Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

SEMINAR on PROBABILITY

VOL.33

エルゴード理論における同型定理

D.S.Ornsteinの諸定理

伊藤俊次　　村田　博
十時東生

1971
論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

まえがき　表現及び同型

2次元 torus 上になめらかな微分方程式 $\frac{dx}{dt}=f(x,y)$, $\frac{dy}{dt}=g(x,y)$, $(x,y)\in\Omega$ が与えられているとき，その解曲線 $\omega_t=(x(t),y(t))$, $-\infty<t<\infty$ は次のような性質をもつ。$\omega=(x(0),y(0))\in\Omega$ において，ω が解曲線に沿って t 時間後にある位置を $\omega_t=(x(t),y(t))$ とかき，ω から ω_t への写像を T_t ; $\omega\to\omega_t$ とすると，T_t は $T_0=I$, $T_t\cdot T_s=T_{t+s}$ なる性質をもつ。このような Ω 上の1－径数変換群 $\{T_t\,;-\infty<t<\infty\}$ は上の微分方程式の解曲線の行動を全て記述している。さらにこの微分方程式が特異点をもたないという仮定 $f^2+g^2>0$ と，閉解曲線をもたないという仮定をおくとすれば，Ω 上になめらかな total measure 1 の測度 μ で，$\{T_t\,;-\infty<t<\infty\}$ を μ－不変にするものが存在する。（しかもエルゴード的である。）この確率測度 μ は解曲線の行動を定性的又は定量的に述べるのに有効である。例えば，Ω 上の点 ω_1, ω_2 を考えるとし ω_1 から出発した解曲線が $t\to\infty$ とともに dense に Ω 上を動きまわるとしよう。そのとき ω_2 の近傍 $U(\omega_2)$ へも dense に入り込むわけであるが，実は μ をもちいるとそれは定量的に

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m\{s\,;T_s\omega_1\in U(\omega_2),\ s\leqq t\}}{t}=\mu(U(\omega_2))$$

ととらえることができる（mは Lebesgue 測度）。

さらに一般的な議論をしておこう。古典力学における力学系の微分方程式

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,2,\cdots,n$$

が与えられていて，さらに $M(x_1,\cdots,x_n)>0$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(MX_i)}{\partial x_i}=0$$

をみたしているとしよう。（2次元 torus の例はこの class に入る。）例えば Hamilton の正準方程式はその例である。このような方程式は解の存在は分っているが一般にその解曲線が既知関数で書けるとは限らない。そのとき解の行動を調べるのに有力な手段として相空間 Ω 上の変換 $\{T_t\}$，不変測度 $\mu(A)=\int\cdots\int_A M(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$ が登場するのである。しかし μ を道具として解の行動を調べることから，ほとんどすべて（a. e.）の解について云々というとらえ方しか出来ぬ場合も起りうるのであるが。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

ところで我々はあるclassの微分方程式の解の行動を調べるために，空間Ωとそれ上の1－径数変換群$\{T_t; -\infty<t<\infty\}$と，$\mu$という$\Omega$上の$\{T_t\}$－不変な測度の系$(\Omega, \mu, \{T_t\})$に着目した。我々はこのような系を抽象化して，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$は確率空間，$T_t$は$\Omega$上の1－1両側可測$\mu$－保測な変換で，$T_0=I$，$T_t \cdot T_s = T_{t+s}$をみたすものとして定式化する。このような系$(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \{T_t; -\infty<t<\infty\})$を測度論的なflow又は単にflowと呼ぶ。このような抽象化が無意味でないことは，数学的あるいは物理的対象でこのような側面をもっている例を多く知るからである。

話をtorus上の微分方程式の例にもどすことにしよう。

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}=f(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,y),\quad f^2+g^2>0。$$

これからきまるflowを$(\Omega, \mu, \{T_t\})$とする。(1)に対してある実数λ_1，λ_2と$M>0$が存在して

$$(2)\qquad \frac{d\xi}{dt}=\lambda_1 M(\xi,\eta),\quad \frac{d\eta}{dt}=\lambda_2 M(\xi,\eta)。$$

からきまるtorus $\Omega'=\{(\xi,\eta)\}$上のflow $(\Omega', \nu, \{T_t'\})$を次の関係をみたすようにとることが出来る。$\varphi: \Omega \ni (x,y) \to (\xi,\eta) \in \Omega'$なる保測変換で$\varphi T_t \varphi^{-1} = T_t'$，$t \in R$をみたすものが存在する（この場合$\varphi$は$\Omega$の微分構造を$\Omega'$へ保つ）。このように2つの力学系が与えられたとき，それらの間に上のような関係をみたすものが存在すれば，2つの力学系は同型であるといい，φを同型写像という。同型とは，$\varphi: \Omega \to \Omega'$なる保測変換があったとき，空間$(\varphi(\Omega), \varphi\cdot\mu)$上の力学系$\{\varphi T_t \varphi^{-1}\}$と$\{T_t'\}$とが同じであるという同値関係をきめる概念である。

測度論的なflowに対しては次のように同値関係を定義することが望ましい。2つのflow $(\Omega, \mu, \{T_t\})$，$(\Omega', \mu', \{T_t'\})$が与えられているとき，それらがmetricalに同型（あるいは単に同型）であるとは，ΩからΩ'への保測変換φが存在して$\varphi T_t \varphi^{-1} = T_t'$をみたすときをいう。

2つのflowが同型であるとは，なんらかの形で有効と思われる同値関係を入れ，その同値類に属するものを同型と呼ぶに他ならない。力学系の(1)と(2)の例では，(1)と(2)の微分構造をも含めて同値関係をみたし，測度論的なflowについては，測度論的構造を保つ関係において同型を定義したことになる。

ところでflow$(\Omega, \mu, \{T_t\})$が与えられているとき，$U_t f(\omega) = f(T_t \omega)$，$\omega \in \Omega$，$f \in L^2(\Omega)$，とおいて$L^2(\Omega)$上のUnitary作用素の1－径数群$\{U_t; -\infty<t<\infty\}$を定義するが，2つのflowが同値であるという概念を，このUnitary作用素の1－径数群のスペクトル

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

type が equivalent であるということによって入れることも出来る。もちろんmetrical 同値であればスペクトル同値である。このようにして，具体的な flow をその知りたい側面をこわさない関係によって同値類を定義し，その典型的な代表元をみつけだし，解析するのである。

2次元 torus 上の力学系の例では(1)より(2)が典型的である。なぜなら(2)の解曲線が torus 上では直線になっていて(1)より見やすいからである。又(2)はさらに次のような形の力学系（X，ν，$\{S_t\}$）に微分構造の入った変換で同型である。すなわち，1次元 torus〔0，1）上の変換Rを，$Rx = x + \lambda_2/\lambda_1$，によって定め，f を(2)に depend する1次元 torus 上の positive でなめらかな関数とする。集合$\{(x,y);(x,y) \ [0,1) \times R^+, 0 \leq y \leq f(x)\}$を$(Rx, 0) = (x, f(x))$によって identify した空間をXとし，X上の flow S_t を local には$S_t(x,y) = (x, y+t)$によって定義する。このようにして定まる力学系

(3)　（X，ν，$\{S_t\}$）

が(2)によって定まる力学系に同型である。ここでRは base の変換，f は ceiling function と呼ばれている。これは(1)，(2)なる力学系を1次元 torus 上のRという変換（Weyl 変換）と f という関数の組によってつくられる力学系に表現したわけである。(3)は一種の力学系の平行線化であるが，このようにして(1)(2)をとらえかえすことによって，(1)(2)の解の行動を characterize し解析することがしばしばある。測度論的な flow についても，metrical 同型の意味で Ambrose－Kakutani の表現が存在することが知られており〔2〕,〔3〕,〔28〕,これは1940年代の重要な仕事と言ってよいであろう。近年の flow の研究の中で最も偉大な成果の1つである撞球問題（固い芯のある完全弾性球よりなる力学系）の Sinai によるエルゴード性の証明〔38〕,〔16〕についても，やはり Ambrose－Kakutani の表現が本質的な役割を果している。しばしば表現という言葉を用いたが，表現とは同型の範囲内でさらに典型的なものをとらえたときに用いる言葉である。例えばエルゴード的で discrete スペクトルをもつ flow は次のような flow で表現できる。Ωを compact，可分アーベル群，$\mathfrak{F}$を Borel σ－field，μを Haar measure，$\{\alpha_t\}$を1－径数部分群とし，$T_t ; \omega \to \alpha_t \omega$ とした flow として〔9〕。

ところで Kolmogorov は，(1)，(2)によって与えられた力学系のうちで λ_2/λ_1 にのみ depend する $K > 0$ が存在して，任意の整数m，nについて，関係$\left| m - n\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| > K |n|^{-4}$を$\lambda_2/\lambda_1$がみたすような力学系は

$$(4) \qquad \frac{du}{dt} = \lambda_1 , \quad \frac{dv}{dt} = \lambda_2 , \quad (u, v) \in \Omega$$

なる力学系に同型であることを示した〔13〕,〔14〕。この主張が力学の問題としていかに重要である

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

かはここで触れないことにして，以下のことだけを注意しておこう。(1)(2) に固有の実数値特性量 λ_2/λ_1（これは Poincaré の回転数と呼ばれている）が存在すること。そしてその特性量に着目して，ある class については (1)(2) はさらに典型的な (4) という力学系に同型であることを主張したこと。

これまで力学系を例にあげてその同型を議論したわけであるが，次に本書の目的である保測変換の同型問題に話を進めよう。前に flow の同型の定義を与えたが，確率空間（Ω，$\mathcal{F}$，μ）上の保測変換 T（簡単に変換 T と呼ぶこともある）の同型も同様に定義する。すなわち，（Ω_1，$\mathcal{F}_1$，μ_1，T_1），（Ω_2，$\mathcal{F}_2$，μ_2，T_2）なる２つの変換が与えられているとき，T_1 と T_2 が同型（$T_1 \sim T_2$）であるとは，Ω_1 から Ω_2 への保測変換 φ が存在して，$\varphi T_1 \varphi^{-1} = T_2$ をみたすときをいう（詳しくは第１章参照）。同様にスペクトル同型も定義できる。変換は flow の時間を１つとめたとき，あるいは flow の Ambrose ー Kakutani の表現の base 変換として，flow と深くかかわっているばかりでなく，flow と同様数学的あるいは物理的対象を多くの例としてもつ。

それでは，はたして２つの変換（flow でも）がいかなるとき同型であるか。これが同型問題である。それを攻撃する手段は当然その時代のもつ数学上の道具に左右される。例えば，discrete スペクトルをもつ変換（flow でも）の場合，スペクトル理論のかなりの完成があってその成功をみた。すなわち，discrete スペクトルをもつエルゴード的な変換（flow でも），そのスペクトル type が等しければ，実は metrical 同型となる〔18〕。これは metrical より広い同値類をきめるスペクトル同値類も，それが discrete であれば同じとなる，との主張である。しかしスペクトルで metrical 同型を言うことは一般には不可能である。それは例えば２ー shift と３ー shift はともに σー Lebesgue スペクトルをもつが同型とはならないように（この事実はあとで述べる）。

１９５８年 Kolmogorov は metrical な同型問題に対して新しい考えを導入した。それは metrical な同値類に，Shannon の entropy の概念〔32〕を応用した変換の entropy という非負実数の特性量を対応させたのである〔15〕。すなわち，$T_1 \sim T_2$ ならば，$h(T_1) = h(T_2)$ なる量である（§1.5 を参照）。
よって entropy の異なる２つの変換は同型とはなりえない。上にあげた２ー shift と３ー shift はそれぞれの entropy が log 2，log 3 となり同型ではない。この entropy はその後のエルゴード理論の研究に画期的な役割を演ずることになる。

Kolmogorov は同時に定常過程の regularity に対応する概念として変換に K ー system という class を定義した。この class は completely positive entropy をもつ変換の class と同等である〔26〕，〔31〕ことによって，entropy によって完全に characterize 出来ることが知られている。又，K ー system であれば，σー Lebesgue スペクトルをもつ〔34〕。よって，スペクトル

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

typeではそれ以上分解出来なかったσ－Lebesgueスペクトルをもつ変換のclassを，K－systemという概念はさらに詳しくとらえていることになる。K－systemのentropyが正であることから，K－systemはさらにentropyの等しいclassに分かれている。ところで，現在知られているところでは，entropyが同型問題に対して有効なのはK－systemに対してであると思われる。それは例えば，discreteスペクトルをもつ変換はすべてentropy 0であり，負定曲率compact Riemann多様体上のホロサイクルflowのentropyは0であるがそのスペクトルtypeはσ－Lebesgueであるように〔8〕。さらに，entropyが正で等しいにもかかわらず，同型とならない例がK－systemでないMarkov変換によって与えられるように〔4〕。それでは，K－systemの中では，はたしてentropyの等しい2つの変換が同型となるだろうか。はたしてentropyというスカラーの特性量が一致するだけで同型写像を作ることが出来るか。

Ornsteinの仕事を紹介する前に，そこに到達するまでに得られた種々の結果を述べておこう。Rohlinは変換に対して少なくとも1つのgeneratorが存在することを証明した〔30〕。このgeneratorの存在保証によって，前の言葉をかりれば，変換のshift空間への表現を得ることが出来る。もっと詳しく，SinaiはMarkov partitionという概念を与え，transitive C－変換という典型的な変換が，そのgeneratorをうまくとることによってshift空間上のmixing Markov変換として表現できることを示した〔36〕，〔37〕（例2.2 ， 2.3 参照）。
このshift空間の最もよく知られている変換がk－shiftを含むBernoulli変換である（例2.1を参照）。 entropyの同型問題はまずこのBernoulli変換に対して攻撃された。1959年，Meshalkinはentropyの等しい$B(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$，$B(\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8})$なる2つのBernoulli変換が同型となることを示した〔17〕。その後少しの拡張はあったにしても〔5〕，Sinaiの手にかかってもentropyの等しいBernoulli変換が同型であることは証明されなかった。しかしSinaiはその研究の中で次のような著しい結果を得た。Bernoulli変換とは限らず，entropyが正のエルゴード的な変換は，そのentropyと等しい値のentropyをもつBernoulli変換をfactorとしてもつ。とくに，entropyの等しい2つのBernoulli変換は互いに相手をfactorに含むように出来る（弱同型）〔35〕（本書，定理 3.2 参照）。

そしてついに，1970年Ornsteinはentropyの等しい有限stateの2つのBernoulli変換が同型であることを，Sinaiの上の結果を使って証明したのである〔19〕。この仕事はSinaiによる撞球問題のエルゴード性の証明と並んで，最近におけるエルゴード理論の歴史的成果であろう。彼はさらにFriedmanと共著で，Bernoulli変換に対する同型定理のessenceを用いて，mixing Markov変換をふくむ弱Bernoulli変換というK－systemのあるclassについても，やはりentropyの等しい2つの変換が同型となることを証明した〔7〕。彼はその後，entropy ∞の

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

Bernoulli 変換も，∞＝∞の意味で同型であること〔20〕，Bernoulli 変換の factor もやはりある Bernoulli 変換に同型であること〔21〕を次々と証明した。そしてもはや決定的と思われるK－systemの中でBernoulli と同型でない変換の例の構成に成功したのであった〔23〕。したがって，このことからK－systemの中では entropy が完全な不変量ではないことが結論される。このようにして，entropy の不変量としての完全性に関する問題はほとんど彼の手によって解決されるに至ったのである。

本書は，Ornstein の証明（それは決して分りやすいものではなかった）を，Smorodinsky の論文〔39〕も参考にしながら，数理研で持たれた著者達のセミナーによって，ある程度整理し，拡張したものをまとめたものである。なにぶん短時間のうちにまとめあげたもので，証明その他不備な点も多々あると思う。賢明な読者の御批判を乞う。

1971年2月　　京都にて

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

目 次

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

第1章 緒 論（準備の章）

§1.1 Lebesgue spaceと保測変換

本書で扱う測度空間はすべて non-atomic な（抽象）Lebesgue space に限る。確率空間（X, $\mathcal{F}$, μ）が non-atomic な Lebesgue space とは，区間〔0, 1〕に Lebesgue 測度 m をそえた空間に同型（isomorphic）であることをいう。もう少し詳しく説明しよう。空間 $I=〔0, 1〕$ の Lebesgue 可測な部分集合全体のなす σ - field を $\mathcal{B}$ とし，確率空間（I, $\mathcal{B}$, m）を考える。もし確率1の部分集合 $X'\subset X$, $I'\subset I$ と X' から I' の上への1対1写像 φ で性質

(i) $A\in\mathcal{F}\Longrightarrow\varphi(A\cap X')\in\mathcal{B}$,　$B\in\mathcal{B}\Longrightarrow\varphi^{-1}(B\cap I')\in\mathcal{F}$,

(ii) $A\in\mathcal{F}\Longrightarrow m(\varphi(A\cap X'))=\mu(A)$

を持つものが存在すれば，測度空間（X, $\mathcal{F}$, μ）は non-atomic な Lebesgue space と呼ばれる。以下本書を通じて，単に（X, $\mathcal{F}$, μ）と書いて，non-atomic な Lebesgue space を表わすものとする。なお Lebesgue space の公理論的な定義が Rohlin によって与えられている。それについては〔27〕や〔43〕を参照していただきたい。ただし，ここでは次のことを注意しておく。（X, $\mathcal{F}$, μ）が Lebesgue space であれば，次の2条件をみたす可算系 $\{B_n;\ n\geqq1\}\subset\mathcal{F}$ が存在する：

(i) $\{B_n;\ n\geqq1\}$ の生成する σ - field の完備化が $\mathcal{F}$,

(ii) $\{B_n;\ n\geqq1\}$ は X の2点を分離する。

このような $\{B_n;\ n\geqq1\}$ を（X, $\mathcal{F}$, μ）の基底と呼ぶ。

R^n 上の Borel 集合を可測にする様な完備な確率測度空間は Lebesgue space である。もっと一般に完備で可分な距離空間上の Borel 集合を可測にする様な完備な確率空間は Lebesgue space である。特別な場合として，E を有限または可算無限集合，あるいは $E=R^1$ または R^1 の部分閉区間とし，$X=\prod_{-\infty}^{\infty}E_n$, $E_n=E$, とおけば X は完備で可分な距離空間である。実際 $x=(x_n,\ -\infty<n<\infty)\in X$, $y=(y_n,\ -\infty<n<\infty)\in X$ に対し，距離

$$\rho(x,\ y)=\sum_{-\infty<n<\infty}d(x_n,\ y_n)\,2^{-|n|}$$

を定めればよい。こゝに d は，E が高々可算集合のときには

$$d(e_1,\ e_2)=\begin{cases}1, & e_1\neq e_2,\\ 0, & e_1=e_2,\end{cases}$$

$E=R^1$ またはその部分区間のときは

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$d(e_1, e_2) = \frac{|e_1 - e_2|}{1 + |e_1 - e_2|}$$

である。

空間Xの分割（partition）Pとは，たがいに交わらないXの部分集合の族で，合併集合がXになるものをいう。分割Pに対し，可測集合の可算系$\Sigma = \{B_n\}$があって，Pの任意の二元$p \neq p'$がΣによって分離される，すなわち番号nがあって$p \subset B_n$かつ$p' \subset B_n^c$（または$p \subset B_n^c$かつ$p' \subset B_n$），のときPは可測分割（measurable partition）と呼ばれる。このときPの元pは

$$p = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \quad , \qquad C_n = B_n \text{ または } B_n^c$$

と表わされるので，可測である。

以下本書を通じて分割はすべて可測分割と仮定して，ことわらないことが多い。

可測分割Pに対し，その元を1点と考える集合をX／Pで表わす。そしてXからX／Pへのcanonicalな写像

$$\varphi_P(x) = p, \qquad \text{もし } x \in p, \ p \in P,$$

を定める。測度空間$(X, \mathcal{F}, \mu)$のφ_Pによる像を$(X/P, \mathcal{F}_P, \mu_P)$で表わして，XのPによるfactor space と呼ぶ。これもLebesgue space になることが知られている。

二つの分割PとQにおいて，a. e. $p \in P$に対し$q \in Q$があって$p \subset q$をみたすとき，PはQの細分（QはPよりも粗い）といって$P > Q$で表わす。一番細かい可測分割はXの1点1点への分割であり，それを$\mathcal{E}$で表わす。最も粗い分割はXを唯一つの元とするもの（つまり分割しないという分割）であり，それを$\mathfrak{N}$で表わす。

二つの可測分割PとQに対し，その共通の細分（すなわち$p \cap q$，$p \in P$，$q \in Q$，の形の集合への分割）は再び可測分割になるが，それを$P \vee Q$で表わす。もっと一般に可算個の可測分割$\{P_n\}$に対しても，同様に可測分割$\bigvee_{n=1}^{\infty} P_n$が定義される。

分割Pに対し，Pの元の任意個数の合併集合の形で表わされる可測集合の全体はσ－fieldをなすが，それの$\mathcal{F}$における完備化を$\mathcal{F}(P)$で表わす。完備化の部分を除いて，$\mathcal{F}(P) = \varphi_P^{-1}(\mathcal{F}_P)$である。つぎの諸関係が成りたつ：

(i) $P < Q \Longleftrightarrow \mathcal{F}(P) \subset \mathcal{F}(Q)$。

(ii) $\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$,　$\mathcal{F}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$，こゝで測度0と1の集合から成るtrivialな$\sigma$－fieldも，trivialな分割と同じ記号$\mathfrak{N}$で表わすことにする。

(iii) $\mathcal{F}(\bigvee_{n=1}^{\infty} P_n) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(P_n)$，こゝで右辺は$\mathcal{F}(P_n)$をすべて含む最小の（$\mathcal{F}$で完備な）

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

σ - field を表わす。

(iv) $\mathcal{F}$ で完備な任意の sub $-\sigma-$ field $\mathcal{G}$ に対し，$\mathcal{G}=\mathcal{F}(P)$ となる可測分割Pが存在する。

可測分割Pに対し，各 $p\in P$ 上につぎの様な条件つき測度 $\mu(\cdot|p)$ が一意に存在することが知られている：

(i) a. e. $p\in P$ に対し $(p,\ \mu(\cdot|p))$ は Lebesgue space である（特に $\mu(p|p)=1$）。

(ii) 任意の $A\in\mathcal{F}$ に対し

a) $A\cap p$ は a. e. $p\in P$ に対し $\mu(\cdot|p)$ ー可測，

b) $\mu(A\cap p|p)$ は p について $\mathcal{F}_P$ ー可測，

c) $\mu(A\cap\varphi_P^{-1}(Z))=\int\mu(A\cap p|p)\,d\mu_P(p)$, $Z\in\mathcal{F}_P$,

条件つき測度を $\mu_p(\cdot)=\mu(\cdot|p)$ で表わすこともある。

factor space の測度 μ_P と区別せよ。

条件つき測度をX上の測度と考える方が便利なこともあるので，$\mu(p^c|p)=0$ として拡張しておく。また $\mu(A|p)$ を p の関数として扱うとき，X上の関数と考えたい時もあるので，

$$\mu(A|P\,;\,x)=\mu(A|p),\qquad x\in p,$$

という記号を導入しておく。これは $\mathcal{F}(P)$ ー可測な関係である。

分割の列 $\{P_n\}$ に対する条件つき測度 $\mu(A|P_n\,;\,x)$ の収束について，つぎのことが成りたつことは良く知られている。

定理1．1（Doob〔6〕） 可測分割の列 $\{P_n\}$ が単調増大で $\bigvee_{n=1}^{\infty}P_n=P$ であるか，または単調減少で $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}(P_n)=\mathcal{F}(P)$ であれば，任意の $A\in\mathcal{F}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A|P_n\,;\,x)=\mu(A|P\,;\,x)\qquad \text{a. e. かつ } L^1 \quad \text{が成りたつ。}$$

空間 $(X,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 上の変換Tが条件

(i) TはXからXの上への1対1変換，

(ii) $A\in\mathcal{F}\Longrightarrow TA,\ T^{-1}A\in\mathcal{F}$,

(iii) $A\in\mathcal{F}\Longrightarrow\mu(TA)=\mu(A)$

をみたすとき，Tを保測変換（measure preserving transformation）と呼ぶ。以下，特に断わらない限り，Tは保測変換を表わすことにして，変換Tなどと呼ぶ。空間と変換を組にして $(X,\ \mathcal{F},\ \mu,\ T)$ と書くこともある。

つぎのエルゴード定理は良く知られている。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

定理1．2（Birkhoff）（X，$\mathcal{F}$，μ，T）において，任意の$f \in L^1$に対し極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \bar{f}(x) \quad \text{a. e.}$$

が存在し，$\bar{f}$は関係

$$\int_X \bar{f}(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu$$

をみたす。

上の定理において，もし極限関数$\bar{f}$が定数であれば

$$\bar{f} = \int_X f(x)\, d\mu \quad \text{a. e.}$$

となる。すべての$f \in L^1$に対して，極限関数$\bar{f}$が定数（a. e.）のとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_X f(x)\, d\mu \quad \text{a. e.}$$

が成りたつとき，変換Tはエルゴード的（ergodic）であるといわれる。Tが ergodic であるための必要十分条件は

$$\mu(A \triangle TA) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0 \text{ または } 1$$

である。

エルゴード性よりも更に強く

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^n B) = \mu(A)\mu(B), \quad A, B \in \mathcal{F}$$

が成りたつとき，Tは混合的（mixing）であるといわれる。混合的であればエルゴード的である。実際$\mu(A \triangle TA) = 0$とすれば，$\mu(A \cap T^n A) = \mu(A)$であり，mixing を仮定すれば$\mu(A)^2 = \mu(A)$となって，$\mu(A) = 0$または1である。

変換のつぎのクラスはKolmogorov〔15〕によって導入された。

定義1．1 変換（X，$\mathcal{F}$，μ，T）に対し，分割Pがあって三条件

$$\text{(i)}\ TP > P, \quad \text{(ii)}\ \bigvee_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(T^n P) = \mathcal{F}, \quad \text{(iii)}\ \bigcap_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(T^n P) = \mathfrak{Q},$$

がみたされるならば，TはK－system と呼ばれる。またこの様な分割PをK－分割という。

K－system は混合性よりも強い一様混合性と呼ばれるつぎの性質を持つ。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

Lemma 1.1 分割Pが上の条件(i)をみたすとせよ。このときPが上の条件(iii)をみたすための必要十分条件は，任意の$A\in\mathcal{F}$に対し

$$\rho_n(A)=\sup_{B\in\mathcal{F}(T^nP)}\left|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)\right|\to 0,\quad n\to-\infty$$

が成りたつことである。

（証明） 十分性：$A\in\bigcap_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(T^nP)$は任意のnに対し$A\in\mathcal{F}(T^nP)$だから,

$$\left|\mu(A)-\mu(A)^2\right|\leq\rho_n(A)\to 0,\quad n\to-\infty$$

となって$\mu(A)=0$または1である。

必要性：任意の$B\in\mathcal{F}(T^nP)$に対し

$$\left|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)\right|$$

$$=\left|\int_{X/T^nP}\{\mu(A|p)1_B-\mu(A)1_B\}d\mu_{T^nP}(p)\right|$$

$$\leq\int_{X/T^nP}\left|\mu(A|p)-\mu(A)\right|d\mu_{T^nP}(p)$$

$$=\int_X\left|\mu(A|T^nP;x)-\mu(A)\right|d\mu$$

が成りたつ。最後の式はDoobの定理によって，$n\to-\infty$のとき0に収束する。 QED

このLemmaよりK−systemの混合性が従う。

Lemma 1.2 K−systemはmixingである。

（証明） PをK−system Tに対するK−分割とせよ。もしA, $B\in\mathcal{F}(T^kP)$であれば,

$$\left|\mu(A\cap T^nB)-\mu(A)\mu(B)\right|$$

$$=\left|\mu(T^{-n}A\cap B)-\mu(A)\mu(B)\right|$$

$$\leq\rho_{k-n}(B)\to 0,\quad n\to\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

である。つぎに一般のA，B∈$\mathscr{F}$に対しては上の様なA，Bで近似すればよい。　QED

§1.2　Bernoulli変換，弱Bernoulli変換

この節では，本書の対象であるBernoulli変換と弱Bernoulli変換を定義する。

変換Tに対して，分割Pが

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^n P = \mathcal{E}$$

をみたすとき，PはTのgeneratorであるという。

二つの分割PとQにおいて，

$$\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B),\quad A\in\mathscr{F}(P),\ B\in\mathscr{F}(Q)$$

が成りたてば，PとQは独立(independent)であるという。分割 $P_1,\cdots,P_n$ に対しても同様に

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)=\prod_{j=1}^{n}\mu(A_j),\quad A_j\in\mathscr{F}(P_j),\quad 1\leq j\leq n,$$

が成りたつとき，独立であるという。分割の列$\{P_n;1\leq n<\infty\}$が独立であるとは，任意の有限個が独立のことである。

定義1.2　分割P≒$\mathcal{Q}$が変換Tに対してBernoulliであるというのは，分割の列$\{T^nP;-\infty<n<\infty\}$が独立なることである。変換Tに対して，Bernoulli generator P（つまり，$\{T^nP\}$は独立でかつ$\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^nP=\mathcal{E}$）があれば，TはBernoulli変換と呼ばれる。このときBernoulli変換(T，P)と書くことがある。Bernoulli generator Pの元の個数が有限，可算，連続濃度のとき，それぞれ有限state，可算state，連続stateのBernoulli変換と呼ばれる。

Bernoulli変換はK－systemである。実際，PをTのBernoulli generatorとすれば，$Q=\bigvee_{-\infty}^{0}T^nP$ はK－systemの条件(i)と(ii)をみたす。独立なσ－fieldの列に対するKolmogorovの0－1法則によって，(iii)も成りたつことがわかり，QはK－分割である。

つぎにBernoulli変換を少し弱めた形で，弱Bernoulli変換を定義する。そのための準備として，独立性を弱めたε－独立性を定義し，それについて調べる。

定義1.3　2つの可算分割$P=\{p_i\}$と$Q=\{q_j\}$に対し，

$$\sum_{i,j} |\mu(p_i \cap q_j) - \mu(p_i)\mu(q_j)| \leq \varepsilon$$

が成りたつとき，PとQは$\varepsilon-$independentであるという。可算分割の列$\{P_k\}$において，任意の$n \geq 1$に対し$\bigvee_{k=1}^{n} P_k$とP_{n+1}が$\varepsilon-$independentであるとき，分割の列$\{P_n\}$は$\varepsilon-$independentであるという。

0−independentはindependentと同じであることに注意せよ。PとQが$\varepsilon-$independentであれば：

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq \varepsilon,\quad A \in \mathscr{F}(P),\quad B \in \mathscr{F}(Q),$$

が成りたつ。またPとQが$\varepsilon-$independentでかつ$P' < P$，$Q' < Q$であれば，P'とQ'も$\varepsilon-$independentである。つぎのことが成りたつ。

Lemma 1.3　可算分割P，Q，Rにおいて，PとQはε_1-independent，$P \vee Q$とRはε_2-independentであれば，Pと$Q \vee R$は$(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)-$independentである。これは$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$が0のときにも成りたつ。

（証明）
$$\sum_{p \in P, q \in Q, r \in R} |\mu(p \cap q \cap r) - \mu(p)\mu(q \cap r)|$$
$$\leq \sum_{p,q,r} |\mu(p \cap q \cap r) - \mu(p \cap q)\mu(r)|$$
$$+ \sum_{p,q,r} |\mu(p \cap q) - \mu(p)\mu(q)|\mu(r)$$
$$+ \sum_{p,q,r} \mu(p)|\mu(q)\mu(r) - \mu(q \cap r)|$$
$$\leq \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$$
QED

定義1.4　(i) 有限分割$P \neq \mathscr{E}$が変換Tに対して弱Bernoulliであるというのは，任意の$\varepsilon > 0$に対して，番号$K = K(\varepsilon, P) > 0$があって，すべての$n \geq 0$に対し$\bigvee_{-n}^{0} T^i P$と$\bigvee_{K}^{K+n} T^i P$が$\varepsilon-$independentになることである。(ii)無限分割Pが変換Tに対して弱Bernoulliであるというのは，任意の有限分割$P' < P$がTに対して弱Bernoulliであることをいう。(iii)変換Tが弱Bernoulli generator Pを持てば，Tは弱Bernoulli変換と呼ばれる。このとき弱Bernoulli変換(T，P)というい丶方をすることがある。弱Bernoulli generator Pの元の個数によって，有限

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

state，可算state，連続stateなどと呼ぶのはBernoulli 変換と同様である。

有限stateの弱Bernoulli変換はK－systemであることが容易にわかる。実際，有限分割Pが変換Tの弱Bernoulli generatorであるとせよ。可測分割 $Q=\bigvee_{-\infty}^{0}T^{i}P$ を定めれば，明らかにQはK－systemの条件(i)と(ii)をみたす。(iii)も成りたつことを示そう。任意の $A\in\bigcap\mathscr{F}(T^{n}Q)$ をとる。任意に $\epsilon>0$ を与えると，Aは $A'\in\mathscr{F}(\bigvee_{-m}^{m}T^{i}P)$ によって

(1) $\mu(A\triangle A')<\epsilon$

と近似される。$K=K(\epsilon,P)>0$ を弱Bernoulli分割の定義のものとせよ。そうすると任意の $n\geq m+K$ に対し，$\bigvee_{-m}^{m}T^{i}P$ と $\bigvee_{-n}^{-m-K}T^{i}P$ は ϵ－independentである。$A\in\mathscr{F}(\bigvee_{-\infty}^{-m-K}T^{i}P)$ だから，Aは $A''\in\mathscr{F}(\bigvee_{-n}^{-m-k}T^{i}P)$ でも近似される：

(2) $\mu(A\triangle A'')<\epsilon$

分割 $\bigvee_{-m}^{m}T^{i}P$ と $\bigvee_{-n}^{-m-k}T^{i}P$ は ϵ－independentだから，

(3) $|\mu(A'\cap A'')-\mu(A')\mu(A'')|<\epsilon$

が成りたつ。(1)，(2)，(3)を使ってつぎの評価ができる：

$$
\begin{aligned}
0&\leq\mu(A)-\mu(A)^{2}\\
&\leq|\mu(A)-\mu(A\cap A')|+|\mu(A\cap A')-\mu(A'\cap A'')|\\
&\quad+|\mu(A'\cap A'')-\mu(A')\mu(A'')|+|\mu(A')\mu(A'')-\mu(A)\mu(A'')|\\
&\quad+|\mu(A)\mu(A'')-\mu(A)^{2}|\\
&\leq 2\mu(A\triangle A')+2\mu(A\triangle A'')+\epsilon<5\epsilon
\end{aligned}
$$

ϵ は任意だから，$\mu(A)=\mu(A)^{2}$ したがって $\mu(A)=0$ または1である。

一般の弱Bernoulli変換に対しても上記のことが成りたつかどうかはわからない（補足5°を参照されたい）。有限stateの弱Bernoulli変換はK－system，したがって混合的であることは上に示したが，一般の弱Bernoulli変換も混合的となることが次のようにしてわかる。任意の $A,B\in\mathscr{F}$，$\epsilon>0$ に対し，$m>0$，有限分割 $P'<P$（Pは弱Bernoulli generator）と，$A',B'\in\mathscr{F}(\bigvee_{-m}^{m}T^{i}P')$ があって，$\mu(A\triangle A')<\epsilon$，かつ $\mu(B\triangle B')<\epsilon$ である。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\mu(T^{n}A'\cap B')=\mu(A')\mu(B')$$

は明らかであろう。A，BはA′，B′で上の様に近似されるので，A，Bに対しても上の式が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

§1.3 同型の定義

測度論的に同じ構造を持っている二つの変換は同型と呼ばれる。正確にはつぎの様に同型を定義する。

定義1.4　二つの変換 $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ と $(Y, \mathscr{G}, \nu, S)$ を考える。もしつぎの条件をみたす可測集合 $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ と写像 φ があれば，TとSは同型(isomorphic)であるといゝ，$T \sim S$ で表わす：

(i)　$TX' = X'$, $SY' = Y'$, $\mu(X') = \nu(Y') = 1$,

(ii)　φ は X' から Y' の上への1対1写像で

$$A \in \mathscr{F} \Longrightarrow \varphi(A \cap X') \in \mathscr{G}, \quad B \in \mathscr{G} \Longrightarrow \varphi^{-1}(B \cap Y') \in \mathscr{F},$$

$$A \in \mathscr{F} \Longrightarrow \nu(\varphi(A \cap X')) = \mu(A),$$

(iii)　$\varphi T x = S \varphi x$, $x \in X'$

変換Tがgenerator Pを持ち，Sがgenerator Qを持ち，さらに各 $n > 0$ に対し分割 $P^n = \bigvee_0^n T^i P$ の分布 μ_{P^n} と $Q^n = \bigvee_0^n S^i Q$ の分布 ν_{Q^n} が同型であれば，TとSは同型である。その同型写像 φ は X/P^n から Y/Q^n への同型写像を拡張したものとして与えられる。この φ をcanonicalな同型写像と呼ぶ。このとき (T, P) と (S, Q) が同型であるといゝ，$(T, P) \sim (S, Q)$ と書く。特にgeneratorが可算分割であれば，上のことはつぎの様にいえる。

可算分割 $P = \{p_j\}$ に対し，その分布(=確率ベクトル)を

$$d(P) = \{\mu(p_1), \mu(p_2), \cdots\}$$

で定める(こゝではPの元の番号づけを固定している)。変換TとSがそれぞれ可算generator PとQを持ち，すべての $n > 0$ に対して

$$d\left(\bigvee_0^n T^i P\right) = d\left(\bigvee_0^n S^i Q\right)$$

であれば，$(T, P) \sim (S, Q)$ である。特にPとQがそれぞれBernoulli generatorの時には，

$$d(P) = d(Q)$$

であれば，$(T, P) \sim (S, Q)$ である。

上記の様にBernoulli変換は，そのBernoulli generator Pの分布 μ_P によって特徴づけられる。特にPが可算分割であれば，確率ベクトル $d(P)$ によって特徴づけられるわけである。また任意

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

に確率ベクトル$\pi=(\pi_1, \pi_2, \cdots)$を与えると，$d(P)=\pi$なるBernoulli generator Pを持つBernoulli変換が存在する（第２章の例２．１を参照）。

一般に変換$(X, \mathscr{F}, \mu, T)$に対し，Tで不変な可測分割P，$TP=P$（すなわち，任意の$p\in P$は$Tp\in P$），があるとき，空間$(X_P, \mathscr{F}_P, \mu_P)$にTから自然に保測変換$T_P$が導かれる。これをTの factor と呼ぶ。分割Qに対し$P=\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^iQ$はTで不変であり，factor T_Pが定まるが，記号を簡単にするために，それを$({}_QX, {}_Q\mathscr{F}, {}_Q\mu, {}_QT)$とか$(T, Q)$と書くことにする。つまりQは${}_QT$の generator であり，前の書き方によれば$({}_QT, Q)$と書くべきであるが，それを省略して(T, Q)と書くのである。

さて二つの変換TとSを考えよう。分割PとQをそれぞれTとSの generator とする。もし空間Yの分割P'があって，$(T, P)\sim(S, P')$でありかつ$\bigvee_{-\infty}^{\infty}S^iP'\supset Q$であれば，TとSは同型である。何故なら$\bigvee_{-\infty}^{\infty}S^iP'\supset Q$は$P'$がSの generator であることを示しているからである。

定義１．５　変換TとSに対し，それぞれTとSで不変な分割PとQがあって，$T\sim S_Q$かつ$T_P\sim S$であれば，TとSは弱同型（weakly isomorphic）であるといわれる。

§１．４　距離dとD

可算分割$P=\{p_n\}$に対し，その（正測度の）元の個数を$N(P)$で表わし，分布を前節の様に$d(P)=\{\mu(p_1), \mu(p_2), \cdots\}$で表わす。二つの可算分割$P=\{p_n\}$と$Q=\{q_n\}$に対し，もし$N(P)>N(Q)$であればQに空集合をつけ加えて，形式的に元の個数をそろえて分布の間の距離

$$d(P, Q)=\sum_n|\mu(p_n)-\mu(q_n)|$$

と分割の間の距離

$$D(P, Q)=\sum_n\mu(p_n\triangle q_n)$$

を定める。（ここでも分割の元の番号づけは固定したものとしておく。）dとDがともに距離になることは明らかであろう。さらに

$$d(P, Q)\leq D(P, Q)\leq 2$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

が成りたつ。

可算分割 P_1, P_2, Q_1, Q_2 に対し，細分 $P_1 \vee P_2$ の元の番号のつけ方を一定にしておき，さらに $P_1 \vee P_2$ と $Q_1 \vee Q_2$ において，細分をとる前に元の個数をそろえることにすれば，関係

$$D(P_1, Q_1) \leq D(P_1 \vee P_2, Q_1 \vee Q_2)$$

$$\leq D(P_1, Q_1) + D(P_2, Q_2)$$

が成りたつ。証明をしよう。$P_i = \{p_n^i\}$, $Q_i = \{q_n^i\}$, $i = 1, 2$, とおく。

$$D(P_1, Q_1) = \sum_n \mu(p_n^1 \triangle q_n^1)$$

$$\leq \sum_n \mu\left(\bigcup_m \{(p_n^1 \cap p_m^2) \triangle (q_n^1 \cap q_m^2)\}\right)$$

$$= \sum_{n,m} \mu((p_n^1 \cap p_m^2) \triangle (q_n^1 \cap q_m^2))$$

$$= D(P_1 \vee P_2, Q_1 \vee Q_2)$$

第2の不等式の証明には，$(p_n^1 \cap p_m^2) \triangle (q_n^1 \cap q_m^2) \subset \{(p_n^1 \triangle q_n^1) \cap p_m^2\} \cup \{(p_m^2 \triangle q_m^2) \cap q_n^1\}$ なる関係を用いる：

$$D(P_1 \vee P_2, Q_1 \vee Q_2) = \sum_{n,m} \mu((p_n^1 \cap p_m^2) \triangle (q_n^1 \cap q_m^2))$$

$$\leq \sum_{n,m} \{\mu((p_n^1 \triangle q_n^1) \cap p_m^2) + \mu((p_m^2 \triangle q_m^2) \cap q_n^1)\}$$

$$= D(P_1, Q_1) + D(P_2, Q_2)$$

<u>Lemma 1.4</u>　可算分割の空間は距離 d および D に関して完備で可分な距離空間をなす。

（証明）　すべてやさしいので，後で用いる D の完備性のみを示す。$\{P_n\}$ を D－基本列とせよ。部分列が収束すれば，$\{P_n\}$ 自身が同じ極限に収束するので，初めから

$$\sum_n D(P_n, P_{n+1}) < \infty$$

と仮定して良い。$P_n = \{p_k^n ; k \geq 1\}$ と表わす。一般に

$$\mu(A \triangle B) = \int_X |1_A(x) - 1_B(x)| \, d\mu$$

であって，$L^1(X)$ は完備だから，上の仮定により，各 k に対し

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |1p_k^n(x)-f_k(x)|d\mu=0$$

なる $f_k \in L^1(X)$ がある。$1p_k^n$ の部分列が f_k に a. e. 収束するから $f_k=1p_k$ の形である。したがって，各 k に対し

$$\lim_{n\to\infty}\mu(p_k^n \triangle p_k)=0$$

なる p_k がとれたわけである。$i \neq k$ のとき

$$\mu(p_i \cap p_k) \leq \mu(p_i \triangle p_i^n)+\mu(p_k^n \triangle p_k) \to 0\ ,\ n\to\infty$$

が成りたつ。簡単のため $1p_k^n \to 1p_k$ a. e. と仮定すれば，

$$\left|\sum_k \mu(p_k)-1\right| \leq \sum_k |\mu(p_k)-\mu(p_k^n)|$$

$$\leq \sum_k \int_X |1p_k-1p_k^n|\, d\mu$$

$$=\sum_k \int_X \left|\sum_{m=n}^{\infty}(1p_k^{m+1}-1p_k^m)\right| d\mu$$

$$\leq \sum_{m\geq n} D(P_{m+1}, P_m) \to 0,\ n\to\infty\ ,$$

が成りたつ。したがって，$P=\{p_k\}$ は X の可算分割を定める。また上の式の後半は

$$D(P_n, P) \to 0,\quad n\to\infty\ ,$$

を示している。 QED

距離 d は分布の間の距離だから，可算分割 $P=\{p_n\}$ の分布 $d(P)$ と確率ベクトル $\pi=\{\pi_n\}$ に対しても

$$d(P, \pi)=\sum_n |\mu(p_n)-\pi_n|$$

が定義されることを注意しておく。二つの確率ベクトル π と π' の間の距離 $d(\pi, \pi')$ も同様に定める。

測度正の可測集合 X' に対し，$\mathcal{F}/X'=\{A\, ;\, A\in\mathcal{F},\ A\subset X'\}$ および条件つき測度

$$\mu(A|X')=\frac{\mu(A)}{\mu(X')}\quad ,\quad A\in\mathcal{F}/X'$$

を定めれば $(X', \mathcal{F}/X', \mu(\cdot|X'))$ は Lebesgue space である。可測分割 P に対し，その X' への制限を P/X' と書く。つまり $P/X'=\{p\cap X'\, ;\, p\in P\}$ である。可算分割 $P=\{p_n\}$，

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$Q=\{q_n\}$ に対し，その X' への制限 P/X', Q/X' のD−metricを

$$D(P, Q \mid X') = D(P/X', Q/X')$$

$$= \Sigma_n \mu(p_n \triangle q_n \mid X')$$

で定義する。同様に分布を

$$d(P/X') = \{\mu(p_n \cap X' \mid X') ; n \geq 1\}$$

で表わす。

§1.5 Entropy

この節では本書において必要な最少限の範囲でentropyの性質を述べることにしよう〔4〕〔30〕〔41〕。$(X, \mathcal{F}, \mu)$ をLebesgue space としてその可算分割を $P=\{p_i\}$ とする。今 $\mathcal{F}(P)$ 可測関数 $\mu(x ; P)$ を

$$\mu(X ; P) = \mu(p_i) \quad \text{for} \quad x \in p_i$$

によって定義する。そのときPのentropy $H(P)$ を

$$H(P) = -\int_\Omega \log \mu(X ; P) \, d\mu$$

によって定義する。但しlogの底は2とする。以後本書でのあつかいのために可算分割のclassを次のように定めておくことにしよう。

$$Z_c = \{P ; P\text{が可算分割}\}$$

$$Z_c = \{P ; H(P) < \infty\}$$

$$Z_f = \{P ; P\text{が有限分割}\}$$

ところで $H(p) = -\sum_i \mu(p_i) \log \mu(p_i)$ が成立することが分るのでこれを定義とすることがある。ただし，$0 \log 0 = 0$ と約束する。$H(P)$ の性質として

(H_1) $\quad P < Q \quad p, Q \in Zc \Longrightarrow H(P) \leqslant H(Q)$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

が成立することは明らかであろう。次の条件付 entropy の定義を与えよう。Wを可測分割，$P \in Z_c$ とするときPはa. e. $w \in W$に対して空間wの上の可算分割 $P_w = P \cap w$ を導くので，その entropy $H(P/w) = -\int_w \log \mu_w(x; p_w)\, d\mu_w$ が定まる。これは X/W 上の非負可測関数であるので，その積分

$$H(P|W) = \int_{X/W} H(P/w)\, d\mu_W$$

をPのWに関する条件付 entropy と呼ぶ。点xを含むPの元を $p(x)$，Wの元を$w(x)$として

$$\mu(x; P|W) = \mu_{w(x)}(p(x))$$

とおけば，$w \in W$に対して $\mu_w(x; P_w)$ は $\mu(x; P|W)$ のwへの制限であるから，

$$H(P|W) = -\int_X \log \mu(x; P|W)\, d\mu = -\sum_i \int_X 1_{p_i}(x) \log \mu(p_i|W: x)\, d\mu$$

ここで $\mu(p_i|W; x)$ は p_i のWによる条件付確率である。ところで

$$H(P|W) = -\sum_{i \geq 1} \int_{X/W} \mu_w(p_i) \log \mu_w(p_i)\, d\mu_w$$

とかけることよりWが可算分割のとき

$$H(P|W) = -\sum_{i,j} \mu(p_i \cap w_j) \log \frac{\mu(p_i \cap w_j)}{\mu(w_j)}$$

となる。条件付 entropy について次に性質を述べよう。

(H_2) $P \in Z_c$，Wが trivial な分割 $\Longrightarrow H(P|W) = H(P)$

Wが$W > P$ $\Longrightarrow H(P|W) = 0$

(H_3) $P, Q \in Z_c$ $P < Q$ $\Longrightarrow H(P|W) \leqslant H(Q|W)$

(H_4) $P = \{p_i\}_{i=1}$ $P_n = \{p_1 \cdots, p_{n-1}, \bigcup_{j \geq n} p_j\}$ とするとき

$$H(P_n|W) \nearrow H(P|W)$$

(H_5) $W < Y$, $P \in Z_c$ $\Longrightarrow H(P|W) \geqslant H(P|Y)$

$(H_2)-(H_4)$ については定義にもどればたただちに証明できる。さらに(H_5)は，条件付確率

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

にかんする$\varphi(X)=-x\log x$についての Jensen の不等式を用いて証明出来る。

$$(H_6)\quad P, Q \in Z_c \Longrightarrow H(P\vee Q|W)=H(P|W)+H(Q|P\vee W)$$

(H_6)の証明の方針はWが trivial のとき$H(P\vee Q)=H(P)+H(Q|P)$が成立することを entropy の公式にもどって示し，Wが一般のときはa. e. $w\in W$について

$$H(P/_w \vee Q/_w)=H(P/_w)+H(Q/_w|P/_w)。$$

両辺をX/W上でμ_wで積分すると

$$H(P\vee Q|W)=H(P|W)+\int_{X/W}H(Q/_w|P/_w)\,d\mu_w$$

ところで

$$H(Q/_w|P/_w)=-\int_w \log\mu_w(X;Q/_w|P/_w)\,d\mu_w(x)$$

及び$\mu_w(x;Q/_w|P/_w)$は$\mu(x;Q|P\vee W)$のwへの制限だから，

$$\int_{X/W}H(Q/_w|P/_w)\,d\mu_w=-\int_{X/W}d\mu_w(w)\int_w \log\mu(x;Q|P\vee W)\,d\mu_w(x)$$

$$=H(Q|P\vee W)$$

次に entropy の議論で大切な性質を示そう。

$$(H_7)\quad W_n\leqq W_{n+1},\ \bigvee_{n=1}^{\infty}W_n=W,\quad P\in Z_e$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}H(P|W_n)=H(P|W)$$

（証明） 条件付確率の収束に関する Doob の定理1.1によって，各$p_i\in P$について

$$\lim_{n\to\infty}\mu(p_i|W_n;x)=\mu(p_i|W;x)\ \text{a. e}$$

Pが finite partition で$P=\{p_i\}_{i=1}^{k}$と書けているとき

$$\lim_{n\to\infty}H(P|W_n)=-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\int_X 1_{p_i}(x)\log\mu(p_i|W_n;x)\,d\mu$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\Sigma_{i=1}^{k}\int_X\mu(p_i|W_n;x)\log\mu(p_i|W_n;x)\,d\mu$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$= -\Sigma_{i=1}^{k} \int_X \mu(pi \mid W; x) \log \mu(pi \mid W; x) d\mu = H(P \mid W)$$

Pが可算個の場合は$P_k = \{p_1 \cdots p_{k-1}, \bigcup_{j \geqq k} pj\}$とおくことによって，($H_4$)より任意の$\delta > 0$に対して，ある$k_0$があって，$k \geqq k_0$については

$$H(P \mid W_1) - H(P_k \mid W_1) < \delta。$$

勝手なnについて(H_5)(H_6)より

$$H(P \mid W_n) - H(P_k \mid W_n) = H(P \mid W_n \vee P_k)$$

$$\leqq H(P \mid W_1 \vee P_k) = H(P \mid W_1) - H(P_k \mid W_1) < \delta$$

よって

$$H(P \mid W) - H(P_k \mid W) \leqq \delta, \quad k \geqq 1$$

このことによって結論は容易に導びかれる。 QED

ところで2つの可測分割W，Yにおいて任意の$w \in \mathscr{F}(W)$ $y \in \mathscr{F}(Y)$が$\mu(w \cap y) = \mu(w)\mu(y)$をみたすときWとYは独立という。これは任意の$w \in \mathscr{F}(W)$について，a. e. $y \in Y$が$\mu_y(w) = \mu(w)$をみたすことと必要十分であることが知られている。これを用いてentropyについては次の関係が成り立つ。

(H_8)　$P \in Z_c$ ；PとWが独立　$\Rightarrow H(P \mid W) = H(P)$

(H_9)　$P, Q \in Z_c$，PとQが独立 $\Rightarrow H(P \vee Q) = H(P) + H(Q)$

($X, \mathscr{F}, \mu$)上の保測変換をTとするとき，$P \in Z_e$ についてのTのentropy $h(P, T)$を

$$h(P, T) = H(P \mid \bigvee_{-\infty}^{-1} T^i P)$$

によって定義する。さらにTのentropy $h(T)$を

$$h(T) = \sup\{h(P, T) \mid P \in Z_e\}$$

によって定義する。次にTに関するentropyの種々の性質を述べることにしよう。

(H_{10})　$P \in Z_c$　$\Rightarrow H(P \mid W) = H(TP \mid TW)$

(H_{11})　$P \in Z_e$　$\Rightarrow H(\bigvee_{0}^{n-1} T^i P \mid \bigvee_{\infty}^{-1} T^i P) = nh(P, T)$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(証明) $H\left(\bigvee_{0}^{n-1}T^{i}P \,\middle|\, \bigvee_{-\infty}^{-1}T^{i}P\right)=\sum_{k=0}^{n-1}H\left(T^{k}P \,\middle|\, \bigvee_{-\infty}^{-k+1}T^{i}P\right)$

$=nh(P,T)$ QED

(H_{12}) $P\in Z_e \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{0}^{n-1}T^{i}P\right)=H(P,T)$

(証明) $\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{0}^{n-1}T^{i}P\right)=\frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^{n}H\left(P \,\middle|\, \bigvee_{-k}^{-1}T^{i}P\right)$

(H_7) に注意して $n\to\infty$ にすればよい。 QED

(H_{13}) $P, Q\in Z_e \Rightarrow h(P,T)\leqq h(Q,T)+H\left(P \,\middle|\, \bigvee_{-\infty}^{\infty}T^{k}Q\right)$

$\leqq h(Q,T)+H(P\,|\,Q)$

(証明) 任意の $s>0$ について

$$H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1}T^{j}P\right)\leqq H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1}T^{j}P\vee\bigvee_{m=-s}^{s+n-1}T^{m}Q\right)$$

$$=H\left(\bigvee_{m=-s}^{s+n-1}T^{m}Q\right)+H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1}T^{j}P \,\middle|\, \bigvee_{-s}^{s+n-1}T^{m}Q\right)$$

$$\leqq H\left(\bigvee_{j=0}^{2s+n-1}T^{j}Q\right)+\Sigma_{j=0}^{n-1}H\left(T^{j}P \,\middle|\, \bigvee_{-s}^{s+n-1}T^{m}Q\right)$$

$$\leqq H\left(\bigvee_{j=0}^{2s+n-1}T^{j}Q\right)+nH\left(P \,\middle|\, \bigvee_{k=-s}^{s}T^{k}Q\right)。$$

両辺を n で割って $n\to\infty$ とすれば

$$h(P,T)\leqq h(Q,T)+H\left(P \,\middle|\, \bigvee_{k=-s}^{s}T^{k}Q\right),\ s\geqq 0$$

よって結論を得る。 QED

(H_{14}) (i) $P\in Z_f$ を与えたとき，任意の $\epsilon>0$ に対してある $\delta=\delta(P,\epsilon)>0$ が存在して

$$D(P,Q)<\delta,\ N(P)\geqq N(Q) \Rightarrow |h(P,T)-h(Q,T)|<\epsilon$$

(ii) $P\in Z_e$ を与えたとき，任意の $\epsilon>0$ に対してある $\delta=\delta(P,\epsilon)>0$ が存在して

$$D(P,Q)<\delta \Rightarrow h(P,T)-\epsilon<h(Q,T)$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

（証明） (i)について$P=\{p_i\}_{i=1}^{k}$とすると$N(Q)=k$として一般性をうしなわない。$N(P)=N(Q)$により，任意の$\epsilon>0$に対して，ある$\delta>0$が存在して

$$D(P,Q)<\delta \Rightarrow H(P|Q)+H(Q|P)=2H(P\vee Q)-H(P)-H(Q)<\varepsilon$$

とすることが出来る。ところで(H_{13})より

$$|h(P,T)-h(Q,T)|\leqslant H(P|Q)+H(Q|P)$$

が得られるので(i)は示された。(ii)については$P=\{p_i\}$ $P_n=\{p_1,\cdots,p_{n-1}\bigcup_{j\geq n}p_j\}$とすれば任意の$\epsilon>0$に対してある$n_0$が存在して$n\geqslant n_0$ならば

$$h(P,T)-\epsilon/2<h(P_n,T)$$

P_nをとめて考えると，このP_nについて(i)を用いて$\epsilon/2$に対してある$\delta(P_n,\epsilon/2)>0$が存在して

$$D(P_n,Q_n)<\delta \Rightarrow h(P_n,T)-\epsilon/2<h(Q_n,T)$$

そのδが求めるδである。実際$D(P,Q)<\delta \Rightarrow D(P_n,Q_n)<\delta$，ここで$Q_n$は$Q$から$P_n$と個数をあわせてつくった$Q>Q_n$なる分割とする。このことから

$$h(P,T)-\epsilon<h(P_n,T)-\epsilon/2<h(Q_n,T)\leqslant h(Q,T)。$$ QED

(H_{15}) $P\in Z_e$で$\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^nP=\mathfrak{F}$，すなわち$P$がgeneratorであるならば，$h(P,T)=h(T)$。

（証明） (H_{14}) (H_2)によって，勝手な$Q\in Z_e$について

$$h(Q,T)\leqslant h(P,T)+H(Q|\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^iP)=h(P,T)$$

より(H_{15})は示せる。 QED

(H_{16}) $P\in Z_c$でPがTのBernoulli generatorであるならば，

$$H(P)=h(T)$$

（証明） $H(P)<\infty$のときは(H_{15}) (H_9)及びT^iPが独立sequenceをつくること

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

から

$$h(P,T)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\bigvee_{0}^{n-1}T^{i}P)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}H(P)=H(P)$$

より出る。$H(P)=\infty$のときは $P_n=\{p_1\cdots p_{n-1}\bigcup_{j\geq n}p_j\}$についてはH$(P_n)=h(P_n,T)$ よって$H(P)=h(T)=\infty$のいみで(H_{16})が成立する。　QED

最後にentropyが同型不変量であるという次の性質をのべることにしよう。

(H_{17})　$T\sim S$（同型）　$\Longrightarrow h(T)=h(S)$

これはentropyの定義からただちに出る。

§1.6　Shannon－McMillanの定理

Tを空間$(X,\mathcal{F},\mu)$上の保測変換とし，$P=\{p_j\}$をentropy有限な分割としよう。§1.5において

$$h(P,T)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(P\vee TP\vee\cdots\vee T^{n-1}P)$$

となることに注意した。ところで$\mathcal{F}(\bigvee_{0}^{n-1}T^{i}P)$可測関数$p_n(x)$を

$$p_n(x)=\mu(p_{j_0}\cap Tp_{j_1}\cap\cdots\cap T^{n-1}p_{j_n}),\quad x\in p_{j_0}\cap\cdots\cap T^{n-1}p_{j_n}$$

によって定義すれば上の式は

$$h(P,T)=\lim_{n\to\infty}\int_X-\frac{1}{n}\log p_n(x)\,d\mu$$

に外ならない。ここではこの関係を精密化したShannon－McMillanの定理を本書で必要な形で述べることにしよう。すなわち

定理1.3（Shannon–McMillan）〔4〕〔25〕〔43〕

$(X,\mathcal{F},\mu,T)$をergodicな保測変換，$P=\{p_j\}$をentropy有限な分割とする。そのとき

(i)　$\lim_{n\to\infty}\{-\frac{1}{n}\log p_n(x)\}=h(P,T)$　a.e.

(ii)　任意に$\epsilon>0$と$\delta>0$を与えたとき，あるinteger n_0が存在して，任意の$n\geq n_0$に対し

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

て$\mathcal{F}(\bigvee_{0}^{n-1} T^{i}P) \ni H_n$ が次の性質をみたすようにとれる：

(a) $\mu(H_n^c) < \epsilon$

(b) $x \in H_n$ について $2^{-n(h(P,T)+\delta)} < p_n(x) < 2^{-n(h(P,T)-\delta)}$

（証明） $\sum_j 1_{p_j}(x)\mu(p_j \mid \mathcal{G}; x)$ を $\mu(x; P \mid \mathcal{G})$ とおくことにしよう。そのとき $\mathcal{G}$ が countable partition $Q = \{q_i\}$ であれば $\mu(x; P \mid Q) = \mu(p_j \mid q_i)$ a. e. , $x \in p_j \cap q_i$, が成立する。ところで

$$\mu(\bigcap_{i=0}^{\ell} T^{i} p_{j_i}) = \mu(\bigcap_{i=0}^{\ell-1} T^{i} p_{j_i}) \cdot \mu(T^{\ell} p_{j_\ell} \mid \bigcap_{0}^{\ell-1} T^{j} p_{j_i})$$

より

$$p_{\ell+1}(x) = p_\ell(x)\mu(x; T^{\ell}P \mid \bigvee_{j=0}^{\ell-1} T^{j}P) = p_\ell(x)\mu(T^{\ell}x : P \mid \bigvee_{j=1}^{\ell} T^{-j}P) \quad \text{a. e.}$$

$-\log\mu(x; P \mid \bigvee_{j=1}^{\ell} T^{-j}P)$ を $q_\ell(x)$ とおくことにすれば

$$-\frac{1}{n}\log p_n(x) = -\frac{1}{n}\log p_1(x) + \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} q_\ell(T^{-\ell}x) \quad \text{a. e.}$$

が成り立つ。又 Doob の定理によって $q_\ell(x)$ の limit が存在して，それを $q(x)$ とおくと，

$$\lim_{\ell\to\infty} q_\ell(x) = q(x) = -\log\mu(x; P \mid \bigvee_{j=1}^{\infty} T^{-j}P) \quad \text{a. e.}$$

となる。さらに $q_\ell(x)$ は

$$\int_X \sup_\ell q_\ell(x)\,d\mu \leqq H(P) + \frac{1}{\log_e 2}$$

なることが分る。実際

$$f(x) = \sup_\ell q_\ell(x) \qquad F(a) = \mu(\{x \mid f(x) > a\}) \quad 0 \leqq a < \infty$$

とおくと

$$\int_X f(x)\,d\mu = \int_0^\infty F(a)\,da$$

$$q_\ell(x) = -\sum 1_{p_j}(x)\log\mu(p_j \mid \bigvee_{1}^{\ell} T^{-i}p; x)$$

に注意して

$$F(a)=\mu(\{x \mid \sup_{\ell} q_{\ell}(x)>a\})$$

$$=\sum_{pj}\mu\ (pj\cap\{x \mid \inf_{\ell}\mu(pj \mid \bigvee_{1}^{\ell}T^{-i}P;x)<2^{-a}\})$$

であることがわかる。そこで

$$B_n^{(j)}=\{x;\mu(pj \mid \bigvee_{1}^{n}T^{-i}P;x)<2^{-a},\mu(pj \mid \bigvee_{1}^{k}T^{-i}P;x)\geqq 2^{-a},k<n\}$$

とおけば，$B_n^{(j)}\in\mathcal{F}(\bigvee_{1}^{n}T^{-i}P)$ より

$$\mu(pj\cap\{x;\inf\mu(pj \mid \bigvee_{1}^{n}T^{-i}P;x)<2^{-a}\})$$

$$=\Sigma_{n=1}^{\infty}\mu(pj\cap B_n^{(j)})=\Sigma_{n=1}^{\infty}\int_{B_n^{(j)}}\mu(pj \mid \bigvee_{1}^{n}T^{-i}P;x)d\mu$$

$$\leqq\Sigma_{n=1}^{\infty}2^{-a}\mu(B_n^{(j)})\leqq 2^{-a}$$

が成り立つ。したがって

$$F(a)\leqq\sum_{pj\in P}\min\{\mu(pj),2^{-a}\}$$

である。故に

$$\int_X f(x)dx=\int_0^{\infty}F(a)da\leqq\sum_{pj\in P}\int_0^{\infty}\min\{\mu(pj),2^{-a}\}da$$

$$=\sum_{pj\in P}\int_0^{-\log\mu(pj)}\mu(pj)da+\int_{-\log\mu(pj)}2^{-a}da$$

$$=\sum_{pj\in P}\{-\mu(pj)\log\mu(pj)+\frac{1}{\log_e 2}\mu(pj)$$

$$=H(P)+\frac{1}{\log_e 2}$$

ところで話をもとにもどして

$$\frac{1}{n}\Sigma_{\ell=1}^{n-1}q_{\ell}(T^{-\ell}x)=\frac{1}{n}\Sigma_{\ell=1}^{n-1}q(T^{-\ell}x)+\frac{1}{n}\Sigma_{\ell=1}^{n-1}(q_{\ell}(T^{-\ell}x)-q(T^{-\ell}x))$$

このlimitが問題であったのだが，第1項は $g(x)\in L^1(X)$ 及びTのエルゴード性より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Sigma_{\ell=1}^{n-1}q(T^{-\ell}x)=-\int_X\log\mu(x;P \mid \bigvee_{j=1}^{\infty}T^{-j}P)=h(P,T)\quad a.e.$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

第2項が0に収束することをいうために，

$$G_N(x)=\sup_{k\geq N}|q_k(x)-q(x)| \quad , \quad N\geqq 1$$

とおこう。$G_N(x)\to 0$ a. e. であるがさらに

$$G_N(x)\leqq q(x)+\sup_k q_k(x) \in L^1(X)$$

よって$\int_X G_N(x)d\mu\to 0$，$N\to\infty$. さらにエルゴード定理から

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\Sigma_{\ell=1}^{n-1}|q_\ell(T^{-\ell}X)-q(T^{-\ell}X)|$$

$$\leqq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\Sigma_{\ell=1}^{n-1}G_N(T^{-\ell}X)=\int_X G_N(x)d\mu , \quad N\geqq 1$$

故に第2項目もa.e. で0に収束する。

(ii)については，(i)においてa. e. 収束が言えたので確率収束し明らか。　　QED

§1.7 Rohlinの定理

本章の最後であるこの節では，Rohlin の定理と呼ばれる2つの定理を述べることにしよう。この定理が同型問題の解決にShannon－McMillanの定理と同様大切な役割を演ずる。しかしRohlinのgeneratorの存在定理については，準備がおおがかりであるので証明をはぶかせていただき，ここではRohlin の保測変換に対する周期的保測変換による近似定理を証明することにする。

Tを$(X,\mathfrak{F},\mu)$上の保測変換としよう。点$x\in X$の周期を

$$p(x)=\begin{cases}\min\{n>0 \,;\, T^n x=x\}\\ \infty \text{，もし全ての} n>0 \text{で} T^n x\neq x\end{cases}$$

で定める。Tに対して$A, TA, \cdots T^{p-1}A$が互いに交わらないような可測集合の全体を$\mathfrak{D}_p=\mathfrak{D}_p(T)$で表わす。

<u>Lemma 1.5</u>　集合Aが$\mu(A)>0$，且つa. e. $x\in A$に対して$p(x)\geqq p$ならば，ある集合$A_0\subset A$が存在して$\mu(A_0)>0$ 且つ $A_0\in\mathfrak{D}_p$。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

（証明） Aの基底（Lebesgue spaceの定義参照）を$\{B_n ; n \geqq 1\}$と $\overline{B}_n = A \setminus B_n$ とおけば，a. e. $x \in A$について$p(x) \geqq p$より

$$\mu\left(\bigcap_n \{(B_n \cap T^q B_n) \cup (\overline{B}_n \cap T^q \overline{B}_n)\}\right) = 0 \quad 1 \leqq q < p$$

である。$q=1$のとき$\mu(A)$と上式の差をとって

$$\mu\left((A \cap TA^c) \cup \bigcup_n \{(A \cap B_n^c \cap TB_n) \cup (TB_n^c \cap B_n)\}\right) = \mu(A)$$

を得る。これよりあるn_1が存在して$\mu(B_{n_1} \triangle TB_{n_1}) > 0$。$A_1 = B_{n_1} \setminus T^{-1} B_{n_1}$ とおけば，$A_1 \cap TA_1 = \phi$ かつ$\mu(A_1) > 0$となる。次にA_1を上のAと思って，同じ議論を$q=2$で行なえば，$\mu(B_{n_2} \triangle T^2 B_{n_2}) > 0$なる$B_{n_2} \subset A$があることがわかる。$A_2$を$A_2 = B_{n_2} \setminus T^{-2} B_{n_2}$とすれば，$\mu(A_2) > 0$かつ$A_2 \subset A_1$より$A_2$，$TA_2$， $T^2 A_2$ は互いにdisjoint 。以上の方法を$q = p-1$まで続けるとA_{p-1}が求められる。これが求める A_0である。 QED

Tにエルゴード性を仮定すれば，今のLemmaはさらに容易に示めされるであろう。ところでZorn の Lemma を用いて$\mathcal{D}_p$の極大元をAとすれば，$\mu(A \setminus A') = 0$なる$A' \in \mathcal{D}_p$ は必ず$\mu(A) = \mu(A')$をみたす。

<u>Lemma 1. 6</u> $x \in X$について$p(x) \geqq p$ a. e のとき，$A \in \mathcal{D}_p$が極大である必要十分条件は

$$\mu\left(\bigcup_{k=1-p}^{p-1} T^k A\right) = 1.$$

従って極大元$A \in \mathcal{D}_p$ の測度は$\mu(A) \geqq 1/(2p-1)$。

（証明） $A, B \in \mathcal{D}_p$ $A \cap B = \phi$に対して$A \cup B \in \mathcal{D}_p$と$T^i A \cap T^j B = \phi$ $0 \leqq i, j < p$とは同値。それは又 $B \cap \left(\bigcup_{1-p}^{p-1} T^k A\right) = \phi$ と同値。この性質を用いてLemma 1. 6 は証明できる。 QED

<u>Lemma 1. 7</u> Tが周期点をもたなければ，任意の$p \geqq 1$に対し，つぎの4条件をみたす保測変換Sと集合Aが存在する；

a） A上でSは周期pをもつ，

b） $\mu(A) > 1/2$

c） A^cでSは周期点を持たない，

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

d) $d(S, T) = \mu(\{x ; Sx \neq Tx\}) \leqq 2/p$

ところでTが周期点をもたないとは $p(x) = \infty$ a. e のことをいう。

(証明) Lemma 1. 6. により $\mu(B) \geqq 1/(2p-1)$ なる $B \in \mathcal{D}_p$ がある。$A = \bigcup_0^{p-1} T^k B$ とおき

$$Sx = \begin{cases} T\,x & x \in \bigcup_0^{p-2} T^k B \\ T^{1-p}\,x & x \in T^{p-1} B \end{cases}$$

と定めればAはa), b)をみたす。$C = A^c \cap T^{-1} A^c$ 上で

$$Sx = Tx, \quad x \in C$$

とおく。Sの定義されていない残りの集合では，$D = A^c \cap T^{-1} A = A^c \cap T^{-1} B$ 値域として $E = A^c \setminus TC = A^c \cap T^p B$ なる適当な写像を導入する。D上のSの定め方に関係なくd)は成り立つ。実際 $\{x ; Sx \neq Tx\} \subset T^{p-1} B \cup D$ だから

$$d(S, T) \leqq \mu(T^{p-1} B) + \mu(T^{-1} B) \leqq \frac{2}{p} 。$$

$F = \{x ;$ 全ての $n \geqq 0$ に対して $T^n x \in C\}$ とすれば $TF \subset F$ だから $\mu(F \setminus TF) = 0$ である。$F \subset C$ だから $\mu(F \setminus TC) = 0$，すなわち $\mu((TC)^c \setminus F^c) = 0$ である。一方 $E \subset (TC)^c$ だから，a. e. $x \in E$ は或る $n \geqq 1$ で $T^n x \in D$ となる。$\mu(D) = \mu(E)$ よりa. e. $x \in D$ は或る $n \geqq 1$ で $T^{-n} x \in E$ である。そのようなnの最小値を $n(x)$ で表わそう。E上の周期点を持たない任意の保測変換Rを用いて

$$Sx = R\,T^{-n(x)} x, \quad x \in D$$

と定めればc)もみたされる。 QED

<u>Lemma 1. 8</u> Tが周期点を持たなければ，任意の $p \geqq 1$ に対し，周期pの保測変換Sで $d(T, S) \leqq 4/p$ をみたすものが存在する。

(証明) Lemma 1. 7 を次々に適用して，互いに交わらない可測集合の列 $\{A_n\}$ と保測変換の列 $\{S_n\}$ で次のようなものが得られる：

a) A_n 上で S_n は周期pをもつ

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

b) $B_n = \bigcup_{1}^{n} A_i$ に対し $\mu(A_{n+1}) > \mu(B_n)/2$

c) $d(S_n, S_{n+1}) \leqq 2\mu(B_n^c)/p$

さてb)より$\mu(B_n) > 1 - 2^{-n}$だから$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. 保測変換Sを，$Sx = S_n x, x \in A_n$ $n \geqq 1$，とすれば，Sは周期pをもち$d(T, S) \leqq d(T, S_1) + d(S_1, S_2) + \cdots \leqq 4/p$ である。 QED

これだけの準備によってRohlin の定理は証明出来る。

定理1．4（Rohlin）〔28〕Lebesgue space上の保測変換Tが周期点を持たなければ，任意の$p \geqq 1$に対して

$$\sup_{A \in \mathscr{D}_p} \mu(A) = \frac{1}{p}$$

が成り立つ。従って，任意の$p \geqq 1$と任意の$\varepsilon > 0$に対し，$A \in \mathscr{F}$があって

(a) $A, TA, \cdots, T^{p-1}A$ は disjoint

(b) $\mu(\bigcup_{k=0}^{p-1} T^k A) > 1 - \varepsilon$

をみたす。

（証明） nを任意の自然数として，$q = np$にLemma 1．8を適用すれば，周期qの保測変換Sで$d(T, S) \leqq 4/q$ なるものが得られる。

Sの構成から集合Fで，$F, SF, \cdots, S^{q-1}F$がdisjoint，かつ$\mu(\bigcup_{i=0}^{q-1} S^i F) = 1$ なるFが存在した。

$$G = \bigcup_{r=0}^{m-1} S^{pr} F \qquad A = G \setminus \bigcup_{k=1}^{p-1} (G \cap T^k G)$$

とおけば $A \in \mathscr{D}_p(T)$ である。$G \in \mathscr{D}_p(S)$だから$1 \leqq k < p$に対して

$$G \cap T^k G = G \cap T^k G \cap S^k G^c \subset T^k G \cap S^k G^c$$

$$\subset T^k G \triangle S^k G \subset T^k\{x ; T^k x \neq S^k x\}$$

が成り立つ。他方，$x, Tx, \cdots, T^{k-1}x \in \{x ; Tx = Sx\}$ならば$T^k x = S^k x$. よって

$$\{x ; T^k x \neq S^k x\} \subset \bigcup_{i=0}^{k-1} T^{-i}\{x ; Tx \neq Sx\}$$

すなわち $d(T^k, S^k) \leqq k\, d(T, S)$が成り立つ。従って

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\mu(G \cap T^k G) \leqslant k\, d(T, S) \leqslant 4k/q \qquad 1 \leqslant k < p$$

を得る。故に

$$\mu(A) \geqslant \mu(G) - \Sigma_{k=1}^{p-1} \mu(G \cap T^k G)$$

$$\geqslant \frac{1}{p} - \frac{2(p-1)}{n}$$

が成り立つ，nは任意だからこれで証明が終った。 QED

generator の存在に関する Rohlin の定理を述べよう。

定理1．5 (Rohlin) 〔25〕〔30〕保測変換Tが周期点を持たず，かつ $h(T) < \infty$ ならばある分割 $P \in Z e$ が存在して

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P = \mathcal{E}.$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

第2章　例

この章では，3，4章で展開される同型定理が成立しうるclass（Bernoulli，weak Bernoulli変換）に属する例をいくつか挙げることにする。

例2.1 Bernoulli変換

$X_0=\{1,2,\cdots,k\}$（$k\geqq 2$），or $\{1,2,\cdots\}$，$\mathcal{F}_0$ を，X_0 の各点を可測にするσ－fieldとする。X_0 の両測無限直積を，$X=\prod_{-\infty}^{\infty} X_n$，（$X_n=X_0$）であらわし，X上の$\sigma$－fieldとして，cylinder setsから生成される $\mathcal{G}$ をとる。（X，$\mathcal{G}$）上の確率測度として，まず，成分が全て正の確率ベクトル$\pi=\{\pi_i\,;\,1\leqq i\leqq k\}$ or $\{\pi_i\,;\,i\geqq 1\}$により（X_0，$\mathcal{F}_0$）上に確率測度を導入し，（X，$\mathcal{G}$）上に，その直積測度μをつくる。$\mathcal{G}$ をμによって完備化したσ－fieldを $\mathcal{F}$ とするとき，（X，$\mathcal{F}$，μ）はLebesgue空間になる。いわゆるshiftとよばれるX上の変換Tを，$X\ni x=(x_n)$について，$(Tx)_n=x_{n+1}$によって定義する。この変換が，μ－保測であることは，明らかであろう。このTをBernoulli変換と呼ぶ。特に，$X_0=\{1,2,\cdots,k\}$で，πが等確率のときTはk－shiftと呼ばれる。この変換はK－systemの典型的な例として，よく研究されている。ところで，（H_{16}）により，Tのentropy $h(T)$は，$h(T)=H(\pi)=-\sum_{i\geq 1}\pi_i\log\pi_i$であった。他方，任意の$t\in R^+\cup\{\infty\}$に対して，$H(\pi)=t$となる確率ベクトル$\pi$が存在する。このことより，（$H_{17}$）を用いて，同型でないBernoulli変換が無限個（実は連続濃度）存在することがわかる。これが，entropyを初めて導入したKolmogorovの主張である。

例2.2 Markov変換

例2.1で準備した空間（X，$\mathcal{G}$）上に次のような測度を導入しよう。$\Pi=(\pi_{ij})$をX_0の元によって番号づけられた行と列をもつ推移確率行列としよう。すなわち，$\pi_{ij}\geqq 0$，$\sum_j\pi_{ij}=1$をみたすとする。$\Pi^n=(\pi_{ij}^{(n)})$で，Πからきまるn歩推移確率行列をあらわそう。又，$\pi=(\pi_i)$は，成分が全て正の確率ベクトルとし，$\pi\Pi=\pi$，すなわち，$\sum_i\pi_i\pi_{ij}=\pi_j$をみたすものとする。これだけの準備によって，X上のcylinder set $A=\{x\,;\,x_n=i_1,\cdots,x_{n+m-1}=i_m\}$に対して，

$$\mu(A)=\pi_{i_1}\pi_{i_1 i_2}\cdots\pi_{i_{m-1}i_m}$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

と定義し，Kolmogorov の拡張定理によって，（ X ，$\mathfrak{F}$ ）上に measuse μ を導入すると，μ は shift T に対して invariant となる。この（ X ，$\mathfrak{F}$ ，μ ，T ）を Markov 変換と呼ぶ。Bernoulli 変換は $\pi_{ij}=\pi_j$ なる特別の場合である。T について知られていることを羅列すると，

(1) T がエルゴード的であるための必要十分条件は Π が irreducible

(2) T が mixing，Π が aperiodie，$\lim_{n\to\infty}\pi_{ij}^{(n)}=\pi_j$

の三つは同等。

(3) T の entropy は $h(T)=-\sum_{i,j}\pi_i\pi_{ij}\log\pi_{ij}$

（これらについては Feller の本を参照されたい）

ここでは，mixing Markov 変換が弱 Bernoulli であることを示そう。

定理 2. 1 〔42〕T を Markov 変換とするとき，次の４つの命題は同等である：

(i) T は mixing

(ii) X_0 上の任意の有界関数 f に対し，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i\geq 1}\left|\sum_{j\geq 1}f(j)\pi_{ij}^{(n)}-\sum_{j\geq 1}f(j)\pi_j\right|\pi_i=0$$

が成り立つ。

(iii) $p_i=\{x\,;\,x_0=i\}$ によってきまる X の分割を $P=\{p_i\}$ とするとき，P が T に対する K－分割である。

(iv) (iii)で与えた P は T に対する弱 Bernoulli 分割である。すなわち，T は弱 Bernoulli 変換である。

（証明） (iv) ⟹ (i)は第１章§１，２ において一般的な形で述べられている。
(i) ⟹ (ii)，(i)の必要十分条件が $\lim_{n\to\infty}\pi_{ij}^{(n)}=\pi_j,\ i,\ j\in X_0$ であることに注意すれば，もし関数 f が有限集合の外で０であれば，そのような f については(ii)がただちに成り立つ。 f が有界関数のときは任意の $\delta>0$ に対して有限集合の外で０であるような関数 f′ によって

$$\sum_{j\in X_0}|f(j)-f'(j)|\pi_j<\delta$$

と近似することが出来るのでやはり(ii)が言える。

(ii) ⟹ (iii) $P_{-\infty}^0=\bigvee_{\infty}^{0}T^{-i}P$ とおくとき，条件付平均に関する Doob の収束定理によれば，X 上の任意の有界可測な関数 g に対して

$$\lim_{n\to-\infty}\int_X\left|E\{g\,|\,\mathfrak{F}(T^nP_{-\infty}^0)\}-E\{g\,|\,\mathfrak{F}(\bigcap_n T^nP_{-\infty}^0)\}\right|d\mu=0$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

が成り立つ。従って(iii)を示すには

$$\lim_{n\to-\infty}\int_X \left|E\{g\,|\,\mathcal{F}(T^nP^0_{-\infty})\}-E\{g\}\right|d\mu=0$$

を示せば十分である。ところで関数gは $\mathcal{F}(\bigvee_p^q T^kP)$ 一可測な有界関数で L^1 一近似できる。よって全ての p , q と全ての $\mathcal{F}(\bigvee_p^q T^kP)$ 一可測な有界関数 g に対して上の式を示せばよい。そのような関数は

$$g(x)=f(x_p,\cdots,x_q)$$

の形をしている。Markov 性により $n<p$ に対し

$$E\{g\,|\,T^nP^0_{-\infty}\}=E\{f(x_p,\cdots,x_q)\,|\,T^nP\}$$

$$=\sum_{j_p}\cdots\sum_{j_q} f(j_p,\cdots,j_q)\,\pi^{(p-n)}_{x_n j_p}\,\pi_{j_p j_{p+1}}\cdots\pi_{j_{q-1}j_q}$$

$$\widetilde{f}(j)=\sum_{j_{p+1}}\cdots\sum_{j_q} f(j,j_{p+1},\cdots j_q)\,\pi_{j\,j_{p+1}}\cdots\pi_{j_{q-1}j_q}$$

とおけば

$$\int_X \left|E\{g\,|\,\mathcal{F}(T^nP^0_{-\infty})\}-E\{g\}\right|d\mu$$

$$=\sum_i\left|\sum_j\widetilde{f}(j)\,\pi^{(p-n)}_{ij}-\sum_i\widetilde{f}(j)\,\pi_j\right|\pi_i$$

を得る。$n\to-\infty$として(ii)より結論を得る。

(iii) ⟹ (IV) $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上で T^{-1} なる変換は

$$\pi'=(\pi_1,\pi_2,\cdots)\ \Pi'=(\pi'_{ij})\quad \pi'_{ij}=\frac{\pi_j\pi_{ji}}{\pi_i}$$

によって得られるMarkov 変換になり

$$\Pi^{(n)}=(\pi'^{(n)}_{ij})\qquad \pi'^{(n)}_{ij}=\frac{\pi_j\,\pi^{(n)}_{ji}}{\pi_i}$$

となることが容易に示される。よってTがK－systern であるための必要十分条件はT^{-1} がK－systernであることである。よってLemma1. 1 により

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{A\in\bigvee_n^\infty T^kP}\left|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)\right|=0,\quad A\in\mathcal{F}$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

がなりたつ。このことはとくに

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{J\subset X_0}\left|\sum_{j\in J}\pi_i\pi_{ij}^{(n)}-\sum_{j\in J}\pi_i\pi_j\right|=0,\quad i\in X_0$$

を意味する。ところで一般に X_0 上の2つの確率測度 μ_1, μ_2 について

$$\sum_{j\in X_0}\left|\mu_1(j)-\mu_2(j)\right|=2\sup_{J\subset X_0}\left|\mu_1(J)-\mu_2(J)\right|$$

より上式は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in X_0}\left|\pi_{ij}^{(n)}-\pi_j\right|=0,\quad i\in X_0$$

したがって，$\displaystyle\sum_{j\in X_0}\left|\pi_{ij}^{(n)}-\pi_j\right|\leqslant 2$ より結局

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i\,j\in X_0}\pi_i\left|\pi_{ij}^{(n)}-\pi_j\right|=0$$

を得る。

他方 $k>0$ $n\geqslant 0$ として $A=\{x\mid x_{-n}=i_0\ x_{-n+1}=i_1\cdots x_0=i_n\}\in\bigvee_{-n}^{0}T^iP$,
$B=\{x\mid x_k=j_0\cdots x_{k+n}=j_n\}\in\bigvee_{k}^{k+n}T^iP$ であれば

$$\mu(A\cap B)=\pi_{i_0}\pi_{i_0i_1}\cdots\pi_{i_{n-1}i_n}\pi_{i_nj_0}^{(k)}\pi_{j_0j_1}\cdots\pi_{j_{n-1}j_n}$$

$$\mu(A)=\pi_{i_0}\pi_{i_0i_1}\cdots\pi_{i_{n-1}i_n},\ \mu(B)=\pi_{j_0}\pi_{j_0j_1}\cdots\pi_{j_{n-1}j_n}$$

だから，$A\in\bigvee_{-n}^{0}T^iP$，$B\in\bigvee_{k}^{k+n}T^iP$ に対して，

$$\sum_{A,B}\left|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)\right|=\sum_{i,j\in X_0}\pi_i\left|\pi_{ij}^{(k)}-\pi_j\right|$$

を得る。右辺は前の議論より $k\to\infty$ のとき0に収束する。これは n に無関係であるので弱 Bernoulli が示せた。 QED

<u>例2.3</u> 2次元 torus の群同型

X を2次元 torus R^2/Z^2, μ を X 上の Haar measure とし，

$$\tilde{T}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\qquad a,b,c,d\in Z^1\qquad|\det\tilde{T}|=1$$

で整数行列を与えたとき，X上の変換Tを

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$T(x, y) = (ax+by, cx+dy), \bmod 1, \quad (x, y) \in R^2/Z^2$$

で与える。そのときTはμに関して保測変換となる。この$(X, \mathcal{F}, \mu, T)$を2次元 torus の群同型と呼ぶ。この変換については次のことが知られている。

(1) Tがエルゴード的である必要十分条件は行列$\tilde{T}$の固有値が1の根ではない。

(2) TがエルゴードてあることとTがK－system であることは同等。

(3) Tの entropy は$h(T) = \log|\lambda_1|$である。ここでλ_1は$\tilde{T}$の固有値で絶対値が1以上のもの。

定理2.2 (Adler and Weiss)〔1〕エルゴード的な2次元 torus の群同型は，ある有限 state のMarkov変換と同型である。

この定理はC－diffeomorphismのいわゆるMarkov partition の原形をなすもので，Adler－Weiss によって初めて着目された。詳しい証明は原論文をみていただくことにしてここでは直観的な議論をするにとどめよう。ところで，この定理をみとめれば2次元 torus 上のエルゴード的なすなわちK－system な群同型は例2.2により弱Bernoulli変換であることがわかる。

（概説） エルゴード的な群同型Tに対応する行列$\tilde{T}$の固有値をλ_1, λ_2 ($|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| < 1$)，その固有ベクトルをα，βとすると，同型の範囲内でα，βが第1象限の中にとれることがわかるので，以後そのように思って話をすすめよう。空間Xの点xはα，βを座標軸と思って$x = (x_1, x_2)$とあらわすことにすると

$$Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$$

となる。$R^2/Z^2 = X$ の空間をα，βを用いて，2つの交わらないα，βに平行な平行四辺形R_1，R_2の和とみなすことが出来る（図1）。

R_1，R_2のβ方向の辺 $\overline{p''o}$，$\overline{q'p}$，$\overline{qp''}$，$\overline{p'o'}$はT によって， $\overline{p''o}$，$\overline{q'p}$，$\overline{qp''}$，$\overline{p'o'}$ の中に完全に含まれなければならない。実際 $\overline{p''o} \supset \overline{p'o'}$なる辺は$T(\overline{p''o}) \subset \overline{p''o}$。$\overline{q'p} \supset \overline{qp''}$なる辺は$TR_2 \cap R_2$の$\overline{o'p''}$を含む connected component が$\overline{Qp''}$の一部を含むことより$T(\overline{qp''})$はqp''の中には入り得なく，よって$T(\overline{qp''}) \subset \overline{p''o}$。このことよりXの$R_1$，$R_2$による分割を$R = \{R_1, R_2\}$とするとき$R \vee TR$の connected component は全て平行四辺形でさらにβ方向の各辺は$\overline{qp''}$と$\overline{p'o'}$又は$\overline{p''o}$と$\overline{q'p}$上にあることがわかる。そのようにして得られた小平行四辺形を$R \vee TR$の element ごとに

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

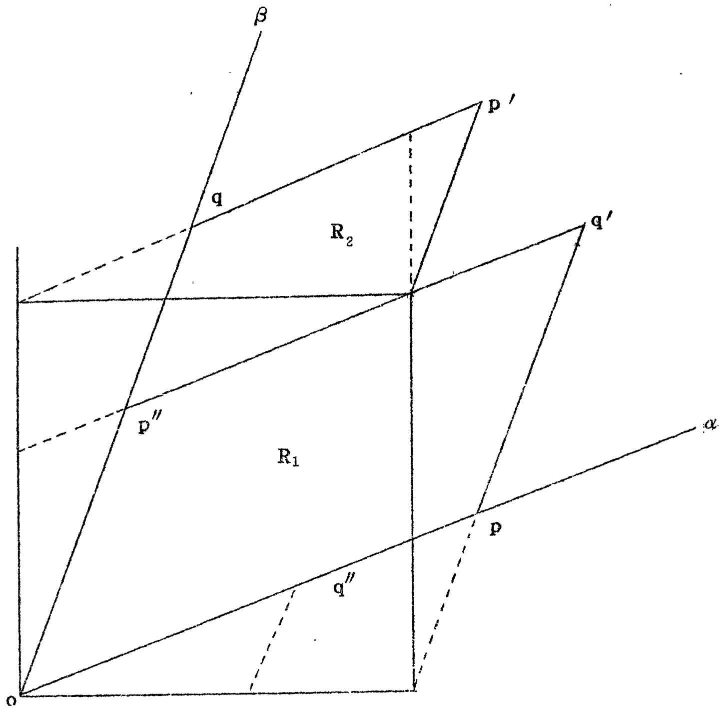


図 1

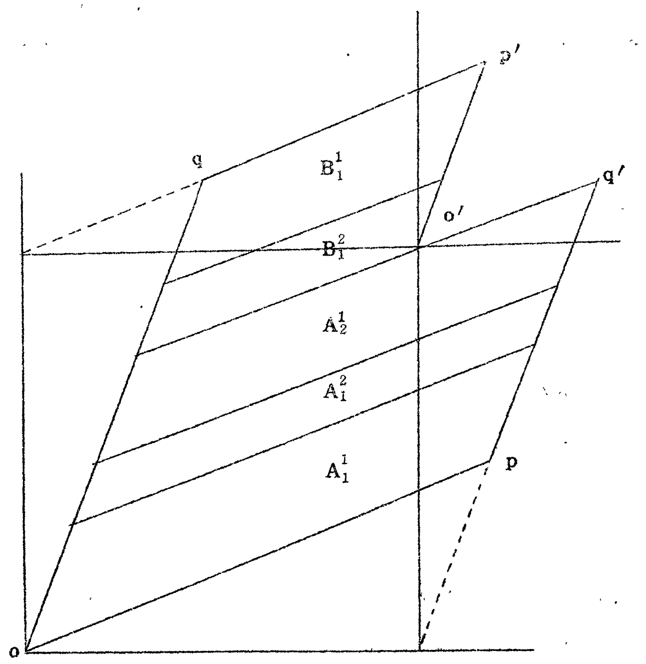


図 2

$$R_1 \cap TR_1 = A_1^1 \cup A_2^1 \cup \cdots \cup A_v^1$$
$$R_1 \cap TR_2 = A_1^2 \cup A_2^2 \cup \cdots \cup A_w^2$$
$$R_2 \cap TR_1 = B_1^1 \cup B_2^1 \cup \cdots \cup B_s^1$$
$$R_2 \cap TR_2 = B_1^2 \cup B_2^2 \cup \cdots \cup B_t^2$$

と書くことにしよう(図2)。Pを$R \vee TR$の connected component を元と考える分割としよう。このPがいわゆるMarkov partition である。このPはTに関して generator になることが示される。i, e $\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P = \mathcal{E}$。Pが generator であれば $X_0 = (1, 2, \cdots, v+w+s+t)$ として例2. 1と同様に直積空間$(Y, \mathcal{G})$を考えて$(X, \mathcal{F}, \mu, T)$から$(Y, \mathcal{G})$への写像φを$\varphi(\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^i P_{i_j}) = (\cdots i_{-1}, i_0, i_1 \cdots i_j \cdots\cdots)$として考えることが出来る。$(Y, \mathcal{G})$上で$\varphi$によって$\mu$の induced measure を考えそれを$\nu$とすれば$(X, \mathcal{F}, \mu, T)$と$(Y, \mathcal{G}, \nu, S)$は同型となる。ここでSは shift 変換である。このνがMarkov measure となる。その事実は次のことから由来する。R_1のα方向の辺の長さを$\gamma_1^{(1)}$, β方向の辺の長さを$\gamma_2^{(1)}$, R_2 のα方向の辺の長さを$\gamma_1^{(2)}$ β方向の辺の長さを$\gamma_2^{(2)}$とし, αとβのなす角をθとすれば

$$\mu(A_i^e) = \lambda_2 \gamma_2^{(e)} \gamma_1^{(1)} \sin\theta \qquad e = 1, 2$$

$$\mu(B_i^e) = \lambda_2 \gamma_2^{(e)} \gamma_1^{(2)} \sin\theta \qquad e = 1, 2$$

ここでiはeをとめたとき1からv, w, sまたはtをうごく。ところで$R \vee TR$の connected component をPとしたことより, $P \vee TP$の元は measure 0の元をのぞいては全て平行四辺形となり(平行四方形の和ではなくて), それぞれはα方向の辺の長さは$\gamma_1^{(1)}$又は$\gamma_1^{(2)}$であり, β方向の辺の長さは$(\lambda_2)^2 \gamma_2^{(1)}$又は$(\lambda_2)^2 \gamma_2^{(2)}$となっている。よって measure 0の場合をのぞいては

$$\mu(A_i^e \cap TA_j^f) = (\lambda_2)^2 \gamma_2^{(f)} \gamma_1^{(1)} \sin\theta \qquad e = 1, 2 \quad f = 1, 2$$

$$\mu(A_i^e \cap TB_j^f) = (\lambda_2)^2 \gamma_2^{(f)} \gamma_1^{(1)} \sin\theta \qquad e = 1, 2 \quad f = 1, 2$$

$$\mu(B_i^e \cap TA_j^f) = (\lambda_2)^2 \gamma_2^{(f)} \gamma_1^{(2)} \sin\theta \qquad e = 1, 2 \quad f = 1, 2$$

$$\mu(B_i^e \cap TB_j^f) = (\lambda_2)^2 \gamma_2^{(f)} \gamma_1^{(2)} \sin\theta \qquad e = 1, 2 \quad f = 1, 2$$

となる。以下同様の議論から$\bigvee_{0}^{n-1} T^i P$ の元は measure 0をのぞいて平行四辺形となり

$$\mu(A_i^e \cap \cdots \cap T^{n-1} A_j^f) = (\lambda_2)^n \gamma_2^{(f)} \gamma_1^{(1)} \sin\theta$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\mu(A_1^e \cap \cdots \cap T^{n-1}B_j^f) = (\lambda_2)^n \gamma_2^{(f)} \gamma_1^{(1)} \sin\theta$$

$$\mu(B_1^e \cap \cdots \cap T^{n-1}A_j^f) = (\lambda_2)^n \gamma_2^{(f)} \gamma_2^{(1)} \sin\theta$$

$$\mu(B_1^e \cap \cdots \cap T^{n-1}B_j^f) = (\lambda_2)^n \gamma_2^{(f)} \gamma_2^{(1)} \sin\theta$$

となる。このことより次のことが成立する。Pの元をあらためて $P=\{p_1, p_2, \cdots p_{v+w+s+t}\}$ とすると

$$\mu(T^n p_{i_n} | p_{i_0} \cap Tp_{i_1} \cap \cdots \cap T^{n-1} p_{i_{n-1}}) = \mu(T^n p_{i_n} | T^{n-1} p_{i_{n-1}}), \ n \geqq 1.$$

これはνが$(Y, \mathcal{G}, \nu, S)$上でMarkov measureであることに外ならない。

例2．4 連分数変換〔4〕

空間YをY＝(０，１)とし$\mathcal{G}$をLebesgue可測集合のなすσ－fieldとする。Y上の写像Sを

$$Sy = \left\{\frac{1}{y}\right\}, \quad y \in Y,$$ ここで{ }は少数部分

によって定義する。（Sは多対1の写像となる）

$$a(y) = \left[\frac{1}{y}\right], \ y \in Y,$$ ここで〔 〕は整数部分

$$a_n(y) = a(S^{n-1}y) \quad n = 1, 2, \cdots$$

とすれば$\{a_n(y)\}_{n \geq 1}$はyの連分数展開の部分分母に外ならない。すなわち

$$y = \cfrac{1}{a_1(y) + \cfrac{1}{a_2(y) + \cdots + \cfrac{1}{a_n(y) + \cdots}}}$$

ところでY上にGauss measure νを

$$\nu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dy}{1+y}, \quad A \in \mathcal{G}$$

で定義すると，$(Y, \mathcal{G}, \nu)$についてSは片側保測変換となる，すなわち

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\nu(S^{-1}(A))=\nu(A),\quad A\in\mathcal{G}.$$

$(Y,\mathcal{G},\nu,S)$のことを連分数変換という。

この変換については次のことが知られている〔4〕。任意の整数k，$n\geqq 1$と整数の任意の列$(a_1,\cdots,a_n)(a_1',\cdots,a_n')$に対して，k，n，$(a_1\cdots a_n)(a_1'\cdots a_n')$に無関係な$K>0$と$0<\rho<1$が存在して，$|\theta|\leqq K$として

$$\nu(S^{-(n+k)}\triangle(a_1'\cdots a_n')\,|\,\triangle(a_1\cdots a_n))=\nu(\triangle(a_1'\cdots a_n'))(1+\theta\rho^n)$$

ここで$\triangle(a_1\cdots a_n)=\left\{y\,\middle|\,y=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n+t}}}\;;0<t<1\right\}.$

よって

$$\sum_{(a_1\cdots a_n)(a_1'\cdots a_n')}\left|\nu(S^{-(n+k)}\triangle(a_1'\cdots a_n')\quad\triangle(a_1\cdots a_n))-\nu(\triangle(a_1'\cdots a_n'))\right.$$
$$\left.\nu(\triangle(a_1\cdots a_n))\right|\leqq K\rho^n$$

がなりたつ。

ところで$Z=\{1,2,3,\cdots\}$として$X^+=\prod_{n=1}^{\infty}Z_n$，$Z_n=Z$なる片側直積空間を考え，$X^+$上のshift T^+を$x=(x_1,x_2,\cdots)\in X^+$とするとき$(T^+x)_n=x_{n+1}$ $n=1,2,\cdots$によって定義する。そのときYからX^+への写像φとして

$$\varphi y=(a_1(y),a_2(y),\cdots)\in X^+$$

とすればφはYからX^+への1−1，onto な写像となる。φによるνの induced measure をμ^+とすると$(X^+,\mathcal{F}^+,\mu^+,T^+)$は$(S,\mathcal{G},\nu,S)$と同型となることが分る。例2.3 でもこのようにshift space へ表現したが，このように出来ることはgeneratorの存在をなかだちにしているからである。位相的構造はこのときもくずれるが，測度論的構造はそのままたもたれているし，このような表現は便利な場合がしばしばある。

$X=\prod_{-\infty}^{\infty}Z_n$, $Z_n=Z$として$(X^+,\mathcal{F}^+,\mu^+)$をnaturalにextensionした空間を$(X,\mathcal{F},\mu)$とし，それ上のshiftをTとすれば$(X,\mathcal{F},\mu,T)$は保測変換となる。これを連分数変換の natural extension と呼ぼう。そうすると前に示した関係式は次のことを主張している。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

定理 2. 3　連分数変換の natural extension は弱 Bernoulli 変換である。

さらにこの変換は例 2. 3 の意味で Markov 変換でないことも measure の計算で出てくる。又 T の entropy は $h(T)=\pi^2/6 \log 2$ であることが知られている。

例 2. 5　βー変換〔24〕

β を $1<\beta<2$ なる実数とし，Y を $Y=[0,1)$ とし，ν を Y 上の Lebesgue measure とする。このとき変換 S_β を

$$S_\beta y=\{\beta y\},\ y\in Y,$$

と定義するとある invariant measure ν_β が ν と互いに絶対連続な範囲で存在し S_β は ν_β 保測である。すなわち

$$\nu_\beta(S_\beta^{-1}A)=\nu_\beta(A)$$

がなりたつ。この片側保測変換のことを βー変換という。$\beta<2$ の制限は何ら本質的ではない。$\beta\in(1,\infty)$ なる任意の β について同様に議論できる。なお $\beta=k$ のときは片側 Bernoulli k − shift に外ならない。ここでも証明は複雑なので，大すじだけを述べるにとどめる。

$$A_\beta^0=[0,\beta^{-1})\qquad A_\beta^1=[\beta^{-1},1)$$

とおくことにより任意の $y\in[0,1)$ について $(y, S_\beta y, \cdots, S_\beta^{n-1}y, \cdots)$ なる sequence が一意にきまる。そこでこの sequence の element に 0, 1 の symbol を対応させよう。それは

$$S_\beta^{n-1}y\in A_\beta^i \quad のとき \quad S_\beta^{n-1}y \text{ の symbol は } i$$

このように出来た symbol の sequence を $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots)$ とし，Y_β をそのようにつくられた sequence 全体とする。$Z=\{0,1\}$，$X=\prod_{n=1}^{\infty} Z_n$，$Z_n=\{0,1\}$ とおくと

$$Y_\beta\subset X.$$

ところで y に一意に対応する $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots)$ は

$$y=\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon_n}{\beta^n}$$

となっている（βー展開）。φ を Y から X への写像として $\varphi(y)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots)$ によって定め，$T_\beta=T$ を X 上の shift とすれば

$$T\varphi = \varphi S_\beta \quad , \quad T Y_\beta = Y_\beta$$

が成り立つ。以後の議論のためにXにdiscrete topologyが入っているとし，Y_β のclosure $\overline{Y_\beta}$ を考える。このとき $\overline{Y_\beta}$ は Y_β に高々可算個の元をつけ加えたものにしかならず，さらにその例を（$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n, \cdots$）とすると Y_β の中に（$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$）が存在して $\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon'_n}{\beta^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon_n}{\beta^n}$ となり1の展開も存在する。（2進数展開である数の展開は高々2通りあり，そのような数は有理数が対応していることを連想していただけばよい。）φ をnaturalに $\overline{Y_\beta}$ 上へ，extensionしたものをあらためて φ と書くと

$$T\varphi = \varphi S_\beta \quad , \quad T\overline{Y_\beta} = \overline{Y_\beta} \subset X$$

はやはり成立する。この φ によって，$\overline{Y_\beta}$ したがってX上にinduceしたmeasureを μ_β と書くと（$\overline{Y_\beta}$ ，μ_β ，T）は片側保測変換であり（S_β ，ν_β ，T_β ）と同型である。ところで β が β − rational order pとは β を β で展開したとき $\overline{Y_\beta}$ の中に（$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p, 0, \cdots, 0, \cdots$）と（$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_p, \cdots$）の2つのsequenceがあって

$$\beta = \sum_{n\geq 1}^{p}\frac{\varepsilon_n}{\beta^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon'_n}{\beta^n}$$

となることである。このような β は（1，2）区間でdenseに存在し個数は可算個である。さらに次のようなことも知られている。

<u>定理2．3</u>〔12〕（$\overline{Y_\beta}$ ，μ_β ，T）がp重片側Markovである必要十分条件は β が β − rational order p である。

この定理によって β − rational以外の（$\overline{Y_\beta}$ ，μ_β ，T）はMarkovではなくなった。それではそのような β についてはT $_\beta$ はいかなる変換なのであろうか。それを知る前に少し準備をしよう。X上のshift invariantなmeasureのsequence $\{\mu_p\}$ を考え，μ_p が μ_∞ にstronglyにconvergeするとは，

$$\| \mu_p - \mu_\infty \| = \lim_{n\to\infty} \sum_{A\in\{0,1\}^n} | \mu_p(A) - \mu_\infty(A) |$$

なるnormについて $\|\mu_p - \mu_\infty\| \to 0$ ，$p\to\infty$，と定義する。又X上のmeasure μ がTについて片側弱Bernoulliであることを任意の $\varepsilon > 0$ に対してあるnに無関係なkが存在して

$$\sum_{A,B\in\{0,1\}^n} | \mu(A\cap T^{n+k}B) - \mu(A)\mu(B) | < \varepsilon$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

が成り立つことによって定義する。このとき $\|\mu_p - \mu_\infty\| \to 0$, $p \to \infty$, μ_p が片側弱Bernoulliならば μ_∞ も片側弱Bernoulliであることが容易に示せる。話を前にもどしてParry〔24〕によれば勝手な β について invariant measure ν_β は

$$\frac{d\nu_\beta(x)}{d\nu(x)} = \Sigma_{k=0}^{\infty} \beta^{-k} 1_{[0, T_\beta^k(1))}(x)$$

によって得られることが知られている。ここで $T_\beta^k(1) = \beta^k(1 - \Sigma_{i=1}^{k} \varepsilon_i^* \beta^{-i})$ で $(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \cdots, \varepsilon_n^*, \cdots)$ は1の展開である。このことを用いて，勝手な $\beta_n \to \beta$ なる β_n，β に対して $\|\mu_{\beta_n} - \mu_\beta\| \to 0$, $n \to \infty$，であることが証明出来る。ところで β_n をとくに β − rational であると思えば，例2.2で証明したと同様に μ_{β_n} は片側弱Bernoulli であることが示せて，よって μ_β も片側弱Bernoulli である。今までの $(\bar{Y}_\beta, \mu_\beta, T)$ は natural に両側保測変換に extension 出来て，定義から弱Bernoulli となる。

定理2.4〔12〕 β − 変換 (Y, ν_β, S_β) の natural extension は弱Bernoulli 変換である。

ところで β − 変換 S_β の entropy は $h(S_\beta) = \log \beta$ であることが知られている。このことは弱Bernoulli であって Markov でないものが（同型の意味ではない）無限個存在することを示している。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

第 3 章　Bernoulli変換の同型定理

この章では，（無限大の場合も含めて）等しいエントロピーをもつBernoulli 変換は同型であることを述べる。このために，まず§3.1で有限なエントロピーをもつBernoulli 変換のclassを考える。このclassで，エントロピーがcomplete invariantであることを主張するのが定理3.1である。この定理は，まず，有限stateの場合に，Ornstein〔19〕が証明し，Smorodinsky〔39〕は，その証明を見なおすことによって，可算stateにまで拡張できることを示した。ここでは，Smorodinsky の証明法を用いる。この方法は，Ornstein の証明法に較べて，より一般であるばかりでなく，見通しよくなっている。この定理の証明のためには，Sinai〔35〕の弱同型定理（定理3.2参照）を仮定すれば，実は，Lemma 3.11だけが必要であるが，そのLemmaと，Sinaiの定理のために，一連のLemmaを証明する。　定理3.1のあとに書いたLemmaの間の論理関係を見ればわかるように，Lemma 3.8が最も基本的であり，特に念入りに読んでほしい。§3.2では，定理3.1の主張が，無限大のエントロピーをもつBernoulli 変換に対してもいえるということを示す。(定理3.3)。この場合，Bernoulli generatorは一般には無限stateである。この定理の証明はOrnstein〔20〕によって与えられたが，わかりやすくするために，§3.1に合わせて，Smorodinsky 流に書きなおしておいた。

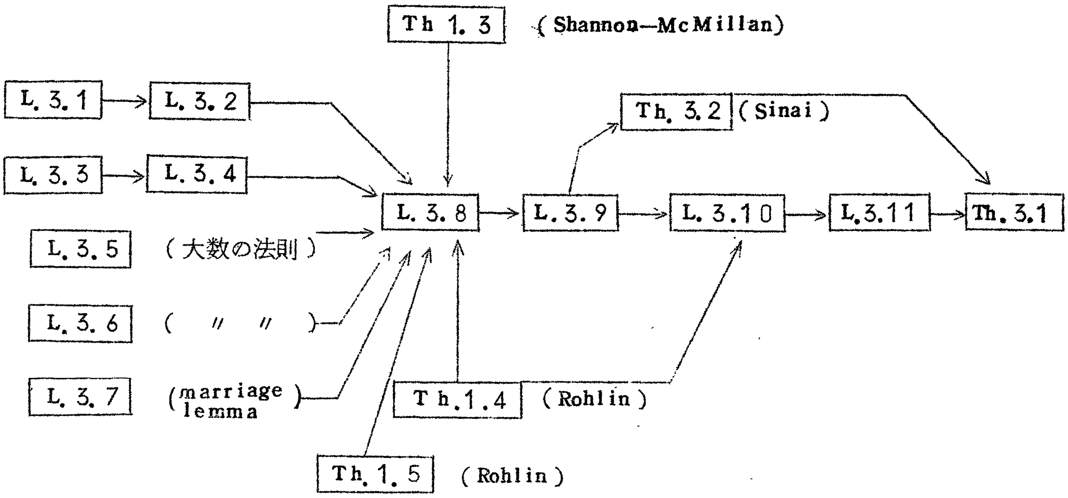
§3.1　有限エントロピーをもつBernoulli変換の同型定理

この節の目的は，つぎの定理を証明することである。

<u>定理3.1</u>　有限で等しいエントロピーをもつ2つのBernoulli変換は同型である。

この定理を証明するために，いくつかのLemmaを用意する。これらのLemmaの間の論理関係は次のようになっている。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125



<u>Lemma 3. 1</u>　任意の$\varepsilon>0$に対して$\delta=\delta(\varepsilon)$であって，

$$H(P)-H(P|Q)\leqq\delta$$

を満足する$P\in Z_e$，$Q\in Z_e$はε－independent である。特に，$\delta=0$ならば independent である。

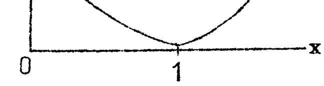
（証明）　$H(P)-H(P|Q)$

$$=H(P)+H(Q)-H(P\vee Q)$$

$$=\sum_{p\in P,\, q\in Q}\mu(p\cap q)\{\log\mu(p\cap q)-\log\mu(p)\mu(q)\}$$

に注意して，　$f(x)=1-x+x\log x$

$$f_{pq}=f(\mu(p\cap q)/\mu(p)\mu(q)),\quad p\in P,\ q\in Q$$



とおけば

$$H(P)-H(P|Q)=\sum_{p\in P,q\in Q}\mu(p)\mu(q)f_{pq}$$

である。さて $0<\delta_1<\varepsilon/4$ を

$$f(x)<\delta_1 \quad ならば \quad |x-1|<\varepsilon/4$$

なる数とし，$\delta=\delta_1^2$ とおけば，これが求めるものである。実際，$H(P)-H(P|Q)<\delta$ と仮定すれば

$$\sum_{f_{pq}\geqq\delta_1}\mu(p)\mu(q)<\delta_1$$

であり，したがって

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\in P,q\in Q}|\mu(p\cap q)-\mu(p)\mu(q)| \\
&\leqq\sum_{f_{pq}<\delta_1}\left|\frac{\mu(p\cap q)}{\mu(p)\mu(q)}-1\right|\mu(p)\mu(q) \\
&\qquad\qquad+\sum_{f_{pq}\geqq\delta_1}\{\mu(p\cap q)+\mu(p)\mu(q)\} \\
&<\frac{\varepsilon}{4}+1-\sum_{f_{pq}<\delta_1}\mu(p\cap q)+\delta \\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{f_{pq}\geqq\delta_1}\mu(p)\mu(q)+\sum_{f_{pq}<\delta_1}|\mu(p\cap q)-\mu(p)\mu(q)| \\
&<\varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ。 QED

Lemma 3. 2 $\varepsilon>0$ に対して Lemma 3. 1 により定まる $\delta=\delta(\varepsilon)$ をとる。$P\in Ze$ が

$$H(P)-h(P,T)<\delta$$

を満たせば $\{T^nP;n\geqq0\}$ は ε- independent である。

（証明） 関係式

$$\begin{aligned}
h(P,T)&\leqq H\left(P\,\Big|\,\bigvee_1^n T^{-k}P\right) \\
&=H\left(T^nP\,\Big|\,\bigvee_0^{n-1}T^kP\right)\leqq H(P)
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

に注意すれば，仮定より

$$H(P)-H(P\mid\bigvee_{1}^{n}T^{-k}P)<\delta$$

したがってLemma3. 1よりPと$\bigvee_{1}^{n}T^{-k}P$はε− independentである。 QED

Lemma3. 3 P，Q ∈ Z_c と確率ベクトルπが与えられて，PとQはε− independentであり，d（P，π）< ε'ならば，つぎの3条件をみたす$\overline{P}\in Z_c$ が存在する：

(a) $\overline{P}$とQは independent， (b) $d(\overline{P})=\pi$ (c) $D(P,\overline{P})<\varepsilon+\varepsilon'$

（証明） $P=\{p_n\,;\,n\geqq 1\}$，$Q=\{q_m\,;\,m\geqq 1\}$ とする。各mに対し，q_m の分割 $\{\overline{p}_n^m\,;\,n\geqq 1\}$をつぎのように定める：

i） $\mu(\overline{p}_n^m)=\pi_n\,\mu(q_m)$

ii） $\mu(p_n\cap q_m)\geqq\pi_n\,\mu(q_m)$ ならば $\overline{p}_n^m\subset p_n\cap q_m$

$\mu(p_n\cap q_m)<\pi_n\,\mu(q_m)$ ならば $q_m\supset\overline{p}_n^m\supset p_n\cap q_m$

各nに対して $\overline{p}_n=\bigcup_m\overline{p}_n^m$とおけば $\overline{P}=\{\overline{p}_n\,;\,n\geqq 1\}\in Z_c$であって，i）より(b)がしたがう。また，すべてのn，mに対して

$$\mu(\overline{p}_n\cap q_m)=\mu(\overline{p}_n^m)=\pi_n\,\mu(q_m)=\mu(\overline{p}_n)\,\mu(q_m).$$

よって(a)がみたされる。最後に

$$\begin{aligned}D(P,\overline{P})&=\sum_{n\geqq 1}\mu(p_n\triangle\overline{p}_n)\\&=\sum_{m\geqq 1,\,n\geqq 1}\mu((p_n\cap q_m)\triangle\overline{p}_n^m)\\&=\sum_{m\geqq 1,\,n\geqq 1}\left|\mu(p_n\cap q_m)-\pi_n\,\mu(q_m)\right|\\&\leqq\sum_{m\geqq 1,\,n\geqq 1}\left|\mu(p_n\cap q_m)-\mu(p_n)\,\mu(q_m)\right|\\&\qquad+\sum_{n\geqq 1}\left|\mu(p_n)-\pi_n\right|\\&<\varepsilon+\varepsilon'\end{aligned}$$

QED

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

Lemma 3.4　ε− independent な分割の列 $P_1, \cdots, P_n \in Z_c$ が確率ベクトルπに対して, $d(P_k, \pi) < \varepsilon'$, $1 \leqq k \leqq n$ をみたすならば, つぎの3条件をみたす分割の列 $\overline{P}_1, \cdots, \overline{P}_n \in Z_c$ が存在する：

(a)　$\overline{P}_1, \cdots, \overline{P}_n$ は independent

(b)　$d(\overline{P}_k) = \pi$, $1 \leqq k \leqq n$

(c)　$D(P_k, \overline{P}_k) < \varepsilon + \varepsilon'$, $1 \leqq k \leqq n$

（証明）　つぎのような $\overline{P}_n, \cdots, \overline{P}_k \in Z_c$ を帰納的に定めればよい：

(i)　$\overline{P}_n, \cdots, \overline{P}_k$ は independent

(ii)　$\bigvee_k^n \overline{P}_i$ と $\bigvee_1^{k-1} P_i$ は independent

(iii)　$d(\overline{P}_i) = \pi$,　$k \leqq i \leqq n$

(iv)　$D(P_i, \overline{P}_i) < \varepsilon + \varepsilon'$,　　$k \leqq i \leqq n$

まず, Lemma 3.3 によって(i)〜(iv)が $k = n$ に対してみたされる。つぎに(i)〜(iv)をみたす $\overline{P}_n, \cdots, \overline{P}_{k+1} \in Z_c$ が定まったとせよ。このとき仮定と(ii)によってLemma 1.3（$\varepsilon_2 = 0$）が使えて, P_k と $\bigvee_1^{k-1} P_i \vee \bigvee_{k+1}^n \overline{P}_i$　は　ε− independent.　Lemma 3.3を用いると, (iii), (iv)をみたし, かつ $\bigvee_1^{k-1} P_i \vee \bigvee_{k+1}^n \overline{P}_i$ と independent な $\overline{P}_k \in Z_c$が存在する。この $\overline{P}_k$ は明らかに(i), (ii)もみたしている。　　QED

（注意）Lemma 3.4 の結論(a), (b)のみが必要ならば最初に与える $P_1, \cdots, P_n \in Z_c$ とπに対する条件は不要である。

つぎに, 分割の列 $P_k = \{ p_i^k ; i \geqq 1 \} \in Z_c$, $1 \leqq k \leqq n$, が定める分割 $\bigvee_1^n P_k$ に対するXの点のnameを定めよう。各点$x \in X$に対し, xが $\bigvee_1^n P_k$ の元 $\bigcap_1^n p_{s_k}^k$ に属するとき, xのnameは$(s_1, \cdots s_n)$であると言いxの関数と見て

$$s(x) = (s_1(x), \cdots, s_n(x))$$

と表わせば, 分割 $\bigvee_1^n P_k$ の1つの元 $c = \bigcap_1^n p_{s_k}^k$ 上ではconstant。したがって, $\bigvee_1^n P_k$ の元cのname

$$s(c) = (s_1(c), \cdots, s_n(c))$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

も定まる。

つぎの2つのLemmaは大数の法則を用いれば容易に示される。

<u>Lemma 3. 5</u>　$\pi=(\pi_1, \cdots, \pi_m)$を有限な確率ベクトル，$P_k=\{p_i^k ; 1 \leq i \leq m\} \in Z_f$，$1 \leq k \leq n$が

$$d(P_k)=\pi, \quad 1 \leq k \leq n$$

をみたすindependentな分割とせよ。各点xのname $s(x)$に対し，$s_k(x)=i$となるようなkの個数を

$$N_i(n, x)=\sum_{k=1}^{n} 1_i(s_k(x))$$

とし，

$$\pi^{(n)}(x)=\left(\frac{N_1(n, x)}{n}, \cdots, \frac{N_m(n, x)}{n}\right)$$

とすれば1つの確率ベクトルであり，それを<u>経験分布</u>という。このとき，$n \to \infty$とすれば経験分布$\pi^{(n)}(x)$はπに確率収束する。いいかえれば，任意の$\varepsilon>0$と$\delta>0$に対して，nを十分大きくとれば，つぎの2条件をみたす集合$X' \in \mathcal{F}(\bigvee_1^n P_k)$が存在する：

(a)　$\mu(X')>1-\varepsilon$

(b)　$c \in (\bigvee_1^n P_k)/X'$　ならば，　$d(\pi^{(n)}(c), \pi)<\delta$

<u>Lemma 3. 6</u>　$\pi=\{\pi_i ; i \geq 1\}$は確率ベクトルで，$H(\pi)=-\sum_{i \geq 1} \pi_i \log \pi_i<\infty$とする。$P_k \in Z_c$，$1 \leq k \leq n$が，$d(P_k)=\pi$，$1 \leq k \leq n$をみたすindependentな分割とせよ。このとき，任意の$\varepsilon>0$と$\delta>0$に対し，nを十分大きくとれば，つぎの2条件をみたす集合$X' \in \mathcal{F}(\bigvee_1^n P_k)$が存在する：

(a)　$\mu(X')>1-\varepsilon$

(b)　$c \in (\bigvee_1^n P_k)/X'$ならば

$$2^{-n(H(\pi)+\delta)}<\mu(c)<2^{-n(H(\pi)-\delta)}$$

<u>Lemma 3. 7</u>（marriage lemma）n人のBoysの集まり$\mathcal{B}$と，m人のGirlsの集まり$\mathcal{G}$を考

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

えよ。Boy 達はそれぞれ何人かの Girls を友達としている。今，さらに，勝手に $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ をとると，$\mathcal{B}'$ の中の誰かと友達であるような Girls の人数は，$\mathcal{B}'$ の人数よりも少なくないものとする。このとき，すべての Boys は，彼らの Girlfriends の1人と結婚することができる。もちろん，法律によって重婚は許されない。

（証明） n による帰納法によって示す。$n=1$ の時は明らか。$n \leqq k-1$ まで正しいと仮定。$n=k$ で正しいことを示すために，次の2つの場合に分けて考える。今，$\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ に対し $\mathcal{B}'$ の中のだれかと友達であるような Girls の集まりを $\Psi(\mathcal{B}')$ で表わす。

(i) $\mathcal{B}$ の真部分集合 $\mathcal{B}_0$ があって，$\mathcal{B}_0$ の人数と $\Psi(\mathcal{B}_0)$ の人数が等しい場合。このときには，$\mathcal{B}_0$ と $\Psi(\mathcal{B}_0)$，$\mathcal{B}_0^c$ と $(\Psi(\mathcal{B}_0))^c$ に分けて考えることにより，$k-1$ 人以下の場合に帰着できる。

(ii) 任意の $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ に対し，$\mathcal{B}'$ の人数が $\Psi(\mathcal{B}')$ の人数よりも少ない場合。もし2人の Boys B_1，B_2 がいて，共通な友達 G を持つときは，G が例えば B_2 と絶交して，新しい友達関係 Ψ_1 を考えると，Ψ_1 も lemma の条件をみたす。この絶交が上のような G について繰り返されれば，有限回ののちには(i)の場合か，(ii)で共通の友達がない場合に帰着される。 QED

<u>Lemma 3. 8</u> T を $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上 ergodic，$h(T)<\infty$ な変換とする。$\varepsilon>0$ に対し，$\delta=\delta(\varepsilon)$ を Lemma 3. 1 で定まったものとし，$\theta(\varepsilon)=\min\left(\delta\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right), \frac{\varepsilon^2}{2}\right)/2$ とおく。$\pi=\{\pi_i\,;\, i \geqq 1\}$ を確率ベクトルとし，$P \in Z_e$ が条件

(a) $H(\pi)=h(T)$

(b) $d(P, \pi)<\theta(\varepsilon)$

(c) $H(P)-h(P, T)<\theta(\varepsilon)$

をみたすならば，任意の $\delta>0$ に対し，つぎの3条件をみたす有限分割 $\widetilde{P}\,(\in Z_f)$ が存在する：

(i) $d(\widetilde{P}, \pi)<\delta$

(ii) $H(\widetilde{P})-h(\widetilde{P}, T)<\delta$

(iii) $D(P, \widetilde{P})<15\varepsilon$

（証明） $\delta<\theta(\varepsilon)$ と仮定してよい。

1° $\pi'=\{\pi_i'\,;\, 1 \leqq i \leqq m\}$ を有限確率ベクトルで

$$d(\pi, \pi')<\frac{\delta}{4}, \quad H(\pi')=H(\pi)+\alpha, \quad 0<\alpha<\frac{\delta}{4}$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

なるものとする。

2° 仮定(c)によりLemma 3. 2が使えて$\{T^nP\}$は$\varepsilon^2/2$－independentである。一方，(b)とπ'のとり方から，$d(T^nP, \pi')<\varepsilon^2/2$。したがってLemma 3. 4によって，任意の$n>0$（とり方はあとで指定）に対して，independentな分割の列$\overline{P}_0, \cdots, \overline{P}_{n-1}\in Z_c$ で

$$d(\overline{P}_k)=\pi', \quad D(\overline{P}_k, T^kP)<\varepsilon^2 \quad 0\leqq k\leqq n-1$$

となるものがとれる。

3° TはX上のergodicな変換だからRohlinの定理1. 5 より，generator $Q_0\in Z_e$ が存在する。したがって，$Q=Q_0\vee P$ とおくと

$$Q>P, \quad h(Q, T)=h(T), \quad Q\in Z_e$$

4° $0<\varepsilon'<\min(1/2, \varepsilon/2, \delta/12)$を，つぎの2条件がみたされるように十分小さくとる：

(1) $D(Q, Q')<10\varepsilon'$ならば

$$h(Q, T)-\delta/4<h(Q', T) \quad \text{となる。}$$

(2) $d(\widetilde{P}, \pi')<10\varepsilon'$ かつ $N(\widetilde{P})\leqq m$ならば

$$|H(\widetilde{P})-H(\pi')|<\frac{\delta}{4} \quad \text{である。}$$

5° $n>3/\alpha$ をつぎの3条件をみたすように十分大きくとる：

(1) ${}_QT$はergodicだから，Shannon－McMillanの定理1・3により，$\overline{Q}=\bigvee_0^{n-1}T^kQ$ とおくと，$Y\in\mathfrak{F}(\overline{Q})$があって，　$\mu(Y)>1-\varepsilon'$

$$2^{-n(h(T)+\frac{\alpha}{3})}<\mu(B)<2^{-n(h(T)-\frac{\alpha}{3})}, \quad B\in \overline{Q}/Y$$

とできる。ここに，Yに属する$\overline{Q}$の元の個数は

$$N(\overline{Q}/Y)<2^{n(h(T)+\frac{\alpha}{3})}$$

である。

(2) Lemma 3. 5, 3. 6 がπ', $\overline{P}_k$ に対して適用できて，$\overline{P}=\bigvee_0^{n-1}\overline{P}_k$ とおくと，$\overline{Y}\in\mathfrak{F}(\overline{P})$があって

$$\mu(\overline{Y})>1-\varepsilon'$$

$$2^{-n(H(\pi')+\frac{\alpha}{3})}<\mu(G)<2^{-n(H(\pi')-\frac{\alpha}{3})}, \quad G\in\overline{P}/\overline{Y}$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

かつ，経験分布を$\pi'(G)$とかくと

$$d(\pi'(G), \pi') < \varepsilon' \quad , \quad G \in \overline{P}/Y$$

このとき，$H(\pi') - \frac{\alpha}{3} = h(T) + \frac{2\alpha}{3}$だから

$$N(\overline{P}/Y) > 2^{n(h(T) + \frac{\alpha}{3})}$$

である。

(3) $\mu(A) < 1/n$ である時，分割$\{A, A^c\}$を考えると

$$H(\{A, A^c\}) < \delta/4$$

が成り立つ。

6° $x \in X$ の $\bigvee_{0}^{n-1} T^k P$ による name を P－name とよび

$$s(x) = (s_0(x), s_1(x), \cdots, s_{n-1}(x))$$

とかく。同様に，$x \in X$ の $\overline{P} = \bigvee_{0}^{n-1} \overline{P}_k$ による name を $\overline{P}$－name とよび

$$\overline{s}(x) = (\overline{s}_0(x), \overline{s}_1(x), \cdots, \overline{s}_{n-1}(x))$$

とかく。$s_k(x) \neq \overline{s}_k(x)$なる点xの全体を$E_k$で表わし，$s(x)$と$\overline{s}(x)$とが少なくともeカ所でちがっているような点xの全体をD_eで表わすと，

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(E_k) \geqq e\,\mu(D_e)$$

が成立する。一方，$P = \{p_i \,;\, i \geqq 1\}$，$\overline{P}_k = \{\overline{p}_i^{\,k} \,;\, 1 \leqq i \leqq m\}$と表わすと，

$$\begin{aligned}
D(T^k P, \overline{P}_k) &= \sum_{i \geqq 1} \mu(T^k p_i \triangle \overline{p}_i^{\,k}) \\
&= \sum_{i \geqq 1} \mu(\{s_k(x) = i\} \triangle \{\overline{s}_k(x) = i\}) \\
&= \sum_{i \geqq 1} \{\mu(s_k(x) = i \neq \overline{s}_k(x)) + \mu(s_k(x) \neq i = \overline{s}_k(x))\} \\
&= 2\mu(E_k)
\end{aligned}$$

したがって

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$e\mu(D_e) < {}^{n\varepsilon^2}\!/_2$$

だから $W = D_{n\varepsilon}^{c}$ とおけば

$$\mu(W) > 1-\varepsilon$$

7° $\mu(B\cap W\cap \overline{Y}) \geqq \mu(B)/2$ をみたす $B\in\overline{Q}/Y$ の集まりを $\mathcal{B}$ で表わし，$\mathcal{B}$ の元全体の和集合を Z で表わせば

$$\begin{aligned}
\mu(Z^c) &= \sum_{B\in\overline{Q}\setminus\mathcal{B}} \mu(B) \\
&= \sum_{B\in\overline{Q}\setminus\mathcal{B}} \{\mu(B\cap W\cap\overline{Y}) + \mu(B\cap(W\cap\overline{Y})^c)\} \\
&< \frac{1}{2}\mu(Z^c) + \mu(W^c) + \mu(\overline{Y}^c)
\end{aligned}$$

したがって

$$\mu(Z^c) < 2(\mu(W^c)+\mu(\overline{Y}^c)) < 2(\varepsilon+\varepsilon') < 3\varepsilon$$

を得る。

各 $B\in\mathcal{B}$ に対して，$B\cap G\cap W \neq \phi$ なる $G\in\overline{P}/\overline{Y}$ の集まり $\Psi'(B)$ を対応させる。任意の $\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$ に対し，$\Psi'(B)$，$B\in\mathcal{B}'$ の和集合を $\Psi'(\mathcal{B}')$ で表わせば，$N(\mathcal{B}') \leqq N(\Psi'(\mathcal{B}'))$ である。

実際

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} N(\mathcal{B}') \times \min_{B\in\mathcal{B}} \mu(B) \\
&\leqq \frac{1}{2}\sum_{B\in\mathcal{B}'} \mu(B) \\
&\leqq \sum_{B\in\mathcal{B}'} \mu(B\cap W\cap\overline{Y}) \\
&\leqq \sum_{G\in\Psi'(\mathcal{B}')} \mu(G) \quad \leqq N(\Psi'(\mathcal{B}')) \times \max_{G\in\overline{P}/\overline{Y}} \mu(G)
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

であり，他方，$n > \frac{3}{\alpha}$ と n のとり方 5°の(2)により

$$\max_{G \in \overline{P}/\overline{Y}} \mu(G) < 2^{-n\left(h(T)+\frac{2\alpha}{3}\right)}$$

$$< \frac{1}{2} \cdot 2^{-n\left(h(T)+\frac{\alpha}{3}\right)}$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \min_{B \in \mathcal{B}} \mu(B)$$

であることより上のことがしたがう。以上の評価から marriage lemma 3.7 が適用できて，各 $B \in \mathcal{B}$ に $\Psi'(B)$ の中の1つの G を対応させる写像 Ψ が定まり，Ψ は1対1である。Lemma 3.5 の前に述べたように各 G には $\overline{P}$ − name $\overline{s}(G)$ が定まっていて，他方，各 B には（$P<Q$ だから）P − name $s(B)$ も定まる。ところで $B \cap \Psi(B) \cap W \neq \phi$ だから $s(B)$ と $\overline{s}(\Psi(B))$ の成分で異なる個数は高々 $n\epsilon$ である。n のとり方 5°の(1)，(2)により $N(\overline{Q}/X) < N(\overline{P}/\overline{Y})$ であるから Ψ を $\overline{Q}/Y$ から $\overline{P}/\overline{Y}$ の中への1対1写像に拡張できる。

8° Rohlin の定理 1.4 を上の ε' と n に対して用いると

$$T^iF', \quad 0 \leqq i \leqq n-1 \quad \text{が disjoint}$$

$$\mu\left(\bigcup_{0}^{n-1} T^iF'\right) > 1 - \varepsilon'$$

をみたす $F' \in \mathcal{F}$ が存在する。$\mu(Z^c) < 3\varepsilon$ と合わせて

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^kF' \cap Z^c) \leqslant \mu(Z^c) < 3\varepsilon$$

したがって，少なくとも半分以上の番号 k に対して

$$\mu(T^kF' \cap Z^c) < \frac{6\varepsilon}{n}$$

が成り立つ。同様に $\mu(Y^c) \leqq \varepsilon'$ と合わせて，

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^kF' \cap Y^c) \leqq \mu(Y^c) \leqq \varepsilon'$$

したがって，少なくとも $2/3$ 以上の番号 k に対して

$$\mu(T^kF' \cap Y^c) \leqq \frac{3\varepsilon'}{n}$$

が成り立つ。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

だから以上2つの関係を満足する共通の番号 k_0 をとることができて，$F=T^{k_0}F'$ とおけば

(1) $T^{-k}F$, $0\leqq k\leqq n-1$ は disjoint

(2) $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}T^{-k}(F\cap Z)\right)=n\mu(F\cap Z)>1-\varepsilon'-6\varepsilon$

(3) $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}T^{-k}(F\cap Y)\right)=n\mu(F\cap Y)>1-4\varepsilon'$

が成りたつ。

9° 求める分割 $\widetilde{P}=\{\widetilde{p}_1,\cdots,\widetilde{p}_m\}$ を定めよう。まず，$X'=\bigcup_0^{n-1}T^{-k}(F\cap Y)$ の上で定義する。簡単のために $\Psi(B)$, $B\in\overline{Q}/Y$ の $\overline{P}$ − name を

$$\overline{s}(B)=\overline{s}(\Psi(B))$$

その第k成分を $\overline{s}_k(B)$ と書く。各元 $\widetilde{p}_i$, $1\leqq i\leqq m$ を集合 $T^{-k}(F\cap Y)$ 上で

$$\widetilde{p}_i\cap T^{-k}(F\cap Y)=\bigcup\{T^{-k}(F\cap B)\ ;\ B\in\overline{Q}/Y,\ \overline{s}_k(B)=i\}$$

と定めよう。残りの集合 $(X')^c$ は $\widetilde{p}_1$ に入れることにすれば $\widetilde{P}$ は X 上の分割として定まる。この $\widetilde{P}$ が結論の(i)〜(iii)をみたすことをしらべる。

10° (i)の証明： $1\leqq i\leqq m$ に対して $\overline{s}_k=i$ となるkの個数を $N(k\ ;\ \overline{s}_k=i)$ と表わせば，

$$\mu(\widetilde{p}_i)=\sum_{k=0}^{n-1}\mu(\widetilde{p}_i\cap T^{-k}(F\cap Y))+\mu(\widetilde{p}_i\cap(X')^c)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{B\in\overline{Q}/Y\\ \overline{s}_k(B)=i}}\mu(F\cap B)+\mu(\widetilde{p}_i\cap(X')^c)$$

$$=\sum_{B\in\overline{Q}/Y}N(k\ ;\ \overline{s}_k(B)=i)\,\mu(F\cap B)+\mu(\widetilde{p}_i\cap(X')^c)$$

ところで $\frac{1}{n}N(k\ ;\ \overline{s}_k(B)=i)$ は $\Psi(B)\in\overline{P}/\overline{Y}$ の経験分布の i 番目の成分であって

$$\sum_{B\in\overline{Q}/Y}n\,\mu(F\cap B)=n\,\mu(F\cap Y)=\mu(X')$$

であるから n のとり方 5° の(2)より

$$d(\widetilde{P},\pi')=\sum_{i=1}^{m}\left|\mu(\widetilde{p}_i)-\pi_i'\right|$$

$$\leqslant\sum_{B\in\overline{Q}/Y}n\,\mu(F\cap B)\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{N(k\ ;\ \overline{s}_k(B)=i)}{n}-\pi_i'\right|$$

$$+2\mu((X')^c)$$

$$<9\varepsilon'<\frac{3\delta}{4}$$

となり，π'のとり方1°を合わせれば

$$d(\widetilde{P},\pi)\leqq d(\widetilde{P},\pi')+d(\pi',\pi)<\delta$$

を得る。

11° (ii)の証明：$A=F\cap Y$とすれば$\mu(A)<1/n$ したがって，nのとり方5°の(3)より
$H(\{A,A^c\})<\delta/4$.

$$P^*=\bigvee_{-n}^{n}T^k(\widetilde{P}\vee\{A,A^c\})$$

とおくと，明らかに

$$\{T^{-k}(F\cap B)\,;\ 0\leqq k<n,\ B\in\overline{Q}/Y\}\subset\mathscr{F}(P^*)$$

したがって，X'の上でQと一致する分割$Q'<P^*$があって

$$D(Q,Q')=D(Q,Q'|X')\mu(X')+D(Q,Q'|(X')^c)\mu((X')^c)$$

$$\leqslant 2\mu((X')^c)<8\varepsilon'$$

したがって，ε'のとり方4°の(1)により

$$h(T)=h(Q,T)$$

$$<h(Q',T)+\delta/4$$

$$\leqq h(P^*,T)+\delta/4$$

$$=h(\widetilde{P}\vee\{A,A^c\},T)+\delta/4$$

$$\leqslant h(\widetilde{P},T)+H(\{A,A^c\})+\delta/4$$

$$<h(\widetilde{P},T)+\delta/2$$

が成り立つ。一方$d(\widetilde{P},\pi')<9\varepsilon'$（10°の評価を見よ。）であるから，$\varepsilon'$のとり方4°の(2)
により

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\left| H(\widetilde{P}) - H(\pi') \right| < \delta/4$$

したがって，

$$H(\widetilde{P}) - h(\widetilde{P}, T) < H(\pi') + \delta/4 - h(T) + \delta/2$$

$$< \delta$$

12° (iii)の証明：marriage lemmaを用いた所7°で注意したように，$B \in \mathcal{B}$に対しては，そのP－name $s(B)$と，$\Psi(B)$の$\overline{P}$－name $\overline{s}(B)$において，異なる成分の個数は高々$n\varepsilon$であることを用いる。$\widetilde{P}$の定め方を思い出すと，$1 \leqq i \leqq m$に対して

$$\widetilde{p}_i \cap T^{-k}(B \cap F) = \begin{cases} T^{-k}(B \cap F), & \overline{s}_k(B) = i \\ \phi, & \overline{s}_k(B) \neq i \end{cases}$$

となっている。同様に $P = \{p_i\}$に対しても

$$p_i \cap T^{-k}(B \cap F) = \begin{cases} T^{-k}(B \cap F), & s_k(B) = i \\ \phi, & s_k(B) \neq i \end{cases}$$

となっている。いま

$$X_1 = X \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} T^{-k}(F \cap Z)$$

とおけば，8°の(2)により

$$\mu(X_1) < \varepsilon' + 6\varepsilon$$

である。だから

$$D(P, \widetilde{P}) = \sum_{i \geq 1} \mu(p_i \triangle \widetilde{p}_i)$$

$$= \sum_{i \geq 1} \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left((p_i \cap T^{-k}(B \cap F)) \triangle (\widetilde{p}_i \cap T^{-k}(B \cap F)) \right)$$

$$+ D(P, \widetilde{P} \mid X_1)\,\mu(X_1)$$

$$\leqslant \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{k : s_k(B) \neq \overline{s}_k(B)} \{ \mu(T^{-k}(B \cap F)) + \mu(T^{-k}(B \cap F)) \} + 13\varepsilon$$

$$\leqslant 2n\varepsilon \sum_{B \in \mathcal{B}} \mu(B \cap F) + 13\varepsilon < 15\varepsilon$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

を得る。 QED

（注意） Lemma 3.8の結論(iii)が不要であるならPとπに対する仮定(b),(c)はいらない。

Lemma 3.9 Tを$(X, \mathscr{F}, \mu)$上ergodic，$h(T)<\infty$な変換とする。$\varepsilon>0$に対し，Lemma 3.8のように$\theta(\varepsilon)$をとる。このとき，確率ベクトル$\pi=\{\pi_i ; i \geqq 1\}$と，$P \in Z_e$が条件

(a) $H(\pi)=h(T)$

(b) $d(P, \pi)<\theta(\varepsilon)$

(c) $H(P)-h(P, T)<\theta(\varepsilon)$

をみたすならば，つぎの3条件をみたす$\widetilde{P} \in Z_e$が存在する；

(i) $d(\widetilde{P})=\pi$

(ii) $\widetilde{P}$はTに関してBernoulli分割

(iii) $D(P, \widetilde{P})<16\varepsilon$

（証明） $\delta_n \searrow 0$かつ$15\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n=\varepsilon$, $\delta_0=\varepsilon$, $P_0=P$として，次のような分割の列$(\in Z_f)$がとれていると思ってよい：

$P_0, P_1, \cdots, P_n$が次の(1)～(3)をみたす

(1) $d(P_m, \pi)<\theta(\delta_m)$ $m=0,1,\cdots,n$

(2) $H(P_m)-h(P_m, T)<\theta(\delta_m)$ $m=0,1,\cdots,n$

(3) $D(P_m, P_{m-1})<15\delta_{m-1}$ $m=1,2,\cdots,n$

実際，$P_0=P$に対するLemma 3.9の仮定より，Lemma 3.8が適用できて，$\delta=\theta(\delta_1)$と思うと $P_1 \in Z_f$が存在して

$$d(P_1, \pi)<\theta(\delta_1)$$

$$H(P_1)-h(P_1, T)<\theta(\delta_1)$$

$$D(P_1, P_0)<15\varepsilon=15\delta_0$$

帰納法により，$P_0, \cdots, P_n \in Z_f$が上の関係(1)～(3)をみたすとしよう。このとき，P_nはLemma 3.8の仮定を$\varepsilon=\delta_n$としてみたしているから，$\delta=\theta(\delta_{n+1})$としてLemma 3.8により，$P_{n+1} \in Z_f$が存在して，

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$d(P_{n+1}, \pi) < \theta(\delta_{n+1})$$

$$H(P_{n+1}) - h(P_{n+1}, T) < \theta(\delta_{n+1})$$

$$D(P_{n+1}, P_n) < 15\delta_n$$

よって，上の関係(1)〜(3)をみたすような Z_f の列 P_0，P_1，… P_n，…が存在する。(3)により $\{P_n\}$ はD−基本列だから Lemma 1．4 により

$$\lim_{n\to\infty} D(P_n, \widetilde{P}) = 0$$

をみたす $\widetilde{P} \in Zc$ が存在する。このとき $d(P_n, \widetilde{P}) \to 0$ だから $d(\widetilde{P}) = \pi$ である。したがって $\widetilde{P} \in Ze$ 一方，

$$D(P, \widetilde{P}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} D(P_{n-1}, P_n)$$

$$< 15\varepsilon + 15\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n = 16\varepsilon$$

最後に，$\{T^n\widetilde{P}\}$ の独立性を示そう。任意の $n>0$ に対し，$A \in T^n\widetilde{P}$，$B \in \bigvee_0^{n-1} T^i\widetilde{P}$ をとる。各 k に対し，AとBに対応する $A_k \in T^nP_k$，$B_k \in \bigvee_0^{n-1} T^iP_k$ をとると，

$$|\mu(A\cap B) - \mu(A_k \cap B_k)| \leqslant (n+1)D(\widetilde{P}, P_k) \to 0, \ k\to\infty$$

同様に

$$\lim_{k\to\infty}|\mu(A) - \mu(A_k)| = \lim_{k\to\infty}|\mu(B) - \mu(B_k)| = 0$$

ところが，(2)により，T^nP_k と $\bigvee_0^{n-1} T^iP_k$ は $\delta_k^2/2$ − independent だから，

$$|\mu(A_k\cap B_k) - \mu(A_k)\mu(B_k)| < \delta_k^2/2 \to 0, \ k\to\infty$$

以上3つの評価を合わせて

$$\mu(A\cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

したがって $T^n\widetilde{P}$ と $\bigvee_0^{n-1} T^i\widetilde{P}$ は independent．　　　Q.E.D

（注意） Lemma 3.9 の結論(iii)が不要であるなら，Pと π に対する仮定(b)，(c)はいらない。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

定理 3.2 （Sinaiの弱同型定理）Tを（X, $\mathscr{F}$, μ）上のergodicな変換，$h(T)<\infty$とする。このとき，確率ベクトルπが $H(\pi)\leqq h(T)$ をみたせば，Tに対するBernoulli分割Pで$d(P)=\pi$なるものがとれる。

（証明） $H(\pi)=h(T)$なら，Lemma 3.9のあとの注意により明らかであろう。$H(\pi)<h(T)$ の場合も，$H(\pi)=h(Q,T)$ なる分割 $Q\in Z_f$があることを示せば，空間（${}_QX$，${}_Q\mathscr{F}$，${}_Q\mu$）上のergodicな変換 ${}_QT$を考えることにより $H(\pi)=h({}_QT)$となって，上の場合に帰着される。以下，$H(\pi)=h(Q,T)$なる$Q\in Z_f$ がとれることを示す。$H(\pi)<h(T)$だから，$P=\{p_1,\cdots,p_k\}$（$\in Z_f$）が存在して，$H(\pi)<h(P,T)$をみたす。空間（X，$\mathscr{F}$，μ）がLebesgue空間であることに注意すると，増大する集合族$\{A_t\}$で，$\mu(A_t)$が$[0,1]$上の連続関数，$\mu(A_0)=0$，$\mu(A_1)=1$ をみたすものがとれることに注意せよ。
$p_1^t=p_1\cap A_t$，$Q_1^t=\{p_1^t, X\setminus p_1^t\}$とおくと，$h(Q_1^t,T)$は$[0,1]$上連続，$h(Q_1^0,T)=0$，$p_2^t=p_2\cap A_t$，$Q_2^t=\{p_1, p_2^t, X\setminus(p_1\cup p_2^t)\}$とおくと$h(Q_2^t,T)$は連続で，$h(Q_2^0,T)=h(Q_1^1,T)$，同様の操作によって，最終的には$[0,h(P,T)]$に値を連続的にとる分割列$\{Q_i^t\}$，$1\leqq i\leqq k$，$t\in[0,1]$が定まるから$H(\pi)=h(Q_i^t,T)$なる$i$と$t$が定まる。 QED

定理3.2によって，任意のergodicな変換（エントロピー有限な）は，それをBernoulli変換とするような分割をもつことがわかる。したがって，特に，エントロピーの等しい2つのBernoulli変換を考えれば§1.3で述べた意味で弱同型となっている。そこで注意したように，定理3.1の証明のためには，独立性を保ちながら分割をとりかえて，generatorとなるものを見い出しうることを示せばよい。このために次のLemma を述べるが，このときに必要な記号を説明する。$P\in Z_c$と可測分割Qに対して，

$$D(P,\bar{Q})<\delta,\quad \bar{Q}<Q$$

なる分割$\bar{Q}\in Z_c$が存在するとき

$$P\overset{\delta}{<}Q$$

とかく。

Lemma 3.10 Tは（X，$\mathscr{F}$，μ）上ergodic，$h(T)<\infty$な変換とし，$P,Q\in Z_e$が次の条件をみたすものとする：

(a) PはTに対するBernoulli分割

(b) $h(Q,T)=H(P)$

(c) $Q<\overline{P}=\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^iP$

(d) $P\overset{\delta}{<}\overline{Q}=\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^iQ$

このとき，任意の$\gamma>0$と$\gamma'>0$に対し，つぎの5条件を満足する $P_1<\overline{Q}$ ($P_1\in Z_c$) と整数 $m>0$ が存在する：

(i) P_1 はTに対するBernoulli分割

(ii) $d(P_1)=d(P)$

(iii) $Q\overset{\gamma}{<}\bigvee_{-m}^{m}T^iP_1$

(iv) $D(P,P_1)<2\delta+\gamma'$

さらに(a),(i),(ii)によって$(T,P)\sim(T,P_1)$であって，そのcanonicalな同型写像φ：

$$\varphi : {}_{P}X \rightarrow {}_{P_1}X$$

を考えると

(V) $D(Q,\varphi(Q))<\gamma$

（証明） $0<\delta'<\gamma/7$ を任意に固定する。

1° 仮定(c)により

$$Q\overset{\delta'}{<}\bigvee_{-m'}^{m'}T^iP$$

なる $m'>0$ が存在する。任意の

$0<\varepsilon<\min(\gamma',\delta'/(2m'+1))/16$ に対し，$\theta(\varepsilon)$をLemma 3.8のものとする。

$Q=\{q_i;\ i\geqq1\}$に対し

$$Q(j)=\{q_1,\cdots,q_{j-1},\bigcup_{i\geqq j}q_i\}$$

と定めると，jが十分に大きいならば

$$(1)\quad h(Q(j),T)>h(Q,T)-\frac{\theta(\varepsilon)}{2}=H(P)-\frac{\theta(\varepsilon)}{2}$$

同様に，$Q(j)$に対して $0<\delta''<\delta'$があって

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$D(Q', Q(j)) < 5\delta'', \ N(Q') \leqq j$$

なる Q'は

(2) $$|h(Q', T) - h(Q(j), T)| < \frac{\theta(\varepsilon)}{2}$$

をみたすようにできる。このような $j>0$，$\delta''>0$ を固定する。

2° この $\delta''>0$ と仮定(c)により

$$Q \overset{\delta''}{<} \bigvee_{-m''}^{m''} T^i P$$

なる $m''>m'$が存在する。この m''を固定し，$n\delta''>m''$なる n を固定する。

3° ${}_QT$は ergodic，$h({}_QT)=h(Q, T)=H(P)>0$，だから周期点をもたず，Rohlinの定理1.4 が ${}_QT$に適用できて，集合 $F\in {}_Q\mathfrak{F}$があって

$$T^kF \ , -n \leqq k \leqq n \text{ は disjoint}$$

$$\mu(Y) > 1-\delta'' \ , \ Y = \bigcup_{-n}^{n} T^k F$$

これを用いて，分割

$$R = \{T^{-n}F, \cdots, F, \cdots, T^nF, Y^c\}$$

を定める。

4° 仮定(d)により

$$P' < \overline{Q} \ , \ D(P', P) < \delta$$

となる $P'\in Zc$ がとれる。

5° 空間 ${}_QX$ は non - atomic だから，つぎの2つの関係を満たす分割 $\hat{P}_i < \overline{Q}$，$-n \leqq i \leqq n$，が存在する。

(1) 分割 $\bigvee_{-n}^{n} T^iP \vee P' \vee \bigvee_{-n}^{n} T^iQ \vee R < \overline{Q}$ に対し

$$d\left(\bigvee_{-n}^{n} \hat{P}_i \vee P' \vee \bigvee_{-n}^{n} T^iQ \vee R\right) = d\left(\bigvee_{-n}^{n} T^iP \vee P' \vee \bigvee_{-n}^{n} T^iQ \vee R\right)$$

をみたす。

(2)
$$T^i\hat{P}_0 \,/\, T^{k+i}F = \hat{P}_i \,/\, T^{k+i}F \qquad \begin{array}{l} -n \leqq i \leqq n \\ -n \leqq k+i \leqq n \end{array}$$

をみたす。

実際，まずF上で考えて

$$d\left(\bigvee_{-2n}^{2n}\hat{P}_i\vee\bigvee_{-n}^{n}T^iP'\vee\bigvee_{-2n}^{2n}T^iQ/F\right)$$

$$=d\left(\bigvee_{-2n}^{2n}T^iP\vee\bigvee_{-n}^{n}T^iP'\vee\bigvee_{-2n}^{2n}T^iQ/F\right)$$

を満足するFの分割 $\hat{P}_i/F$ がとれる。

$-n\leqq k\leqq n$ に対して T^kF 上の分割 $\hat{P}_i/T^kF$ を

$$\bigvee_{-n}^{n}\hat{P}_i/T^kF=T^k\left(\bigvee_{-n}^{n}\hat{P}_{i-k}/F\right)$$

$$=\bigvee_{j=-n-k}^{n-k}T^k\hat{P}_j/T^kF$$

によって定める。このとき

$$d\left(\bigvee_{-n}^{n}T^iP\vee P'\vee\bigvee_{-n}^{n}T^iQ/T^kF\right)$$

$$=d\left(\bigvee_{-n-k}^{n-k}T^iP\vee T^{-k}P'\vee\bigvee_{-n-k}^{n-k}T^iQ/F\right)$$

$$=d\left(\bigvee_{-n-k}^{n-k}\hat{P}_i\vee T^{-k}P'\vee\bigvee_{-n-k}^{n-k}T^iQ/F\right)$$

$$=d\left(\bigvee_{-n-k}^{n-k}T^k\hat{P}_i\vee P'\vee\bigvee_{-n}^{n}T^iQ/T^kF\right)$$

$$=d\left(\bigvee_{-n}^{n}\hat{P}_i\vee P'\vee\bigvee_{-n}^{n}T^iQ/T^kF\right)$$

そこでY上の分割 $\hat{P}_i/Y$ を

$$\hat{P}_i/Y=\bigcup_{k=-n}^{n}\left(\hat{P}_i/T^kF\right)$$

で定めると，明らかに

$$d\left(\bigvee_{-n}^{n}T^iP\vee P'\vee\bigvee_{-n}^{n}T^iQ/Y\right)$$

$$=d\left(\bigvee_{-n}^{n}\hat{P}_i\vee P'\vee\bigvee_{-n}^{n}T^iQ/Y\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

Y^c上でも同じ関係が成立するように $\hat{P}_i$ を定めてやると(1)が成り立つ。

一方，

$$T^i\hat{P}_0 / T^{k+i}F = T^i(\hat{P}_0 / T^k F)$$

$$= T^i(T^k\hat{P}_{-k} / T^k F)$$

$$= T^{k+i}\hat{P}_{-k} / T^{k+i}F$$

$$= \hat{P}_i / T^{k+i}F$$

したがって，(2)も成り立つ。

そこで，$X_1 = \bigcup_{-n+m''}^{n-m''} T^k F$ とおけば

(3) $\quad \mu(X_1) > 1 - 2\delta''$

(4) $$\bigvee_{-m''}^{m''} T^k\hat{P}_0 / X_1 = \bigcup_{-n+m''}^{n-m''}\left(\bigvee_{-m''}^{m''} T^k\hat{P}_0 / T^{\ell}F\right)$$

$$= \bigvee_{-m''}^{m''}\left(\bigcup_{-n+m''}^{n-m''} T^k\hat{P}_0 / T^{\ell}F\right)$$

$$= \bigvee_{-m''}^{m''}\left(\bigcup_{-n+m''-k}^{n-m''-k} T^k\hat{P}_0 / T^{k+\ell}F\right)$$

$$= \bigvee_{-m''}^{m''}\left(\bigcup_{-n+m''-k}^{n-m''-k} \hat{P}_k / T^{k+\ell}F\right) \quad ((2)による)$$

$$= \bigvee_{-m''}^{m''} \hat{P}_k / X_1$$

となる。

6° 2° の m''のとり方により

$$Q'' < \bigvee_{-m''}^{m''} T^i P \quad , \quad D(Q, Q'') < \delta''$$

をみたす分割 $Q'' \in Zc$ がとれる。5°の(1)により定まる写像Ψ；

$$\Psi ; \bigvee_{-n}^{n} T^i P \vee P' \vee \bigvee_{-n}^{n} T^i Q \vee R \rightarrow \bigvee_{-n}^{n} \hat{P}_i \vee P' \vee \bigvee_{-n}^{n} T^i Q \vee R$$

をとることができるから，これを使って

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\hat{Q}'' = \Psi(Q'')$$

とおくと，

$$\hat{Q}'' < \bigvee_{-m''}^{m''} \hat{P}_1 \quad , \quad D(\hat{Q}'', Q) < \delta''$$

ここで，$\Psi(Q'')$の意味を注意する。Q''は $\bigvee_{-m''}^{m''} T^i P$ の元を適当に集めて作られているが，$\Psi(Q'')$は $\bigvee_{-m''}^{m''} \hat{P}_1$ の元を全く同じ方法で集めて作られている。このことに注意して $\bigvee_{-m''}^{m''} T^i \hat{P}_0$ からの上の２つの分割と同じ集め方で作られる分割を Q_2 とすれば，5°の(3)，(4)により

$$Q_2 < \bigvee_{-m''}^{m''} T^i \hat{P}_0 \quad , \quad Q_2 / X_1 = \hat{Q}'' / X_1$$

$$D(Q_2, Q) = D(Q_2, Q \mid X_1)\,\mu(X_1) + D(Q_2, Q \mid X_1^c)\,\mu(X_1^c)$$

$$< 5\delta''$$

となっている。1°の$Q(j)$のきめ方と同じ方法で，Q_2から$Q_2(j)$を定めれば

$$D(Q_2(j), Q(j)) < 5\delta''$$

よって，1°の(2)により

$$|h(Q_2(j), T) - h(Q(j), T)| < \frac{\theta(\mathcal{E})}{2}$$

が成り立ち，1°の(1)とあわせて

$$(1) \quad h(\hat{P}_0, T) \geqq h(Q_2, T)$$

$$\geqq h(Q_2(j), T)$$

$$\geqq h(Q(j), T) - \frac{\theta(\mathcal{E})}{2}$$

$$> H(P) - \theta(\mathcal{E})$$

を得る。一方 $\hat{P}_0$ のとり方5°の(1)により $d(\hat{P}_0) = d(P)$ したがって

$$(2) \quad H(\hat{P}_0) = H(P)$$

この(1)，(2)より

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(3) $H(\hat{P}_0) - h(\hat{P}_0, T) < \theta(\varepsilon)$

他方，仮定(b)により

(4) $H(P) = h({}_QT)$

以上により Lemma 3.9 が ${}_QT$, $\pi = d(P)$, $\hat{P}_0$ に対して適用することができて，つぎの3条件をみたす分割 $P_1 < \overline{Q}$ ($P_1 \in Zc$) が存在する：

(5) $d(P_1) = d(P)$

(6) P_1 は T に対する Bernoulli 分割

(7) $D(P_1, \hat{P}_0) < 16\,\varepsilon$

7° P_1 が求める分割であることを示そう。(i)(ii)はすでに示されている。m′の選び方1°により，

$$Q' < \bigvee_{-m'}^{m'} T^i P \quad , \quad D(Q, Q') < \delta'$$

をみたす分割 $Q' \in Zc$ がある。6°で Q'' から Q_2 を作った方法と全く同じ方法で

$$Q_1 < \bigvee_{-m'}^{m'} T^i \hat{P}_0 \ , \quad D(Q, Q_1) < \delta' + 4\delta'' < 5\delta'$$

をみたす分割 $Q_1 \in Zc$ が作れる。Lemma の命題に述べてある φ を用いて，

$$Q_1' = \varphi(Q')$$

とおけば，Q_1' は $\bigvee_{-m'}^{m'} T^i \hat{P}_0$ から Q_1 を作るのと同じ方法で $\bigvee_{-m'}^{m'} T^i P_1$ から作られるので

$$\begin{aligned} D(Q_1, Q_1') &\leqq D\left(\bigvee_{-m'}^{m'} T^i \hat{P}_0 , \bigvee_{-m'}^{m'} T^i P_1\right) \\ &\leqq (2m'+1)\, D(\hat{P}_0, P_1) \\ &< 16\,\varepsilon \cdot (2m'+1) \\ &< \delta' \qquad (1°による) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} D(Q, Q_1') &\leqq D(Q, Q_1) + D(Q_1, Q_1') \\ &< 6\delta' < \gamma \quad (\delta' のとり方による) \end{aligned}$$

これは，$m=m'$として(iii)を意味する。さらに

$$D(Q,\varphi(Q))\leqq D(Q,Q_1')+D(\varphi(Q'),\varphi(Q))$$
$$=D(Q,Q_1')+D(Q',Q)$$
$$<7\delta'<\gamma \qquad (\delta'\text{のとり方による})$$

したがって(v)が示された。最後に，5°の(1)と6°の(7)，4°により

$$D(P,P_1)\leqq D(P,P')+D(P',\hat{P}_0)+D(\hat{P}_0,P_1)$$
$$=2D(P,P')+D(\hat{P}_0,P_1)$$
$$<2\delta+16\varepsilon$$
$$<2\delta+\gamma' \qquad (1°\text{による})$$

したがって(iv)も示された。 QED

Lemma 3.11　Tは$(X,\mathfrak{F},\mu)$上ergodic，$h(T)<\infty$な変換とし，$P,Q\in Ze$が次の条件をみたすものとする：

(a) PはTに対するBernoulli generator

(b) QはTに対するBernoulli分割

(c) $H(P)=H(Q)$

このとき，任意の$\delta>0$と$\delta'>0$に対しつぎの3条件をみたす分割$Q'\in Ze$と整数$m>0$が存在する：

(i) $(T,Q')\sim(T,Q)$

(ii) $P \overset{\delta}{<} \bigvee_{-m}^{m} T^iQ'$

(iii) $D(Q,Q')<\delta'$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

（証明） まずLemma 3.10の仮定が$\delta=2$としてみたされていることに注意しよう。すると，任意の$\gamma>0$に対して，分割 $P_1<\overline{Q}=\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^iQ$ と，$m'>0$ が存在して

(d) $(T, P_1)\sim(T, P)$

(e) $Q\overset{\gamma}{<}\bigvee_{-m'}^{m'}T^iP_1$

(f) 同型 $\varphi: {}_PX \to {}_{P_1}X$ に対し $D(Q, \varphi(Q))<\gamma$ が成り立つ。

再びLemma 3.10がQと P_1 に適用できて，$\gamma<\delta$，$3\gamma+\gamma'<\delta'$をみたすような十分に小さい $\gamma>0$，$\gamma'>0$ に対して，つぎの3条件をみたす分割 $Q_1<\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^iP_1$ と$m>0$が存在する：

(i)′ $(T, Q_1)\sim(T, Q)$

(ii)′ $P_1\overset{\gamma}{<}\bigvee_{-m}^{m}T^iQ_1$

(iii)′ $D(Q, Q_1)<2\gamma+\gamma'$

そこで，$Q'=\varphi^{-1}(Q_1)$ とおけば，結論の(i)〜(iii)が成り立つ。実際(i)′は(i)を意味し，$P_1=\varphi(P)$だから，γのとり方から(ii)′は(ii)を意味する。最後に(f)と(iii)′により

$$\begin{aligned}D(Q, Q')&=D(\varphi(Q), \varphi(Q'))\\&\leqq D(\varphi(Q), Q)+D(Q, Q_1)\\&<3\gamma+\gamma'\end{aligned}$$

したがって，γ，γ'のとり方から(iii)を得る。 QED

（定理31の証明） T，T'を共にBernoulli 変換で，$h(T)=h(T')<\infty$なものとし，P，P'をそれぞれのBernoulli generator とする。Sinai の定理3.2によって

$(T, Q)\sim(T', P')$

なる分割$Q\in Ze$ が存在する。したがって，空間$(X, \mathscr{F}, \mu)$上に2つの分割P，$Q\in Ze$ があ

って，PはTに対してBernoulli generator，QはTに対してBernoulli分割，$H(P)=H(Q)$ をみたしているから，Lemma 3.11が適用できて，任意の$0<\delta_1<1/2$に対して，分割 $Q_1\in Ze$ と $m_1>0$ が存在して，

$$(T, Q_1)\sim(T, Q)\sim(T', P')$$

$$D(Q, Q_1)<\delta_1$$

$$P \overset{2^{-1}}{<} \bigvee_{-m_1}^{m_1} T^i Q_1$$

をみたす。$0<\delta_2<2^{-2}$ を十分小さく選んで，

$$D(Q_1, Q_2)<\delta_2$$

をみたす $Q_2\in Ze$ に対して

$$P \overset{2^{-1}+2^{-2}}{<} \bigvee_{-m_1}^{m_1} T^i Q_2$$

が成り立つようにとっておく。再びLemma 3.11をPとQ_1に対して適用して，上のようにとった $\delta_2>0$ に対して，分割 $Q_2\in Ze$と $m_2>0$ が存在して，

$$(T, Q_2)\sim(T, Q_1)\sim(T', P')$$

$$D(Q_1, Q_2)<\delta_2$$

$$P \overset{2^{-2}}{<} \bigvee_{-m_2}^{m_2} T^i Q_2$$

をみたす。この方法を繰り返すことによって分割の列 Q_1, Q_2, …, $Q_n\in Ze$と正整数列 m_1, m_2, … m_nに対して，

(1) $(T, Q_k)\sim(T', P')$ $\qquad k=1,\cdots,n$

(2) $D(Q_{k-1}, Q_k)<\delta_k$ $\qquad k=2,\cdots,n$

(3) $P \overset{2^{-j}+\cdots+2^{-k}}{<} \bigvee_{-m_j}^{m_j} T^i Q_k$ $\qquad j=1,\cdots,k$; $k=1,\cdots,n$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

をみたすものがとれたと仮定しよう。 $0 < \delta_{n+1} < 2^{-(n+1)}$ を十分小さく選んで

$$D(Q_n, Q_{n+1}) < \delta_{n+1}$$

をみたす $Q_{n+1} \in Ze$ に対して

$$P \overset{2^{-j}+\cdots+2^{-n-1}}{<} \bigvee_{-m_j}^{m_j} T^i Q_{n+1} \qquad j=1, \cdots, n$$

が成り立つようにとっておく。Lemma 3.11 を P, Q_n に対して適用して，上のようにしてとった $\delta_{n+1} > 0$ に対して $Q_{n+1} \in Ze$ と $m_{n+1} > 0$ が存在して，

$$(T, Q_{n+1}) \sim (T', P')$$

$$D(Q_n, Q_{n+1}) < \delta_{n+1}$$

$$P \overset{2^{-n-1}}{<} \bigvee_{-m_{n+1}}^{m_{n+1}} T^i Q_{n+1}$$

したがって，δ_{n+1} のとり方と合わせれば，帰納法により(1)〜(3)をみたす分割列 $Q_1, \cdots, Q_n, \cdots \in Ze$，正整数列 $\{m_n\}$ がとれたことになる。(2)により，$\{Q_n\}$ はD−基本列だから，Lemma 1.4によって $Q_\infty \in Zc$ が存在して，

$$D(Q_n, Q_\infty) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(1)によって，明らかに

$$(T, Q_\infty) \sim (T', Q')$$

さらに，(3)によって，まず $k \to \infty$ として

$$P \overset{2^{-j+1}}{<} \bigvee_{-m_j}^{m_j} T^i Q_\infty$$

よって

$$P \overset{2^{-j+1}}{<} \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q_\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$j \to \infty$ として

$$P < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q_\infty$$

が得られる。したがって，Q_∞は T に対する generator となり，T と T′は同型となる。Q.E.D.

§3.2 無限大のエントロピーをもつ Bernoulli 変換の同型定理

§3.1 で，有限で等しいエントロピーをもつ２つの Bernoulli 変換が同型であることを証明したが，この節では，エントロピーが無限大であっても同型が証明できることを述べる。このために，§3.1 で用いたいくつかの Lemmas を精密にすることによって，§3.1 の論法と並行した議論で証明する。§3.1 の対応する Lemma を見較べながら読めばよくわかるはずである。

定理 3.3 共に無限大のエントロピーをもつ２つの Bernoulli 変換は同型である。

この定理を証明するために，以下の Lemma を証明しておく。

まず，Lemma 3.2 を次の形に書きかえておこう。

Lemma 3.12 $\varepsilon > 0$ に対して，Lemma 3.1 により定まる $\delta = \delta(\varepsilon)$ をとる。P，R∈ Ze が

$$H(P) + H(R) - h(P \vee R, T) < \delta$$

をみたせば，任意の $n \geqq 0$ に対して，$T^i P$ は $\bigvee_0^n T^j R \vee \bigvee_0^{i-1} T^j P$ と ε－independent である。($0 \leqq i \leqq n$)

（注意） 上の Lemma で $i = 0$ の場合には，$\bigvee_0^{i-1} T^j P$ を trivial な分割と思え。

（証明） §1.5の種々の関係式に注意すると，

$$h(P \vee R, T) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \left[H\left(\bigvee_0^n T^j R\right) + \sum_0^n H\left(T^i P \,\middle|\, \bigvee_0^n T^j R \vee \bigvee_0^{i-1} T^j P\right) \right]$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}H(\bigvee_0^n T^jR)=h(R,T)$であり，一方，$m>0$，$i\leqq i'\leqq i+m$なる$i'$に対して

$$H(T^{i'}P\mid\bigvee_0^{m+n}T^jR\vee\bigvee_0^{i'-1}T^jP)\leqq H(T^iP\mid\bigvee_0^{n}T^jR\vee\bigvee_0^{i-1}T^jP)$$

が成り立つ。したがって任意の$n\geqq 0$，$0\leqq i\leqq n$に対して

$$h(P\vee R,T)\leqq h(R,T)+H(T^iP\mid\bigvee_0^{n}T^jR\vee\bigvee_0^{i-1}T^jP)$$

$$\leqq H(R)+H(T^iP\mid\bigvee_0^{n}T^jR\vee\bigvee_0^{i-1}T^jP)$$

これより，仮定とあわせて

$$H(P)-H(T^iP\mid\bigvee_0^{n}T^jR\vee\bigvee_0^{i-1}T^jP)$$

$$\leqq H(P)+H(R)-h(P\vee R,T)<\delta\qquad 0\leqq i\leqq n$$

結局，Lemma 3.2を用いることによって，各iに対して，T^iPは$\bigvee_0^n T^jR\vee\bigvee_0^{i-1}T^jP$と$\varepsilon$− independentになる。 QED

Lemma 3.4と同様の議論によって，次のLemmaが言える。

Lemma 3.13　2つの可算分割の列$\{P_i\}$，$\{R_i\}$，$0\leqq i\leqq n$と確率ベクトルπが次の3条件をみたすとする：

(a) P_iは$\bigvee_0^n P_j\vee\bigvee_0^{i-1}P_j$と$\varepsilon$− independent，　$0\leqq i\leqq n$

(b) $\{R_i\}$，$0\leqq i\leqq n$はindependent

(c) $d(P_i,\pi)<\varepsilon'$　，$0\leqq i\leqq n$

このとき，次の(i)〜(iii)をみたす可算分割の列$\{\overline{P}_i\}$，$0\leqq i\leqq n$がとれる：

(i) $\{\overline{P}_i, R_j;\ 0\leqq i,\ j\leqq n\}$はindependent

(ii) $d(\overline{P}_i)=\pi$　，$0\leqq i\leqq n$

(iii) $D(R_i,\overline{P}_i)<\varepsilon+\varepsilon'$　，$0\leqq i\leqq n$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

（証明） つぎのような $\overline{P}_n$, … , $\overline{P}_k \in Z_c$ を帰納的に定めればよい：

(1) $\overline{P}_n$, … , $\overline{P}_k$ は independent

(2) $\bigvee_k^n \overline{P}_i$ と $\bigvee_0^n R_i \vee \bigvee_0^{k-1} P_i$ は independent

(3) $d(\overline{P}_i) = \pi$, $k \leqq i \leqq n$

(4) $D(P_i, \overline{P}_i) < \varepsilon + \varepsilon'$, $k \leqq i \leqq n$

まず，Lemma 3.3によって(1)〜(4)が $k = n$ に対してみたされる。つぎに，(1)〜(4)をみたす $\overline{P}_n$, … , $\overline{P}_{k+1} \in Z_c$ が定まったとせよ。このとき，仮定(2)によって，Lemma 1.3 ($\varepsilon_2 = 0$)が使えて，P_k と $\bigvee_0^n R_i \vee \bigvee_0^{k-1} P_i \vee \bigvee_{k+1}^n \overline{P}_i$ は ε −independent，したがって，Lemma 3.3によって，(3)，(4)をみたし，かつ $\bigvee_0^n R_i \vee \bigvee_1^{k-1} P_i \vee \bigvee_{k+1}^n \overline{P}_i$ と independent な $\overline{P}_k \in Z_c$ が存在する。もう一度Lemma 1.3 ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$)を用いると，(1)，(2)も成り立つことがわかる。 QED

（注意） 上のLemmaで結論(iii)が不要ならば，条件の(a)と(c)はいらない。

つぎに，Lemma 3.8に対応するつぎの近似のLemmaを証明しよう。

Lemma 3.14 Tを $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上ergodic，$h(T) < \infty$ な変換とする。$\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \delta(\varepsilon)$ をLemma 3.1で定まったものとし，$\theta(\varepsilon) = \min\left(\delta\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right), \frac{\varepsilon^2}{2}\right)/2$ とおく。$\pi = \{\pi_i ; i \geqq 1\}$ を確率ベクトルとし，$P, R \in Ze$ が条件，

(a) $\{T^i R ; i \geqq 0\}$ は independent

(b) $H(\pi) = h(T) - H(R)$

(c) $d(P, \pi) < \theta(\varepsilon)$

(d) $H(P) + H(R) - h(P \vee R, T) < \theta(\varepsilon)$

をみたすならば，任意の $\delta > 0$ に対し，つぎの3条件をみたす有限分割 $\widetilde{P}$ ($\in Z_f$)が存在する：

(i) $d(\widetilde{P}, \pi) < \delta$

(ii) $H(\widetilde{P}) + H(R) - h(\widetilde{P} \vee R, T) < \delta$

(iii) $D(P, \widetilde{P}) < 15\varepsilon$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

（証明） $\delta < \theta(\varepsilon)$ と仮定してよい。

1° $\pi' = \{\pi_i' ; 1 \leqq i \leqq m\}$ を有限確率ベクトルで

$$d(\pi, \pi') < \frac{\delta}{4}, \quad H(\pi') = H(\pi) + \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\delta}{4}$$

なるものとする。

2° 仮定(d)によりLemma 3.1 2 が使えて正整数n（とり方はあとで指定）に対して，$T^i P$ は $\bigvee_0^n T^j R \vee \bigvee_0^{i-1} T^j P$ に $\varepsilon^2/2$ − independent（$0 \leqq i \leqq n$）である。一方，仮定(c)と π' のとり方から $d(T^i P, \pi') < \varepsilon^2/2$。

したがって，仮定(a)とあわせて，Lemma 3.1 3 が使えて，次の3条件をみたす可算分割の列 $\{\overline{P}_i ; 0 \leqq i \leqq n\}$ がとれる：

(1) $\{\overline{P}_i, T^j R ; 0 \leqq i, j \leqq n\}$ は independent

(2) $d(\overline{P}_i) = \pi', \quad 0 \leqq i \leqq n$

(3) $D(\overline{P}_i, T^i P) < \varepsilon^2, \quad 0 \leqq i \leqq n$

（以下の議論では $0 \leqq i \leqq n-1$ で十分である）

3° TはX上の ergodic な変換だから，Rohlin の定理1.5により generator $Q_0 \in Z_e$ が存在する。したがって，$Q = Q_0 \vee P \vee R$ とおくと，

$$Q > P \vee R, \quad h(Q, T) = h(T), \quad Q \in Ze$$

4° $0 < \varepsilon' < \min(1/2, \varepsilon/2, \delta/12)$ を，つぎの2条件がみたされるように十分小さくとる：

(1) $D(Q, Q') < 10\varepsilon'$ ならば

$h(Q, T) - \delta/4 < h(Q', T)$ となる。

(2) $d(\widetilde{P}, \pi') < 10\varepsilon'$ かつ $N(\widetilde{P}) \leqq m$ ならば

$|H(\widetilde{P}) - H(\pi')| < \delta/4$ となる。

5° $n > 3/\alpha$ をつぎの3条件をみたすように十分大きくとる：

(1) Tは ergodic だから，Shannon-McMillan の定理1.3により，$\overline{Q} = \bigvee_0^{n-1} T^k Q$ とおくと，$Y \in \mathfrak{F}(\overline{Q})$ があって，

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\mu(Y) > 1 - \varepsilon'$$

$$2^{-n(h(T)+\frac{\alpha}{3})} < \mu(B) < 2^{-n(h(T)-\frac{\alpha}{3})}, \quad B \in \overline{Q}/Y$$

とできる。ここに，Yに属する$\overline{Q}$の元の個数は

$$N(\overline{Q}/Y) < 2^{n(h(T)+\frac{\alpha}{3})}$$

と評価できる。

(2) $x \in X$の$\overline{P} \vee R - n -$ name を $\overline{s}(x) = ((\overline{s}_k(x), t_k(x)) ; 0 \leqq k \leqq n-1)$ とかく。すなわち，$\overline{s}(x)$は$x \in X$の $\bigvee_0^{n-1}(\overline{P}_k \vee T^k R)$ に対する name であって，$\overline{P}_k = \{\overline{p}_i^k ; 1 \leqq i \leqq m\}$，$R = \{r_i ; i \geqq 1\}$ とかくとき

$$x \in \bigcap_0^{n-1} \overline{p}^k_{\overline{s}_k(x)} \cap T^k r_{t_k(x)}$$

の意味である。

$\overline{s}_k(x) = j$ となる k の個数を$N(j ; \overline{P}, x)$ とかくことにすれば，この値は，各 $\bigvee_0^{n-1}(\overline{P}_k \vee T^k R)$の元Gで一定値であるから，それは$N(j ; \overline{P}, G)$と書ける。この書き方を使って，$\overline{P}_k$，$0 \leqq k \leqq n-1$ の分布がπ'で，かつ各$T^j R$，$0 \leqq j \leqq n-1$ と independent であることに注意すると，Lemma 3.5，3.6が使えて，$\hat{P} = \bigvee_0^{n-1}(\overline{P}_k \vee T^k R)$ とおくと，$\overline{Y} \in \mathscr{F}(\hat{P})$があって，

$$\mu(\overline{Y}) > 1 - \varepsilon'$$

$$2^{-n(H(\pi')+H(R)+\frac{\alpha}{3})} < \mu(G) < 2^{-n(H(\pi')+H(R)-\frac{\alpha}{3})}, \; G \in \hat{P}/\overline{Y}$$

$$\left|\frac{N(j ; \overline{p}, G)}{n} - \pi_j'\right| < \varepsilon'/m, \qquad G \in \hat{P}/\overline{Y}$$

とできる。このとき，$H(\pi') + H(R) - \frac{\alpha}{3} = h(T) + \frac{2\alpha}{3}$ だから

$$N(\hat{P}/\overline{Y}) > 2^{n(h(T)+\frac{\alpha}{3})}$$

と評価できる。

(3) $\mu(A) < 1/n$ である時，分割$\{A, A^c\}$を考えると，

$$H(\{A, A^c\}) < \delta/4$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

が成り立つ。

6° 上の$\overline{P}\vee R$－n－name と同様にして，$x\in X$の$P\vee R$－n－name $s(x)=((s_k(x),t_k(x));0\leqq k\leqq n-1)$を定義する。この$P\vee R$－n－name は$\bigvee_{0}^{n-1}T^k(P\vee R)$の元で一定で，したがって，$\bigvee_{0}^{n-1}T^kQ$ の元で一定となっていることに注意せよ。$\overline{s}_k(x)\neq s_k(x)$なる点xの全体を$E_k$で表わし，$\overline{s}_k(x)$と$s_k(x)$とが少なくとも e カ所でちがっているような点x の全体をD_eで表わすと，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mu(E_k)\geqq e\mu(D_e)$$

が成立する。一方，$P=\{p_i;\ i\geqq 1\}$，$\overline{P}_k=\{\overline{p}_i^k;\ 1\leqq i\leqq m\}$と表わすと，

$$\begin{aligned} D(T^k(P\vee R),\overline{P}_k\vee T^kR) &= D(T^kP,\overline{P}_k)\\ &=\sum_{i\geqq 1}\mu(T^kp_i\triangle\overline{p}_i^k)\\ &=\sum_{i\geqq 1}\mu(\{\overline{s}_k(x)=i\}\triangle\{s_k(x)=i\})\\ &=2\mu(E_k)\end{aligned}$$

したがって，

$$W=D_{n\varepsilon}^c$$

とおけば

$$\mu(W)>1-\varepsilon$$

7° $\mu(B\cap W\cap\overline{Y})\geqq\mu(B)/2$ をみたす $B\in\overline{Q}/Y$ の集まりを $\mathcal{B}$ で表わし，$\mathcal{B}$ の元全体の和集合を Z で表わせば

$$\begin{aligned}\mu(Z^c) &=\sum_{B\in\overline{Q}\setminus\mathcal{B}}\mu(B)\\ &=\sum_{B\in\overline{Q}\setminus\mathcal{B}}\{\mu(B\cap W\cap\overline{Y})+\mu(B\cap(W\cap\overline{Y})^c)\}\\ &<\frac{1}{2}\mu(Z^c)+\mu(W^c)+\mu(\overline{Y}^c)\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

したがって

$$\mu(Z^c) < 2(\varepsilon + \varepsilon') < 3\varepsilon$$

を得る。

各$B \in \mathcal{B}$に対して，$B \cap G \cap W \neq \phi$なる$G \in \hat{P}/\overline{Y}$の集まり$\Psi'(B)$を対応させる。任意の$\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$に対し，$\Psi'(\mathcal{B}')$で$\Psi'(B)$，$B \in \mathcal{B}'$の集まりを表わせば，

$$N(\mathcal{B}') \leqq N(\Psi'(\mathcal{B}'))$$

である。実際

$$\frac{1}{2} N(\mathcal{B}') \times \min_{B \in \mathcal{B}} \mu(B)$$
$$\leqq \frac{1}{2} \sum_{B \in \mathcal{B}'} \mu(B)$$
$$\leqq \sum_{G \in \Psi'(\mathcal{B}')} \mu(B \cap W \cap \overline{Y})$$
$$\leqq \sum_{G \in \Psi'(\mathcal{B}')} \mu(G) \leqq N(\Psi'(\mathcal{B}')) \times \max_{G \in \hat{P}/\overline{Y}} \mu(G)$$

であり，他方，$n > \frac{3}{\alpha}$ とnのとり方5°の(2)により，

$$\max_{G \in \hat{P}/\overline{Y}} \mu(G) < 2^{-n(h(T) + \frac{2\alpha}{3})}$$
$$< \frac{1}{2} \cdot 2^{-n(h(T) + \frac{\alpha}{3})}$$
$$< \frac{1}{2} \cdot \min_{B \in \mathcal{B}} \mu(B)$$

であることより，上のことがしたがう。以上の評価からmarriage lemma 3.7が適用できて，各$B \in \mathcal{B}$に$\Psi'(B)$の中の1つのGを対応させる写像Ψが定まり，Ψは1対1である。

各Gには$\overline{P} \vee R-n-$name $\overline{s}(G)$が定まっていて他方，各$B \in \mathcal{B}$には$P \vee R-n-$name $s(B)$が定まっている。ところで，$B \cap \Psi(B) \cap W \neq \phi$だから，$s(B)$と$\overline{s}(\Psi(B))$において，第2成分は全く一致しており，第1成分で異なる個数は高々$n\varepsilon$であることに注意せよ。nのとり方5°の(1)，(2)により，$N(\overline{Q}/Y) < N(\hat{P}/\overline{Y})$であるから，$\Psi$を$\overline{Q}/Y$から$\hat{P}/\overline{Y}$への1

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

対1写像に拡張できる。

8° Rohlinの定理1.4を上の ε' と n に対して用いると，

$$T^iF',\ 0 \leqq i \leqq n-1 \text{ が disjoint}$$

$$\mu\left(\bigcup_0^{n-1} T^iF'\right) > 1 - \varepsilon'$$

をみたす $F' \in \mathcal{F}$ が存在する。$\mu(Z^c) < 3\varepsilon$ と合わせて，

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^iF' \cap Z^c) < 3\varepsilon$$

したがって，少なくとも半分以上の番号 k に対して

$$\mu(T^kF' \cap Z^c) < \frac{6\varepsilon}{n}$$

が成り立つ。同様に $\mu(Y^c) \leqq \varepsilon'$ と合わせて

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^kF' \cap Y^c) \leqq \varepsilon'$$

したがって，少なくとも $2/3$ 以上の番号 k に対して

$$\mu(T^kF' \cap Y^c) < \frac{3\varepsilon'}{n}$$

が成り立つ。

だから，以上2つの関係を満足する共通の番号 k_0 をとって

$$F = T^{k_0}F'$$

とおくと

(1) $T^{-k}F,\ 0 \leqq k \leqq n-1$，は disjoint

(2) $\mu\left(\bigcup_0^{n-1} T^{-k}(F \cap Z)\right) = n\mu(F \cap Z) > 1 - \varepsilon' - 6\varepsilon$

(3) $\mu\left(\bigcup_0^{n-1} T^{-k}(F \cap Y)\right) = n\mu(F \cap Y) > 1 - 4\varepsilon'$

が成り立つ。

9° 求める分割 $\widetilde{P} = \{\widetilde{P}_1, \cdots, \widetilde{P}_m\}$ を定めよう。まず，$X' = \bigcup_0^{n-1} T^{-k}(F \cap Y)$ の上で定義する。簡単のために，$\Psi(B)$，$B \in \overline{Q}/Y$ の $\overline{P} \vee R-n-$name を

$$\overline{s}(B) = \overline{s}(\Psi(B)) = ((\overline{s}_k(B),\ t_k(B))\ ;\ 0 \leqq k \leqq n-1)$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

と書く。各元$\overline{p}_i$，$1 \leqq i \leqq m$を集合$T^{-k}(F \cap Y)$上で

$$\widetilde{p}_i \cap T^{-k}(F \cap Y) = \bigcup \{ T^{-k}(F \cap Y) ; B \in \overline{Q}/Y , \overline{s}_k(B) = i \}$$

と定めよう。残りの集合 $X - X'$は $\widetilde{p}_1$ に入れることにすれば$\widetilde{P}$はX上の分割として定まる。この$\widetilde{P}$が結論の(i)〜(iii)をみたすことをしらべる。

10° (i)の証明：

$$\mu(\widetilde{p}_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\widetilde{p}_j \cap T^{-k}(F \cap Y)) + \mu(\widetilde{p}_j \cap (X')^c)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{B \in \overline{Q}/Y \\ \overline{s}_k(B) = j}} \mu(F \cap B) + \mu(\widetilde{p}_j \cap (X')^c)$$

$$= \sum_{B \in \overline{Q}/Y} N(j ; \overline{P}, B) \mu(F \cap B) + (\widetilde{p}_j \cap (X')^c)$$

したがって，nのとり方5°の(2)を思い出すと

$$d(\widetilde{P}, \pi') = \sum_{j=1}^{m} | \mu(\widetilde{p}_j) - \pi_j' |$$

$$\leqslant \sum_{B \in \overline{Q}/Y} n \mu(F \cap B) \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{N(j ; \overline{P}, B)}{n} - \pi_j' \right|$$

$$+ 2\mu((X')^c)$$

$$< \varepsilon' + 8\varepsilon' = 9\varepsilon'$$

$$< \frac{3}{4}\delta$$

となり，π' のとり方1°を合わせて

$$d(\widetilde{P}, \pi) \leqq d(\widetilde{P}, \pi') + d(\pi', \pi)$$

$$< \delta$$

を得る。

11° (ii)の証明：$A = F \cap Y$とすれば$\mu(A) < 1/n$ したがって，nのとり方5°の(3)より

$$H(\{A, A^c\}) < \delta/4$$

となっている。ここで

$$P^* = \bigvee_{-n}^{n} T^k (\widetilde{P} \vee \{A, A^c\} \vee R)$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

とおくと，明らかに

$$\{ T^{-k}(F \cap B) ; 0 \leqq k \leqq n-1 , B \in \widetilde{Q}/Y \} \in \mathcal{F}(P^*)$$

したがって，X'の上でQと一致する分割$Q' < P^*$があって，

$$D(Q, Q') \leqq 2\mu((X')^c) < 8\varepsilon'$$

したがって，ε'のとり方4°の(1)により

$$\begin{aligned} h(T) &= h(Q, T) \\ &< h(Q', T) + \delta/4 \\ &\leqq h(P^*, T) + \delta/4 \\ &= h(\widetilde{P} \vee \{A, A^c\} \vee R, T) + \delta/4 \\ &\leqq h(\widetilde{P} \vee R, T) + H(\{A, A^c\}) + \delta/4 \\ &< h(\widetilde{P} \vee R, T) + \delta/2 \end{aligned}$$

が成り立つ。一方，$d(\widetilde{P}, \pi') < 9\varepsilon'$と評価できていたから，$\varepsilon'$のとり方4°の(2)により

$$| H(\widetilde{P}) - H(\pi') | < \delta/4$$

π'のとり方1°と合わせて

$$\begin{aligned} & H(\widetilde{P}) + H(R) - h(\widetilde{P} \vee R, T) \\ &< H(\pi') + \delta/4 + H(R) - h(T) + \delta/2 \\ &< \delta \end{aligned}$$

12° (iii)の証明：marriage lemmaを用いた所7°で注意したように，$B \in \mathcal{B}$に対しては，その$\overline{P} \vee R - n -$ name $\overline{s}(B)$と$P \vee R - n -$ name $s(B)$においてはその第2成分は全く同じで，第1成分の異なる所は高々$n\varepsilon$であった。$\widetilde{P}$の定め方を思い出すと，$1 \leqq i \leqq m$に対して

$$\widetilde{P}_j \cap T^{-k}(B \cap F) = \begin{cases} T^{-k}(B \cap F), & \overline{s}_k(B) = j \\ \phi, & \overline{s}_k(B) \neq j \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

となっている。同様に $Q > P \vee R$ だから

$$p_j \cap T^{-k}(B \cap F) = \begin{cases} T^{-k}(B \cap F), & s_k(B) = j \\ \phi, & s_k(B) \neq j \end{cases}$$

となっている。いま

$$X_1 = X \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} T^{-k}(F \cap Z)$$

とおけば，8°の(2)により

$$\mu(X_1) < \varepsilon' + 6\varepsilon$$

である。だから

$$\begin{aligned} D(P, \widetilde{P}) &= \sum_j \mu(p_j \triangle \widetilde{p}_j) \\ &= \sum_j \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{k=0}^{n-1} \mu((p_j \cap T^{-k}(B \cap F)) \triangle (\widetilde{p}_j \cap T^{-k}(B \cap F))) \\ &\qquad + D(P, \widetilde{P} \mid X_1)\mu(X_1) \\ &\leqq \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{k : \bar{s}_k(B) \neq s_k(B)} 2\mu(T^{-k}(B \cap F)) + 13\varepsilon \\ &\leqslant 2\varepsilon n \sum_{B \in \mathcal{B}} \mu(B \cap F) + 13\varepsilon \\ &< 15\varepsilon \end{aligned}$$

を得る。 QED

上のLemmaは，証明を見てわかるようにLemma 3.8と同様の議論を用いる。ただLemma 3.14では，$\{T^i R ; i \geqq 0\}$ independentがつけ加わっているので，それをうまく使わねばならぬ。その意味でLemma 3.8の精密化となっている。

（注意） Lemma 3.14の結論(iii)が不要であるならPとπに対する仮定(c)，(d)はいらない。

<u>Lemma 3.15</u> Tを$(X, \mathcal{F}, \mu)$上ergodic，$h(T) < \infty$な変換とする。$\varepsilon > 0$に対し，Lemma 3.14のように$\theta(\varepsilon)$をとる。このとき，確率ベクトル$\pi = \{\pi_i ; i \geqq 1\}$と，分割$P, R \in Z_e$が条件

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(a) $\{T^i R \ ; \ i \geqq 0\}$ は independent

(b) $H(\pi) = h(T) - H(R)$

(c) $d(P, \pi) < \theta(\mathcal{E})$

(d) $H(P) + H(R) - h(P \vee R, T) < \theta(\mathcal{E})$

をみたすならば，つぎの3条件をみたす分割 $\widetilde{P} \in Z_e$ が存在する：

(i) $d(\widetilde{P}) = \pi$

(ii) $\{T^i(\widetilde{P} \vee R) \ ; \ i \geqq 0\}$ は independent，かつ $\widetilde{P}$ と R も independent

(iii) $D(P, \widetilde{P}) < 16\mathcal{E}$

（証明） $\delta_n \searrow 0$ かつ $15 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \mathcal{E}$, $\delta_0 = \mathcal{E}$, $P_0 = P$ として，次のような分割の列（$\in Z_f$）がとれていると思ってよい：

(1) $d(P_m, \pi) \lesssim \theta(\delta_m) \qquad m = 0, 1, \cdots, n$

(2) $H(P_m) + H(R) - h(P_m \vee R, T) < \theta(\delta_m) \qquad m = 0, 1, \cdots, n$

(3) $D(P_m, P_{m-1}) < 15\,\delta_{m-1} \qquad m = 1, 2, \cdots, n$

実際，$P_0 = P$ に対する Lemma 3.1 5の仮定より Lemma 3.1 4が適用できて，$\delta = \theta(\delta_1)$ と思うと $P_1 \in Z_f$ が存在して

$$d(P_1, \pi) < \theta(\delta_1)$$

$$H(P_1) + H(R) - h(P_1 \vee R, T) < \theta(\delta_1)$$

$$D(P_1, P_0) < 15\,\mathcal{E} = 15\,\delta_0$$

帰納法により，$P_0, \cdots, P_n \in Z_f$ が上の関係(1)～(3)をみたすとしよう。このとき，P_n は Lemma 3.1 4の仮定を $\mathcal{E} = \delta_n$ としてみたしているから，$\delta = \theta(\delta_{n+1})$ と思って，Lemma 3.1 4より $P_{n+1} \in Z_f$ が存在して，

$$d(P_{n+1}, \pi) < \theta(\delta_{n+1})$$

$$H(P_{n+1}) + H(R) - h(P_{n+1} \vee R, T) < \theta(\delta_{n+1})$$

$$D(P_{n+1}, P_n) < 15\,\delta_n$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

したがって，上の関係(1)〜(3)をみたすような Z_f の例 P_0，P_1，…，P_n，…が存在する。(3)により $\{P_n\}$ はD−基本例だから，Lemma 1.4により

$$\lim_{n\to\infty} D(P_n, \widetilde{P}) = 0$$

をみたす $\widetilde{P} \in Z_c$ が存在する。このとき，$d(P_n, \widetilde{P}) \to 0$ だから $d(\widetilde{P}) = \pi$，したがって $\widetilde{P} \in Z_e$ である。一方

$$D(P, \widetilde{P}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} D(P_{n-1}, P_n)$$

$$< 15\varepsilon + 15 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = 16\varepsilon$$

したがって $\widetilde{P}$ は(i)と(iii)をみたす。$\widetilde{P}$ が(ii)をみたすことを示そう。任意の $n>0$ に対し，$A \in T^n(\widetilde{P} \vee R)$，$B \in \bigvee_0^{n-1} T^i(\widetilde{P} \vee R)$ をとる。各 k に対し，AとBに対応する $A_k \in T^n(P_k \vee R)$，$B_k \in \bigvee_0^{n-1} T^i(P_k \vee R)$ をとると，

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A_k \cap B_k)| \leqq (n+1) D(\widetilde{P} \vee R, P_k \vee R)$$

$$= (n+1) D(\widetilde{P}, P_k) \to 0 \quad (k \to \infty)$$

同様に

$$\lim_{k\to\infty} |\mu(A) - \mu(A_k)| = \lim_{k\to\infty} |\mu(B) - \mu(B_k)| = 0$$

ところが，(2)によって，Lemma 3.1 2が使えて，

$T^n P_k$ と $\bigvee_0^n T^j R \vee \bigvee_0^{n-1} T^j P_k$ とは $\delta_k^2/2$ − independent

かつ，

$T^n R$ と $\bigvee_0^n T^j P_k \vee \bigvee_0^{n-1} T^j R$ とは $\delta_k^2/2$ − independent

したがって，Lemma 1.3が適用できて

$T^n(P_k \vee R)$ と $\bigvee_0^{n-1} T^j(P_k \vee R)$ とは $3/2\ \delta_k^2$ − independent

だから，

$$|\mu(A_k \cap B_k) - \mu(A_k)\mu(B_k)| < \frac{3}{2}\delta_k^2 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

以上３つの評価を合わせて，

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

したがって，$\{T^n(\widetilde{P} \vee R) ; n \geqq 0\}$ は independent．同じようにして，$A \in \widetilde{P}$，$B \in R$，$A_k \in P_k$ ととると，

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A_k \cap B)| \leqq D(\widetilde{P} \vee R, P_k \vee R)$$

$$= D(\widetilde{P}, P_k) \to 0 \quad (k \to \infty)$$

同様に，

$$|\mu(A) - \mu(A_k)| \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

ところが，(2)によって Lemma 3.1 2が使えて（$i=0$として）

$$P_k \text{と} \bigvee_0^n T^j R \text{ とは } \delta_k^2/2 - \text{independent}$$

したがって

$$|\mu(A_k \cap B) - \mu(A_k)\mu(B)| \leqq \frac{\delta_k^2}{2} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

以上，３つの評価を合わせて

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

したがって，$\widetilde{P}$ と R は independent　　　　　　　　　　　　　　　　　QED

（注意）　Lemma 3.1 5の結論(iii)が不要であるなら P と π に対する仮定(c)，(d)はいらない。この形で定理 3.3 を証明するので，あらためて，Lemma 3.1 6として述べておく。

Lemma 3.1 6　Tを$(X, \mathscr{F}, \mu)$上 ergodic，$h(T) < \infty$な変換とする。分割$R \in Z_f$ が条件

(a)　$\{T^i R ; i \geqq 0\}$ は independent

(b)　$H(R) \leqq h(T)$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

をみたすならば，つぎの２条件をみたす分割$\widetilde{P} \in Z_f$ が存在する：

(i) $H(\widetilde{P}) + H(R) = h(T)$

(ii) $\{T^i(\widetilde{P} \vee R) ; i \geqq 0\}$ は independent ，かつ$\widetilde{P}$とRも independent.

（注意） $H(R) = h(T)$のときは，$\widetilde{P}$ = trivial としてLemmaは成りたつ。

（証明） 有限確率ベクトル$\pi = \{\pi_j ; 1 \leqq j \leqq m\}$を，

$$H(\pi) = h(T) - H(R)$$

をみたすものとしてとる。このとき，Lemma 3.1 5のあとの（注意）により，Lemma 3.1 5が使えて，分割$\widetilde{P}$が存在し，(i),(ii)をみたし，$\widetilde{P} \in Z_f$ となることがわかる。 QED

定理3.3の証明のためにはこのLemma 3.1 6と，§3.1 のLemma 3.1 1が基本的であるので，それを見較べながら証明を読んでいただきたい。

（定理3.3の証明） 1° Tを$(X, \mathcal{F}, \mu)$上のBernoulli変換，$h(T) = \infty$，PをそのBernoulli generator とせよ。このPに対しては，Lebesgue空間の一般論から，有限分割の列$\{P_n\}$ $n \geqq 1$ で

$$P_n < P_{n+1}, \quad \text{かつ } H(P_n) < H(P_{n+1})$$

P_nは T に対してBernoulli分割

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} P_n \right) = \mathcal{E}$$

なるものがとれる。

2° 記号を合わせるために $_1Q_1 = P_1$ とせよ。$_{P_2}T$を考えると，$h(_{P_2}T) < \infty$である。$R = {_1Q_1}$ と思ってLemma 3.1 6を用いると，有限分割 $_1Q_2 < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P_2$が存在して，

(1) $H(_1Q_1 \vee {_1Q_2}) = h(_{P_2}T)$

(2) $\{T^i(_1Q_1 \vee {_1Q_2})\}$ は independent ， $_1Q_2$は$_1Q_1$と independent

をみたす。

3° Lemma 3 1 1を$_{P_2}T$，P_2， $_1Q_1 \vee {_1Q_2}$ に対して適用することができて，任意の$\varepsilon_2 > 0$に対して，つぎの様な有限分割 $_2Q_1$ ， $_2Q_2 < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P_2$ と $m_2 > 0$ が存在する：

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(1) $\{ T^i ({}_2Q_1 \vee {}_2Q_2) \}$ は independent , ${}_2Q_1$ と ${}_2Q_2$ は independent

(2) $d ({}_2Q_1 \vee {}_2Q_2) = d ({}_1Q_1 \vee {}_1Q_2)$

(3) $P_2 \overset{\varepsilon_2}{\leq} \bigvee_{-m_2}^{m_2} T^i ({}_2Q_1 \vee {}_2Q_2)$

(4) $D ({}_2Q_1 \vee {}_2Q_2 , {}_1Q_1 \vee {}_1Q_2) < \varepsilon_2$

このとき，$D ({}_2Q_1 , {}_1Q_1) < \varepsilon_2$, ${}_1Q_1 = P_1$ だから

(5) $P_1 \overset{2^{-1}}{\leq} \bigvee_{-m_1}^{m_1} T^i {}_2Q_1$

が，すべての $m_1 > 0$ に対して成り立っている。 m_1 を任意に固定する。

4° Lemma 3.16 を ${}_{P_3}T$, ${}_2Q_1 \vee {}_2Q_2$ に対して適用することができて，次のような有限分割 ${}_2Q_3 < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P_3$ を得る：

(1) $H ({}_2Q_1) + H ({}_2Q_2) + H ({}_2Q_3) = h ({}_{P_3}T)$

(2) $\{ T^i ({}_2Q_1 \vee {}_2Q_2 \vee {}_2Q_3) \}$ は independent ，かつ $\{ {}_2Q_1 , {}_2Q_2 , {}_2Q_3 \}$ も independent

5°

$0 < \varepsilon_3 < 2^{-3}$ を十分小さくとって，

$D ({}_3Q_1 \vee {}_3Q_2 , {}_2Q_1 \vee {}_2Q_2) < \varepsilon_3$

をみたす ${}_3Q_1 \vee {}_3Q_2$ は

$P_k \overset{2^{-k} + \dots + 2^{-3}}{\leq} \bigvee_{-m_k}^{m_k} T^i (\bigvee_{1}^{k} {}_3Q_j)$ $k = 1 , 2$

をみたすようにする。

Lemma 3.11 を ${}_{P_3}T$, P_3 , ${}_2Q_1 \vee {}_2Q_2 \vee {}_2Q_3$ に対して適用して，上のような $\varepsilon_3 > 0$ に対して，つぎの様な有限分割 ${}_3Q_1$, ${}_3Q_2$, ${}_3Q_3 < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P_3$ と $m_3 > 0$ が存在することがわかる。

(1) $\{ T^i ({}_3Q_1 \vee {}_3Q_2 \vee {}_3Q_3) \}$ は independent ，かつ $\{ {}_3Q_1 , {}_3Q_2 , {}_3Q_3 \}$ も independent

(2) $d ({}_3Q_1 \vee {}_3Q_2 \vee {}_3Q_3) = d ({}_2Q_1 \vee {}_2Q_2 \vee {}_2Q_3)$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(3) $P_3 \overset{\varepsilon_3}{\leqq} \bigvee_{-m_3}^{m_3} T^i({}_3Q_1 \vee {}_3Q_2 \vee {}_3Q_3)$

(4) $D({}_3Q_1 \vee {}_3Q_2 \vee {}_3Q_3 \, , \, {}_2Q_1 \vee {}_2Q_2 \vee {}_2Q_3) < \varepsilon_3$

このとき，ε_3のとり方から，(4)は

(5) $P_k \overset{2^{-k}+\cdots+2^{-3}}{\leqq} \bigvee_{-m_k}^{m_k} T^i(\bigvee_1^k {}_3Q_j)$ $\qquad k=1.\ 2$

をみたしている。

6° 以下同様にして，帰納的に有限分割

${}_1Q_1 \, , \, {}_1Q_2$

${}_2Q_1 \, , \, {}_2Q_2 \, , \, {}_2Q_3$

....

${}_nQ_1 \, , \, {}_nQ_2 \, , \, \cdots \, , \, {}_nQ_{n+1}$

....

と，整数列$\{ m_n > 0 \, ; \, n \geqq 1 \}$が求まって次の性質をもつようにできる：

(1) $\bigvee_1^n {}_nQ_j < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P_n \, , \, {}_nQ_{n+1} < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P_{n+1}$

(2) $\{ T^i(\bigvee_1^{n+1} {}_nQ_j) \}$は independent ，$\{ {}_nQ_1 \, , \, \cdots \, , \, {}_nQ_{n+1} \}$ も independent

(3) $P \overset{2^{-k}+\cdots+2^{-n}}{\leqq} \bigvee_{-m_k}^{m_k} T^i(\bigvee_1^k {}_nQ_j) \, , \quad 1 \leqq k \leqq n$

(4) $d(\bigvee_1^n {}_nQ_j) = d(\bigvee_1^n {}_{n-1}Q_j)$

(5) $D(\bigvee_1^n {}_nQ_j \, , \, \bigvee_1^n {}_{n-1}Q_j) < 2^{-n}$

(6) $\sum_1^{n+1} H({}_nQ_j) = h(P_{n+1} T)$

したがって，(5)により，各 j に対して

$$D({}_\infty Q_j \, , \, {}_nQ_j) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

なる分割${}_\infty Q_j$ があって，$d({}_\infty Q_j) = d({}_jQ_j)$ ，（したがって，${}_\infty Q_j \in Z_e$ ）一方，(2)により$\{ {}_\infty Q_j \, ; \, j \geqq 1 \}$は independent ，$\{ T^i(\bigvee_1^{\infty} {}_\infty Q_j) \}$も independent 。(3)により，

$$P_k \overset{2^{-k+1}}{\leqq} \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i(\bigvee_1^k {}_\infty Q_j) \qquad k=1.\ 2\cdots$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

したがって

$$(7)\quad \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^{i}\left(\bigvee_{1}^{\infty} {}_{\infty}Q_{j} \right) = \mathcal{E}$$

7° 1°のとり方により $H(P_{n-1}) < H(P_n)$ であったが，分割 $\{P_n\}$ の部分列をとることによって，さらに，$H(P_{n-1}) + \log 2 < H(P_n)$ をみたすとしてよい。

ところで，Lemma 3.1 6の証明でとった確率ベクトルは，$H(\pi) = h(T) - H(R)$ をみたすという条件のもとで，その分布は自由に与えられ，そのとき，Lemma 3.1 6で作られる分割 $\widetilde{P}$ は $d(\widetilde{P}) = \pi$，$H(\widetilde{P}) = H(\pi)$ をみたしていることに注意せよ。そうすると，2°, 4°, … で帰納的に作られる分割列 $\{{}_{n-1}Q_n,\ n \geqq 2\}$ は，$H({}_{n-1}Q_n) = H(P_n) - H(P_{n-1}) > \log 2$ をみたすが，さらに，各 ${}_{n-1}Q_n$ の元の測度はすべて $\frac{1}{2}$ 以下と思ってよい。6° の極限移行で述べたように，$d({}_{\infty}Q_n) = d({}_{n-1}Q_n)$ であったから結局(7)から，Tは〔0，1〕の無限直積空間上の shift と同型である。以上のことから Bernoulli 変換で，そのエントロピーが無限大となるものは全て同型である。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

第4章　弱Bernoulli変換の同型定理

前章で，エントロピーが，Bernoulli変換に対して complete invariant であることを証明した。この章では，前章の結果を拡張して，エントロピーが，弱Bernoulli変換に対しても complete invariant になることを証明する。すなわち，（無限大も含めて）等しいエントロピーをもつ弱Bernoulli変換は同型であることを示す。第2章の例2.2～例2.5が弱Bernoulli変換となっていることを注意したが，同時に，弱Bernoulli変換に対しては，変換のエントロピーが，その弱Bernoulli generator のエントロピーより，一般に小さくなることにも注意すべきである。したがって，（§4.2のはじめにも書くが）弱Bernoulli変換のエントロピーと，その弱Bernoulli generator のエントロピーにはいくつかの場合が考えられる。一方，§1.5のエントロピーの関係式は，一般には，エントロピー有限な分割に対して成立することしかわからない。だから，この章では，まず§4.1で有限 state の弱Bernoulli変換に対する同型定理（定理4.1）を述べる。この定理の証明は，Friedman－Ornstein〔7〕の証明を Smorodinsky 流に書き直したもので，第3章を読まれた方には，わかりやすくなっているはずである。ついで，§4.2では，定理4.1に用いた近似の Lemma を有限 state の弱Bernoulli変換に逐次適用することによって一般の場合の弱Bernoulli変換に対しても，同型定理（定理4.2）が成り立つことを主張する。

§4.1　有限 state の弱Bernoulli変換の同型定理

この節の目的はつぎの定理を証明することである。

定理 4.1　有限 state の弱Bernoulli変換は Bernoulli変換である。したがって，2つの有限 state の弱Bernoulli変換が等しいエントロピーを持てば，それらは同型である。

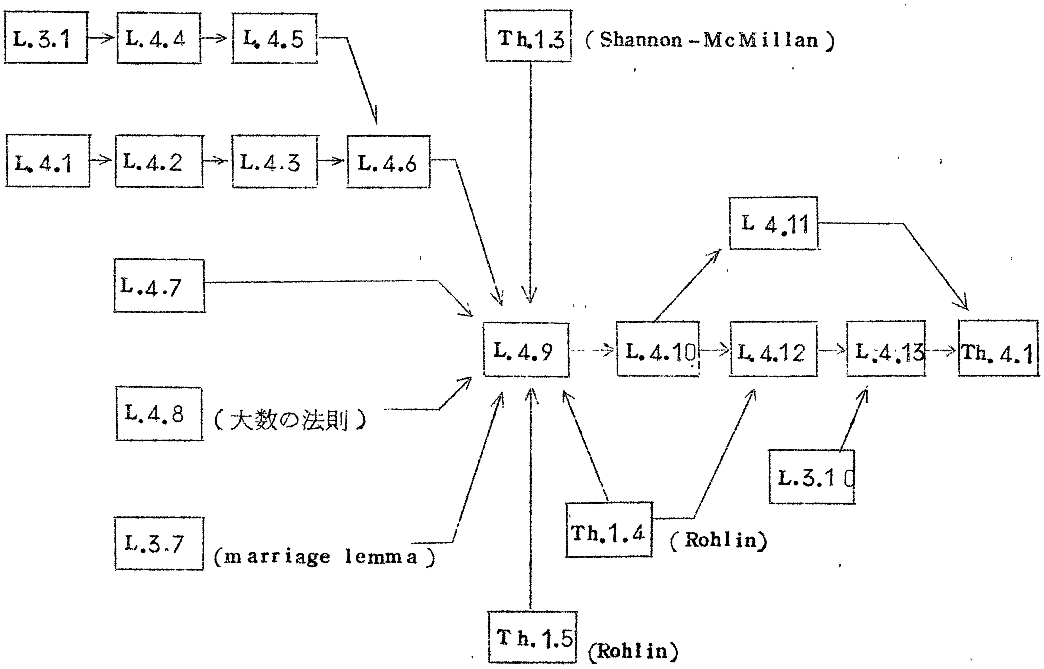
定理の後半は前半と定理3.1から導かれるので，前半を示せばよい。証明の筋は前章の Bernoulli の場合（定理3.1）とほとんど同じである。しかしながら，Bernoulli変換がその Bernoulli generator の分布である確率ベクトルで特徴づけられるのに比べ，弱Bernoulli変換（S，R）の場合には，分布

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$d\left(\bigvee_{0}^{n} S^{i}R\right), \quad n \geq 0,$$

によってしか変換(S,R)を特徴づけることができないという事情がある。そのために証明は幾分か煩雑になる。見通しをつけるために,定理3.1の証明と比較しながら読まれることをすゝめたい。定理3.1と同じに行く所は省略したり簡略化したりする。

定理4.1は,証明を少し精密に行なう(有限分割で近似する方法で)ことによって,エントロピーが有限な弱Bernoulli generatorを持つ(可算stateの)弱Bernoulli変換に対しても成りたつことがわかる。しかし,証明をいたずらに煩雑にしないためと,次節でその場合も含む定理を示すという理由で,有限stateに限った。ここで用いる一連のLemmaの間の論理関係は次の図のようになっている。



まずLemma 3.3を精密化せねばならない。そのためにつぎのことを注意する。証明は明らかであろう。

<u>Lemma 4.1</u> $\pi=\{\pi_k\}$と$\pi'=\{\pi_k'\}$を与えられた確率ベクトルとせよ。それに対して，つぎの様な分割PとQが存在する：

(a) $d(P)=\pi$, $d(Q)=\pi'$,

(b) $D(P,Q)=d(\pi,\pi')$

つぎのLemmaがLemma 3.3の精密化である。

<u>Lemma 4.2</u> 可算分割 P_0 , P_1 , Q_0 , Q_1, P_0', Q_0' に対して，関係

(a) P_0とP_1 , Q_0とQ_1はε−independent ,

(b) $d(P_1, Q_1)<\varepsilon$,

(c) $d(P_0')=d(P_0)$, $d(Q_0')=d(Q_0)$,

が成りたっているとする。このときつぎの様な可算分割P_1', Q_1'が存在する：

(d) $d(P_0'\vee P_1')=d(P_0\vee P_1)$, $d(Q_0'\vee Q_1')=d(Q_0\vee Q_1)$,

(e) $D(P_1', Q_1')<3\varepsilon$

（証明） φを（c）で定まる $P_0\to P_0'$, $Q_0\to Q_0'$なるcanonicalな写像とせよ。任意の$p\in P_0$, $q\in Q_0$をとり，$r=\varphi(p)\cap\varphi(q)$とおく。確率ベクトル$d(P_1/p)$, $d(Q_1/q)$にLemma 4.1をr上で適用して，つぎの様なrの分割 P_1'/r , Q_1'/rを得る：

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(1) $d(P_1'/r)=d(P_1/p)$, $d(Q_1'/r)=d(Q_1/q)$,

(2) $D(P_1'/r, Q_1'/r)=d(P_1/p, Q_1/q)$

空間の分割 $P_1'=\bigcup_r P_1'/r$ （P_1'/r の k 番目の元を r について合併したものが P_1' の k 番目の元である）と $Q_1'=\bigcup_r Q_1'/r$ を定めれば，(1)から(d)が従う。また等式

$$\sum_{p\in P_0} d(P_1/p, P_1)\mu(p)=\sum_{p\in P_0, p'\in P_1} |\mu(p\cap p')-\mu(p)\mu(p')|$$

に注意して，(2)より

$$\begin{aligned}
D(P_1', Q_1') &= \sum_{p\in P_0, q\in Q_0} D(P_1', Q_1' | \varphi(p)\cap\varphi(q))\,\mu(\varphi(p)\cap\varphi(q)) \\
&= \sum_{p,q} d(P_1/p, Q_1/q)\,\mu(\varphi(p)\cap\varphi(q)) \\
&\leq \sum_{p,q} \{d(P_1/p, P_1)+d(P_1, Q_1)+d(Q_1, Q_1/q)\} \\
&\quad \times\mu(\varphi(p)\quad\varphi(q)) \\
&= \sum_p d(P_1/p, P_1)\mu(p)+d(P_1, Q_1)+\sum_q d(Q_1, \\
&\quad Q_1/q)\mu(q) \\
&< 3\varepsilon
\end{aligned}$$

を得る。 QED

つぎの Lemma は Lemma 3.4 に相当する。

Lemma 4.3 可算分割 P_i, Q_i, $0\leq i\leq n$, P_0', Q_0' が条件

(a) P_0 と $\bigvee_1^n P_i$, Q_0 と $\bigvee_1^n Q_i$ は ε − independent,

(b) $d(\bigvee_1^n P_i, \bigvee_1^n Q_i)<\varepsilon$,

(c) $d(P_0')=d(P_0)$, $d(Q_0')=d(Q_0)$,

をみたせば，つぎの様な可算分割 P_i', Q_i', $1\leq i\leq n$, が存在する：

(d) $d(\bigvee_0^n P_i')=d(\bigvee_0^n P_i)$, $d(\bigvee_0^n Q_i')=d(\bigvee_1^n Q_i)$,

(e) $\sum_{i=1}^n D(P_i', Q_i')<3n\varepsilon$

（証明）Lemma 4.2 がそのまゝ使えて，(d)と $D(\bigvee_1^n P_i', \bigvee_1^n Q_i')<3\varepsilon$

をみたす分割 P_i', Q_i', $1 \leq i \leq n$ ，がとれる。ところが

$$D(P_i', Q_i') \leq D(\bigvee_1^n P_i', \bigvee_1^n Q_i'), \quad 1 \leq i \leq n$$

だから(e)も成りたつ。 QED

Lemma 4.4 $\varepsilon > 0$ に対し Lemma 3.1 で定まった $\delta = \delta(\varepsilon)$ をとる。有限分割 P_0 ，P ，Q ，R が関係

(a) $P_0 < P$ ，

(b) P_0 と Q は $\varepsilon-$independent ，

(c) $H(P \mid Q) - H(P \mid Q \vee R) < \varepsilon\delta$ ，

をみたせば，

(d) P_0 と $Q \vee R$ は $4\varepsilon-$independent

である。

（証明） 分割 P/q（P の q への制限）を部分空間（q，$\mu(\cdot \mid q)$）の分割と考えて，そのエントロピーを $H(P/q)$ で表わす（§1.5参照），そうすると等式

$$\begin{aligned} &H(P \mid Q) - H(P \mid Q \vee R) \\ &= \sum_{q \in Q} \mu(q)\left\{H(P/q) - \sum_{r \in R} \frac{\mu(q \cap r)}{\mu(q)} H(P/q \cap r)\right\} \\ &= \sum_{q \in Q} \mu(q)\{H(P/q) - H(P/q \mid R/q)\} \end{aligned}$$

が成りたつ

$$Q_1 = \{q \in Q \,;\, H(P/q) - H(P/q \mid R/q) < \delta\}$$

とおけば，上の等式と（c）により

$$\mu(\bigcup_{q \in Q_1} q) > 1 - \varepsilon$$

である。Lemma 3.1 によれば，$q \in Q_1$ に対し，P/q と R/q は $\varepsilon-$independent である。したがって，P_0/q と R/q も（$q \in Q_1$ に対して）$\varepsilon-$independent である。以上のことを用い

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

て、つぎの評価が出来る。

$$\sum_{p\in P_0, q\in Q, r\in R} |\mu(p\cap q\cap r)-\mu(p)\mu(q\cap r)|$$

$$\leq \sum_{p,q,r} \mu(q)\{|\mu(p\cap r|q)-\mu(p|q)\mu(r|q)|$$

$$+\mu(r|q)|\mu(p|q)-\mu(p)|\}$$

$$=\sum_{q\in Q_1} \mu(q) \sum_{p,r} |\mu(p\cap r|q)-\mu(p|q)\mu(r|q)|$$

$$+\sum_{q\notin Q_1} \mu(q) \sum_{p,r} |\mu(p\cap r|q)-\mu(p|q)\mu(r|q)|$$

$$+\sum_{p,q} |\mu(p\cap q)-\mu(p)\mu(q)| \sum_r \mu(r|q)$$

$$\leq 4\varepsilon$$

QED

<u>Lemma 4.5</u> 変換Sを考え，有限分割RはSに対して弱Bernoulliであるとする。$\varepsilon>0$を与え，弱 Bernoulliの定義におけるK＝K（$\varepsilon/5$，R)をとる。Lを任意の正整数とする。このときつぎの様な$\eta>0$と正整数$n^*>0$が存在する：もし変換Tと有限分割Pが条件

（a） $d\left(\bigvee_{-n^*}^{K+L} S^i R,\ \bigvee_{-n^*}^{K+L} T^i R\right)<\eta$，

（b） $|h(R,S)-h(P,T)|<\eta$

をみたせば，

（c） すべての$m\geq 0$に対し$\bigvee_{-m}^{0} T^i P$と$\bigvee_{K}^{K+L} T^i P$はε－independentである。

（証明） §1.5で示した様に，$H\left(\bigvee_{0}^{K+L} S^i R \,\middle|\, \bigvee_{-n}^{0} S^i R\right)$はn→∞のとき単調減少して$H\left(\bigvee_{1}^{K+L} S^i R \,\middle|\, \bigvee_{-\infty}^{0} S^i R\right)=(K+L)h(R,S)$に収束する。$\delta=\delta(\varepsilon/4)$をLemma 3.1のものとする。nが十分大きければ

$$(K+L)h(R,S)-H\left(\bigvee_{1}^{K+L} S^i R \,\middle|\, \bigvee_{-n}^{0} S^i R\right)+\frac{\varepsilon\delta}{4}=\alpha>0$$

がなりたつ。この様なnを1つ固定して，それをn^*とする。Kのとり方によって，$\bigvee_{-n^*}^{0} S^i R$と$\bigvee_{K}^{K+L} S^i R$は$\varepsilon/5$－independentである。故に$\eta<\alpha/2(K+L)$が十分小さければ，条件(a)

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

をみたす任意のTとPに対し，$\bigvee_{-n^*}^{0} T^i P$ と $\bigvee_{K}^{K+L} T^i P$ は $\epsilon/4$ − independent であり，

$$\left| H\left(\bigvee_{1}^{K+L} S^i R \,\middle|\, \bigvee_{-n^*}^{0} S^i R\right) - H\left(\bigvee_{1}^{K+L} T^i P \,\middle|\, \bigvee_{-n^*}^{0} T^i P\right)\right| < \frac{\alpha}{2}$$

が成りたつ。また（b）から

$$|(K+L)h(R,S)-(K+L)h(P,T)| < \frac{\alpha}{2}$$

が従う。以上の評価より，任意の $m \geq n^*$ に対し

$$H\left(\bigvee_{1}^{K+L} T^i P \,\middle|\, \bigvee_{-n^*}^{0} T^i P\right) < H\left(\bigvee_{1}^{K+L} T^i P \,\middle|\, \bigvee_{-m}^{0} T^i P\right) + \frac{\epsilon\delta}{4}$$

が得られる。Lemma 4 4により（c）が出る。 QED

<u>Lemma 4.6</u> 有限分割Rは変換Sに対して弱Bernoulli であるとする。 $\epsilon > 0$ に対し，つぎの様な $\eta > 0$ と正整数 n_1 と n_2 が存在する：
もし変換Tと有限分割Pが条件

（a） $d\left(\bigvee_{0}^{n_1} S^i R, \bigvee_{0}^{n_1} T^i P\right) < \eta$，

（b） $|h(R,S)-h(P,T)| < \eta$，

をみたせば，Xの有限分割の列 R_i，P_i，$i=0,1,2,\cdots$，が存在して，

（c） $d\left(\bigvee_{0}^{n} R_i\right) = d\left(\bigvee_{0}^{n} S^i R\right)$，$d\left(\bigvee_{0}^{n} P_i\right) = d\left(\bigvee_{0}^{n} T^i P\right)$，

$n=0,1,2,\cdots$，

（d） $\sum_{i=0}^{n} D(R_i, P_i) < \epsilon n$，　$n \geq n_2$，

を満足する。

（証明） $K=K(\epsilon/60, R)$ を弱Bernoulli の定義におけるものとせよ。つぎに $K/(K+L) < \epsilon/8$ なるLをとる。Lemma 4.5を $\epsilon/12$ とLに対して適用して，$\eta < \epsilon/12$ と n^* を得る。

$$n_1 = n^* + K + L$$

とおく。Kのとり方によって，

(1) 任意の $n \geq 0$ に対し，$\bigvee_{0}^{n} S^i R$ と $\bigvee_{K+n}^{K+L+n} S^i R$ は $\epsilon/12$ − independent である。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

Lemma 4.5によって，

(2) 任意の $n \geq 0$ に対し，$\bigvee_{0}^{n} T^i P$ と $\bigvee_{K+n}^{K+L+n} T^i P$ は $\varepsilon/12$− independent である。

さて，R_i，P_i を帰納的に定めよう。R_0，P_0 として

(3) $d(R_0)=d(R)$，$d(P_0)=d(P)$

なる分割をとる。$n=0$ に対する(1)，(2)と(3)および(a)により，Lemma 4.3が適用できて，つぎの様な有限分割 R_i，P_i，$K \leqq i \leqq K+L$ が得られる：

$$d(R_0 \vee \bigvee_{K}^{K+L} R_i)=d(R \vee \bigvee_{K}^{K+L} S^i R),$$

$$d(P_0 \vee \bigvee_{K}^{K+L} P_i)=d(P \vee \bigvee_{K}^{K+L} T^i P),$$

(4) $\sum_{i=K}^{K+L} D(R_i, P_i) < (L+1)\varepsilon/4$.

つぎに R_i，P_i，$1 \leqq i < K$ を

$$d(\bigvee_{0}^{K+L} R_i)=d(\bigvee_{0}^{K+L} S^i R),\quad d(\bigvee_{0}^{K+L} P_i)=d(\bigvee_{0}^{K+L} T^i P)$$

であるように定める。そうすると，(4)により

$$\sum_{i=0}^{K+L} D(R_i, P_i) < \sum_{i=0}^{K-1} D(R_i, P_i) + \frac{\varepsilon(L+1)}{4}$$

$$\leqq 2K + \frac{\varepsilon(L+1)}{4} < \frac{(K+L)\varepsilon}{2}$$

が成りたつ。

$$n_2 = K + L$$

とおく。

さて(c)，(d)をみたす分割 R_i，P_i，$0 \leqq i \leqq j(K+L)$ がすでに得られたと仮定せよ。さらに

(5) $\sum_{k(K+L)-L}^{k(K+L)} D(R_i, P_i) < \frac{(L+1)\varepsilon}{4}$，$1 \leqq k \leqq j$

を仮定する。(a)により

(6) $d(\bigvee_{n+K}^{n+K+L} S^i R, \bigvee_{n+K}^{n+K+L} T^i P) < \frac{\varepsilon}{12}$

が成りたつ。$n=j(K+L)$ に対する(1)，(2)，(6)と(c)，(d)によって，Lemma 4.3が適用で

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

さて，つぎの様な有限分割 R_i，P_i，$j(K+L)+K \leqq i \leqq (j+1)(K+L)$ が得られる：$n_0 = j(K+L)$ として

$$d\left(\bigvee_0^{n_0} R_i \vee \bigvee_{n_0+K}^{n_0+K+L} R_i\right) = d\left(\bigvee_0^{n_0} S^i R \vee \bigvee_{n_0+K}^{n_0+K+L} S^i R\right),$$

$$d\left(\bigvee_0^{n_0} P_i \vee \bigvee_{n_0+K}^{n_0+K+L} P_i\right) = d\left(\bigvee_0^{n_0} T^i P \vee \bigvee_{n_0+K}^{n_0+K+L} T^i P\right),$$

$$(7)\quad \sum_{n_0+K}^{n_0+K+L} D(R_i, P_i) < \frac{(L+1)\varepsilon}{4}.$$

分割 R_i，P_i，$n_0 < i < n_0+K$ を，(c)が $n=(j+1)(K+H)$ に対して成りたつ様に定める。そうすれば，(5)と(7)により，$j(K+L) < n \leq (j+1)(K+L)$ に対し

$$\sum_{i=0}^{n} D(R_i, P_i) < 2Kj + \frac{j(L+1)\varepsilon}{4} + 2K + \frac{(L+1)\varepsilon}{4} < n\varepsilon$$

が成りたつ。 QED

Bernoulli 変換の場合の Lemma 3.8 に相当する主 Lemma を証明するために少し準備をする。

空間 $(Y, \mathscr{G}, \nu)$ 上の変換 S と分割 $R=\{r_1, \cdots, r_k\}$ を考えよう。$Q=\bigvee_0^u S^i R$ とおく。Q の元 q の Q－name を $(s_0, s_1, \cdots, s_u)$ としよう，すなわち $q=\bigcap_0^u S^i r_{s_i}$ である。さらに長さ $n > u$ の列

$$\ell = (\ell_0, \ell_1, \cdots, \ell_{n-1}),\ 1 \leq \ell_i \leq k,\ 0 \leqq i < n,$$

をとる。このとき ℓ の中に $(s_u, s_{u-1}, \cdots, s_0)$ が続いた列として現われる回数を $N(\ell, q)$ で表わす。この回数は高々 $N(\ell, q) \leqq n-u$ である。

$\varepsilon > 0$ とする。もしすべての $q \in Q$ に対し

$$\left|\frac{N(\ell, q)}{n} - \nu(q)\right| < \varepsilon$$

が成りたてば，ℓ は Q に対する ε－列であると呼ばれる。

さて空間 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上の変換 T を考える。可測集合 B_j，$1 \leqq j \leqq J$，は $T^i B_j$，$0 \leqq i < n$，$1 \leqq j \leqq J$，がたがいに交わらず，$X_1 = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{j=1}^{J} T^i B_j$ が $\mu(X_1) > 1 - \varepsilon/4$ をみたすものとする。さらに $u/n < \varepsilon/4$ を仮定する。つぎに Q に対する $\varepsilon/4k^{u+1}$－列，$\ell_j = (\ell_{j,0}, \cdots, \ell_{j,n-1})$，$1 \leqq j \leqq J$，をとる。このとき，つぎの様な分割 $P=\{p_1, \cdots, p_k\}$ を定めよう：

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\left.\begin{array}{l} p_m \cap X_1 = \bigcup_{\ell_{j,i}=m} T^i B_j \\ p_m \cap X_1^c \text{ は任意} \end{array}\right\} \quad 1 \leq m \leq k.$$

そうすればつぎのことが成りたつ。

Lemma 4.7 上の様に定められたPに対し

$$d\left(\bigvee_0^u T^i P, Q\right) < \epsilon$$

が成りたつ。さらにもし列 ℓ_j, $1 \leq j \leq J$, がすべて異なる（列として異なる）ならば，$B = \bigcup_1^J B_j$ として

$$T^i B_j \in \mathscr{F}\left(\bigvee_{-n}^n T^i (P \vee \{B, B^c\})\right), \quad 0 \leq i < n, \quad 1 \leq j \leq J,$$

である。

（証明） 任意の元 $q \in Q$ を固定する。q は

$$q = \bigcap_0^u S^i r_{s_i}$$

の形であるとせよ。q に対応する $Q' = \bigvee_0^u T^i P$ の元は

$$q' = \bigcap_0^u T^i p_{s_i}$$

である。Pの定め方により，もし $\ell_{j,d-i} = s_i$, $0 \leq i \leq u$ であれば，

$$T^d B_j \subset \bigvee_0^u T^i p_{s_i} = q'$$

である。したがって

$$\sum_{(d,j)} \mu(T^d B_j) \leq \mu(q')$$

である。こゝに左辺の和は，$\ell_{j,d-i} = s_i$, $0 \leq i \leq u$, をみたす組 (d, j) についてとる。$N(\ell_j, q)$ の定め方に注意すれば，

$$\sum_{(d,j)} \mu(T^d B_j) = \sum_{j=1}^J N(\ell_j, q)\, \mu(B_j)$$

であることがわかる。したがって，

$$\triangle(q') = \mu(q') - \sum_{(d,j)} \mu(T^d B_j)$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

とおけば，

$$\mu(q')=\sum_{j=1}^{J}N(\ell_j,q)\mu(B_j)+\triangle(q')$$

となる。

集合 $\bigcup_{(d,j)}T^dB_j$ は（s_0，…，s_u）に対して定まっているわけであるが，これを可能な（s_0，…，s_u）全部について和をとれば，

$$\bigcup_{(s_0,\cdots s_u)}\bigcup_{(d,j)}T^dB_j=\bigcup_{i=u}^{n-1}\bigcup_{j=1}^{J}T^iB_j$$

を得る。したがって

$$\begin{aligned}\sum_{q\in Q}\triangle(q')&=1-\sum_{(s_0,\cdots,s_u)}\sum_{(d,j)}\mu(T^dB_j)\\&=1-\sum_{j=u}^{n-1}\sum_{j=1}^{J}\mu(T^iB_j)\\&=\mu(X\setminus X_1)+u\sum_{j=1}^{J}\mu(B_j)\\&\leq\frac{u}{n}+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

が成りたつ。故に

$$\begin{aligned}d(Q,Q')&=\sum_{q\in Q}\left|\nu(q)-\sum_{j=1}^{J}N(\ell_j,q)\mu(B_j)-\triangle(q')\right|\\&\leq\sum_{q\in Q}\sum_{j=1}^{J}\left|\nu(q)-\frac{N(\ell_j,q)}{n}\right|n\mu(B_j)+\frac{3\varepsilon}{4}\\&<\sum_{q\in Q}\frac{\varepsilon}{4k^{u+1}}+\frac{3\varepsilon}{4}=\varepsilon\end{aligned}$$

が得られる。

つぎに ℓ_j，$1\leq j\leq J$，がすべて異なる場合を考えよう。まず $i=0$ の時に示す。任意の $j\neq j'$ をとれば，ℓ_j と $\ell_{j'}$ は異なるから $\ell_{j,i}\neq\ell_{j',i}$ なる i がある。このとき $T^iB_j\subset p_{\ell_{j,i}}$，$T^iB_{j'}\subset p_{\ell_{j',i}}$ かつ $p_{\ell_{j,i}}\cap p_{\ell_{j',i}}=\phi$ である。したがって

$$B_j\subset T^{-i}p_{\ell_{j,i}},\quad B_{j'}\subset T^{-i}p_{\ell_{j',i}},\quad p_{\ell_{j,i}}\cap p_{\ell_{j',i}}=\phi,$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

となって，$B_j \in \mathscr{F}(\bigvee_{-n}^{0} T^i P \vee \{B, B^c\})$ である。故に任意の $0 \leq i \leq n-1$，$1 \leq j \leq J$ に対し，$T^i B_j \in \mathscr{F}(\bigvee_{-n}^{n} T^i(P \vee \{B, B^c\}))$ である。　　QED

Lemma 4.8　エルゴード的な変換 S と有限分割 $R = \{r_1, \cdots, r_k\}$ に対して，$Q = \bigvee_0^u S^i R$ とおく，さらに $L_n = \bigvee_0^{n-1} S^{-i} R$ とおきその元

$$\ell = \bigcap_0^{n-1} S^{-i} r_{\ell_i} \in L_n$$

を $\ell = (\ell_0, \ell_1, \cdots, \ell_{n-1})$ で表わす。このとき，任意の $a > 0$，$b > 0$ に対し n_0 があって，$n \geq n_0$ であればつぎの様な集合 $Y' \in \mathscr{F}(L_n)$ が存在する：

(a)　$\nu(Y') > 1 - a$,

(b)　$\ell \in L_n / Y'$ ならば ℓ は Q に対する b－列である。

（証明）　$\ell = \bigcap_0^{n-1} S^{-i} r_{\ell_i} \in L_n$ と $q = \bigcap_0^{u} S^i r_{s_i}$ において，$u \leq d < n-1$ に対し $x \in \ell$ かつ $S^d x \in q$ であれば

$$(s_u, s_{u-1}, \cdots, s_0) = (\ell_{d-u}, \cdots, \ell_d)$$

である。したがって

$$\frac{N(\ell, q)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{d=u}^{n-1} 1_q(S^d x)$$

が成りたつ。右辺はエルゴード定理により $\nu(q)$ に a. e. 収束する。Q は有限分割だから，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(\ell, q)}{n} = \nu(q), \quad q \in Q, \quad a.\ e.$$

QED

つぎの Lemma が Lemma 3.8 に対応するものである。

Lemma 4.9　2つの変換 $(X, \mathscr{F}, \mu, T)$ と $(Y, \mathscr{G}, \nu, S)$ を考える。Y の有限分割 R は S に対して弱 Bernoulli generator であるとする（したがって $h(S) = h(R, S) < \infty$）。T はエルゴード的であって，$h(T) = h(S)$ とする。$\varepsilon > 0$ とし，S, R, $\varepsilon^2/3$ に対して Lemma 4.6 で与えられる η，n_1，n_2 をとる。X の有限分割 P が

(a)　$d(\bigvee_0^{n_1} S^i R, \bigvee_0^{n_1} T^i P) < \eta$,

(b)　$0 < h(S) - h(P, T) < \eta$,

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

をみたすとする。

以上の仮定のもとで，任意の $\delta>0$ と正整数 u に対して，つぎの諸条件をみたす有限分割 $\widetilde{P}$ が存在する：

(c) $d(\bigvee_0^u S^i R, \bigvee_0^u T^i \widetilde{P}) < \delta$,

(d) $0 < h(S) - h(\widetilde{P}, T) < \delta$,

(e) $D(P, \widetilde{P}) < 5\varepsilon$

（証明） 1° 有限分割 $W > P$ で

$$0 < h(S) - h(W, T) = \beta < \delta/3$$

をみたすものがある。何故なら，$h(S) - \frac{\delta}{6} < h(W', T)$ をみたす有限分割 W' があり，$h(W', T) \leq h(W' \vee P, T)$ がなりたつ。W' に定理 3.2 の証明で行なった操作をほどこせば，$h(P, T)\ (< h(S))$ と $h(W' \vee P, T)$ の間の任意の値に $h(W'' \vee P, T)$ が一致する様な W'' がある。特に $W = W'' \vee P$ が求める関係をみたす様な W'' が存在する。

2° $\gamma < \min(\varepsilon/3, \delta/3, \beta/2)$ を十分小さくとって，$D(W, \overline{W}) < \gamma$ ならば $h(W, T) - \delta/3 < h(\overline{W}, T)$ が成りたつ様にする。

3° n を十分大きくとって，つぎの諸条件がみたされる様にする：

(1) $S, R, Q = \bigvee_0^u S^i R$ に Lemma 4.8 が適用できて，$L_n = \bigvee_0^{n-1} S^{-i} R$ とおくと，$Y' \in \mathscr{F}(L_n)$ があって

$$\nu(Y') > 1 - \gamma/10 ,$$

かつ $\ell \in L_n / Y'$ は Q に対する $\delta/4k^{u+1}$ ー列となる。ただし $k = \# R$

(2) S と R に Shannon-McMillan の定理 1.3 を適用すれば，$Y'' \in \mathscr{F}(L_n)$ があって，

$$\nu(Y'') > 1 - \gamma/10$$

$$2^{-(h(S)+\beta/3)n} < \nu(\ell) < 2^{-(h(S)-\beta/3)n} , \quad \ell \in L_n / Y''$$

(3) T と W に Shannon-McMillan の定理を適用すれば，$X' \in \mathscr{F}(\bigvee_0^{n-1} T^{-i} W)$ があって，

$$\mu(X') > 1 - \gamma/10$$

$$2^{-(h(W,T)+\beta/3)n} < \mu(w) < 2^{-(h(W,T)-\beta/3)n} , \quad w \in \bigvee_0^{n-1} T^{-i} W / X'$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(4) $n > \max(n_1, n_2)$, $u/n < \delta/4$, $n\beta > 3$, $\mu(A) \leqq 1/n$ ならば$H(\{A, A^c\}) < \beta$。

4° 条件(a), (b)によって, Lemma 4.6が適用できて, つぎの様な有限分割 R_i', P_i', $0 \leq i < n$, が得られる:

$$d\left(\bigvee_0^{n-1} R_i'\right) = d\left(\bigvee_0^{n-1} S^{-i} R\right),\ d\left(\bigvee_0^{n-1} P_i'\right) = d\left(\bigvee_0^{n-1} T^{-i} P\right),$$

$$\sum_0^{n-1} D(R_i', P_i') < \frac{n\varepsilon^2}{3}$$

φをX上の保測変換で

$$\varphi\left(\bigvee_0^{n-1} P_i'\right) = \bigvee_0^{n-1} T^{-i} P$$

なるものとする(その様なφは, Xが non-atomic なLebesgue space だから, 存在する)。

$R_i = \varphi(R_i')$, $0 \leq i < n$, とおけば

(5) $$d\left(\bigvee_0^{n-1} R_i\right) = d\left(\bigvee_0^{n-1} S^{-i} R\right),$$

$$\sum_0^{n-1} D(R_i, T^{-i} P) < \frac{n\varepsilon^2}{3},$$

が成りたつ。

5° $L_n^* = \bigvee_0^{n-1} R_i$, $P_n = \bigvee_0^{n-1} T^{-i} P$ とおく。$R_i = \{r_1^i, \cdots, r_k^i\}$としよう。$x \in \ell = \bigcap_0^{n-1} r_{s_i}^i \in L_n^*$ のとき, xあるいはℓのL_n^* −name は$(s_0, \cdots, s_{n-1})$であるという。xやw $\in \bigvee_0^{n-1} T^{-i} W > P_n$ の P_n −name も同様に定められる。L_n^* −name を

$$s^*(x) = (s_0^*(x), \cdots, s_{n-1}^*(x)),\ s^*(\ell) = (s_0^*(\ell), \cdots, s_{n-1}^*(\ell)),$$

P_n −name を

$$s(x) = (s_0(x), \cdots, s_{n-1}(x)),\ s(w) = (s_0(w), \cdots, s_{n-1}(w)),$$

などで表わす。

さて, 整数 j, k≥ 0の関数

$$\rho_i(j,k) = \begin{cases} 1, & j \neq k, \\ 0, & j = k, \end{cases} \qquad 0 \leq i \leq n-1$$

を定め,

$$\rho(s^*(x), s(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(s_i^*(x), s_i(x))$$

とおく。これはxのL_n^* −name とP_n −name の違う個所の数を表わす。集合

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$D=\{x\ ;\ \rho(s^*(x),s(x))>n\varepsilon\}$$

を定めれば，

$$n\varepsilon\mu(D)\leq\int\rho(s^*(x),s(x))\,d\mu=\sum_{i=0}^{n-1}\mu(s_i^*(x)\neq s_i(x))$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}D(R_i,T^{-i}P)<\frac{n\varepsilon^2}{6},$$

したがって

(6) $\mu(D)<\varepsilon/6$

を得る。

6° つぎの(7)と(8)をみたす$\ell\in L_n^*$全部の集りをLで表わす：

(7) $s^*(\ell)$はQに対する$\delta/4k^{u+1}$一列，

(8) $2^{-(h(S)+\beta/3)n}<\mu(\ell)<2^{-(h(S)-\beta/3)n}$。

$X_1=\bigcup_{\ell\in L}\ell$ とおけば，(5)と(1)，(2)により

(9) $\mu(X_1)>1-\gamma/5$

である。つぎに

$$M=\{w\in\bigvee_0^{n-1}T^{-i}W/X'\ ;\ \mu(w\cap X_1\cap D^c)\geq\mu(w)/2\},$$

$$X_2=\bigcup_{w\in M}w,$$

とおけば，

$$\mu(X_2^c)=\sum_{w\notin M}\mu(w)$$

$$=\sum_{w\notin M}\{\mu(w\cap X_1\cap D^c)+\mu(w\cap(X_1\cap D^c)^c)\}$$

$$<\frac{1}{2}\sum_{w\notin M}\mu(w)+\mu(X_1^c)+\mu(D)$$

が成りたつから，(6)と(9)により

(10) $\mu(X_2^c)<2\{\mu(X_1^c)+\mu(D)\}<\varepsilon/2$

を得る。

7° Wの選び方(1°)と(8)，(4)，(3)により

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\max_{\ell \in L} \mu(\ell) < 2^{-(h(S)-\beta/3)n}$$
$$< \frac{1}{2} \cdot 2^{-(h(W,T)+\beta/3)n}$$
$$< \frac{1}{2} \min_{w \in M} \mu(w)$$

が成りたつ。したがってLemma 3.8の証明の中でと同様に，marriage lemmaが使えて，各$w \in M$に$\ell(w) \cap w \cap D^c \neq \phi$ なる $\ell(w) \in L$ を対応させ，写像ℓが1対1である様にできる。このとき

(11) $\rho(s^*(\ell(w)), s(w)) \leq \varepsilon n$

である。写像ℓを$\bigvee_0^{n-1} T^{-i}W/X'$ から L への1対1写像へ拡張しておく。実際，(3)，(4)，(8)より

$$\bigvee_0^{n-1} T^{-i}W/X' \text{ の元の個数} \leq 2^{(h(W,T)+\beta/3)n}$$
$$< 2^{(h(S)-\beta/3)n-1} < (1-\gamma/5)\, 2^{(h(S)-\beta/3)n}$$
$$< \mu(X_1)\, 2^{(h(S)-\beta/3)n} \leq L \text{ の元の個数},$$

だから上の拡張ができる。

8° Rohlin定理1.4によって，可測集合F'があって，T^iF', $0 \leq i < n$ ，はたがいに交わらず，かつ

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} T^iF'\right) > 1 - \gamma/10$$

が成りたつ。このとき(10)によって

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^iF' \cap X_2^c) \leq \mu(X_2^c) < \frac{\varepsilon}{2}$$

だから，半数以上の i に対し

(12) $\mu(T^iF' \cap X_2^c) < \varepsilon/n$

が成りたつ。同様に(3)を用いて，半数以上の i に対し

(13) $\mu(T^iF' \cap X'^c) < \gamma/5n$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

が成りたつことがわかる。(12)と(13)を共にみたす i を1つとって，$F = T^i F'$ とおく。そうすれば，$T^i F$ ，$0 \leq i < n$ ，はたがいに交わらなくて，

$$\mu\left(\bigcup_0^{n-1} T^i(F \cap X_2)\right) > 1 - \gamma/10 - \varepsilon ,$$

$$\mu\left(\bigcup_0^{n-1} T^i(F \cap X')\right) > 1 - 3\gamma/10 ,$$

が成りたつ。

9° ようやく求める分割 $\widetilde{P} = \{\widetilde{p}_1, \cdots, \widetilde{p}_k\}$ を定義できるようになった。

$$X_3 = \bigcup_0^{n-1} T^i(F \cap X') , \quad A = F \cap X'$$

とおく。それらの測度は

(14) $\mu(A) \leq 1/n$ ，$\mu(X_3) > 1 - 3\gamma/10 > 1 - \delta/4$

と評価できる。$\widetilde{P}$ を X の上でつぎの様に定める：

$$\widetilde{p}_j \cap X_3 = \bigcup\{T^i(w \cap F) ; w \in \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} W/X', \ s_i^*(\ell(w)) = j\} , \quad 1 \leq j \leq k .$$

$W^* = \bigvee_{-n}^{n} T^i(W \vee \{F, F^c\})$ とおけば，明らかに $\widetilde{P}/X_3 \subset \mathcal{F}(W^*)$ である。$\widetilde{P}/X_3$ を $\widetilde{P} < W^*$ である様に X_3^c へも拡げる。$s^*(\ell(w))$，$w \in \bigvee_0^{n-1} T^{-i} W/X'$ ，はすべて異なる列だから，Lemma 4.7 によって

(15) $d\left(\bigvee_0^u T^i \widetilde{P} , \bigvee_0^u S^i R\right) < \delta$,

(16) $T^i(w \cap F) \in \mathcal{F}(P^*)$ ，$w \in \bigvee_0^{n-1} T^{-i} W/X'$ ，$0 \leq i < n$,

が成りたつ，ただし $P^* = \bigvee_{-n}^{n} T^i(\widetilde{P} \vee \{A, A^c\})$ である。

10° 上に定めた $\widetilde{P}$ が(c)をみたしていることはすでに(15)で見た。(d)と(e)を示そう。

(d) の証明： (16)と(14)によって，つぎの様な分割 $\overline{W} < P^*$ があることがわかる：

$$D(W, \overline{W}) = D(W, \overline{W} \mid X_3^c)\,\mu(X_3^c) < 6\gamma/10 .$$

したがって 2°によって

(17) $h(W, T) - \delta/3 < h(\overline{W}, T)$

である。故に(4)，(14)，(17)，1°によって

$$h(\widetilde{P}, T) \geq h(\widetilde{P} \vee \{A, A^c\}, T) - H(\{A, A^c\})$$

$$> h(P^*, T) - \delta/3$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

$$\geq h(\overline{W}, T) - \delta/3$$

$$> h(W, T) - 2\delta/3$$

$$> h(S) - \delta$$

を得る。他方，$\widetilde{P} < W^*$,(4)，1°によって

$$h(\widetilde{P}, T) \leq h(W^*, T) = h(W \vee \{F, F^c\}, T)$$

$$\leq h(W, T) + H(\{F, F^c\})$$

$$< h(W, T) + \beta = h(S)$$

が得られる。

(e) の証明： $X_4 = \bigcup_{0}^{n-1} T^i(F \cap X_2)$ とおけば，$\mu(X_4^c) < \varepsilon + \gamma/10$ である。

$$\widetilde{p}_j \cap X_4 = \bigcup\{T^i(w \cap F)\,;\, w \in M,\ s_i^*(\ell(w)) = j\},$$

$$p_j \cap X_4 = \bigcup\{T^i(w \cap F)\,;\, w \in M,\ s_i(w) = j\},$$

だから，(11)により

$$D(\widetilde{P}, P \mid X_4)\,\mu(X_4) = \sum_{j=1}^{k} \mu((\widetilde{p}_j \cap X_4) \triangle (p_j \cap X_4))$$

$$= 2 \sum_{w \in M} \mu(w \cap F)\,\rho(s^*(\ell(w)), s(w))$$

$$\leq 2\varepsilon n \mu(F) < 2\varepsilon$$

が得られる。故に

$$D(\widetilde{P}, P) = D(\widetilde{P}, P \mid X_4)\,\mu(X_4) + D(\widetilde{P}, P \mid X_4^c)\,\mu(X_4^c)$$

$$< 2\varepsilon + 2\varepsilon + \gamma/5 < 5\varepsilon$$ QED

(注意) 上のLemmaにおいて，結論のうち(e)が不要であれば，(a)，(b)の代りに

$$h(P, T) < h(S)$$

のみを仮定すれば十分である（その様なPをとって，上の証明をやれば(c)と(d)をみたす$\widetilde{P}$の存在

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

がわかる)。

Lemma 4.10 変換$(Y, \mathcal{G}, \nu, S)$は有限分割Rを弱Bernoulli generatorとする弱Bernoulli変換であるとする(したがって$h(S)=h(R, S)$)。任意に与えられた$\epsilon>0$に対し$\delta>0$と正整数uがあって，もしエルゴード的な変換$(X, \mathcal{F}, \mu, T)$が$h(T)=h(S)$をみたし，Xの有限分割Pが条件

(a) $d(\bigvee_0^u S^i R, \bigvee_0^u T^i P)<\delta$

(b) $0<h(S)-h(P, T)<\delta$,

をみたせば，つぎの様なXの有限分割$\widetilde{P}$が存在する：

(c) $(S, R)\sim(T, \widetilde{P})\ (=({}_{\widetilde{P}}T, \widetilde{P}))$,

(d) $D(P, \widetilde{P})<\epsilon$。

(証明) $S, R, \epsilon^2/3$ に対してLemma 4.6で与えられるηとn_1 をϵの関数と考えて，$\eta(\epsilon)$, $n_1(\epsilon)$と書く。$\widetilde{\eta}(\epsilon)=\min(\eta(\epsilon), \epsilon)$および$\epsilon'=\epsilon/10$ とおく。そして

$$\delta=\widetilde{\eta}(\epsilon'),\ u=n_1(\epsilon')$$

ととればよい。実際，Lemma 4.9によって，$\widetilde{\eta}(\epsilon'/2)$と$u_1>\max(u, n_1(\epsilon'/2))$に対し，

$$d(\bigvee_0^{u_1} S^i R, \bigvee_0^{u_1} T^i P_1)<\widetilde{\eta}(\epsilon'/2),$$

$$0<h(S)-h(P_1, T)<\widetilde{\eta}(\epsilon'/2),$$

$$D(P, P_1)<5\epsilon'$$

をみたす有限分割 P_1 が存在する。

正の整数列$\{u_k\}$を

$$u_k>\max(u_{k-1}, n_1(\epsilon'/2^k), k)$$

である様に定める。そうして，つぎの3条件をみたす有限分割 P_k, $1\leq k\leq n$, が得られたと

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

仮定しよう：

(1) $d\left(\bigvee_{0}^{u_k} S^i R, \bigvee_{0}^{u_k} T^i P_k\right) < \tilde{\eta}(\varepsilon'/2^k)$,

(2) $0 < h(S) - h(P_k, T) < \tilde{\eta}(\varepsilon'/2^k)$,

(3) $D(P_{k-1}, P_k) < 5\varepsilon'/2^{k-1}$。

このときLemma 4.9が適用できて，$k=n+1$として（1－3）をみたす有限分割P_{n+1}が得られる。この様にして帰納的に，（1－3）をみたす有限分割の列$\{P_k, k \geq 1\}$が得られる。

(3) により

$$D(P_k, \tilde{P}) \to 0, \quad k \to \infty,$$

なる分割が存在することがわかる。任意に $n \geq 0$ を固定すると，$u_k \geq n$のとき

$$d\left(\bigvee_{0}^{n} S^i R, \bigvee_{0}^{n} T^i P_k\right) < \tilde{\eta}(\varepsilon'/2^k)$$

が成りたつから，$k \to \infty$として

$$d\left(\bigvee_{0}^{n} S^i R\right) = d\left(\bigvee_{0}^{n} T^i \tilde{P}\right)$$

が得られる。これは(c)を意味する。つぎに(3)により

$$D(P, \tilde{P}) \leq D(P, P_1) + \sum_{k=1}^{\infty} D(P_k, P_{k+1})$$
$$< 10\varepsilon' = \varepsilon$$

を得る。 QED

上のLemmaとその直前の注意を結びつけると，弱Bernoulli変換に対するSinai型の定理が得られる。

Lemma 4.11　変換Sは有限な弱Bernoulli generatorを持つ弱Bernoulli変換とする。もし変換Tがエルゴード的で$h(S) \leq h(T)$であれば，TはSに同型なfactorを持つ。

（証明）　もし$h(S) < h(T)$ならば，$h(Q, T) = h(S)$なる有限分割Qをとって，factor Q^Tを考えることにより，始めから$h(S) = h(T)$と仮定して良い。その様なQの存在は定理3.2の証明に示されている。

さて$h(P', T) < h(S)$なる任意の有限分割 P'をとれば，Lemma 4.9の注意によって，

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

Lemma 4.10の条件(a)，(b)をみたす有限分割Pが存在することがわかる（RをSの弱Bernoulli generatorとして）。したがってLemma 4.10によって，Sに同型なTの factor が存在する。

QED

Bernoulli変換の場合のLemma3.11に相当する generator を近似するLemmaを与えるために，その準備として，次のLemmaを証明しよう。証明はLemma 3.10と平行に出来る。

Lemma 4.12 変換Tに対し，有限分割Pは弱Bernoulli，有限分割QはBernoulliであり，

(a) $h(P, T) = h(Q, T)$

(b) $Q < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P$

(c) $P \overset{\varepsilon}{<} \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$

をみたすとする。このとき任意のγに対し，有限分割 $\widetilde{P} < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$ と整数 $m > 0$ があって，

(d) $(T, \widetilde{P}) \sim (T, P)$

(e) $\bigvee_{-m}^{m} T^i \widetilde{P} \overset{\gamma}{>} Q$

(f) $D(P, \widetilde{P}) < 2\varepsilon + \gamma$

が成りたつ。

（証明） $0 < \delta' < \gamma/4$ を任意に固定する。

1° 仮定(b)により

$$Q \overset{\delta'}{<} \bigvee_{-m'}^{m'} T^i P$$

なる$m' > 0$ が存在する。

2° Lemma 4.10によれば，$\delta > 0$と整数$u > 0$があって，

(1) $d\left(\bigvee_{0}^{u} T^i P, \bigvee_{0}^{u} T^i P_0\right) < \delta$,

(2) $0 < h(P, T) - h(P_0, T) < \delta$,

をみたす有限分割 $P_0 < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$ が存在すれば，

(3) $(T, \widetilde{P}) \sim (T, P)$,

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(4) $D(\widetilde{P}, P_0) < \delta'/6m'$,

をみたす有限分割 $\widetilde{P} < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$ がある。

3° $0 < \delta_1 < \delta/2$ を任意に固定する。さらに $0 < \delta'' < \min(\delta', \delta_1)$ を十分小さくとって，

$$D(Q, Q') < 2\delta''$$

をみたす Q' に対して

$$h(Q, T) - \delta_1 < h(Q', T)$$

が成りたつ様にする。この δ'' に対し $m'' > \max(m', u)$ があって，

(5) $Q \overset{\delta''}{<} \bigvee_{-m''}^{m''} T^i P$

が成りたつ。

4° n を $m''/n < \delta''/4$ である様にとる。${}_QT$ に Rohlin の定理1.4を適用して，つぎの様な $F \in {}_Q\mathcal{F}$ が得られる：

$T^k F$, $-n \leq k \leq n$, は disjoint ,

$\mu(Y) > 1 - \delta''/4$, $Y = \bigcup_{-n}^{n} T^k F$ 。

分割 $R = \{T^{-n}F, \cdots, F, \cdots, T^n F, Y^c\}$ を定める。

5° 仮定(c)により，$P' < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$ があって

$$D(P', P) < \varepsilon$$

である。

6° Lemma 3.10の証明5°と同様にして，つぎの様な分割 $\hat{P}_i < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$, $-n \leq i \leq n$ がとれる：

(6) $d(\bigvee_{-n}^{n} T^i P \vee P' \vee \bigvee_{-n}^{n} T^i Q \vee R)$
$= d(\bigvee_{-n}^{n} \hat{P}_i \vee P' \vee \bigvee_{-n}^{n} T^i Q \vee R)$,

(7) $\bigvee_{-m''}^{m''} T^i \hat{P}_0 / X_1 = \bigvee_{-m''}^{m''} \hat{P}_i / X_1$, $X_1 = \bigcup_{-n+m''}^{n-m''} T^i F$

このとき

(8) $\mu(X_1) > 1 - \delta''/2$

である。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

7° (5)により

$$Q'' < \bigvee_{-m''}^{m''} T^i P \ , \ D(Q, Q'') < \delta''$$

をみたす有限分割 Q'' がとれる。Lemma 3.1 0の証明の6°と同様にして，Q'' に対応する分割

$$\hat{Q}'' < \bigvee_{-m''}^{m''} \hat{P}_1 \ , \quad Q_2 < \bigvee_{-m''}^{m''} T^i \hat{P}_0$$

をとれば，$D(Q, \hat{Q}'') = D(Q, Q'')$ かつ $Q_2/X_1 = \hat{Q}''/X_1$ である。したがって

$$D(Q, Q_2) \leq D(Q, \hat{Q}'') + 2\mu(X_1^c) < 2\delta''$$

が成りたつ。したがって，3°により

(9) $h(Q, T) - \delta_1 < h(Q_2, T) \leq h(\hat{P}_0, T)$

が成りたつ。

8° $0 < \eta < \delta'/6m'$を十分小さくとって，有限分割 P_0 が

$$D(P_0, \hat{P}_0) < \eta$$

をみたせば，

(10) $d\left(\bigvee_0^u T^i P_0 \ , \ \bigvee_0^u T^i \hat{P}_0\right) < \delta_1$

(11) $h(\hat{P}_0, T) - \delta_1 < h(P_0, T)$

が成りたつ様にしておく。

9° $\hat{P}_0 < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$ だったから，上のηに対し

$$\hat{P}_0 \overset{\eta/2}{<} \bigvee_{-m_1}^{m_1} T^i Q$$

をみたす $m_1 > 0$ がある。したがって，

$$P_0' < \bigvee_{-m_1}^{m_1} T^i Q \ , \ D(\hat{P}_0, P_0') < \eta/2 \ ,$$

をみたす$P_0{}'$がある。つぎの関係をみたす分割 $\tilde{Q} < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$（元の個数はQと同じ）が存在することは明らかであろう：

$$D(Q, \tilde{Q}) < \eta/2(2m_1+1) \ , \quad H(\tilde{Q}) < H(Q)$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

P_0'の作り方と同じ方法で

$$P_0 < \bigvee_{-m_1}^{m_1} T^i \widetilde{Q}$$

を作れば，P_0 は

$$(12)\quad D(P_0, \hat{P}_0) \leq D(P_0, P_0') + D(P_0', \hat{P}_0)$$
$$\leq (2m_1+1) D(\widetilde{Q}, Q) + \eta/2 < \eta,$$

$$(13)\quad h(P_0, T) \leq h(\widetilde{Q}, T) \leq H(\widetilde{Q}) < H(Q) = h(Q, T)$$

をみたす。

10° 上のP_0が(1)，(2)をみたすことを示そう。(6)，(7)，(8)により，

$$d\left(\bigvee_0^u T^i P, \bigvee_0^u T^i \hat{P}_0\right) = d\left(\bigvee_0^u \hat{P}_i, \bigvee_0^u T^i \hat{P}_0\right)$$
$$\leq 2\mu(X_1^c) < \delta''$$

を得る。他方(12)により(10)が成りたつので，(1)が得られる。また(11)も成りたつので，(a)，(9)，(13)と合わせて，

$$h(P, T) - \delta < h(Q, T) - 2\delta_1$$
$$< h(\hat{P}_0, T) - \delta_1 < h(P_0, T)$$
$$< h(Q, T) = h(P, T)$$

すなわち(2)が成りたつことがわかる。故に，(3)と(4)をみたす有限分割$\widetilde{P} < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$ が存在する。

11° $\widetilde{P}$が求めるものであることを示そう。(d)は(3)そのものである。ηの選び方と(4)により，

$$D(\widetilde{P}, \hat{P}_0) \leq D(\widetilde{P}, P_0) + D(P_0, \hat{P}_0) < \delta'/3m'$$

が成りたつことを注意しておく。1°により，

$$Q' < \bigvee_{-m'}^{m'} T^i P, \quad D(Q, Q') < \delta',$$

をみたす分割 Q' がある。Q' に対応する分割

$$Q_1 < \bigvee_{-m'}^{m'} T^i \hat{P}_0, \quad Q_1' < \bigvee_{-m'}^{m'} T^i \widetilde{P},$$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

をとれば，7°と同様に

$$D(Q, Q_1) \leq D(Q, Q') + 2\mu(X_1^c) < 2\delta'$$

が成りたつ。また

$$D(Q_1', Q_1) \leq (2m'+1) D(\widetilde{P}, \hat{P}_0) < \delta'$$

が成りたつので，上と合わせて

$$D(Q, Q_1') < 3\delta' < \gamma$$

である。これは $m = m'$ として，(e)を意味する。最後に，$D(P', \hat{P}_0) = D(P', P) < \varepsilon$ だから，

$$D(P, \widetilde{P}) \leq D(P, P') + D(P', \hat{P}_0) + D(\hat{P}_0, \widetilde{P})$$

$$< 2\varepsilon + \delta'/3m' < 2\varepsilon + \gamma$$

すなわち(f)を得る。 QED

（注意）1° 上の証明の途中で，Lemma 3.10の結論(V)に相当することが得られている。すなわち，

$$\varphi : {}_P X \rightarrow {}_P X$$

を canonical な同型写像とすれば，11°において $Q_1' = \varphi(Q')$ だから，

$$\text{(g)} \quad D(Q, \varphi(Q)) \leq D(Q, Q_1') + D(\varphi(Q'), \varphi(Q))$$

$$< 3\delta' + D(Q', Q) < \gamma$$

が成りたつ。

2° 上の証明の中で，分割QがTに対してBernoulliであることを使ったのは，9°の部分のみである。その部分の目的は，$\hat{P}_0$ の十分近くに（Dで）P_0 をとりなおして，$h(P_0, T) < h(\hat{P}_0, T)$ ならしめ，$\hat{P}_0$ に対する他の評価は保つ様にする（Dで近ければ保たれる）ことだった。したがって，Qでなくても，$\hat{P}_0 < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i B < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$ なるBernoulli分割Bがあれば，Qの代りにBを用いて9°の議論ができる。あるいは，Qを弱Bernoulliとしたときに，上記の様に $\hat{P}_0$ のどれ

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

だけでも近くに（Dで）$h(P_0, T) < h(\hat{P}_0, T)$ なる有限分割 $P_0 < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$ が存在することが示されれば，Lemma 4.1 2はQを弱Bernoulli分割として成りたつ。

<u>Lemma 4.1 3</u> 変換Sは有限分割Rを弱Bernoulli generatorとして持ち，変換Tは有限分割PをBernoulli generatorとして持ち，$h(S) = h(T)$ とする。さらに

(a) $(T, Q) \sim (S, R)$

なる有限分割Qがあると仮定する。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対し，有限分割 Q_1 と整数 $m > 0$ があって，

(b) $(T, Q_1) \sim (S, R)$,

(c) $\bigvee_{-m}^{m} T^i Q_1 \overset{\epsilon}{>} P$

(d) $D(Q_1, Q) < \epsilon$

をみたす。

（証明） 任意の $0 < \epsilon' < \epsilon/4$ を固定する。

$$h(Q, T) = h(S) = h(T) = H(P)$$

だから，$\delta = 3$ として，Lemma 3.1 0の条件がみたされる。したがって，つぎの様な分割 $P_1 < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$ が存在する：

(1) $(T, P_1) \sim (T, P)$,

(2) $Q \overset{\epsilon'}{<} \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P_1$,

(3) $D(Q, \varphi(Q)) < \epsilon'$

こゝに φ は

$$\varphi : {}_P X \to {}_{P_1} X$$

なるcanonicalな同型写像である。

つぎにLemma 4.1 2のPとQを，こゝのQと P_1 と思えば，

$$h(Q, T) = h(T) = h(P_1, T)$$

だから，Lemma 4.1 2の仮定がすべてみたされる。故に，$\tilde{Q} < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P_1$ と $m > 0$ があって，

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(4) $(T, \widetilde{Q}) \sim (T, Q)$,

(5) $\bigvee_{-m}^{m} T^i \widetilde{Q} \overset{\varepsilon'}{>} P_1$,

(6) $D(Q, \widetilde{Q}) < 3\varepsilon'$,

が成りたつ。

$Q_1 = \varphi^{-1}(\widetilde{Q})$ とおけば，これが求めるものである。実際(4)と(a)から(b)が出る。(5)は(c)を意味する。最後に

$$D(Q_1, Q) = D(\widetilde{Q}, \varphi(Q))$$
$$\leq D(\widetilde{Q}, Q) + D(Q, \varphi(Q)) < 4\varepsilon' < \varepsilon$$

となって，(d)も得られた。 QED

（定理 4.1 の証明） 変換Sを有限分割Rを弱Bernoulli generatorとして持つ弱Bernoulli変換とする。SがBernoulli変換であることを示すために，$h(S) = H(P)\ (= h(T))$ である様な有限分割PをBernoulli generatorとするBernoulli変換Tをとって，SがTに同型であることを示す。そのためには，Tの空間Xの分割Qで

(1) $(T, Q) \sim (S, R)$,

(2) QはTのgenerator ,

となるものの存在を示せば十分である。

まずLemma 4.11によって

$$(T, Q_0) \sim (S, R)$$

なる分割 Q_0 がある。つぎにLemma 4.13によって，$\varepsilon_1 < 2^{-1}$ に対し

$$(T, Q_1) \sim (S, R),$$
$$\bigvee_{-m_1}^{m_1} T^i Q_1 \overset{2^{-1}}{>} P ,$$
$$D(Q_0, Q_1) < \varepsilon_1 ,$$

をみたす分割 Q_1 と整数 $m_1 > 0$ がある。$0 < \varepsilon_2 < 2^{-2}$ を小さくとって，有限分割 Q_2 が

(3) $D(Q_1, Q_2) < \varepsilon_2$

をみたせば，

(4) $\bigvee_{-m_1}^{m_1} T^i Q_2 \overset{2^{-1}+2^{-2}}{>} P$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

をみたすようにする。再びLemma 4.1 3を適用して，

$$(T, Q_2) \sim (S, R)$$

$$\bigvee_{-m_2}^{m_2} T^i Q_2 \overset{2^{-2}}{>} P$$

と(3)をみたす Q_2 と $m_2 > 0$ が得られる。Q_2は(4)もみたすわけである。

以下同様に，分割の列 $\{Q_n\}$ と正整数の列 $m_1 < m_2 < \cdots$ を帰納的に定める。そのやり方は定理3.1の証明と同じである。結局

(5) $(T, Q_n) \sim (S, R)$,

(6) $\bigvee_{-m_j}^{m_j} T^i Q_n \xrightarrow{2^{-j}+\cdots+2^{-n}} P, \quad 1 \leq j \leq n$,

(7) $D(Q_n, Q_{n-1}) < \varepsilon_n < 2^{-n}$,

をみたす列がとれる。故に(7)により，

$$D(Q_n, Q) \to 0, \quad n \to \infty$$

なるQがとれ，(5)により(1)がみたされる。また(6)より $\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q > P$ となって，(2)も成りたつ。

QED

§4.2 無限stateの弱Bernoulli変換の同型定理

この節ではつぎの定理を証明する。

定理 4.2 無限stateの弱Bernoulli変換はBernoulli変換である。したがって，弱Bernoulli変換はエントロピーが等しければ同型である。

定理の前半に述べられている弱Bernoulli変換 (S, R) においては，その弱Bernoulli generator Rは無限分割であるが，その中につぎの様なものがある。

(1) $h(S) = \infty$

(a) Rは可算無限分割で $H(R) = \infty$

(b) Rは可算でない（したがって $H(R) = \infty$）

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

(2) $h(S)<\infty$

(a) $H(R)<\infty$（したがってRは可算無限）

(b) Rは可算無限分割で$H(R)=\infty$

(c) Rは可算でない

定理の後半で主張していることは，(1)のクラスに入る弱Bernoulli変換はすべて同型であることと(2)のクラスおよび有限stateの弱Bernoulli変換においてはエントロピーが等しければ同型になることである。定理の後半は前半と定理4.1および前章の定理3.1と定理3.3を組合わすことによって導かれる。

定理4.1の直後に，その証明を精密化することによって含む様にできると述べられた変換は(2)の(a)の変換である。(2)の(b)の変換の例はMarkov shiftで作ることが出来る。(2)の(c)の変換が存在するかどうか，筆者達は知らない。

定理4.2の証明も定理3.3の証明と類似に実行できるが，そのためにはLemma 3.1 1に相当するLemmaを弱Bernoulliの場合に準備しておく必要がある。そのLemmaは正にLemma 4.1 3においてPをTの弱Bernoulli generatorに弱めたものである。その様なLemmaが成りたつことを説明しよう。

まず，Lemma 4.1 2の証明のあとの注意2°に注目しよう。Lemma 4.1 2の仮定において，QをTに対する弱Bernoulli分割であるとする（その様に仮定を弱める）。定理4.1によって $_QT$はBernoulli変換だから，

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i B = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i Q$$

となる有限分割BでTに対するBernoulli分割であるものが存在する。そうすれば注意2°で述べた様に，証明の9°の部分でQをBに代えて同じ議論ができる。したがって，Lemma 4.1 2の証明の他の部分はそのまゝにして，Lemma 4.1 2の結論が得られる。

上の様にLemma 4.1 2の仮定で，Qを弱Bernoulli分割に変えたLemmaをLemma 4.1 2′と名ずけよう。つぎにLemma 4.1 3の仮定において，PをTの弱Bernoulli generatorに変えたLemmaを考えよう。念のためにこのLemmaを書いておく。

Lemma 4.1 3′ (S,R)と(T,P)はともに有限stateの弱Bernoulli変換であり（すなわちRとPは有限分割で，それぞれSとTの弱Bernoulli generator），$h(S)=h(T)$とする。さらに

(a) $(T,Q)\sim(S,R)$

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

をみたす有限分割Qがあると仮定する。このとき任意の$\varepsilon>0$に対し，有限分割 Q_1 と整数$m>0$があって，

(b) $(T, Q_1) \sim (S, R)$,

(c) $\bigvee_{-m}^{m} T^i Q_1 \overset{\varepsilon}{>} P$,

(d) $D(Q_1, Q) < \varepsilon$,

をみたす。

このLemmaは，もとのLemma 4.1 3の証明において，前半でLemma 3.1 0を使う代りにLemma 4.1 2′を使う（注意1°の(g)も含めて）ことによって，Lemma 4.1 3と同じ論法で証明される。（証明の後半にもLemma 4.1 2の代りにLemma 4.1 2′を用いる）

つぎのLemmaは上のLemmaの特別な場合である。

Lemma 4.1 4 (T, P)を有限stateの弱Bernoulli変換とする。有限分割QがTに対してBernoulliであり，かつ$H(Q)=h(T)$であると仮定する。このとき，任意の$\varepsilon>0$に対し，つぎの4条件をみたす有限分割 Q_1 と整数$m>0$が存在する：

(a) Q_1はTに対するBernoulli分割，

(b) $d(Q_1) = d(Q)$,

(c) $\bigvee_{-m}^{m} T^i Q_1 \overset{\varepsilon}{>} P$,

(d) $D(Q_1, Q) < \varepsilon$。

定理 4.2 の前半の証明は，定理 3.3 の証明においてLemma 3.1 1を使った所を全部Lemma 4.1 4を使うことにし，Lemma 3.1 6とLemma 4.1 4をくり返し使うことによって，定理3.3 の証明と同じ論法で実行できる。だからくり返すことはやめる。
ただつぎのことを注意しておく。

(1) 最初の所で，今の場合 P_1 はTに対して弱Bernoulli分割だから， ${}_1Q_1$ としては ${}_{P_1}T$ に定理 4.1 を適用して得られる ${}_{P_1}T$ の有限なBernoulli generatorを取らねばならない。

(2) 弱Bernoulli generator Pの有限分割による近似列$\{P_n\}$（すなわち$P_n \nearrow P$）を，$h(P_n, T)$が真に増大する様にとれることとは保証されていない。極端な場合には $h(T)<\infty$のときに有限なnで$h(P_n, T)=h(T)$となるかも知れない。この様な時は，Lemma 3.1 6を適用する部分ではtrivialな分割しかつけ加わらないが，Lemma 4.1 4を適用する部分で

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

generator P を逐次近似することになって，結局そのまゝの証明で良いことがわかる。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

第5章　補　足

第3章と第4章において，それぞれBernoulli変換と弱Bernoulli変換に対する同型定理を証明したが，そこで用いられた考え方を適用して，Bernoulli変換に関するいくつかのことがOrnsteinによって証明されている。それらについては，細部にわたって書くことが出来ないので，この章で補足的に説明しておく。その他に，残されている問題や，前章までの議論の中で特に注意したいことを書く。

1° Sinaiの定理3.2によって，エントロピー正のエルゴード的な変換は，そのエントロピーより大きくないエントロピーのBernoulli変換をfactorとして持つ。ところで，Bernoulli変換の勝手なfactorはBernoulliであろうか？この問題に対しても，Ornstein〔21〕は肯定的な解答を与えた。すなわち，

定理 5.1　任意のBernoulli変換のtrivialでない任意のfactorは再びBernoulli変換である。

例えば強定常過程$\{x_n(\omega)\}$が独立確率変数列$\{\xi_n(\omega)\}$によって，

$$(1)\quad x_n(\omega)=\sum_k c_{n-k}\,\xi_k(\omega)$$

と表現できるかという問題がある。もし(1)の表現が得られるとすれば，$\{x_n\}$からきまるshift Sは$\{\xi_k\}$のshift T（それはBernoulli変換である）のfactorである。したがって，Sも Bernoulli変換となる。勿論この場合，表現が線型であり，しかもgeneratorを定めて（あるいは時間の方向を定めてといっても良いが）考えているわけで，Bernoulli変換Tのfactor Sが必ず(1)の形の表現を持つということではない。Bernoulli変換Tのfactorをshiftとする定常過程を一般に書くとすれば，

$$x_n(\omega)=f\,(\,\xi_k(\omega)\,,\,-\infty<k<\infty\,)$$

としか書きようがないであろう。(1)の形の表現を持つかどうかは別の問題である。

定理 5.1 の証明の粗筋を書いておく。まず有限stateの場合を考える。ところで弱Bernoulli変換の同型定理 4.1 の証明をふり返ってみると，弱Bernoulliの性質を用いたのは，Lemma 4.6 までであって，その後はLemma 4.6 に述べられている弱Bernoulli変換の性質を用いる

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

だけであって，弱Bernoulli 性は用いられていない。このことに注目して，Ornsteinは次の定義を与えている。

定義 5.1 変換Sに対して，有限分割Rがつぎの性質を持つとき，RはSに対し finitely determined であると呼ばれる：任意に $\epsilon>0$ が与えられたとき，$\eta>0$ と正整数 n_1，n_2 があって，もし変換Tと有限分割Pが条件

(a) $d\left(\bigvee_0^{n_1} S^i R, \bigvee_0^{n_1} T^i P\right)<\eta$,

(b) $|h(R,S)-h(P,T)|<\eta$,

をみたせば，

(c) $d\left(\bigvee_0^{n} R_i\right)=d\left(\bigvee_0^{n} S^i R\right)$, $d\left(\bigvee_0^{n} P_i\right)=d\left(\bigvee_0^{n} T^i P\right)$,
$n=0,1,2,\cdots$,

(d) $\sum_{i=0}^{n} D(R_i, P_i)<\epsilon n$, $n\geq n_2$

をみたす有限分割の列 R_i，P_i，$i\geq 0$，が存在する。

定理 4.1 の証明は，有限分割が弱Bernoulli であれば finitely determined であることを示す部分（Lemma 4.6まで）と，finitely determined な有限 generator を持つ変換は Bernoulli 変換であることの証明の部分（Lemma 4.7以後）に分けられる。したがって換言すれば，つぎの定理が成りたつ。

定理 5.2 finitely determined な有限分割を generator として持つ変換は Bernoulli 変換である。

いまTを有限 state の Bernoulli 変換とし，Pを有限分割とする。このとき，PがTに対して finitely determined であることが証明できる（この証明はやさしくなく，〔22〕の主な内容である）。したがって上のことより，$_PT$ は Bernoulli 変換である。つぎにTがエントロピー有限の Bernoulli 変換であれば，同型定理 3.1 によってTは有限 state の Bernoulli 変換でもあるので，上の場合に帰着される。

つぎにTをエントロピー無限大の Bernoulli 変換とし，Pは有限分割とし，$_PT$ が Bernoulli 変換であることを示す。そのためには，何かT－不変な可測分割Qがあって，$P<Q$ かつ T_Q が Bernoulli 変換で $h(T_Q)<\infty$ であることを示せば，前の場合に帰着される。もとのTとしては区間〔0，1〕とその上の Lebesgue 測度の無限直積の shift をとっておいてよい（定理 3.3'によ

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

る）。Pが有限個の座標にのみ関係する分割 P_i によって，

$$D(P_i, P) \to 0, \quad i \to \infty$$

と近似されることは明らかであろう。このとき，$\bigvee_{i=1}^{n} P_i$ も有限個の座標（例えばN個）によって定まる。

$$Q_n = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^j \left(\bigvee_{1}^{n} P_i \right)$$

とおけば，T_{Q_n} は有限エントロピーの Bernoulli 変換の factor である。実際，$\bigvee_{1}^{n} P_i$ の各元は定まったN個の座標によって定まる直積集合の有限個の和の形であるとして良い。それらの直積集合の1つを例えば

$$\{ x ; x_k \in A_1, \cdots, x_{k+N-1} \in A_N \}$$

としよう，こゝに点xのk座標を x_k で表わした。それに対し，座標0によって定まる集合 $T^{-k}\{ x ; x_k \in A_1 \}, \cdots, T^{-k-N+1}\{ x ; x_{k+N-1} \in A_N \}$ を考える。$\bigvee_{1}^{n} P_i$ のすべての元を定めるすべての直積集合を上の手続きで現在（座標0）に持って来て，それらによって定まる有限分割を R_n で表わす。そうすると $\{ T^i R_n \}$ は独立である。つまり ${}_{R_n}T$ は Bernoulli shift であり，かつ $h({}_{R_n}T) = H(R_n) < \infty$ である。明らかに $\bigvee_{1}^{n} P_i < \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i R_n$ であるので，前のことによって，T_{Q_n} は Bernoulli 変換である。ところで，定理 3.3 の証明をふり返れば，それはつぎの事の証明でもあることがわかる。

定理 3.3′　一般に変換Tに対し，$TQ_n = Q_n$ かつ $Q_n < Q_{n+1}$ なる可測分割の列があり，各 factor T_{Q_n} はエントロピーが有限（$h(T_{Q_n}) < \infty$）な Bernoulli 変換であると仮定する。そうすれば，$Q = \bigvee_{1}^{\infty} Q_n$ に対し factor T_Q は Bernoulli 変換である。

このことを用いると，Tの $Q = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^j \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} P_i \right) = \bigvee_{1}^{\infty} Q_n$ による factor T_Q は Bernoulli 変換である。さらに P_i によるPの近似を十分速くやれば，$\bigvee_{1}^{\infty} P_i$ のエントロピーは有限，したがって，この factor T_Q のエントロピーも有限であることがわかる。他方 $P < \bigvee_{1}^{\infty} P_i$ は明らかだから，示したいことが示された。つまり，Tが $h(T) = \infty$ なる Bernoulli 変換で，Pが有限分割であれば，${}_P T$ は Bernoulli 変換である。

最後に，Tを任意の Bernoulli 変換，Qを $TQ = Q$ なる trivial でない任意の可測分割としよう。$\bigvee_{1}^{\infty} Q_n = Q$ なる有限分割の単調増大列をとる。そうすると ${}_{Q_n}T$ は前述のことより Bernoulli 変換である。したがって定理 3.3′により T_Q は Bernoulli 変換である。

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

2° 一般に保測変換Tがあるときに，これをflowにうめ込めるかという問題がある。つまり，ある t_0 に対し $T_{t_0}=T$ となる flow $\{T_t\}$ があるかという問題である。これは，保測変換に対しその平方根や立方根があるかという問題とも関連している。

このうめ込みの問題について，Ornstein〔22〕はつぎのことを示した。TをX上の2－shiftとし，$P=\{p_1, p_2\}$ をそのBernoulli generator とする。X上の関数 f は p_1 上で値 $\alpha_1>0$，p_2 上で値 $\alpha_2>0$ をとり，α_1 と α_2 は α_1/α_2 が無理数で，$(\alpha_1+\alpha_2)/2=1$ であるとしよう。このとき，Tをbaseの変換としfをceiling function とするAmbrose－Kakutaniのflow（special flow）を $\{S_t\}$ とすれば，各 S_t，$t\neq 0$ はBernoulli変換となることが証明できる。

3° Bernoulli変換やそれを拡張した弱Bernoulli変換の同型定理が証明された段階では，それではK－systemに対してエントロピーが完全な不変量であるかということが当然問題となる。換言すればK－systemはBernoulli変換であるのかという問題である。この問題もOrnstein〔23〕によって解決されている。彼の答はNo！であって，彼はBernoulli変換でないK－systemの例を作った。Ornsteinの例は非常に複雑であって，もっと簡明な例が得られることが望まれる。同型問題の次の段階は，Bernoulli変換でないK－systemの中にどの様な変換があり，それらが同型なクラスにどの様に分類できるかという問題であるが，それを調べるには，その様な変換のわかりやすい例がいくつか知られる必要があるであろう。

4° Sinaiの定理3.2の原型（Sinai〔35〕が証明したこと）は，つぎの形である。

<u>定理 3.2′</u> エルゴード的なTと

$$TP>P\ ,\quad 0<H(TP|P)<\infty$$

なる可測分割があるとしよう。確率ベクトル π が

$$0<H(\pi)\leq H(TP|P)$$

をみたせば，$Q<P$ かつ $d(P)=\pi$ なるTに対するBernoulli分割Qが存在する。

この定理によれば，Bernoulli変換（T，P）と（S，Q）において，$h(T)=h(Q)<\infty$ であれば，$Q'<\bigvee_{-\infty}^{0}T^iP$ かつ $d(Q')=d(Q)$ なるTに対するBernoulli分割と $P'<\bigvee_{-\infty}^{0}T^iQ$ かつ $d(P')=d(P)$ なるSに対するBernoulli分割が存在する。つまりTとSの弱同型が過去において作られる。

そこで同型定理においても，同型が過去どうしを対応させる様に作られないかということが問題

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

となる。例えば，Bernoulli 変換（T，P）と（S，R）において，h(T)＝h(S)である場合に，

$$(2)\quad R' < \bigvee_{-\infty}^{0} T^{i}P\ ,\ P < \bigvee_{-\infty}^{0} T^{i}R',\ d(R') = d(R)$$

なる。TのBernoulli generator R'が存在するかという問題である。もしこの様な R' があれば，$\bigvee_{-\infty}^{0} T^{i}P = \bigvee_{-\infty}^{0} T^{i}R'$ となって，過去どうしが同型である。

1対1でない保測変換の同型問題は上の問題に帰着される。例えば片側Bernoulli列の shift や連分数変換やβ－変換（あとの2つは弱Bernoulli変換である）は1対1でない保測変換の例である。一般に1対1でない保測変換に対し，その natural extension と呼ばれる1対1の保測変換が存在する（〔29〕)。T が T' の natural extension というのは，

$$P < TP\ ,\ \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^{i}P = \mathcal{E}$$

なる可測分割があって，factor T_P（これは1対1でない）が T' と同型であることである。Tが T' の natural extension であれば，$h(T') = h(T)$ である。さて，Bernoulli変換の natural extension は Bernoulli 変換であり，弱Bernoulli変換の natural extension は弱Bernoulli変換であることが容易にわかる。しかもこのとき，もとの変換の generator は natural extension の generator にそのまゝ持ちこされる。したがって，つぎのことがわかる。

いま T'と S'を1対1でないBernoulli（または弱Bernoulli）変換で，$h(T') = h(S')$ なるものとしよう。TとSをそれらの natural extension とし，Qと Q'をその定義における可測分割とする。TとSはBernoulli（または弱Bernoulli)変換であって，$h(T) = h(S)$ だからそれらは同型である。このときもし，TとSが過去どうしで同型であれば，すなわち(2)をみたすTの Bernoulli generator があれば，generator が natural extension にそのまゝ持ちこされるということによって，$Q = \bigvee_{-\infty}^{0} T^{i}P = \bigvee_{-\infty}^{0} T^{i}R'$となり，$T'$と S'は同型であることがわかる。

5° §1.2において有限 state の弱Bernoulli変換はK－system であることを示したが，一般の弱Bernoulli変換に対してはそれがK－system であることの直接証明は出来ない。勿論，同型定理を用いれば，K－system であることは明らかであるが，弱Bernoulli の定義における generator P に対し $\bigvee_{-\infty}^{0} T^{i}P$ がK－分割であるかどうかはわからない。

さて，一般に可測分割PとQに対し，任意の有限分割 $P' < P$ ，$Q' < Q$ がϵ－independent のとき，PとQはϵ－independent と呼ぶことにしよう。さらにPがTに対する一様弱Bernoulli分割であるというのを，任意の$\epsilon > 0$に対し$m > 0$があって，すべての$n \geq 0$に対して $\bigvee_{-n}^{0} T^{i}P$ と $\bigvee_{m}^{m+n} T^{i}P$ がϵ－independent であることによって定義する。そして一様弱Bernoulli generator を

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

持つ変換を，一様弱Bernoulli変換と呼ぶことにしよう。

この様に定義すれば，変換Tが分割Pを一様弱Bernoulli generatorとして持てば，Tは$\bigvee_{-\infty}^{0} T^i P$をK－分割としてK－systemであることが容易にわかる。

なお上のϵ－independentの定義によれば，可算分割$P=\{p_i\}$，$Q=\{q_j\}$に対して，PとQがϵ－independentであるための必要十分条件は

$$\sum_{i\cdot j} | \mu(p_i \cap q_j) - \mu(p_i)\mu(q_j) | < \epsilon$$

である。

6° 定理4.1を，定理3.1を含む形で証明できなかったのは，大変残念である。技術的な難点を説明しよう。Lemma 4.1 2の証明のあとの注意2°を見てほしい。Lemma 4.1 2の証明の中で，つぎのことを用いた。分割$\hat{P}_0$のどれだけでも近くに

(3) $h(P_0, T) < h(\hat{P}_0, T)$

なる分割P_0が存在する。このことが，もし弱Bernoulli変換Tに対して成りたてば，Lemma 4.1 2がQをBernoulli分割としても成りたつ。そうすれば，Lemma 4.1 3が(T，P)を弱Bernoulli変換として成りたつ。その証明の前半にもLemma 3.1 0の代りにLemma 4.1 2を用いるわけである。

弱Bernoulli変換Tに対して，(3)のことの証明が出来なかったので，第4章ではあの様な証明を行なった。したがって，また定理4.2の証明には定理4 1の結果を仮定しなければならなかった。Bernoulli変換に対しては，Lemma 4.1 2の証明でみた様に(3)が成りたった。弱Bernoulli変換あるいはもっと広いクラスの変換に対して，(3)のことは成りたたないものだろうか？

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

文　　献

まず，本書で引用した文献をあげる。

〔1〕 R. L. Adler and B. Weiss : Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus. Proc. Nat. Acad. U. S. A. 57 (1967), 1573～1576.

〔2〕 W. Ambrose : Representation of ergodic flows. Ann. Math. 42(1941), 723～739.

〔3〕 ——— and S. Kakutani : Structure and continuity of measurable flow. Duke Math. J. 9(1942), 25～47.

〔4〕 P. Billingsley : Ergodic theory and information. 1965, John Wiley and Sons. (訳書：渡辺毅，十時東生：確率論とエントロピー 1968，吉岡書店)

〔5〕 J. R. Blum and D. L. Hanson : On the isomorphism problem for Bernoulli schemes. Bull. Amer. Math. Soc. 69(1963), 221～223.

〔6〕 J. L. Doob : Stochastic processes. 1953, John Wiley and Sons.

〔7〕 N. A. Friedman and D. S. Ornstein : On isomorphism of weak Bernoulli transformations. Advances in Math, 5(1971), 365～394.

〔8〕 B. M. Gurevich : The entropy of a flux of oricycles. Dokl. Akad. Nauk SSSR 136(1960), 768～770.

〔9〕 P. R. Halmos and J. von Neumann : Operator methods in classical mechanics. II. Ann. Math. 43(1942), 332～350.

〔10〕 池田信行，飛田武幸，吉沢尚明：Flowの理論(上). Seminar on Probability 12, 1962 確率論セミナー。

〔11〕 S. Ito : An elementary proof of Abramov's result on entropy of flows. Nagoya Math. J. 41 (1971), 1～5.

〔12〕 ——— and Y. Takahashi : Markov subshifts. to appear

〔13〕 A. N. Kolmogorov : On dynamical systems with an integral invariant on the torus. Dokl. Akad. Nauk SSSR 93(1953), 763～766.

〔14〕 ——— : General theory of dynamical systems and classical mechanics. Proc. International Congress Math. in Amsterdam. IV (1954), 315～333.

〔15〕 ——— : a) A new invariant for transitive dynamical systems. Dokl. Akad.

Nauk SSSR 119(1958),861〜864.

b)Entropy per unit time as a metric invariant of automorphism. ibid. 124 (1959),754〜755.

〔16〕 久保泉：エルゴード理論のReview. 数理解析研究所講究録56，統計力学とエルゴード理論研究会報告集(1968),6〜29.

〔17〕 L. D. Meshalkin：A case of isomorphism of Bernoulli schemes. Dokl. Akad. Nauk SSSR 128(1959),41〜44.

〔18〕 J. von Neumann：Zur operatoren methode in der klassischen Mechanik. Ann. Math. 33(1932),587〜642.

〔19〕 D. S. Ornstein：Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. Advances in Math. 4(1970),337〜352.

〔20〕 ――――：Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic. Advances in Math. 5(1971),339−348.

〔21〕 ――――：Factors of Bernoulli shifts are Bernoulli shifts. Advances in Math. 5(1971),349−364.

〔22〕 ――――：Imbedding Bernoulli shifts in flows. Contribution to Ergodic Theory and Probability. 1970, Springer-Verlag. (178〜218.)

〔23〕 ――――：A Kolmogorov automorphism that is not a Bernoulli shift. to appear

〔24〕 W. Parry：On the β−expansions of real numbers. Acta Mathematica Hungaricae 11(1960),401〜416.

〔25〕 ――――：Entropy and generators in ergodic theory. 1969, Benjamin.

〔26〕 M. S. Pinsker：Dynamical systems with completely positive or zero entropy. Dokl. Akad. Nauk SSSR 133(1960),1025〜1026.

〔27〕 V. A. Rohlin：On the fundamental ideas of measure theory. Mat. Sbornik 25 (1949),107〜150.(英訳：Amer. Math. Soc. Translations, Series1, 10(1962) 1〜54.)

〔28〕 ――――：Selected topics from the metric theory of dynamical systems. Uspehi Mat. Nauk 4, no. 2(1949),57〜128.(英訳：Amer. Math. Soc. Translations, Series 2, 49(1966), 171〜240.)

〔29〕 ――――：Exact endomorphisms of Lebesgue spaces. Izv. Akad. Nauk SSSR 25 (1961),499〜530(英訳：Amer. Math. Soc. Translations, Series 2, 39(1964), 1～36.

〔30〕 ——— : Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations. Uspehi Mat. Nauk 22, no. 5(1967), 3～56. (英訳 : Russian Math. Survey 22, No. 5(1967), 1～52.)

〔31〕 ——— and Ya. G. Sinai : Construction and properties of invariant measurable partitions. Dokl. Akad. Nauk SSSR 141(1962), 1038～1041.

〔32〕 C. Shannon : A mathematical theory of communication. Bell. System Tech. J. 27(1948), 379～423, 623～656. (訳書 : 長谷川 淳, 井上光洋 : コミュニケーションの数学的理論。1969, 明治図書.)

〔33〕 Ya. G. Sinai : On the notion of the entropy of a dynamical systems. Dokl. Akad. Nauk SSSR 124(1959), 768～771.

〔34〕 ——— : Dynamical systems with countably-multiple Lebesgue spectrum, I. Izv. Akad. Nauk. SSSR 25(1961), 899～924. (英訳 : Amer. Math. Sor. Translations, Series 2, 39(1961), 83～110.)

〔35〕 ——— : a) A weak isomorphism of transformations having an invariant measure. Dokl. Akad. Nauk SSSR 147(1962), 797～800. b) Weak isomorphism of transformations with invariant measure. Mat. Sbornik 63(1964), 23～42. (英訳 : Amer. Math. Soc. Translations, Series 2, 57(1966), 123～143.)

〔36〕 ——— : Markov partitions and C-diffeomorphisms. Funk. Anal. Pril. 2, no. 1(1968), 64～89.

〔37〕 ——— : Construction of Markov partitions. Funk. Anal. Pril. 2, no. 3 (1968), 70～80.

〔38〕 ——— : Dynamical systems with elastic reflections. The ergodic property of dispersing billiard. Uspehi Mat. Nauk 25, no. 5(1970), 141～192.

〔39〕 M. Smorodinsky : An exposition of Ornstein isomorphism theorem. to appear in Advances in Math.

〔40〕 十時東生 : flowとエントロピー. Seminar on Prob. 20, 1964, 確率論セミナー。

〔41〕 H. Totoki : Ergodic theory. Lecture Notes Ser. 14, 1969, Aarhus Univ.

〔42〕 H. Totoki : A class of special flows. Z. Wahr. verw. Geb. 15(1970), 157～167.

〔43〕 十時東生 : エルゴード理論入門. 1971, 共立出版

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

エルゴード理論を勉強される方は，上にあげた文献〔4〕,〔10〕,〔40〕,〔41〕,〔43〕の他に，つぎの文献を読まれるとよいだろう。

- V. I. Arnold et A. Avez : Problemes ergodiques de la mechanigue classique. 1967, Gauthier-Villars.
  (英訳：Ergodic problems of classical mechanics. 1968, Benjamin.)
- A. Avez : Ergodic theory of dynamical system. I, II. Lecture note, Univ. Minnesota, 1966.
- P. R. Halmos : Lectures on ergodic theory. 1956, Math. Soc. Japan.
- E. Hopf : Ergodentheorie. 1937, Springer-Verlag.
- K. Jacobs : Lecture notes on ergodic theory. 1962-1963, Aarhus Univ.
- 丹羽敏雄，大槻舒一，宮原孝夫：古典力学のエルゴード問題。Seminar on Probobility 30, 1969 確率論セミナー.
- Ya. G. Sinai : Dynamical systems. I. 1969-1970, Aarhus Univ.

Sem. on Probab.
Vol.33 1971年
P1-125

記　号　表

$(X,\mathcal{F},\mu)$, $(Y,\mathcal{G},\nu)$, …	; Lebesgue（確率）空間
P, Q, R, …	;（可測）分割
$p\in P$	; 分割 P の元
T, S, …	;（保測）変換
$\mathcal{F}(P)$	; 分割 P の元から作られる $\sigma-$field
$P\vee Q$	; $\{p\cap q\ ;\ p\in P,\ q\in Q\}$ なる分割（細分）
$P>Q$	; 分割 P が分割 Q の細分
$\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^iP$	; 分割 T^iP , $-\infty<i<\infty$ から作られる細分
$({}_PX,\ {}_P\mathcal{F},\ {}_P\mu)$	; $(X,\mathcal{F},\mu)$ の $\bigvee_{-\infty}^{\infty}T^iP$ に対する商空間
${}_PT$	; T を $({}_PX,\ {}_P\mathcal{F},\ {}_P\mu)$ で考えた商変換
Z_c	; 可算分割の集まり
$H(P)$	; 分割 P のエントロピー（$=-\sum_{i\geq1}\mu(p_i)\log\mu(p_i)$, $P=\{p_i\}\in Z_c$）
Z_e	; $H(P)<\infty$ なる可算分割の集まり
Z_f	; 有限分割の集まり
$d(P,Q)$, $P,Q\in Z_c$	; $=\sum_{i\geq1}\lvert\mu(p_i)-\mu(q_i)\rvert$, $p_i\in P$, $q_i\in Q$
$D(P,Q)$, $P,Q\in Z_c$	; $=\sum_{i\geq1}\mu(p_i\triangle q_i)$, $p_i\in P$, $q_i\in Q$
P/F	; 分割 P を可測集合 F 上で考えたもの
$h(P,T)$	; P の T に関するエントロピー（$=H(P\,\vert\,\bigvee_{-\infty}^{-1}T^iP)$）
$h(T)$	; 変換 T のエントロピー（$=\sup_{P\in Z_f}h(P,T)$）
$\mu(A\,\vert\,P\,;\,x)$	; A の分割 P に対する条件付測度の x における値
$N(P)$, $P\in Z_c$	; 分割 P の元の個数
$\mathcal{E}$	; 各点分割
$\mathcal{Q}$	; trivial な分割及び trivial な $\sigma-$field