'}|u_0(x')|=\|\Phi^{-1}u_0\|_\infty\sup_{x\in X}|(\Phi^{-1}u_0)(x)|$$
$$=\sup_{x\in X}|u_0(qx)|=0$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

これは$u_0 \neq 0$であることに矛盾する。したがつて$q(X)$はX'の中でdenseでならなければならない。 q・e・d

Rが(7.10)だけでなくさらに条件

(7.13) RはXの点を分離する

$\forall x \in X$ に対し $\exists u \in R$, $u(x) \neq 0$

を満す場合を考えよう。

定理7.4

Xが第2可算公理を満す局所compact, Housdorff空間でmはevrywbere denseであるとする。Rが(7.10)と(7.13)を満すとする。このときX'は次の意味でXの拡張である。

(1) XはX'のdense subsetの上へ一対一連続にimmbedされる。

(2) Xのもとの位相の意味でのBorel subsetはX'のBorel subset(X'の位相に関する)である。特にXはX'の$K-\sigma$集合である。

(3) X'のBorel subsetのXへの制限はXのBorel subset(Xの位相に関する)である。

証 明

(1) 定理7.3と条件(7.13)より明らか

(2), (3) XのX'へのimmbeddingは連続であるからXのcompact subsetはX'のcompact subsetに移る。又X'上の連続関数のXへの制限はXのもとの位相に関して連続である。Xの可算性に注意して(2), (3)を得る。

注意7.2

locally compact space X'が位相空間Xをhomeomorphic dense subsetとして含むときX'をXのlocally compact extensionと呼ぶ。今の場合,Rが(7.10),(7.13)を満す場合でも一般にX'はXのlocally compact extensionにはならない。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

Rが(7.10)を満しているとする。このとき，X' がXのlocally compact extensionになるための必要充分条件はRが(7.13)より強い次の条件を満すことである。

(7.14) $\bar{Y} \not\ni x_0$ を満す任意の$Y \subset X$と任意の$x_0 \in X$に対して $\exists u_0 \in \tilde{L}$,

$$u_0(x_0)=1, \quad u_0(x)=0 \quad \text{on} \quad Y$$

ただし$\tilde{L}$はRのuniform closure

この証明は省略するが〔18〕§43を参照されたい。具体的な個々の場合に(7.14)をcheckするのは容易でなかろう。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

§8. Dirichlet space の正則表現.

前節の結果を基礎にしてDrichlet space の表現を行なう。方針は前節のsubring$R$として特別なものをとりそのcharacter space X' 上に正則表現を構成する。Rとしてさらに特別なものをとることによつて標準表現が得られる(次節)。

Xをlocally compact, Hausdorff, seperable な空間としmをX上のRadon測度(今の場合は局所有限なBorel測度といつてよい)とする。
(F, ε)を$L^2(X)=L^2(X, m)$に関するDirichlet space,
$(F^{(b)}, ||| \ |||_\alpha \ \alpha>0)$をそれから導びかれるDirichlet ring とする。係数体は複素数として一般性を失なわない。実数体から出発する場合でも注意1.3, 注意3.1にしたがつて複素化し必要な議論をした後実数に制限すればよいからである。

さて次の性質をもつR_0から出発する。$\alpha_0>0$は固定.

(8.1) R_0は $F^{(b)}=F\cap L^\infty(X)$ のsubring でcountably generated, Fが1を含む場合はR_0も1を含むとする。

(8.2) R_0は$(F, \varepsilon^{\alpha_0})$内でdense.

(8.3) $R_0\subset L^1(X, m)$

(8.4) R_0は対称, つまり $u\in R_0$ なら$\overline{u}\in R_0$.

このようなR_0に対して

(8.5) $L=R_0$ の$(L^\infty(X), \| \ \|_\infty)$内でのclosure.

(8.6) $R=F\cap L$

を定義する。 Lは$(L^\infty(X), \| \ \|_\infty)$内の対称なclosed subring であるからRに対し前節の結果が適用出来る。今の場合Rの$(L^\infty(X), \| \ \|^\infty)$内でのclosureを$\widetilde{L}$とすると

(8.7) $\widetilde{L}=L$

が成立つ。 定理7.1によればRのcharacter space X' はlocally comp−

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

act, Hausdorff, seperable （Fが1を含めばcompact，含まなければnon-compact)でありLと$C(X')$は環同型，等距離である。

定理8.1 （正則表現）

locally compact, Hausdorff, seperable な空間X上のDirichlet space(X, m, F, ε)が与えられたとする。

(i) (8.1)～(8.4)を満すring R_0は少なくとも一つ存在する。

(ii) このようなR_0を固定し(8.5)，(8.6)によつてR_0からきまるringをRとする。X'をRのcharacter space とする。 このとき
Dirichlet space (X, m, F, ε)のX'上への正則表現$(X', m', F', \varepsilon')$が存在する。

先ず(i)を証明する。(ii)の証明はその後でいくつかの補題によつて行なう。

定理8.1(i)の証明

$C_0(X)$をX上の台がcompact な複素数値連続関数の全体とする。Xが可分であるから可算集合$D_0 \subset C_0(X)$をとり，D_0は$C_0(X)$内で一様normでdenseであるように出来る。

$u \in D_0$なら$\overline{u} \in D_0$としてさしつかえない。 さて(F, ε)に対応する$L^2(X)$-resolventを$\{G_\alpha, \alpha > 0\}$とし$G_{\alpha_0}(D_0)$から生成されるringをR_0とおく$(\alpha_0 > 0)$. Fが1を含むときは1もR_0の生成元の中に入れておく。このR₀は(8.1)～(8.4)を満す。(8.4)は明らか。D_0は$L^2(X)$内でdenseであるから$G_{\alpha_0}(D_0)$は$(F, \varepsilon^{\alpha_0})$内でdenseである(定理1.1.(ii))．$G_{\alpha_0}$のsub-Markov 性により$G_{\alpha_0}(D_0) \subset L^\infty(X)$. (8.1)と(8.2)がわかつた。(8.3)を示そう。

$1 \in F$のときは $1 \in L^2(X)$, つまり$m(X) < +\infty$.

したがつて $R_0 \subset L^\infty(X) \subset L^1(X)$.

$1 \notin F$の場合，R_0の元は$G_{\alpha_0}(D_0)$の元と適当な有界関数との積の形に書けるから$G_{\alpha_0}(D_0) \subset L^1(X)$を示せばよい。 $u \in D_0$とすればG_{α_0}の対称性とsub-Markov 性により

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$\int_X |G_{\alpha_0}u|\,dm \leqq \int_X G_{\alpha_0}|u|\,dm = \sup_{\substack{0\leqq v\leqq 1\\ v\in C_0(X)}} (v, G_{\alpha_0}|u|)_X$$

$$\leqq \frac{1}{\alpha_0}\int_X |u|\,dm < +\infty \quad , \qquad\qquad q.e.d.$$

定理8.1(ii)の証明

(8.1)～(8.4)を満すR_0を一つ固定し(8.5),(8.6)によりLとRをきめる。Rのcharacter spaceをX'とする。

Rから$C(X')$への環同型対応(7.5)をΦで表わす。このΦを通じて先ずX'上の測度m',次に$L^2(X', m')$-resolvent G'_α,そしてG'_αによる$L^2(X')$-Dirichlet space (F', ε')を構成し,最後に$(X', m', F', \varepsilon')$がもとの$X$上のDirichlet spaceと同値でかつ正則であることを証明する。

第一段,X'上の測度m'.

$\Phi(R_0)=R'_0$, $\Phi(R)=R'$ とおく.

定理7.1(iii)と(8.7)によりΦはring$(L, \|\ \|_\infty)$から$C(X')$へのontoな環同型,等距離写像に一意的に拡張され複素共役関数を複素共役関数に移す。注意7.1によればLは半単純,完全対称であり,X'はLのcharacter spaceともみなされる。

X'上の測度m'を作るために定理6.4のRとしてLをとり$\tilde{R}$として$L\cap L^1(X, m)$をとる。Lと元とL^1の元の積はL^1に属すから$L\cap L^1(X, m)$はLのidealである。又条件(8.3)とLの定義(8.5)より

(8.8) $R_0 \subset L\cap L^1(X, m)$,

であり,したがつて又 $L\cap L^1(X, m)$はLの中で一様normに関してdenseである。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$u\in L\cap L^1(X,m)$, $u\geqq 0$を任意に固定し

$$(8.9)\qquad l_u(v)=\int_X u(x)v(x)m(dx)\quad,\quad v\in L$$

とおくとl_uはL上の正の線型汎関数であり又$|l_u(v)|\leqq\|v\|_\infty\int_X u(x)m(dx)$であるからこの汎関数は有界である。 以上のべたことと定理6.4から次の結論がえられる。

X' 上のBorel測度m' であつて，次の性質をもつものが一意的に存在する。

$$(8.10)\begin{cases}\Phi(L^+\cap L^1(X,m))\subset L^1(X',m'),\\ \text{任意の } u\in L^+\cap L^1(X,m) \text{と任意の} v\in L \text{に対して}\\ l_u(v)=\int_{X'}(\Phi u)(x')(\Phi v)(x')m'(dx')\end{cases}$$

ただしL^+はLの元であつて実，非負のものの全体。

<u>補題8.2</u>

式(8.10)によつて定まるX' 上の測度m' について以下が成立する。

(i) m' はRadon測度である。

(ii) $R'=\Phi(R)$は$L^2(X',m')$内のdense subset である。

(iii) 任意のu，$v\in R$に対し$u'=\Phi u$，$v'=\Phi v$として

$$(8.11)\quad \int_X u(x)\overline{v(x)}m(dt)$$
$$=\int_{X'}u'(x')\overline{v'(x')}m'(dx')$$

が 成立する。

証明，(i)，(ii)，

先ず$R'\subset L^2(X',m')$であることに注意する。実際$u\in R$とするとRは対称なringだから$|u|^2=u\cdot\overline{u}\in R$, 又$R\subset F\subset L^2(X,m)$だから$|u|^2\in L^1(X,m)$, したがつて$|u|^2\in L^+\cap L^1(X,m)$．(8.10)の前半より$|\Phi u|^2=\Phi u\cdot\Phi u^*=\Phi(|u|^2)\subset L^1(X',m')$であることがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

次にKをX'の任意のcompact subsetとする。R'は$C(X')$の中で一様normに関してdenseだから，

$$(\text{定理}7.1)\quad {}^{\exists}u'\in R',\quad \chi_K\leqq|u'|\ \mathrm{on}\ X',$$

ただしχ_KはKのindicator functionを表わす。

したがつて

$$m'(K)\leqq\int_{X'}|u'(x')|^2 m'(dx')<+\infty\ 。$$

X'は可分であるからこのことはm'がRadon測度であることを意味している。

R'が$L^2(X',m')$内でdenseであることを示そう。$u\in C_0^+(X')$を任意にとる。R'は$C(X')$内でdenseであるからuにX'上で一様収束する$u_n\in R'$がとれる。さて$0\leqq u\leqq v$なる$v\in R'$を選び$w_n=(0\vee u_n)\wedge v$とおく。R'は初等関数族だから$w_n\in R'$. w_nはX'上でuに一様収束するのみならず不等式$(u-w_n)^2\leqq 2(u^2+v^2)$が成立する。したがつてLebesgueの収束定理により，

$$\int_X(u(x)-w_n(x))^2 m(dx)\xrightarrow[n\to 0]{} 0\ .$$

すなわち，R'は$L^2(X',m')$内でdenseである($C_0(X')$がdenseであるから)。$0\leqq u\leqq v$なる$v\in R'$は次の様にして作ればよい。uの台の上で$\varepsilon>0$に等しい$w\in C_0^+(X')$をとり，$|u+w-v_1|<\varepsilon$なる$v_1\in R'$を選び$v=v_1\vee 0$とおく。

(iii) (8.11)は任意の実関数u，$v\in R$について示せば充分である。Φによつて複素共役は複素共役に移るからである。そのためにはさらに任意の非頁$v\in R$について

$$(8.13)\quad \int_X v(x)^2 m(dx)=\int_{X'} v'(x')^2 m'(dx')$$

を示せばよい。なぜならRは束であり(補題7.1)，Rの任意の実の関数はRに属する非頁関数の差として書け，また，Φは環同型であるからである。

$v\geqq 0$，$v\in R$として(8.13)を示そう。vはLの元であるから実関数列$u_n\in R_0$であつてu_nがX上でvに(mに関し本質的に)一様に収束するものがとれる。

$w_n=(0\vee u_n)\wedge v$とおく。これは次の性質をもつ。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(8.14) $v \geqq w_n \geqq 0$, $w_n \in R \cap L^1(X, m)$

(8.15) w_nは本質的に一様にX上でvに収束する。

(8.16) $w_n' = \Phi(w_n)$はX' 上で一様にvに収束する。

(8.17) $v' \geqq w_n' \geqq 0$.

(8.14)の後半はRが束であることと条件(8.3)より$u_n \in L^1(X, m)$であることにもとずく。(8.15)は明らか。

(8.16)はΦが$(L, \| \|_\infty)$から$C(X')$への対応としてnorm を保存することと(8.15)からしたがう。

(8.17)はΦがlattice isomorph(定理7.1)であることによる。うころで(8.10)と(8.14)とにより

(8.18) $\int_X w_n(x)v(x)m(dx) = \int_{X'} w_n'(x')v'(x')m'(dx$

が成立する。 $v \in L^2(X, m)$であり，この補題の(ii)より$v' \in L^2(X', m')$であるから(8.14)～(8.17)に注意しつつ(8.18)に於て$n \to \infty$とすれば(8.13)をうる。

注意8.1

$F \ni 1$(従がつて$R \ni 1$)の場合はm' の構成は極めて簡単である。この場合$m(X) < +\infty$であり$R \subset L \subset L^\infty \subset L^1(m)$，又$X'$ はcompact であるから$C(X')$上の正線型汎関数

$$l(v') = \int_X v(x)m(dx) \quad , \quad v \in L , v' = \Phi v .$$

によつてm' を定めればよい。 このm' を定めればよい。このm' が(8,10)と補題8.2を満すことは明らかである。

又 $m'(X') = m(X) < +\infty$ である。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

第二段，Φの$L_0^2(X,m)$ 上への拡張

$L_0^2(X,m)$をFの$L^2(X,m)$内でのclosureとする。R_0の性質(8.2)と$R_0\subset R\subset F$であることから$L_0^2(X,m)$はRの$L^2(X,m)$内でのclosureでもあることがわかる。そこでRからR'への環同型写像Φは補題8.2によつて

$$(8.19)\quad \Phi : L_0^2(X,m) \to L^2(X',m')\ ,$$

なるontoの線型写像に一意的に拡張され等式(8.11)が任意のu，$v\in L_0^2(X,m)$について成り立つ。つまり$L_0^2(X,m)$と$L^2(X',m')$は写像(8.19)を通じてunitary 同値となる。Φは複素共役を複素共役に移す。

補題8.3

(i) $L_0^2(X,m)$は束をなし写像(8.19)はlattice isomorphである。さらに任意の実関数$u\in L_0^2(X,m)$と任意の$a\geqq 0$に対し$u\wedge a\in L_0^2(X,m)$であり且つ $\Phi(u\wedge a)=(\Phi u)\wedge a$．

(ii) Φによつて $L_0^2(X,m)\cap L^\infty(X,m)$は$L^2(X',m')\cap L^\infty(X',m')$に環同型，ontoに移る。さらに

$$(8.20)\quad \|u\|_\infty=\|\Phi u\|'_\infty\ ,\quad {}^\forall u\in L_0^2(X,m)\cap L^\infty(X,m)\ ,$$

ただし$\|u\|_\infty$($\|u'\|'_\infty$)は各々u(u')の絶対値のm(m')−essential supremum を表わす。

証明

(i) $u\in L_0^2(X,m)$とする。uにL^2−収束する列$u_n\in R$をとる。 Rは束であるから$|u_n|\in R$であり又$||u_n|-|u||\leqq|u_n-u|$であるから$|u_n|$は$|u|$にL^2−収束する。したがつて$|u|\in L_0^2(X,m)$，$L_0^2(X,m)$は線型空間であるから束となる。

又ΦはL^2−norm を保存しR上でlattice isomorph だから上のu，u_nに対し

$$\Phi|u|=\underset{n\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\,\Phi|u_n|=\underset{n\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\,|\Phi u_u|=|\Phi u|$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

つまりΦはlattice isomorphである。(i)の後半も全く同様にして証明出来る。

(ii) $u\in L_0^2(X,m)$, $\|u\|_\infty=a<+\infty$とする。(i)より

$|\Phi u|=\Phi(|u|)=\Phi(|u|\wedge a)=|\Phi u|\wedge a$であるから$|\Phi u|\leqq a$

つまり$\|\Phi u\|'_\infty\leqq\|u\|_\infty$, 同様にして$\|\Phi u\|'_\infty\geqq\|u\|_\infty$をうるからわかつたことは$\Phi$が$L_0^2(X,m)\cap L^\infty(X,m)$から$L^2(X',m')\cap L^\infty(X',m')$へのonto の写像であること, および等式(8.20)である。

この写像が環同型であることを示そう。$u,v\in L_0^2(X,m)\cap L^\infty(X,m)$とする。$u,v$は実関数としてさしつかえない。 u,vにL^2-収束するような実関数列$u_n,v_n\in R$が存在する。$\|u\|_\infty=a$, $\|v\|_\infty=b$.

$w_n=(u_n\wedge a)\vee(1-a)$とおく。$w_n$は$u$に$L^2$-収束する。そこで,

$$|w_nv_n-uv|\leqq a|v_n-v|+b|w_n-u|$$ より

$w_nv_n\in R$がuvにL^2-収束することがわかり

$uv\in L_0^2(X,m)\cap L^\infty(X,m)$がしたがう。一方$\Phi$は$L^2$-normを保存しlattice isomorph だから上と同じ計算で$\Phi(w_n)\cdot\Phi(v_n)\in R'$が$\Phi(u)\cdot\Phi(v)$に$L^2(X',m')$-収束することがわかる。$\Phi$は$R$上で環同型であつたから

$$\Phi(uv)=\underset{n\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\,\Phi(w_nu_n)=\underset{n\to\infty}{l\cdot i\cdot m}\,\Phi(w_n)\Phi(u_n)$$
$$=\Phi(u)\Phi(v)\qquad q\cdot e\cdot d$$

補題8.4

m'はX'上でeverywhere denseである:任意の空でないopen set$E\subset X'$に対して$m'(E)\neq 0$.

証明

写像(8.19)はRから$R'=\Phi(R)$への写像(7.5)の拡張であつた。定理7.1(iii)によれば$u\in R$に対して$\|u\|_\infty=\sup_{x'\in X'}|\Phi u(x')|$が成り立つ。

(8.20)から次の等式が得られる。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(8.21) $$m'\text{-}\underset{x'\in X'}{\mathrm{ess\text{-}sup}}\,|u'(x')| = \sup_{x'\in X'}|u'(x')|,\ \forall u' \in R'$$

ところがR' は$C(X')$の中でsup-norm に関しdenseであつた(定理7.1(ii)).したがつてもちろんm' −ess-sup-normに関してもdenseであり(8.21)は任意の$u' \in C(X')$について成立する。したがつて$u' \in C(X')$がm' $-a\cdot e$にX'上で0ならば恒等的に0・これは補題8.4を意味する。

第三段.$L^2(X', m')$上のresolvent G_α'

Dirichlet space(F, ε)に対し(1.3)によつてきまる$L^2(X, m)$上のresolventを$\{G_\alpha, \alpha>0\}$となる。

写像(8.19)によつて$L^2(X', m')$上のoperator の系$\{G_\alpha', \alpha>0\}$を次のように定義する。

(8.22) $$G_\alpha' u' = \Phi G_\alpha \Phi^{-1} u',\quad u' \in L^2(X', m').$$

補題8.5

$\{G_\alpha', \alpha>0\}$は$L^2(X', m')$上のresolventである。

証明 Φはunitary な写像であるから

(8.23) $$\|G_\alpha'\|_{L^2(X',m')} = \|G_\alpha\|_{L^2(X,m)} \leqq \frac{1}{\alpha}.$$

つまりG_α'は$L^2(X', m')$上の有界線型作用素である。

G_α'に対しresolventであるための条件である定義1.1の(R・1)〜(R・3)を示そう。

(R・1). Φは実関数を実関数に移す。G_αも同じ性質をもつ。したがつてG_α'も同じ性質をもつ。

$u' \in L^2(X', m')$, $0\leqq u' \leqq 1$とすれば補題8.3より$0\leqq \Phi^{-1}u' \leqq 1$, G_αの性質より$0\leqq \alpha G_\alpha \Phi^{-1}u' \leqq 1$,再び補題8.3より$0\leqq \alpha G_\alpha' u' \leqq 1$,

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(R・2) $(G_\alpha' - G_\beta' + (\alpha-\beta) G_\alpha' G_\beta')u'$

$$= \Phi (G_\alpha - G_\beta + (\alpha-\beta) G_\alpha G_\beta) \Phi^{-1} u' = 0 \,.$$

(R・3) $u', v' \in L^2(X', m')$に対し

$$(u', G_\alpha' v')_{X'} = (u', \Phi G_\alpha \Phi^{-1} v')_{X'} = (\Phi^{-1} u', G_\alpha \Phi^{-1} v')_X$$

$$= (G_\alpha \Phi^{-1} u', \Phi^{-1} u')_X = (\Phi G_\alpha \Phi^{-1} u', v')_{X'}$$

ただし$(\ ,\ )_{X'}$は$L^2(X', m')$の内積を表わす。 q.e.d.

第四段 Dirichlet space(F', ε')

$L^2(X', m')$に関するresolvent G_α'により(1.9)(1.10)を通じて Dirichlet space(F', ε')を作る。改ためて書くと,

(8.23) $$\varepsilon'(u', u') = \lim_{\beta\to+\infty} \beta(u' - \beta G_\beta' u', u')_{X'} \,,$$

$$u' \in L^2(X', m') \,.$$

(8.24) $$F' = \{ u' \in L^2(X', m') : \varepsilon'(u', u') < +\infty \} \,.$$

補題 8.6

写像(8.19)はDirichlet space(F, ε)とDirichlet space (F', ε')の間の1対1, onto, unitary 対応を与える。
すなわち $\Phi(F) = F'$,

(8.25) $$\varepsilon(u, v) = \varepsilon'(\Phi u, \Phi v), \quad u, v \in F \,.$$

証明 注意1.2と$F \subset L_0^2(X, m)$ を考慮する

$$u \in F_1 \rightleftarrows \begin{cases} u \in L_0^2(X, m) \quad かつ \\ \varepsilon(u, u) = \lim_{\beta\to+\infty} \beta(u - \beta G_\beta u, u)_X < +\infty \,. \end{cases}$$

である。ところがΦは$L_0^2(X, m)$から$L^2(X', m')$のonto, unitary写像

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

で $u' \in L^2(X', m')$ に対し

$$\varepsilon'(u', u') = \lim_{\beta\to+\infty} \beta(u' - \beta G'_\beta u', u')_{X'}$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \beta(u' - \beta \Phi G_\beta \Phi^{-1} u', u')_{X'}$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty} \beta(\Phi^{-1}u' - \beta G_\beta \Phi^{-1}u', \Phi^{-1}u')_X = \varepsilon(\Phi^{-1}u', \Phi^{-1}u').$$

これで補題8.6の証明は終つた。

<u>第五段，$(X', m', F', \varepsilon')$ が正則表現であること</u>

補題8.2(i)と補題8.4より m' は局所compact 可分な空間 X' 上のeverywhere denseなRadon測度である。 又 $R' = \Phi(R) \subset C(X')$，補題8.6と $R \subset F$ より $R' \subset F'$，したがつて

(8.26) $R' \subset F' \cap C(X')$

R_0 の性質(8.2)と補題8.6により R' は $(F', \varepsilon', \alpha_0)$ 内でdenseであり，また R' は $C(X')$ 内でdenseであつたからこれで $(X', m', F', \varepsilon')$ が正則なDirichlet space であることがわかつた。

写像(8.19)は補題8.3(ii)と補題8.6により $F^{(b)} = F \cap L^\infty(X, m)$ から $F^{(b)'} = F' \cap L^\infty(X', m')$ へのonto な環同型を与え又essential sup-normと ε−normを保存する。Φ はもともと L^2−normを保存したから

(8.27) $|||u|||_\alpha = |||\Phi|||'_\alpha$ ， ${}^\forall u \in F^{(b)}$ ，$\forall \alpha > 0$ ．

が成り立つ。 ここに $|||u|||_\alpha = \sqrt{\varepsilon(u, u) + \alpha(u, u)_X} + \|u\|_\infty$ であり $|||\Phi u|||'_\alpha$ も同様に定義されるものである。

このようにしてDirichlet rings $(F^{(b)}, |||\ |||_\alpha)$ と $(F^{(b)'}, |||\ |||'_\alpha)$ の間に(8.27)を満すontoの環同型があるわけだから定義5.4の意味で2つのDirichlet space は同値であり定義5.5の意味で後者は前者のregular な表現である。

以上で定理8.1の証明を終る。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

定義8.1

定理8.1の証明の第一段～第四段の方法で定まる正則表現(X' , m' , F', ε')を ring R_0 による正則表現という。

この節の最後に R_0 が特別な性質をもつ場合の正則表現について触れておこう。特別な性質とは

$$
\begin{cases}
(8.28) \quad R_0 \text{ は } F \cap C_b(X) \text{ の subring} \\
(8.29) \quad R_0 \text{ は} X \text{の点を分離し，さらに} \forall x \in X, \ \exists u \in R_0, \\
\qquad\qquad u(x) \neq 0 .
\end{cases}
$$

ただし $C_b(X)$ は X 上の有界連続関数の全体．

定理8.2 (正則表現と基礎空間の拡張)

X は locally compact, Hausdorff, Separable, m は everywhere dense とし Dirichlet space (X, m, F, ε) が与えられたとする。R_0 が (8.1)～(8.4) のみならず (8.28), (8.29) を満すとする。このとき R_0 による正則表現 (X' , m' , F' , ε') について以下が成立する。

(i) X は X' の dense subset 上に連続に埋蔵され，X の Borel subset は X' の Borel subset になり，X' の Borel subset の X への制限は X の (もとの topology での) Borel subset となる。

(ii) X' の任意の Borel subset A に対し

$$m'(A) = m(A \cap X) \quad .$$

(iii) $F' = \{ u' : u' \text{ は} X' \text{上の関数で} u'|_X \in F \}$,

$$\varepsilon'(u', v') = \varepsilon(u, v) \quad , \quad \forall u', v' \in F' ,$$

ただし u, v は各々 u', v' の X への制限をあらわす。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

証明．

(i) X' は R (R_0 から (8.5) , (8.6) によつて定まる ring) の character space である。 又 R_0 が (8.2 8) (8.2 9) を満すことと R が (8.2 8) (8.2 9) を満すことは同値であるから，定理 7.4 より(i)がしたがう。ここで次のことに注意しておく。

X から X' への immbedding を q とすると (7.1 2) の関係

$u(x)=(\Phi u)(qx)$, $\forall x \in X$, $\forall u \in R$ によつて

q は規定されている。 しかるに $R \subset C_b(X)$ であるから R の一様 closure L も $C_b(X)$ に含まれさらに Φ は一様 norm を保存するから (7.1 2) は任意の $u \in L$ について成立する。

$x \in X$ と $qx \in X'$ を同一視すれば

(8.3 0) $\quad u'|_X = \Phi^{-1} u' \quad , \quad \forall u' \in C(X')$

がえられる。 ただし $u'|_X$ は u' の X 上への制限をあらわす。

(ii) X' の Borel set A に対して $\widetilde{m}(A)=m(A \cap X)$ とおくと (8.3 0) によりこの $\widetilde{m}$ は関係 (8.1 0) をみたす。

したがつて

$$\widetilde{m} = m' \quad .$$

(iii) $L^2_0(X, m)$ (実は今の場合は $L^2(X, m)$ に等しい) から $L^2(X', m')$ への unitary map (8.1 9) は次の様な trivial な写像になる。

$u \in L^2(X, m)$ に対し Φu は u の X' への任意の拡張。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$u' \in L^2(X', m')$ に対し $\Phi^{-1}u' = u'|_X$.

したがつて (F', ε') の作り方をみれば(iii)は明らかである。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

§9 Dirchlet spacd の標準表現。

$(X,\ m,\ F,\ \varepsilon)$ は前節の通りとする。前節の R_0 として特別のものをとり標準表現を行なうためにいくつかの補題を準備する。

補題 9.1 （L^2 —resoluent の性質）

$(F,\ \varepsilon)$ に対応する $L^2(X,\ m)$ — resoluent を $\{G_\alpha,\ \alpha>0\}$ とする。

(i) 任意の $\alpha>0$ に対し G_α は ring $F^{(b)}=F\cap L^\infty(X,\ m)$ を $F^{(b)}$ の中に移す。又 $u\in F^{(b)}$ に対し

$$(9.1)\quad \|G_\alpha u\|_\infty \leqq \frac{1}{\alpha}\|u\|_\infty$$

(ii) 任意の $\alpha>0$ に対し G_α は ring $L^1(X,\ m)\cap L^\infty(X,\ m)$ を $L^1\cap L^\infty$ の中に移す。又 $u\in L^1\cap L^\infty$ に対し

$$(9.2)\quad \int|G_\alpha u(x)|m(dx) \leqq \frac{1}{\alpha}\int_X|u(x)|m(dx)$$

証 明。

(i) G_α は (1.3) により L^2 を F に移す。したがつて，もちろん F を F に移す。あとは G_α の sub-Markov 性 (R.1) に注意して(i)をうる。

(ii) $L^1\cap L^\infty\subset L^2$ であるから G_α は $L^1\cap L^\infty$ 上で well-defined である。$u\in L^1\cap L^\infty$ とする。$G_\alpha u\in L^\infty$ は明らか。又 G_α の対称性と sub-Markov 性より

$$\int_X|G_\alpha u(x)|m(dx)\leqq\int_X G_\alpha|u|(x)m(dx)=\sup_{\substack{0\leqq f\leqq 1\\ f\in C_0(X)}}(f,\ G_\alpha|u|)_X$$

$$\leqq\frac{1}{\alpha}\int_X|u(x)|m(dx)<+\infty. \qquad \text{q.e.d.}$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

さて，$F^{(b)}$ の($L^{\infty}(X, m)$, $\| \ \|_{\infty}$)内での closure を$L_0^{\infty}(X, m)$ とおく，補題9.1(i)より，G_{α} は

(9.3) $\overline{G_{\alpha}}$; $L_0^{\infty}(X, m) \to L_0^{\infty}(X, m)$

なる norm $\leqq \dfrac{1}{\alpha}$ の線型写像に一意的に拡張され $\{\overline{G_{\alpha}}, \alpha > 0\}$は$L_0^{\infty}(X, m)$ 上の sub—Markov resolventになる。$\overline{G_{\alpha}}$ の sub—Markov 性の証明を与えておこう。$u \in L_0^{\infty}(X, m)$, $0 \leqq u \leqq 1$, m—a.e, $u_n \in F^{(b)}$, u_n は実，$\| u_n - u \|_{\infty} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ としよう。$F^{(b)}$ は初等関数族であつたから(定理7.2)，$w_n = (0 \vee u_n) \wedge 1 \in F^{(b)}$，又，明らかに $\| w_n - u \|_{\infty} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

G_{α} の$F^{(b)}$ 上での sub—Markov 性により $0 \leqq \alpha G_{\alpha} w_n \leqq 1$, m—a.e.

(9.1)により $\| \alpha G_{\alpha} w_n - \alpha \overline{G_{\alpha}} u \|_{\infty} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

したがつて $0 \leqq \alpha \overline{G_{\alpha}} u \leqq 1$, m—a.e.

G_{α} は実関数を実関数に移すから$\overline{G_{\alpha}}$ も同じ性質をもつ。

補題9.2 (Knight ring)

S_0 を$F^{(b)}$ のある非頁の元から成る可算集合とする。このとき$F^{(b)}$ の subring Sで次の条件を満すもつが存在する。

(9.4) $S \supset S_0$, S は countably generated,

Sの元の複素共役はSに属し，Sの実元はSの非頁元の差として表わされる。

(9.5) Sの$L^{\infty}(X, m)$内での closure を$\overline{S}$とすると$\overline{S} \subset L_0^{\infty}(X, m)$ であるが，(9.3)の resolvent $\{\overline{G_{\alpha}}, \alpha > 0\}$ は$\overline{S}$を不変する。つまり $\overline{G_{\alpha}}(\overline{S}) \subset \overline{S}$, $^{\forall}\alpha > 0$.

さらに$S_0 \subset L^1(X, m)$ ならば上のSとして，さらに次の性質をもつものがとれる。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(9.6) $S \subset L^1(X, m)$,

証 明. SとしてF.Knight([37] Lemma1)の構成したring(これをKnight ringと呼ぼう)をとればよい。与えられたS_0から出発し，$S_1 S_2, \cdots\cdots, S_n, \cdots\cdots$をinductiveに次の様に定義していく。正の有理数の全体を$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots\}$とする。$S_n$まで定義されたとして

(9.7) $S_{n+1} = \{S_n, G_{\alpha_1}(S_n), \cdots\cdots, G_{\alpha_n}(S_n), G_{\alpha_{n+1}}(S_n)\}$ から

から生成されるring,

とおく，ここでringとは3節からそうしているように積だけでなく，複素数倍と和に関しても閉じた系のことを指している。

(9.8) $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$

としよう。これがKnight ringである。明らかに$S_n \subset S_{n+1}$だからSはS_0を含む関数環であり(9.4)の性質をもつ，$S_0 \subset F^{(b)}$であること，補題9.1(i)および$F^{(b)}$が環であることから，inductionによつて$S_n \subset F^{(b)}$，$n = 1, 2, \cdots\cdots$，をうる。したがつて $S \subset F^{(b)}$.

さらに$S_0 \subset L^1(X, m)$ならば$S_0 \subset L^1 \cap L^\infty$だから補題9.1(ii)より同様にして$S \subset L^1(X, m)$をうる。

(9.5)を示そう。まず

(9.9) $G_{\alpha_n}(S) \subset S$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$

がわかる。実際$u \in S$とすると$\exists m \geqq n$ $u \in S_m$. (9.7)より$G_{\alpha_n} u \in S_{m+1}$. 故に$G_{\alpha_n} u \in S$. さて(9.3)と(9.9)より$\overline{G_{\alpha_n}}(\overline{S}) \subset \overline{S}$であるが，任意の$\alpha > 0$, $u \in \overline{S}$に対してresolvent方程式

$$\overline{G_\alpha} u - \overline{G_{\alpha_n}} u + (\alpha - \alpha_n) \overline{G_\alpha} \overline{G_{\alpha n}} u = 0$$

が成立するから

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$\|\overline{G_\alpha}u-\overline{G_{\alpha_n}}u\|_\infty \leqq |\alpha-\alpha_n|\ \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha_n}\ \|u\|_\infty \xrightarrow[\alpha_n\to\alpha]{} 0 ,$$

を得る。つまり$\overline{G_\alpha}u\in\overline{S}$である。 q.e.d.

さて，上の補題のS_0から出発し前節のring R_0を作る。そのR_0を基礎とした正則表現（定理8.1）が，標準表現にもなつていることを示すのがこの節の目的である。

S_0として次の性質をもつものをとる。

（9.10） S_0は$F^{(b)}$のある非負元からなる可算集合でFが1を含めばS_0も1を含む。

（9.11） S_0の線型化（S_0を含む最小のlinear space）は$(F,\ \varepsilon^{\alpha_0})$内でdense（$\alpha_0>0$は固定）。

（9.12） $\forall u\in S_0,\qquad \alpha G_{\alpha+1}u\leqq u$ m.−a.e.

（9.13） $S_0\subset L^1(X,\ m)$.

この4つの性質をもつS_0が与えられたとして補題9.2の条件（9.4），（9.5）および（9.6）を満すring $S\ (\subset F^{(b)})$を作る。例えばS_0から生成されるKnight ringをとればよい。その上で

（9.14） $R_0=S_0\cup G_1(S)$から生成されるring，

とおく，

定理9.1 （標準表現）

locally compact，Hausdorff，separableな空間X上のDirichlet space$(X,\ m,\ F,\ \varepsilon)$が与えられたとする。

(i) （9.10）～（9.13）を満す$S_0\ (\subset F^{(b)})$が少なくとも一つ存在する。

(ii) このようなS_0に対して（9.4）～（9.6）を満すringを$S\ (\subset F^{(b)})$とする。このとき（9.14）によつて定義されるring R_0は（8.1）～（8.4）を満す。

(iii) 上のようにして作られるR_0を固定し，これから定理8.1(ii)によつてきまる正則表現を$(X',\ m',\ F',\ \varepsilon')$とすればこれはCanonical Dirichlet spaceとなる。つまり$(X',\ m',\ F',\ \varepsilon')$は$(X,\ m,\ F,\ \varepsilon)$の標準表現である。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

定理9.1(i)の証明

$D_0{}^+$ を$C_0{}^+(X)$ 内で一様normに関しdenseな可算集合とし

$$(9.15)\quad \begin{cases} S_0 = G_1(\mathbb{D}_0^+)\cup\{1\}, & F\ni 1\text{のとき,}\\ S_0 = G_1(\mathbb{D}_0^+), & F\not\ni 1\text{のとき,}\end{cases}$$

とおく。$\mathbb{D}_0^+$の線型化は$L^2(X,\ m)$内でdenseであるからS_0の線型化はF内でnorm $\varepsilon(u,\ u)+\alpha_0(u,\ u)_X$に関しdenseである(定理1.1(ii))。(9.15)のS_0が(9.10)と(9.11)を満すことがわかつた。これはまた(9.12)，(9.13)を満す。$u\in S_0$とすればresolvent方程式より $u-\alpha G_{\alpha+1}u=G_{\alpha+1}v\geqq 0$，ただし $v\in\mathbb{D}_0^+$．$1\in F$のときは $1-\alpha G_{\alpha+1}1\geqq 1-(\alpha+1)G_{\alpha+1}1\geqq 0$．$\mathbb{D}_0^+\subset L^1(X,\ m)\cap L^\infty(X,\ m)$だから補題9.1より$G_1(\mathbb{D}_0^+)\subset L^1(X,\ m)$．$1\in F$のときは$m(X)<+\infty$だから，もちろん$1\in L^1(X,\ m)$． q.e.d.

定理9.1(ii)の証明

$S_0\subset F^{(b)}$，$S\subset F^{(b)}$，したがつて補題9.1より$S_0\cup G_1(S)\subset F^{(b)}$，$F^{(b)}$はringであつたから$R_0\subset F^{(b)}$．又$F\ni 1$なら$1\in S_0\subset R_0$．このようにして，$R_0$が(8.1)を満すことがわかる。$R_0$は$S_0$の線型化を含むから(9.11)より(8.2)がしたがう。(9.5)，(9.13)と補題9.1より$S_0\cup G_1(S)\subset L^1(X,\ m)\cap L^\infty(X,\ m)$．$L^1\cap L^\infty$はringであるから，$R_0\subset L^1(X,\ m)$，つまり(8.3)がえられる。条件(9.4)に注意すればR_0の作り方からこれが(8.4)を満すことは明らか。

定理9.1(iii)の証明

S_0，S，R_0を固定し，R_0から定理8.1(ii)によつてきまる正則表現を$(X',\ m',\ F',\ \varepsilon')$とする。

これがcanonical Dirichlet spaceであることを示せばよい。そのためには定義5.3の(ii)の条件を確かめればよい。R_0の$L^\infty(X,\ m)$内でのclosureをL，$R=F\cap L$とおく，X'はRのcharacter spaceであり，Rから$C(X')$の中への環同型Φが存在し，$\Phi(R)$は$C(X')$内でdenseであつた。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

Φは次の二種類の拡張をもつていた((8.7)と定理7.1(iii), 定理8.1(ii)の証明の第二段)。

(9.16) Φ_1 ; $L \xrightarrow[\text{onto, 環同型, 等距離}]{} C(X')$,

(9.17) Φ_2 ; $L_0^2(X, m) \xrightarrow[\text{onto, unitary}]{} L^2(X', m')$

ただし, $L_0^2(X, m)$ はFの$L^2(X, m)$内でのclosure.さらに$(F, \mathcal{E})$に対応するresolvent $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$と$(F', \mathcal{E}')$に対応するresolvent $\{G'_\alpha, \alpha > 0\}$は次の関係で結ばれていた((8.22))。

(9.19) $G'_\alpha u' = \Phi_2 G_\alpha \Phi_2^{-1} u'$, $^\forall u' \in L^2(X', m')$.

以上のことを念頭においてΦ_1 により$C(X')$上のRay resolvent $\{\overline{G'_\alpha}, \alpha > 0\}$ を作りそれが定義5.3(ii)の条件を満足することを証明しよう。

$\{\overline{G_\alpha}, \alpha > 0\}$を$\{G_\alpha, \alpha > 0\}$の$F^{(b)}$ から$L_0^\infty(X, m)$上への拡張(9.3)とする。 先ず

(9.20) $\overline{G_\alpha}(L) \subset L$, $^\forall \alpha > 0$.

実際S_0 およびSの$L^\infty(X, m)$内でのclosure を各々$\overline{S_0}$, $\overline{S}$とすると(9.5)により$\overline{G_\alpha}$ は$\overline{S}$を$\overline{S}$に移すresolventであるから, $\overline{G_1}(\overline{S}) = \overline{G_\alpha}(\overline{S})$, $^\forall \alpha > 0$. R_0 の定義(9.14)よりその$L^\infty(X, m)$内でのclosure Lは

(9.21) $L = \overline{S_0}$と$\overline{G_1}(\overline{S})$から生成される$L^\infty(X, m)$内のclosed subring,

とも考えられる。したがつて(9.4)と(9.5)から$L \subset \overline{S}$, その結果$\overline{G_\alpha}(L) \subset \overline{G_\alpha}(\overline{S}) = \overline{G_1}(\overline{S})$.再たび(9.21)により$\overline{G_\alpha}(L) \subset L$.

そこで(9.16)と(9.20)から次の定義が可能となる。

(9.22) $\overline{G'_\alpha} u' = \Phi_1 \overline{G_\alpha} \Phi_1^{-1} u'$, $^\forall u' \in C(X')$;

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

次の補題により定理9.1(iii)の証明が完結する。

補題9.3 ($C(X')$ 上のRay resolvent)

(i) (9.22)によつて定義される $\{\overline{G'_\alpha}, \alpha>0\}$ は $C(X')$ を $C(X')$ に移す。sub-Markov resolventである。

(ii) $u'\in L^2(X', m')\cap C(X')$ に対し $\overline{G'_\alpha}u'\in F'$ であり

(9.23) $\varepsilon'^{\alpha}(\overline{G'_\alpha}u', v')=(u', v')_{X'}, \quad {}^\forall v'\in F'$.

(iii) $F\cap C^+(X')$ の可算部分集合 C'_1 であつて, $\overline{G'_\alpha}$ に対し定義5.2(ii)の条件(a)~(b)を満すものが存在する。したがつて，とくに $\{\overline{G'_\alpha}, \alpha>0\}$ は (X') 上のRay resolventである。

証明 (i) $\overline{G'_\alpha}(C(X')\subset C(X')$ であることは(9.16)(9.20)および(9.22)より明らか,

Φ_1 は実関数を実関数に移し(定理8.1(ii), $\overline{G_\alpha}$ も同じ性質をもつ, したがつて,(9.22)より $\overline{G'_\alpha}$ も同じ性質をもつ, 定理7.2の証明よりわかるように L は初等関数族であり Φ_1 は L 上で定理7.2の系の性質をもつ, したがつて, $u'\in C(X')$ が $0\leqq u'\leqq 1$ なら $0\leqq \Phi^{-1}u'\leqq 1$, $\overline{G_\alpha}$ の $L_0^\infty(X, m)$ 上のsub-Markov性(補題9.1の直後)により, $0\leqq\alpha\overline{G_\alpha}\Phi^{-1}u'\leqq 1$, 再び Φ の性質により $0\leqq\alpha\overline{G'_\alpha}u'\leqq 1$. $\overline{G_\alpha}$ は L 上でresolvent方程式を満す。したがつて, G'_α も $C(X')$ 上でこれを満す。

(ii) $\{G'_\alpha, \alpha>0\}$ は (F', ε') に対応する $L^2(X', m')$ — resolvent として(9.23)を満しているわけだから, (ii)を示すためには

(9.24) $\overline{G'_\alpha}u'=G'_\alpha u'$, m'-a.e, ${}^\forall u'\in L^2(X', m')\cap C(X')$,

を確かめればよい。ところですでに注意しておいたように $\Phi_1|_R=\Phi_2|_R=\Phi$ であり R 上では G_α と $\overline{G_\alpha}$ は一致するから(9.19)と(9.22)より

(9.25) $\overline{G'_\alpha}u'=G'_\alpha u', \quad {}^\forall u'\in R' \;(=\Phi(R),)$

が成り立つ, いま $u'\in L^2(X', m')\cap C(X')$ とする。R' は $C(X')$ 内でdense であるから ${}^\exists u'_n\in R'$, $\sup_{x\in X'}|u'_n(x')-u'(x')|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $\overline{G'_\alpha}$ の $C(X')$ 上でのsub-Markov性により $\sup_{x'\in X'}|\overline{G'_\alpha}u'_n(x')-\overline{G'_\alpha}u'(x')|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

一方，$u'_n - u' \in L^2(X', m') \cap C(X')$で，$G'_\alpha$は$L^2(X', m')$上でsub-Markov性をもつから

$$m' - \underset{x' \in X'}{\text{ess-sup}} \left| G'_\alpha u'_n(x') - G'_\alpha u'(x') \right| \leqq \frac{1}{\alpha} \sup_{x' \in X'} \left| u'_n(x') - u'(x') \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

(9.25)より$\overline{G'_\alpha}\, u'_n(x') = G'_\alpha\, u'_n(x')$，${}^{V}x' \in X'$，であるから上の2つの極限式により(9.24)が従がう。

(iii) ring R_0 の生成因は$S_0 \cup G_1(S)$である。Sは条件(9.4)によりcountably generatedであるからSの可算部分集合$\widetilde{S}$を適当にとつて$\widetilde{S}$の線型化がちようどSに一致するようにできる。(9.4)の後半の条件によつて$\widetilde{S}$の元は全々非負関数から成るとしてよい。

そこで

$$(9.26) \quad C'_1 = \Phi(S_0 \cup G_1(\widetilde{S}))$$

とおき，このC'_1が補題9.3(iii)の性質をもつことを示す。

先ず

$$(9.27) \quad S_0 \cup G_1(\widetilde{S}) \subset R_0 \subset R \subset L$$

なることに注意する。(8.26)より

$$(9.28) \quad C'_1 \subset R' \subset F' \cap C(X') .$$

又，Φは定理7.2よりR上でlattice isomorphであり，S_0も$G_1(\widetilde{S})$も非負元から成るからC'_1の元もX'上で非負である。

次に

$$(9.29) \quad \alpha \overline{G}'_{\alpha+1} u' \leqq u' \qquad {}^{V}u' \in C'_1$$

を示そう。L上のΦ_1((9.16))と$\overline{G}_\alpha$((9.3))は包含関係(9.27)により

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$S_0 \cup G_1(\widetilde{S})$上の$\Phi$および$G_\alpha$に各々等しいことに注意しておく。

$u' \in C'_1$とする。$u' = \Phi_1 u$, $u \in S_0 \cup G_1(\widetilde{S})$とかわる。$u \in S_0$のときは$S_0$の条件(9.12)より，又$u \in G_1(\widetilde{S})$のときはresolvent方程式と$\widetilde{S}$の元の非負性により

(9.30) $\alpha \overline{G_{\alpha+1}}\, u \leqq u$, m-a.e, $u \in S_0 \cup G_1(\widetilde{S})$,

が成り立つ。しかるに(9.20)により$\overline{G_{\alpha+1}}\, u$も$L$に際し，又$\Phi_1$は$L$から$C(X')$上へのlattice isomorphであるから $\alpha \Phi_1 \overline{G_{\alpha+1}}\, u \leqq \Phi_1 u$. この式は$\overline{G_{\alpha+1}}'$の定義(9.22)によれば，不等式(9.29)にほかならない。

最後に

(9.31) C'_1 はX'の2点を分離する。

(9.32) $\forall x' \in X'$, $\exists u' \in C'_1$, $u'(x') \neq 0$.

の2つを示そう。x_1', $x_2' \in X'$, $u'(x_1') = u'(x_2')$ $u' \in C'_1$とする。$S_0 \cup G_1(\widetilde{S})$が$R_0$の生成団になっていることと$\Phi$がring isomorphであることおよび$C_1'$の定義(9.26)より$u'(x'_1) = u'(x'_2)$, $\forall u' \in \Phi_1(R_0)$. R_0は$(L, \|\ \|_\infty)$内でdense, Φ_1はisometry, $\Phi_1(L) = C(X')$だから上の等式は，全ての$u' \in C(X')$について成立つ。従って$x'_1 = x'_2$. これで(9.31)の証明が出来た。(9.32)の証明も同様である。 q.e.d.

以上で定理9.1の証明を終る。

この節の最後にもとのL^2 −resolventが特別の性質をもつ場合，標準表現が基礎空間の拡張として得られることを示そう。これは前節の定理8.2に相当する。

(X, m, F, ε)は定理9.1の通りとし，特にmはいたる所denseであると仮定する。X上の有界連続関数の全体を$C_b(X)$とし，次の2条件を仮定する。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(9.3.3.) $C_b(X)$ を $C_b(X)$ に移す sub-Markov resolvent (operator) $\{G_\alpha, \alpha>0\}$ が存在して $\forall u\in L^2(X, m)\cap C_b(X)$ に対し $G_\alpha u\in F$ で $\varepsilon^\alpha(G_\alpha u, v)=(u, v)_X$, $\forall v\in F$.

(9.34) $\forall u\in C_b(X)$, $\forall x\in X$,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\alpha G_\alpha u(x)=u(x).$$

(F, ε) に対応する $L^2(X, m)$ − resolvent の $L^2\cap C_b$ への制限が滑らかな versionをもち，かつそのversion は C_b まで拡張されているというのが仮定 (9.33) の意味するところである。

さて，(9.15) によつて関数族 S_0 を定義する。定理9.1(i)の証明によつて，この S_0 が (9.10)〜(9.13) を満すことはわかつている。さらに仮定 (9.33) と (9.34) より S_0 が (9.12) より強い，次の性質をもつことがわかる。

(9.35) Ray の条件

S_0 は $C_b^+(X)$ の可算部分集合であり，X の点を分離し，又 $\forall x\in X$, $\exists u\in S_0$, $u(x)\neq 0$, さらに $\alpha G_{\alpha+1}u(x)\leq u(x)$, $\forall x\in X$, $\forall u\in S_0$.

次に (9.10), (9.11), (9.13) および上の (9.35) の条件を満す関数族 S_0 から出発し，これから生成される Knight ring を S とする。

補題9.2より S は (9.4)〜(9.6) を満しているが，作り方から明らかに ((9.33) を考慮して)

(9.36) $S\subset F\cap C_b(X)$.

その上で (9.14) によつて ring R_0 をきめれば再び仮定 (9.33) からわかるように

(9.37) $S_0\subset R_0\subset F\cap C_b(X)$,

(9.35) と (9.37) から R_0 が前節の条件 (8.28) と (8.29) を満すことがわ

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

かる。以上をまとめて,

補題9.4

仮定(9.33),(9.34)が満されているとする。このとき

(i) (9.10),(9.11),(9.13)および(9.35)を満す関数族S_0が存在する。

(ii) (i)の条件を満すS_0に対し(9.4)〜(9.6)を満すring Sが$F\cap C_b(X)$の中にとれる。

(iii) (i),(ii)の性質をもつS_0, Sから(9.14)によつてring R_0をきめると,R_0は(8.28)と(8.29)を満す。

この補題と定理8.2および定理9.1により次の定理をうる。

定理9.2 (標準表現と基礎空間の拡張)

Xは可分な局所Compact, Hausdorff空間とし,mはX上いたる所denseなRadon測度とする。

Dirichlet space (X, m, F, ε)に対して仮定(9.33),(9.34)が満されているとする。このとき標準表現$(X', m', F', \varepsilon')$として以下の性質をもつものがとれる。

(i) $(X', m', F', \varepsilon')$は定理8.2の性質をもつ。つまり$X$は$X'$のdense subsetの上に連続に埋蔵され,$X$のBorel setは$X'$のBorel setになり,$X'$のBorel setの$X$への制限は$X$の(もとのtopologyでの)Borel setとなる。m'はmのX'上へのzero-extensionである。F'の元のXへの制限の全体がFに等しく,$\varepsilon'(u', v')=\varepsilon(u, v)$, $\forall u', v'\in F'$.ただし,u, vはu', v'のXへの制限をあらわす。

(ii) $(X', m', F', \varepsilon')$に対応する$X'$上のRay resolvent $\{\overline{G_\alpha}', \alpha>0\}$は仮定(9.33)におけるresolvent $\{G_\alpha, \alpha>0\}$の拡張である。つまり

$$(9.39)\quad \overline{G_\alpha}'u'(x)=G_\alpha u(x),\quad \forall u'\in C(X'),\ \forall x\in X.$$

ただし,uはu'のXへの制限をあらわす。

証 明。補題9.4の仕方でR_0を定め,R_0による正則表現を$(X', m', F', \varepsilon')$とすると,これは標準表現となる(定理9.1)のみならず,定理8.1の性質をもつ,したがつて(ii)のみを示せばよい。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

（8.30）の関係 $u'|_{X}=\Phi^{-1}u'$, $u'\in C(X')$, に注意する。今 $u'\in C(X')$ $u=\Phi^{-1}u'$とおく。$u\in L$である。（9.33）のG_αと（9.3）の$\overline{G_\alpha}$はL上で一致している。それらが，R上で一致しているからである。$\overline{G'_\alpha}$の定義（9.22）と（8.30）により

$$\overline{G'_\alpha}u'|_{X}=\Phi^{-1}\overline{G'_\alpha}u'=\Phi^{-1}\Phi\overline{G_\alpha}\Phi^{-1}u'=\overline{G_\alpha}u=\overline{G_\alpha}u,$$

q.e.d,

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

3章 regular Dirichlet spaceに関する potential論

§10 kernel free potential

不必要な繁雑さを避けるために，この節で扱かう関数は全て実関数とし，係数は実数とする。このようにしても何ら一般性を失なわない。複素Dirichlet spoce Fは実Dirichlet space F^rによつて$F=F^r+iF^r$とかけるが（注意1.3），Fが正則（標準的）であることとF^rが正則（標準的）であることとは同値であるからである。

(X, m, F, ε)を(実)regular Dirichlet space とする。

（定義5.1）．$C(X)$でもつてX上の実数値連続関数のうち無限遠で0となるものの全体を表わす。XがCompact のときは$C(X)$は単にX上の連続関数の全体である。

定理10.1

$F\cap C(X)$上の線型汎関数lがX上のRadon測度μによつて

$$(10.1)\qquad l(u)=\int_X u(x)\mu(dx),\qquad \forall u\in F\cap C(X)$$

と表わされるための必要充分条件はlが次の2条件を満たすことである。

$$\begin{cases}(l.1)\quad \text{正性}\,;\, u\in F\cap C(X)\text{が非負なら}\, l(u)\geqq 0, \\ (l.2)\quad \text{連続性}\,;\, u_n\in F\cap C(X)\text{ が非増加で0に収束するならば} \\ \qquad\qquad l(u_n)\downarrow 0,\ n\to\infty .\end{cases}$$

特にXがCompactなら$(l.1)$だけで充分である。

証明 定理7.2より$F\cap C(X)$は初等関数族である。したがつてDaniell 積分に関する一般論［26］より，$F\cap C$上の線型汎関数が$(l.1)$，$(l.2)$を満すこととそれが$F\cap C$に関するBaire可測な測度μによつて（10.1）の形に表わされることとは同値である。一方正則なDirichlet space の定義より$F\cap C$はC内でdense．したがつて$F\cap C$から生成されるBaire関数族はCから生成されるBaire関数族つまり（Xは可分だから）X上のBorel可測関数の全体と一致する。故に定理10.1はμをBorel測度として成り立つ，さらにμはRodon測度（つまり局所有限）としてよい。任意のCompact set $K\subset X$に対しK上で1より大であるような非負な

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$u\in F\cap C$が存在し$l(u)<\infty$であるからである。

Xがcompact の場合を考えよう。

(10.2) Xがcompact$\Longrightarrow 1\in F$

に注意する。実際この場合，$^{\exists}u\in F\cap C(X)$，$u\geqq 1$ on Xであるが，$F\cap C$は初等関数族だから $1=u\wedge 1\in F\cap C\subset F$.

今，$F\cap C$上の線型汎関数lが(l.1)を満すとする。$u_n\in F\cap C$，$u_n\downarrow 0$ とする。u_n はX上で0に一様収束する。したがつて

$$l(u_n)\leqq l(1)\cdot\sup_{x\in X}|u_n(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\quad \text{つまり}$$

Xがcompact のときは(l.1)から自動的に(l.2)がしたがう。

注意10.1 一般に(10.1)を満すRadon測度はlから一意的に定まる。これは$F\cap C$から生成されるBaire関数族がBorel可測関数族と一致することから従がう。([38；定理1])。

定義10.1 (kernel-free potential)

(I) $\mu\in m_0^+$ とはμが次の条件を満すこととする。

(1) μはX上の非負Borel測度で $F\cap C\subset L^1(X,\mu)$，(従がつて$\mu$はRadon測度である。前定理の証明参照)。

(2) $^{\forall}\alpha>0$, $^{\exists}U_\mu^\alpha\in F$

(10.3) $\varepsilon^\alpha(U_\mu^\alpha, v)=\int_X v(x)\mu(dx)$, $^{\forall}v\in F\cap C$

(II) $\mu\in m_0^+$に対し(10.3)できまるU_μ^αをα—pure‥potentiol と呼ぶ。

$m_0=\{\mu;\mu=\mu_1-\mu_2,\ \mu_1,\ \mu_2\in m_0^+\}$とおく，

$\mu\in m_0$ は弓所有界なsigned measureとして意味をもつ，

$\mu\in m_0$，$\mu=\mu_1-\mu_2$，μ_1，$\mu_2\in m_0^+$に対し

$$\int_X v(x)\mu(dx)=\int_X v(x)\mu_1(dx)-\int_X v(x)\mu_2(dx),$$

$v\in F\cap C$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$U_\mu^\alpha = U_{\mu_1}^\alpha - U_{\mu_2}^\alpha$ とおく。

U_μ^α をα — potential という。

補題 1 0. 1

(i) 定義 1 0. 1 によつてきまる写像

$$(10.4) \quad U^\alpha ; m_0 \longrightarrow F$$

は線型 1 意写像で，1 対 1 into である。

(ii) $u \in L^2(X, m)$ ならば $u \cdot m \in m_0$ であり

$$(10.5) \quad U_{u\cdot m}^\alpha = G_\alpha u$$

ただし，G_α は (F, ε) に対応する L^2 — resolvent.

証 明 (i) 先ず $\mu \in m_0$ に対し定義 1 0. 1 (ii) による $\int_X v(x)\mu(dx)$, $v \in F \cap C$, は well defined であることに注意する。つまり $\mu = \mu_1 - \mu_2 = \mu_1' - \mu_2'$ が各 Compactum について成立てば $\mu_1 + \mu_2'$ と $\mu_1' + \mu_2$ は非負 Borel 測度として等しいから $\int_X v(x)(\mu_1 + \mu_2')(dx) = \int_X v(x)(\mu_1' + \mu_2)(dx)$,

${}^\forall v \in F \cap C$, これより

$$\int_X v(x)\mu_1(dx) - \int_X v(x)\mu_2(dx) = \int_X v(x)\mu_1'(dx)$$

$-\int_X v(x)\mu_2'(dx)$ がしたがう。

次に $\mu \in m_0$ に対し (1 0. 3) が成立するから $F \cap C$ が (F, ε^α) 内で dense であることにより，U_μ^α は μ から一意に定まる。最後に $\mu \in m_0$ に対し $U_\mu^\alpha = 0$ とすると，(1 0. 3) より $\int_X v(x)\mu(dx) = 0$, ${}^\forall v \in F \cap C$. $\mu = \mu_1 - \mu_2$,

$\mu_1, \mu_2 \in m_0^+$ とかくと $\int_X v(x)\mu_1(dx) = \int_X v(x)\mu_2(dx)$. 注意 1 0. 1 より $\mu_1 = \mu_2$，したがつて $\mu = 0$.

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

定理１０.２

$u \in F$がα− pure potential であるための必要充分条件は，次の２つが満されることである。

$$\begin{cases} (10.6) & \varepsilon^{\alpha}(u, v) \geqq 0, \ {}^{\forall} v \in F, \quad v \geqq 0 \qquad m\text{-a.e.} \\ (10.7) & v_n \in F \cap C, \ v_n \downarrow 0 \text{ なら } \varepsilon^{\alpha}(u, v_n) \downarrow 0. \end{cases}$$

Xが compact の場合は（１０.６）だけで充分である。

証　明　$u \in F$を固定し

$$(10.8) \quad l_u(v) = \varepsilon^{\alpha}(u, v), \ v \in F \cap C,$$

とおく，$l_u(v)$は$F \cap C$上の線型汎関数である。

定理１０.１と定義１０.１(i)より，uがα− pure−potential であるための必要充分条件は

$$(10.6)' \quad \varepsilon^{\alpha}(u, v) \geqq 0, \ {}^{\forall} v \in F \cap C, \ v \geqq 0,$$

と（１０.７）の２条件である。Xが compact なら（１０.６）′ だけで充分である。

（１０.６）′ が成り立つことを仮定して（１０.６）を導びこう。

$v \in F$, $v \geqq 0$, とする。$v_n \in F \cap C$, $v_n \to v$ in $(F, \varepsilon^{\alpha})$とする。このとき

$$(10.9) \quad v_n^+ \to v \quad \text{weakly w.r.t. } \varepsilon^{\alpha},$$

が成立する。実際，$v_n^+ = v_n \vee 0$はv_nの normal Contraction だから $v_n^+ \in F$で$\varepsilon^{\alpha}(v_n^+, v_n^+) \leqq \varepsilon^{\alpha}(v_n, v_n) < M$．ただし$M$は$n$に無関係な定数である。

又，v_nはvに$L^2(X, m)$− 収束するから v_n^+は$v^+ = v$ にL^2 −収束する。$w \in F$を任意にとり，$f \in L^2$ として

$$|\varepsilon^{\alpha}(w, v_n^+) - \varepsilon^{\alpha}(w, v)| \leqq |\varepsilon^{\alpha}(w - G_{\alpha} f, v_n^+)|$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$$+|\varepsilon^{\alpha}(G_{\alpha}f,\ v_n^+ - v)| + |\varepsilon^{\alpha}(G_{\alpha}f-w,\ v)|$$

$$\leqq 2\sqrt{M}\sqrt{\varepsilon^{\alpha}(u-G_{\alpha}f,\ w-G_{\alpha}f)} + |(f,\ v_n^+-v)_X|$$

$G_{\alpha}(L^2)$は$(F,\ \varepsilon^{\alpha})$内でdenseだから最後の式の第一項は$f$を適当にとつていくらでも小さく出来る。その上で$n\to\infty$とすれば第二項$\to 0$.これで(10.9)がわかつた。

$v_n^+\in F\cap C$だから仮定(10.6)′を使つて

$$\varepsilon^{\alpha}(u,\ v) = \lim\ \varepsilon^{\alpha}(u,\ v_n^+) \geqq 0 .$$

(10.6)が導びけた。 q.e.d,

定理10.2から次の重要な結論がえられる。

補題10.2

$u\in F$が(10.6)を満せば，uは非負である。したがつて，とくにpure—potentialは非負である。

証　明　$u\in F$が(10.6)を満すとする。

$$(10.10)\quad \varepsilon^{\alpha}(w,\ w) \geqq \varepsilon^{\alpha}(u,\ u),\ {}^{\forall}w\in F,\ w\geqq u \quad \text{m—a.e,}$$

が成り立つ,

$G=\{w\in F\,;\,w\geqq u$　m—a.e$\}$とおくとGはFのConvex subset.

(10.10)よりuはGの中で$\varepsilon^{\alpha}(w,\ w)$を最小にするuniqueな元，ところが$|u|$は$u$のnormal Contractionとして$F$に属し(10.3)より

$\varepsilon^{\alpha}(|u|,|u|)\leqq\varepsilon^{\alpha}(u,\ u)$. 明らかに$|u|\in G$だから

$\varepsilon^{\alpha}(|u|,|u|)\geqq\varepsilon^{\alpha}(u,\ u)$. したがつて　$u=|u|\geqq 0$.

q.e.d,

次にα—pure—potentialの別の特徴ずけを与えておく,

定義10.2　((almost)excessive function)

$u\in F$がα—(almost)excessiveであることは，$u\geqq 0$ m—a.eかつ$\beta G_{\beta+\alpha}u\leqq u$, m—a.e, ${}^{\forall}\beta>0$が成立すること。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

注意１０.２　$u\in F$が　α—(almost)excessiveならば　$\beta G_{\beta+\alpha}u$　はβと共に非減少。一方，$\beta G_{\beta+\alpha}u \rightarrow u$　in $L^2(X,\ m)$　（定理1.2(ii)）．したがつて　$\beta_n\uparrow+\infty$ なら　$\beta_n G_{\beta_n+\alpha}u\uparrow u$　　m—a.e,

定理１０.３　（pure—potenfial とexcessive function）

$u\in F$が（１０.６）を満すことと，uが　α—excessiveであることとは同値である。又，uがα—pure potential であるための必要充分条件はuが（１０.７）を満すα—excessive function であることである。

証　明　前半を示せばよい。後半は前半と定理１０.２からしたがうからである。

$u\in F$がα—excessiveであるとする。任意の$v\in F$，$v\geqq 0$，m—a.eに対しε^{α}の定義より

$$\varepsilon^{\alpha}(u,\ v)=\lim_{\beta\to+\infty}\beta(u-\beta G_{\beta+\alpha}u,\ v)_X\geqq 0\ .$$

これは（１０.６）を意味する。逆に$u\in F$が（１０.６）を満すとする。任意の$v\in L^2(X,\ m)$，$v\geqq 0$　m—a.e に対し$G_{\beta+\alpha}v\in F$，$G_{\beta+\alpha}v\geqq 0$　m—a.e であるから

$$\begin{aligned}0\leqq\varepsilon^{\alpha}(u,\ G_{\beta+\alpha}v)&=\varepsilon^{\beta+\alpha}(u,\ G_{\beta+\alpha}v)-\beta(u,\ G_{\beta+\alpha}v)_X\\&=(u-\beta G_{\beta+\alpha}u,\ v)_X\ .\end{aligned}$$

故に$u\leqq\beta G_{\beta+\alpha}u$　m—a.e，一方補題１０.２より$u\geqq 0$　m—a.e，uはα—excessiveであることがわかつた。　　q.e.d,

最後に，Mckean—Tanaka〔４０〕，Dynkin(〔３９〕chap １４)の作用素$\mathfrak{V}$に相当するものを定義する。補題１０.１により次の定義が可能である。

定義１０.３　（作用素$\mathfrak{V}$）

$\alpha>0$を固定し

$D(\mathfrak{V})=\mathrm{U}^{\alpha}(m_0)$，つまり$\alpha$—potenfialの全体

とおく，

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$u \in D(\overline{\Psi})$, $u = U_\mu^\alpha$, $\mu \in m_0$ に対し

$\overline{\Psi} u = \alpha u \cdot m - \mu \ (\in m_0)$

とおく,

$D(\overline{\Psi})$ は $\alpha > 0$ のとり方に関係しない, 実際(10.3)を変形することによつて resolvent 方程式 $U_\mu^\alpha - U_\mu^\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha U_\mu^\beta = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ をうるからである。又, $D(\overline{\Psi})$ から m_0 への一意写像 $\overline{\Psi}$ は, α に関係しない。実際

$u \in D(\overline{\Psi})$, $u = U_\mu^\alpha = U_\nu^\beta$, μ, $\nu \in m_0$ とかける場合, (10.3)より

$\varepsilon(u, v) + \alpha(u, v)_X = \int_X v(x)\mu(dx)$ だから

(10.13) $\varepsilon(u, v) = -\int_X v(x)\, d(\alpha \cdot u \cdot m - \mu)(x)$

$$= -\int_X v(x)\, d(\beta \cdot u \cdot m - \nu)(x), \ {}^\forall v \in F \cap C.$$

したがつて, $\alpha u \cdot m - \mu = \beta u \cdot m - \nu$ である(補題10.1の証明参照)。(10.13)より次の定理をうる。

<u>定理10.4</u>

(i) 任意の $u \in D(\overline{\Psi})$ に対し

(10.14) $\varepsilon(u, v) = -\int_X v(x)(\overline{\Psi} u)(dx)$, ${}^\forall v \in F \cap C$,

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

(ii) Fの$L^2(X, m)$内でのClosareをL_0^2とする。(F, ε)に対し，定理2.1によつてきまるL_0^2上のsemi-groupのgeneratorをAとする。このとき

$$(10.15)\quad \begin{cases} D(A)\subset D(\Psi)\text{かつ} \\ Au=\dfrac{d\Psi u}{dm}, \quad u\in D(A) \end{cases}$$

が成立する。

<u>証 明</u> 定理2.1より$D(A)=G_\alpha(L_0^2)$,

補題10.1(I)より$D(A)\subset D(\Psi)$.

$u\in D(A)$とする。εの定義(1.9)と(2.4)式より

$$\varepsilon(u, v)=-(Au, v)_X, \quad {}^\forall v\in F.$$

(10.4)と比べると

$$\int_X v(x)(\Psi u)(dx)=\int_X v(x)Au(x)\cdot m(dx),$$

$${}^\forall v\in F\cap C,$$

だから $\Psi u=Au\cdot m$. q.e.d,

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

§11. Capacity と refinement

(X, m, F, ε) を regular Dirichlet space, その他の記号も前節の通りとする。

$\mu \in \mathfrak{m}_0^+$ に対しその support $S\mu$ を (1.1.1.)

(11.1) $S_\mu = \{ x \in X ; {}^{\forall}U_x$: 開近傍 $\mu(U_x) \neq 0 \}$ によつて定義する。

S_μ は closed set である。

<u>補題 11.1</u>

$u \in F$ が α — pure — potential であつて対応する measure の support がある compact 集合 K に含まれるための必要充分条件は

(11.2) $\varepsilon^\alpha(u, v) \geq 0$, ${}^{\forall}v \in F \cap \mathcal{C}$, $v \geq 0$ on K が成り立つことである。

<u>証明</u>

$u = U^\alpha_\mu$, $\mu \in \mathfrak{m}_0^+$, $S\mu \subset K$ ならば (10.3) より

(11.3) $\varepsilon^\alpha(u, v) = \int_K v(x)\,\mu(dx)$, ${}^{\forall}v \in F \cap C$ が成立つ, これから (11.2) が従がう。

逆に $u \in F$ が (11.2) を満すとする。

u が α — pure potential であることをいうには定理 10.2 およびその証明における条件 (10.6)$'$, (10.7) を示せばよい。 (10.6)$'$ は明らか。

(10.7) を明かめるために $U_n \in F \cap C$, $v_n \downarrow 0$ としよう。 $a_n = \sup_{x \in K} U_n(x)$ とおけば K は compact だから $a_n \downarrow 0$。一方 $F \cap C$ は C 内で dense だから ${}^{\exists}w \in F \cap C$, $w \geq 1$ on K。

このような w を 1 つ固定し $v_n \leq a_n w$ on K に注意すると (11.2) より

$\varepsilon^\alpha(u, v_n) \leq a_n \varepsilon^\alpha(u, w) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$.

これで (10.7) がわかり u が pure — potential であることがわかつた。

$u = U^\alpha_\mu$, $\mu \in \mathfrak{m}_0^+$ とわかるが次に $S\mu \subset K$ であることを示そう。$\overline{E}_1 \cap K = \phi$, $\overline{E}_1$: compact なる空でない open set E_1 を任意にとり $\mu(E_1) = 0$ をいう

${}^{\exists}v_0^+ \in F \cap C$, $v_0 \geq 1$ on $\overline{E}_1$, $v_0 \leq 0$ on K. $v_1 = v_0^+$ とおくと

$v_1 \in F \cap C$, $v_1 = 0$ on K, $v_1 \geq 1$ on $\overline{E}_1$ (11.2) より $\varepsilon^\alpha(u, v_1) = 0$.

一方 u と μ は関係 (10.3) で結ばれているから $\mu(E_1) \leq \varepsilon^\alpha(u, v_1) = 0$. q. e. d.

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

補題11.2

$u=U^{\alpha}_{\mu}$, $\mu\in m_0^+$, $S\mu$はcompaetとする。

このとき$S\mu\subset E$, $\overline{E}$はcompact, なるopen set Eを任意に固定して以下が成立する。

$\exists f_n\in L^2(X,m)$, $f_n\geqq 0$, $f_n=0$ on $X-E$,

(11.4) $f_n\cdot m \xrightarrow{\text{weakly}} \mu$, $n\to\infty$

(11.5) $G_\alpha f_n\to u$ weakly in $(F,\ \varepsilon^\alpha)$

証明,

定理10.3よりuはαーexcessiveである。そこで

(11.6) $g_\beta=\beta(u-\beta G_{\beta+\alpha}u)$とおくと$g_\beta\geqq 0$であり, $\varepsilon^\alpha(u,v)$の定義と(1.1.3)から

(11.7) $\int_X v(x)g_\beta(x)m(dx) \underset{\beta\to\infty}{\to} \int_K v(x)\mu(dx)$

$\forall v\in F\cap C$。

各compact集合に対しそこで1より大きく全体で非負な$v\in F\cap C$をとることにより測度$g_\beta\cdot m$は各compact上で一様有界であることがわかる。Xはσーcompactであるから$\exists\beta_n\uparrow\infty$,

(11.8) $\{g_{\beta n}\cdot m\}$は各compact上で弱収束, とできる。

今Eを補題の条件を満す開集合とし

(11.9) $f_n=g_{\beta n};\ \chi_E$

とおく, χ_EはEのindieator function, このf_nが(11.4), (11.5)を満すことを示そう。

そのために$v_0\in F\cap C$, $v_0\geqq 0$, なるv_0を任意に固定するする。そして$C_{v_0}=\{u\in C(x)$; $0\leqq u\leqq v_0$ とおくとき

(11.10) $\lim_{n\to\infty}\int_X v(x)\ g_{\beta n}(x)m(dx)=\int_K v(x)\mu(dx)$,

$\forall v\in C v_0$

をいう。仮に(11.10)が正しいとしよう。そうすると$\forall v\in C v_0$,

$\int_X v(x)f_n(x)m(dx)+\int_{X-E}v(x)\ g_{\beta_n}(x)m(dx)\to$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

$\to \int_K v(x)\,\mu(dx)$。

$0 \leqq \rho \leqq 1$, $\rho=0$ on K, $\rho=1$ on $X-E$ なる連続関数 ρ を $\tilde{v}=v\cdot\rho$ とおくと $\tilde{v}\in C_{v_0}$, $\tilde{v}=v$ on $X-E$, $\tilde{v}=0$ on K であるから再たび（11.10）より

$0 \leqq \int_{X-E} v(x)\,g_{\beta n}(x)\,m(dx) \leqq \int_X \tilde{v}(x)\,g_{\beta n}(x)\,m(dx) \to 0$。

わかつたことは

（11.11） $\lim_{n\to\infty} \int_X v(x) f_n(x)\,m(dx) = \int_K v(x)\,\mu(dx)$,
$\forall v \in C_{v_0}$。

v_0 としてとくに $v_0 \geqq 1$ on $\overline{E}$ なるものをとつておけば（11.11）から（11.4）がしたがう。

（11.11）と（11.3）より

（11.12） $\varepsilon^{\alpha}(G_\alpha f_n; v_0) \to \varepsilon^{\alpha}(u, v_0)$，この式は（11.5）を意味する。

残つたのは（11.10）の証明である。$v\in C_{v_0}$ とする。$\exists w_k \in F\cap C$, w_k は v に一様収束。$v_k=(0\vee w_k)\wedge v_0$ とおくと $v_k\in C_{v_0}$, v_k は v に一様収束。又 $F\cap C$ は初等関数族だつたから $v_k\in F\cap C$,

$\int_X v(x)\,g_{\beta n}(x)\,m(dx) = \int_X v_k(x)\,g_{\beta n}(x)\,m(dx)$
$+\int_F (v(x)-v_k(x))\,g_{\beta n}(x)\,m(dx) + \int_{X-F}(v(x)-v_k(x))\,g_{\beta n}(x)\,m(dx)$ $n\to+\infty$ のとき右辺の第一項は（11.7）により $\int_K v_k(x)\,\mu(dx)$ に収束する。これは k を大にすることにより $\int_K v(x)\,\mu(dx)$ にいくらでも近ずけることができる。F が compact なら第2項は R を大にすれば n に関し一様に小さくできる。又 $\varepsilon>0$, F ; compact, $0\leqq v_0<\varepsilon$ on $X-F$ とでき，$v_0\wedge\varepsilon\in F\cap C$ だから | 第三項 | $\leqq 2\int_X (v_0\wedge\varepsilon)\cdot g_{\beta n} \underset{n\to\infty}{\to} 2\int_K (v_0\wedge\varepsilon)\cdot d\mu \leqq 2\varepsilon\cdot\mu(x)$。（11.10）がわかつた。 q.e.d.

以上で基本的な準備を終る。

E をその closure が compact であるような open set とし

（11.13） $G_E=\{u\in F; u\geqq 1, m\text{-}a, e \text{ on } E\}$ とおく。$\overline{E}$ が compact だから G_E に属す連続関数が少なくとも1つ存在する。

（11.14） $Cap(E) = \inf_{u\in G_E} \varepsilon^{\alpha_0}(u,u)$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

とおきこれをEの (α_0) capacity と呼ぶ。ただしα_0は固定した定数。

定理11.1

Eをopen set, $\overline{E}$はcompact とする。

(i) G_E の中で$\varepsilon^{\alpha_0}(u, u)$を最小にする一意元が存在する。それを$p_E$とかくと$p_E$は$\alpha_0$-pure-potential であり対応する測度μ_Eのsupport は$\overline{E}$に含まれる。

(ii) $0 \leqq p_E \leqq 1$ m-a, e on X

$$p_E = 1 \quad m\text{-}a, e \quad \text{on } E$$

(iii) $\varepsilon^{\alpha_0}(p_E, p_E) = Cap(E)$

証明

G_Eは$(F, \varepsilon^{\alpha_0})$内のclosed convex setだからこの中で$\varepsilon^{\alpha_0}(u, u)$を最小する元がただ一つ存在する。それを$p_E$とおく。

$^V\varepsilon > 0$, $\varepsilon^{\alpha_0}(p_E + \varepsilon v, p_E + \varepsilon v) \geqq \varepsilon^{\alpha_0}(p_E, p_E)$,

$v \in F$, $v \geqq 0$ m-a, e on E。

つまり $\varepsilon^{\alpha_0}(p_E, v) + \varepsilon\,\varepsilon^{\alpha_0}(p_E, p_E) \geqq 0$,

$\varepsilon \downarrow 0$とすることにより

(11.15) $\varepsilon^{\alpha_0}(p_E, v) \geqq 0$, $v \in F$, $v \geqq 0$ m-a, e on E,

とくに

(11.16) $\varepsilon^{\alpha_0}(p_E, v) \geqq 0$, $v \in F \cap C$, $v \geqq 0$ on $\overline{E}$。

補題11.1よりこの定理の(i)を得る。

又 $(0 \wedge p_E) \wedge 1$ はG_Eに属しnorm の関係からこれはp_Eに等しいことがわかり(ii)が成立する。(iii)は明らか。

定義11.1

(i) 定理11.1のp_EをEの(α_0-)を平衡potential, μ_E をEの(α_0-)平衡分布と呼ぶ。

(ii) $A \subset X$があるcompact set に含まれ$\inf\limits_{\substack{E \supset A \\ E\text{はopen}}} Cap(E) = 0$のとき$A$を(locally)

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

polar set と呼ぶ，$A\subset X$の各compact 集合への制限が（locally）polarのときAをpolar と呼ぶ。

補題11.3

Eをopen setで$\overline{E}$がcompact なるものとする。

p_EをEの平衡potentialとする。このとき$\mu\in m_0^+$，$S_\mu\subset E$，

（11.17）　$\varepsilon^{\alpha_0}(U_\mu^{\alpha_0}, p_E)=\mu(X)$

証明

補題11.2より $f_n\in L^2(X,m)$，$f_n=0$ on $X-E$，$f_n\cdot m\to\mu$ weakly on $\overline{E}$，$G_{\alpha_0}f_n\to U_\mu^{\alpha_0}$ weakly in $(F,\varepsilon^{\alpha_0})$。

定理11.1より$p_E=1$ m-a.e on E だから

$$\varepsilon^{\alpha_0}(U_\mu^{\alpha_0}, p_E)=\lim_{n\to\infty}\varepsilon^{\alpha_0}(G_{\alpha_0}f_n, p_E)=\lim_{n\to\infty}\int_{\overline{E}}f_n(x)\,m(dx)$$
$$=\mu(\overline{E})=\mu(X)$$

補題11.4

（i）$X\supset A$がpolar setであるとすれば $\mu(A)=0$，$^\forall\mu\in m_0^+$， さらに $m(A)=0$。

（ii）　$u\in F\cap C$，$^\forall\varepsilon>0$

$$Cap(\{x;|u(x)|>\varepsilon\})\leqq\frac{\varepsilon^{\alpha_0}(u,u)}{\varepsilon^2}$$

証明

（i）$\mu\in m_0^+$，Kを任意のcompact set とし $\mu_K(G)=\mu(G\cap K)$ とおく μ_KはKの中にsupport をもつRadon測度であるがさらに$\mu_K\in m_0^+$である。

実際 $|\int_X v(x)\,\mu_K(dx)|\leqq\int_X|v(x)|\,\mu(dx)=\varepsilon^{\alpha_0}(U_\mu^{\alpha_0}, |v|)$
$\leqq\sqrt{\varepsilon^{\alpha_0}(U_\mu^{\alpha_0}, U_\mu^{\alpha_0})}\sqrt{\varepsilon^{\alpha_0}(v,v)}$，$^\forall v\in F\cap C$，であるが $F\cap C$は $(F,\varepsilon^{\alpha_0})$内でdenseだから，（10.3）を満す $U_{\mu_K}\in F$が存在する。

さてAをPolarとする。Aはあるcomp.ct set に含まれるとして証明してよい $^\forall\varepsilon>0$，$^\exists E$；open $\overline{E}$ compact，$A\subset E$，$Cap(E)<\varepsilon$。

KをEの任意のcompact subset とすれば補題11.3により

$$\mu_K(X)=\varepsilon^{\alpha_0}(U_{\mu_K}^{\alpha_0}, p_E)\leqq\sqrt{\varepsilon^{\alpha_0}(U_{\mu_K}^{\alpha_0}, U_{\mu_K}^{\alpha_0})}\sqrt{\varepsilon^{\alpha_0}(p_E, p_E)}$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

明らかに $\mu-\mu_K \in \mathfrak{m}_0^+$ であり定理10.2と補題10.2より $\varepsilon^{\alpha}(U^{\alpha_0}_{\mu-\mu_K}, U^{\alpha_0}_{\mu_K}) \geqq$ であるから $\varepsilon^{\alpha_0}(U^{\alpha_0}_{\mu_K}\ U^{\alpha_0}_{\mu_K}) \leqq \varepsilon^{\alpha_0}(U^{\alpha_0}_{\mu}, U^{\alpha_0}_{\mu})$

したがって $\mu_K(X) \leqq \sqrt{\varepsilon^{\alpha_0}(U^{\alpha_0}_{\mu}, U^{\alpha_0}_{\mu})} \cdot Cap(E)$。$K \uparrow E$として

$\mu(A) \leqq \mu(E) \leqq \varepsilon\sqrt{\varepsilon^{\alpha_0}(U^{\alpha_0}_{\mu}, U^{\alpha_0}_{\mu})}$。

$m(A)=0$ でもあることは明らかである。

(ii) $u \in F \cap C$, $\varepsilon > 0$とする。

$G=\{x : |u(x)| > \varepsilon\}$とおけば$u$は連続で無限遠で0なのだから Gはopenで$\overline{G}$はcompact である。 $\frac{|u(x)|}{\varepsilon} \geqq 1$, $x \in G$であるから $Cap(G) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^{\alpha_0}(|u|, |u|)$

$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^{\alpha_0}(u, u)$ 。 q, e, d,

定理11.2 (refinement of $^{V}u \in F$)

$^{V}w^* \in F, v^* s \in F$, such that $u=u^*$

a) $u=u^*$ $m-a, e$

b) u^* は quasi-continuous, つまり

K_n compact, $K_n \uparrow$ $\bigcap_{n+1}^{\infty}(X-K_n)$は polar

u^*は各K_n上で連続

c) $\mu \in \mathfrak{m}_0^+$, u^* はμ—可測で

(11.18) $\varepsilon^{\alpha}(U^{\alpha}_{\mu}, u) = \int_X u^*(x)\mu(dx)$ 。

証明

$u_n \in F \cap C$, $u_n \to u$ in $(F, \varepsilon^{\alpha_0})$。 特に$u_n \to u$ $m-a, e$ (必要なら部分列を選んで) である。補題11.4 (ii) より部分列を適当に選んで

$Cap\{x, |u_n(x) - u_{n+1}(x)| > \frac{1}{2^{n+1}}\} \leqq \frac{1}{2^{n+1}}$ とできる。

$E_l = \bigcup_{n=l}^{\infty}\{x : |u_n(x) - u_{n+1}(x)| > \frac{1}{2^{n+1}}\}$ とおく。右辺の各項の capacity の総和は$\frac{1}{2}^{l}$より小さい。したがって open set E_l と勝手な compactum との共通部分は capacityが$\frac{1}{2}^{l}$より小であるような relatively campact な open set に含まれる。故に$\bigcap_{K=1}^{\infty} E_K$ は polar,

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

今 F_n をXに単調に収束する compact set の列とする。

$K_l=(X-E_l)\cap F_l$ とおくと，K_l は compactであり

$$\bigcup_{l=1}^{\infty}K_l=X-\bigcap_{l=1}^{\infty}E_l \text{ である。}$$

$x\in K_l$ ならば

$$|u_n(x)-u_m(x)|\leqq\sum_{k=l}^{\infty}|u_k(x)-u_{k+1}(x)\leqq\frac{1}{2^l},\quad n,m\geqq l。$$

K_l は l に関して非減少だから $\{u_n\}$ は各 K_l 上で一様に収束する。その極限を u^* とおけば u^*はこの定理の $a)$，$b)$ を満す。

$c)$ を示そう。 u^* は polar なる G_δ 集合の外で Borel 可測であり polar set の$\mu(\in\mathfrak{M}_0^+)$ 測度は0であつた（補題1.4（i）から u^*はμ—可測である。 $b)$ に於ける compact set の列$\{K_n\}$ をとり $\mu_n(G)=\mu(G\cap K_n)$ によつて測度μ_n を定義する。 補題1 1.4（i）の証明からわかるように $\mu_n\in\mathfrak{M}_0^+$， $\varepsilon^\alpha(U^\alpha_{\mu_n},U^\alpha_{\mu_n})\leqq\varepsilon^\alpha(U^\alpha_\mu,U^\alpha_\mu)$，

一方 $X-\bigcup_{l=1}^{\infty}K_l$ は polar だから $f\in F\cap C$

$$\varepsilon^\alpha(U^\alpha_{\mu_n},f)=\int_X f(x)\mu_n(x)\to\int_{\bigcup_n K_n}f(x)\mu(dx)$$
$$=\int_X f(x)\mu(dx)=\varepsilon^\alpha(U^\alpha_\mu,f)。$$

したがつて $U^\alpha_{\mu n}\to U^\alpha_\mu$ wakly in (F,ε^α)。

$b)$ の証明に於ける $u_n\in F\cap C$ をとると各nに対し

$$\varepsilon^\alpha(U^\alpha_{\mu_n},u)=\lim_{m\to\infty}\varepsilon^\alpha(U^\alpha_{\mu_n},u_m)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\int_{Kn}u_m(x)\mu_n(dx)=\int_{Kn}u^*(x)\mu_n(dx)。$$

故に $(\varepsilon^\alpha_\mu,u)=\lim_{n\to\infty}\varepsilon^\alpha(U^\alpha_{\mu_n},u)=\int_{\bigcup_n K_n}u^*(x)\mu(dx)$

$$=\int_X u^*(x)\mu(dx)。$$

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

あ と が き

各節についての補足的注意をのべる。

§1. この節の結果は福島〔16；§2〕を詳しくしたものである。L^2 ーresolvent とL^2ーDirichlet space の概念は本来 topologyーfreeなものである。実際 志賀ー渡辺〔36；§2〕は単に(X, m)をσー有限な測度空間としてそれらの定義を与え，且つそれらが1対1に対応することを示している。この際，1対1対応を示すときにmのσー有限性が必要になる。我々は§1でXを局所 compact，mをRadon測度として出発したが，mのσー有限性は仮定していない。

§2. この節の目的は不等式(2.8)を導びくことにある。不等式(2.8)は Wentzell 〔41〕が Brownian hitting probability をもつ拡散過程について得た不等式を更に詳しくし，一般化したものである。Wentzell 〔41〕はこの不等式を使つて推移確率の speed measure に関する絶対連続性を示したが，Wentfellの方法はcanonical Dirichlet sqaceの場合に対しても，一般化が可能である。(福島〔17〕).

§3. 定理3.1に於て$(F^{(b)}, \|\!|\ \ \|\!|_2)$が normed ringであるというとき，$F^{(b)}$は$m$ー$a$，$e$に等しいという同値関係による同値類とみなしている。Dirichlet ring なる概念は Royden ring(§4参照)の概念の一般化である。Dirichlet ring という言葉は既に Beurling−Deny〔3〕に見られるが，ここでは〔3〕のものとは(normの定義の仕方に於て)やや異なる意味に使つている。

§4 福島〔16〕で扱かつた Brown 運動の境界問題に対し，第2章の表現論を適用する際，§4の結果は補助的役割を果す筈である。特に定理4.3は境界上の Markov 過程の解析的定式化とその特徴ずけに役立つ筈である。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

§5 Dirichlet space の正則性の定義について Beurling－Deny〔3〕のそれとの違いは，我々の場合，〔3〕に於ける $C_0(X)$の代りに$C(X)$ を採用した点にある。そのようにした根拠は，正則表現という立場から見てより自然でより一般性があると思われたからである。定義5.3では，実は条件(ii) だけからDirichlet space (X, m, F, ε) の正則性が従がう。

§9. (9.14)で定義される ring R_0 は国田一渡辺毅〔25〕の中で採用された関数族と本質的に同じものである。又，定理9.2は〔25〕で得られている結果の一つに近い。

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

文　献　表

〔1〕 N, Aronszajn and K. T. Smith, characterization of positive reproducing kernels, Amer. J. Math., 79 (1957) 611—622。

〔2〕 A. Beurling and J. Deny, Espaces de Dirichlet, I, le cas élémentaire, Acta Math., 99(1958), 203—224

〔3〕 A, Beurling and J, Deny, Dirichlit spaces, Proc, Nat Acad. Sc., 45(1959), 208—215。

〔4〕 M. Brelot, Etude et extensions du principe de Dirichlet, Ann. Inst. Fourier, 5(1953—4), 371—419.

〔5〕 C. Constantinescu and A. Cornea, Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963

〔6〕 R, Courant, DiriChlet's principle, Interscience, New york, 1950

〔7〕 J. Deny, principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier, 15(1965), 259—272。

〔8〕 J. Deny and J. L. Lions, Les espaces du Beppo Levi, Ann., Inst. Fourier, 5(1953—4), 305—370.

〔9〕 J. L. Doob, Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonie functions, Bull. Soc. Math. France, 85(1957), 431—458.

〔10〕 J. L. Doob, Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals. Ann. Inst. Fourier, 12(1962), 573—621.

〔11〕 E. B. Dynkin, General boundary conditions for denumerable Markov processes(ロシア語), 確率論とその応用 12(1967), 222—257.

〔12〕 J. Elliott, Dirichlet spaces associated with intgro—differential operators, I, II, Illinois J. Math

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

9(1965), 87—98; 10(1966), 66—89.

〔13〕 W. Feller, On doundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential eguations, Ann, Math.,, 65(1957), 527—570.

〔14〕 福島正俊, A construction of reflecting barrier Brownian motions for bounded domains, Osaka J. Math., 4(1967), 183—215.

〔15〕 福島正俊, Brown 運動の境界問題とDiriehlet 空間, 数学, 20(1968), 211—221

〔16〕 福島正俊, On boundary conditions for multi—dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities,, to appear in J. Math. Soc. Japan, 21(1967), № 1.

〔17〕 福島正俊, Canonical Dirichlet spaceと推移確率の絶対連続性 数理解析研究所講究録「Markov 過程に対するLateral conditionについて」。

〔18〕 I, Gelfand, D. Raikov and G. Shilov, Commutative normed rings, Chelsea, new york. 1964.

〔19〕 G. Hunt, Markov processes and potentials. 1, 2, 3, Illinois J. Math., 1(1957), 44—93; 1(1957), 316—369; 2(1958), 151—213.

〔20〕 K. Ito and H. P. MCkean Jr., Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965.

〔21〕 伊藤正之, Characterizations of supports of balayaged measures, Nagoya Math. J., 28(1966), 203—230.

〔22〕 伊藤正之, Condensor principle and the unit contraction, Nagoya Math. J., 30(1967), 9—28.

〔23〕 伊藤正之, On total masses of balayages measures, Nagoya Math. J., 30(1967), 263—278,

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

〔24〕 国田寛，野本久夫，Markov 過程に関する compact 化の方法とその応用，Seminar on prob., vol14(1962).

〔25〕 国田寛，渡辺毅，Some theorems concerning resolvents over locally compact spaces, proc, 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and prob. (1967).

〔26〕 L. H. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis, van Nastrand, 1953.

〔27〕 R. S. Martin, Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 49(1941), 137—172.

〔28〕 溝畑茂，偏微分方程式論，岩波書店，1965

〔29〕 L. Naim, Sur le rōle de la frontiere de R. S. Martin dans la théorie du potentiel. Ann. Inst. Fourier, 7(1957), 183—281.

〔30〕 M. A. Naimark，関数解析入門 I，II（原題，normed rings），功力，井関，笹原訳，共立全書.

〔31〕 中井三留. On a ring isomorphism induced by quasi-conformal mappings, Nagoya Math. J., 14(1959), 201—221

〔32〕 中井三留，a measure on the harmonic boundary of a Riemann surface, Nagoya Math. J., 17(1960), 181—218.

〔33〕 中井三留，Riemann面における関数環の方法について，数学，13(1962) 128—140.

〔34〕 D. Ray, Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, Ann. of Math., 70(1959), 43—78.

〔35〕 H. L. Royden, The ideal boundary of an open Riemann surface, Annals of Mathematics Studies, №30(1953), 107—109.

〔36〕 志賀徳造，渡辺毅，On Markov chains similar to the re-

Sem. on Probab.
Vol.31 1969年
P1-103

flecting barrier brownian motion, Osaka J. Math., 5(1968), 1—33.

[37] F. Knight, Note on regularization of Markov processes, Illinois J. Math., 9(1965), 548—552.

[38] 岡部靖憲, Kolmogorovの拡張定理について., 数学, 20(1968), 222—225.

[39] E. B. Dynkin., Markov processes, 1, 2, Springer, 1965.

[40] H. P. Mckean. Jr., and H. Tanaka, Additive functionals of the Brownian path, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A 33(1961), 479—506.

[41] A. D. Wentzell, On absolute continuity of transition probabilities of a multidimensional generalized Brownian motion, 確率論とその応用 13(1968), 3—16.