Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 34

公理的ポテンシァル論

郡　　敏昭

1971

論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

目次

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

第1章 Brelotの公理によるポテンシァル論

§1. Brelotの公理

Xを局所コンパクトな連結したハウスドルフ空間で第二可算公理が満たされているものとする。Xの各開集合上で連続な函数のつくる空間の族 $\mathcal{H}$ が次のように与えられているとき $\mathcal{H}$ を Brelot の harmonic 構造と言う。

$\mathcal{H} = \{ \mathcal{H}(U)\ ;\ U$ は開集合$\}$ は次の(1)〜(3)を満たす.

(1) $\mathcal{H}(U)$ は U上の連続函数全体のつくる線型空間 $C(U)$ の部分線形空間で、次の性質をもつ。

(i) 二つの開集合 U, U', $U' \subset U$, と $f \in \mathcal{H}(U)$ に対し、fの U' への制限 $f|_{U'}$ は $\mathcal{H}(U')$ の元である.

(ii) $U = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ 上で定義された函数 f が $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{H}(U_\alpha)$ となっているならば $f \in \mathcal{H}(U)$ である.

相対コンパクトな領域 U が regularであるとは《U の境界 ∂U 上の任意の連続函数φは $\bar{U}$ 上の連続函数へ一意的に拡張され そのUへの制限 $H^U\varphi$ が $\mathcal{H}(U)$ に属すようにすることができ さらに $\varphi \geqq 0$ on ∂U より $H^U\varphi \geqq 0$ がしたがう》ことである.

公理(2)は次のように述べられる。

(2) regular な領域(connected open set)はXのトポロジーの基をつくるほど十分にある。

(3) (Harnack principle) $\mathcal{H}(U)$ の函数の族 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ が上方に方向づけられている. すなわち $\forall \alpha, \beta$ に対し $\exists \gamma$ such that $f_\alpha \leqq f_\gamma$, $f_\beta \leqq f_\gamma$, とする。このとき $\sup_{\alpha} f_\alpha$ は恒等的に $+\infty$ か又は $\mathcal{H}(U)$ に属する。

$\mathcal{H}(U)$ の函数を U 上で harmonic な函数という.

〔定義1〕 U 上の函数 f は 次のとき U 上で superharmonic という。

(a) $-\infty < f(x) \leqq +\infty$.

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Uの任意の連結した部分領域上で、恒等的に $+\infty$ となることはない。
(b) fは 下半連続。
(c) Uの任意の regular な部分集合 V と、任意の $\varphi \in C(\partial V)$ に対して

$$\varphi \leqq f \ \text{on}\ \partial V \Rightarrow H^V\varphi \leqq f \ \text{in}\ V.$$

公理(1) より任意の regular set V と任意の $x \in V$ に対し ∂V 上のラドン測度 μ_x^V が存在して

$$H^V\varphi(x) = \int \varphi\, d\mu_x^V, \quad \varphi \in C(\partial V)$$

と書ける。μ_x^V を 調和測度という。

Proposition 1.1 Uを開集合。U上の函数 u が上の定義の (a), (b) をみたすとする。このとき uは、任意の regular set $V \subset U$ と任意の $x \in V$ に対し

$$\int u\, d\mu_x^V \leqq u(x)$$

をみたすとき、そのときにかぎり superharmonic となる。
証. $Q_u = \{f \in C(\partial V) : f \leqq u \ \text{on}\ \partial V\}$ とおく。

$$\int u\, d\mu_x^V = \sup\left\{\int f\, d\mu_x^V : f \in Q_u\right\}$$

$$= \sup\{H^V f(x) : f \in Q_u\}$$

よりしたがう。

系 1.2 U上の superharmonic 函数全体を $\mathcal{S}(U)$と書く。
(a) $\mathcal{S}(U) + \mathcal{S}(U) \subset \mathcal{S}(U)$,
$\lambda\, \mathcal{S}(U) \subset \mathcal{S}(U) \quad (0 \leqq \lambda < \infty)$。
(b) $u, v \in \mathcal{S}(U) \Rightarrow \inf(u, v) \in \mathcal{S}(U)$

さて公理(3)について考えよう。今 Vを regular set とし、$f \in C_+(\partial V)$, $f \neq 0$ とすると、$H^V f \in \mathcal{H}(V)$。族$\{n H^V f\ ;\ n \geqq 1\}$に公理(3)を適用すると $H^V f \equiv 0$ 又は $H^V f > 0$ on V がわかるが、Vは regular で $f \neq 0$ だから $H^V f > 0$ でなくてはならない。以上より Support $[\mu_x^V] = \partial V$ がわかった。($\forall x \in V$)。
上の Proposition の証明と 公理(3) より、
Proposition 1.3. regular set Vの境界 ∂V 上の有界下半連続

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

函数 f に対して $x \to \int f \, d\mu_x^V$ は V 上で harmonic になる。

公理(3)は 増加する函数列に対して述べるだけでよいだろうか？ また 古典的な harmonic 構造すなわち ラプラシアン，ニュートン核から決まる harmonic 構造で成り立つ Harnack 不等式との関係はどのようになるか？ これらについて Constantinescu と Cornea 及び Mokobodzki さらに Loeb と Walsh は次の結果を得た。これは重要である.

公理(3)は、公理(1)(2) の下で 次の公理とそれぞれ同値である.

(3-(i)) 領域 U 上の増加する harmonic 函数の列 $\{h_n \,;\, n \geqq 1\}$ に対し $\lim\limits_n h_n$ は恒等的に $+\infty$ 又は $\mathcal{H}(U)$ に属する.

(3-(ii)) Uを領域，KをU のコンパクト集合. $x_0 \in K$ とする. このとき定数 $M \geqq 1$ が存在して，不等式

$$h(x) \leqq M \cdot h(x_0)$$

が 任意の非負な $h \in \mathcal{H}(U)$ と任意の $x \in K$に対し 成り立つ.

(3-(iii)) U上の非負な harmonic 函数は恒等的に 0 かまたは 決して 0 とならない。さらに任意の $x_0 \in U$ に対し，族

$$\{h \in \mathcal{H}(U) : h \geqq 0 \text{ and } h(x_0) = 1\}$$

は x_0で平等連続である.

これらの証明は一部分後に述べるが くわしくは[7] [15]. を参照してほしい。

Proposition 1.4. $\{S_\alpha\}$ を領域 G 上の Superharmonic 函数のある族で 上方に方向づけられているとする。このとき $\sup S_\alpha$ は恒等的に $+\infty$ かまたは G 上で superharmonicである.

(証) $\sup S_\alpha \not\equiv +\infty$ とし、$u(x) = \sup S_\alpha(x)$とおく. uは下半連続函数である. VをGに含まれる任意の regular set とする. また Vの境界 ∂V上の連続函数 φで ∂V 上で $\varphi \leqq u$ となるものをとる. $\{\varepsilon_k\}$を 0 に減少する正数列とする. 各 $x \in \partial V$ に対し $\exists\, S_{k,x} \in (S_\alpha)$ such that

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$S_{k,x}(x) > \varphi(x) - \varepsilon_k 。$$

∂V は Compact, $U_{k,x} = \{ y : S_{k,x}(y) > \varphi(y) - \varepsilon_k \}$ は開集合ゆえ、有限個の U_{k,x_j} ; $j = 1, 2, \cdots, n$ により ∂V をおおうことができる。

$$\partial V \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{k,x_j} 。$$

(S_α) は 上方に方向づけられているから

$$S_k \in (S_\alpha) ; \quad S_k \geqq S_{k,x_j}, \quad \forall j 。$$

この S_k に対し ∂V 上で $\varphi \leqq S_k + \varepsilon_k$ 。

列 S_k は増加列と思ってよい。この (S_k) により、任意の $x \in V$ に対し、

$$\int \varphi \, d\mu_x^V \leqq \int \sup_k S_k \, d\mu_x^V$$
$$= \sup_k \int S_k \, d\mu_x^V \leqq \sup_k S_k(x) \leqq u(x).$$

$\varphi \in C(\partial V)$, $\varphi \leqq u$ on ∂V, は任意だったから

$$\int u \, d\mu_x^V \leqq u(x)$$

を得る. Proposition 1.1 より u は Superharmonic となる.

系. 領域 G で 非負な Superharmonic 函数 S はそこで本当に正 または 恒等的に 0 となる。

(証) Progosition 1.4 を $\{ nS ; n \geqq 1 \}$ に適用すればよい.

定理 1.5 (Menimum Principle)

U を相対コンパクトな開集合で $1 \in \mathcal{S}(U)$ とする。U 上の superharmonic 函数 S が 任意の $y \in \partial U$ に対して

$$\liminf_{U \ni x \to y} S(x) \geqq 0$$

を満たすなら U 上で $S \geqq 0$.

(証) $\inf_U S = \alpha < 0$ としよう。$\bar{U}$ はコンパクトで S は下半連続, また仮定より ∂U の近くで S は非負だから $\exists x_0 \in U$, $S(x_0) = \alpha < 0$, $> -\infty$。x_0 を含む U の Connected Component を V とする。函数 $S - \alpha$ は V 上で Superharmonic で非負 そして $x_0 \in V$ で 0 となる。したがって 上の系より $S \equiv \alpha < 0$. これは 仮定とムジュンする。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Proposion 1.6. G, U を開集合で $\bar{U}\subset G$ とする。$s\in \mathcal{S}(G)$, $t\in \mathcal{S}(U)$ とする。今任意の $y\in\partial U$ に対し

$$\liminf_{U\ni x\to y} t(x) \geqq s(y)$$

とするなら

$$w = \begin{cases} \inf(s, t) & U \text{上で} \\ s & G-U \text{上で} \end{cases}$$

により定義される G 上の函数 w は G 上で Superharmonic となる。

（証） U と $G-\bar{U}$ 上で w が下半連続なことはあきらか。

また 仮定より ∂U 上でも w は下半連続がわかる。

いま任意の regular set を V とし $\varphi\in C(\partial V)$ を $\varphi\leqq w$ なる任意の函数とする。このとき $s\geqq H^V\varphi$ が V 上で成り立つことに注意しておこう。さて系1.2 (b) より w は U 上で superharmonic だから $w-H^V\varphi$ は $U\wedge V$ 上で superharmonic な函数である。一方 $z\in\partial(U\wedge V)$ に対し、もし $z\in\partial V\wedge U$ なら

$$\liminf_{U\wedge V\ni y\to z}(w-H^V\varphi)\geqq w(z)-\varphi(z)\geqq 0.$$

もし $z\in\partial U\wedge V$ なら

$$\liminf_{U\wedge V\ni y\to z}(w-H^V\varphi)\geqq s(z)-H^V\varphi(z)\geqq 0$$

となる。したがって Minimum principle より $U\wedge V$ 上で $w\geqq H^V\varphi$ となる。一方 $(X-U)\wedge V$ 上では $w=s\geqq H^V\varphi$ だから、結局 V 上で $w\geqq H^V\varphi$ となる。これで証明は終りであるが 上の議論は $U\cap V=\phi$ のとき、そうでないとき等とわけてしなければならないが その調整はあきらかだろう。

系1.7 G を開集合 U を closure が G に含まれる regular set とする。$s\in\mathcal{S}(G)$ とする。このとき

$$s^U(x) = \begin{cases} \int s\, d\mu_x^U & x\in U \\ s(x) & x\in G-U \end{cases}$$

は G 上で superharmonic となる。

定義。開集合 G 上の superharmonic 函数の族 $\mathcal{U}$ が G 上で、

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

ペロンの条件をみたすとは 次のことを言う。

(i) $\mathcal{U} \neq \phi$, $\mathcal{U}$ は下に方向づけられている.

(ii) $\mathcal{U}$ は 任意の G のコンパクト集合上で一様に下から有界である.

(iii) regular set よりなる G の位相の基 $\mathcal{B}$ が存在して、$V \in \mathcal{B}$ に対し $S \in \mathcal{U}$ なら $S^V \in \mathcal{U}$。

定理 1.8 (Perron)。$\mathcal{U}$ を開集合 G 上でペロンの条件をみたす族とするとき $\inf \mathcal{U}$ は G 上で harmonic となる。

(証) V を任意の $\mathcal{B}$ の regular set, $\overline{V} \subset G$ とする。

$g = \inf \mathcal{U}$ は (i), (ii) より有限。(iii) より $S \in \mathcal{U}$ なら $S^V \in \mathcal{U}$, また $S^V \leqq S$ だから

$g = \inf \{ S^V ; S \in \mathcal{U} \}$。ところが Proposition 1.3 より S^V は V 上で harmonic。したがって公理 (3) より g は V 上で harmonic。$V \in \mathcal{B}$ は任意であり、$\mathcal{B}$ は G の位相の基であったから 公理 (1) より g は G 上で harmonic となる。

公理 (1)(2)(3) より公理 (3-(ii)) を証明しよう。

定理 1.9. (Harnack の不等式)。領域 G の任意の一点 x_0 とコンパクト部分集合 K に対し、ある定数 $\alpha = \alpha(K, x_0) > 0$ が存在して

$$\sup_{x \in K} h(x) \leqq \alpha h(x_0)$$

が任意の $h \in \mathcal{H}_+(G)$ に対して成り立つ。

(証) $\mathcal{N} = \{ h \in \mathcal{H}_+(G) ; h(x_0) = 1 \}$ とおく。

$\sup_{\mathcal{N}} \sup_{K} (x) \leqq \alpha$ となる定数 α の存在を $h \in \mathcal{N}$ $x \in K$ 言えばよい. このような α がないとすると、各 $n \geqq 1$ に対し、$\exists h_n \in \mathcal{N}$, $\exists x_n \in K$ such that

$$2^{2n} \leqq h_n(x_n)。$$

$u = \sum 2^{-n} h_n$ とおくと 公理 (3) より $u \in \mathcal{H}_+(G)$ または u は恒等的に $+\infty$ に等しい。$u(x_0) = 1$ だから $u \in \mathcal{H}_+(G)$。そこで $\beta = \sup_K u(x)$ と おくと任意の n に対して

$$2^n \leqq 2^{-n} h_n(x_n) \leqq u(x_n) \leqq \beta < \infty \quad となる。$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

これはムジュン。

§2. $\mathcal{B}$-nearly superharmonic 函数. Bauer の minimum principle の応用。

$\mathcal{B}$を regular set よりなる X の位相の基の一つとする。
開集合 U 上の函数 u は次のとき U 上で nearly $\mathcal{B}$-superharmonic 又は $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$- 函数であるという。

(i) u は U のコンパクト集合上で下から有界で U の任意の connected component 上で恒等的に $+\infty$となることはない。

(ii) 任意の $V\in\mathcal{B}$, $\bar{V}\subset U$, に対し V 上で

$$\int^{*} u\, d\mu_x^V \leqq u(x)。$$

ここに

$$\int^{*} u\, d\mu_x^V = \sup\left\{\int \varphi\, d\mu_x^V\,;\ \varphi\in C(\partial V),\ \varphi\leqq u\right\}$$

とする.

$\mathcal{B}$として X の regular set 全体をとるとき 上の (i) (ii) をみたす函数 u を nearly superharmonic 函数という.
このような函数の性質をしらべるため H. Bauer による Minimum Principle を述べよう.

Lemma 2.1 $Y\neq\phi$ を Compact 集合. $\mathfrak{S}$ を Y 上の下半連続函数のつくるある族で Y の二点を分離するとしよう。このとき任意の $u\in\mathfrak{S}$ は 次の性質 (＊) をもつ点 $y\in Y$ でのみ最小値をとる。

(＊) ある Y 上の probability 測度 μ に対して $\int u\, d\mu \leqq u(y)$, $\forall u\in\mathfrak{S}$, が成り立つなら $\mu=\delta_{\{y\}}$ でなければならない.

証明は Bauer [1] 又は Meyer [17] を見ていただきたい.

Lemma 2.2 Vを regular set とし $\mathcal{S}(V)$ は V の二点を分離するとする. このとき V上の任意の非負で下半連続な $\mathcal{S}\mathcal{B}$-函数は本当に正, または 恒等的に 0 となる.

(証) $h=H^V 1$ とおくと $h\in\mathcal{H}(V)$, >0 となる。u を $\not\equiv 0$ なる非負で下半連続な $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-函数とし $A=\{x\in V:\ u(x)=0\}$とおこ

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

つ。

$A=\phi$ を言う。$A\neq\phi$ であるとしてみよう。u は下半連で V は相対コンパクトだから A はコンパクトになる。さて

$$\mathfrak{S}=\left\{ Rest._A \frac{s}{h} \ ; \ s \text{は} V \text{上の下半連続な} \mathcal{S}_{\mathcal{B}}-\text{函数} \right\}$$

とおく。一点 $x\in A$ をとり $B\in\mathcal{B}$ を $x\in B\subset\bar{B}\subset V$ となるようにえらぶ。

$$0\leqq\int\frac{u}{h}d\nu_x^B=\frac{1}{h(x)}\int u\,d\mu_x^B\leqq\frac{u}{h}(x)=0$$

となる。ただし

$$\nu_x^B(dy)=\frac{1}{h(x)}h(y)\mu_x^B(dy)。$$

したがって測度 ν_x^B は A に Support を持つ。ν_x^B は A 上の probability 測度で 任意の $f=\frac{s}{h}\in\mathfrak{S}$ に対して

$$\int f\,d\nu_x^B=\frac{1}{h(x)}\int s\,d\mu_x^B\leqq\frac{s}{h}(x)=f(x)$$

を満足するから 上の Bauer の Lemma より $\nu_x^B=\delta\{x\}$。しかし、Supp. $\nu_x^B=\partial B$ だから $\nu_x^B\neq\delta\{x\}$。以上より $A=\phi$。

（注） V を regular としなくても、V 上に本当に正の harmonic 函数があれば この Lemma は成り立つ.

Proposition 2.3. U を相対コンパクトな開集合で $\exists h\in\mathcal{H}(U)$, >0 とする。また $\mathcal{S}(U)$ は U の二点を分離するとしよう。U 上の下半連続な $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-函数 s が $\liminf_{U\ni x\to y} s(x)\geqq 0$ を $\forall y\in\partial U$ でみたすなら $s\geqq 0$ となる。

証明は定理 1.5 と同様にして Lemma 2.2 を使ってできる。

定理 2.4 U を任意の開集合で $\mathcal{S}(U)$ は 2点を分離するとする. このとき

$$\mathcal{S}(U)=\{U\text{上の下半連続な}\mathcal{S}_{\mathcal{B}}-\text{函数全体}\}.$$

（証） 左辺 $\subset$ 右辺はあきらか. s を U 上の下半連続な $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$-函数とする。superharmonic 函数の定義の (a)(b) はすでにみたされている。いま V を $\bar{V}\subset U$ なる任意の regular set また $f\in C(\partial V)$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

を $f \leqq s$ on ∂V とする。このとき $s - H^V_f$ は下半連続な $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$－函数で $\forall y \in \partial V$ に対し

$$\liminf_{V \ni x \to y} (s - H^V_f)(x) \geqq s(y) - f(y) \geqq 0$$

を満たす。よって Proposition 2.3 より $s \geqq H^V_f$ on V 以上より s は U 上で superharmonic となる。

函数 f の下半連続正則化（$l.s.r.$ と書く）を次のように定義する。

$$\hat{f}(x) = \liminf_{y \to x} f(y)$$

$$\hat{f}(x) = \sup\{g(x)\ ;\ g \text{ は下半連続で } g \leqq f\}$$

とも書ける。

Proposition 2.5. Uを開集合。$\mathcal{S}(U)$ は二点を分離するとする。u をU上の $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$－函数とすると、$\hat{u}$ は U 上で superharmonic となる。さらに

$$\hat{u}(x) = \sup_{x \in V \in \mathcal{B}} \int^* u \, d\mu^V_x \quad 。$$

（証） $\hat{u} \leqq u$ だから 任意の $V \in \mathcal{B}$, $\overline{V} \subset U$ に対し.

$$\int \hat{u}\, d\mu^V_x \leqq \int^* u \, d\mu^V_x \leqq u(x), \quad \forall x \in V 。$$

$\varphi \leqq \hat{u}$ なる任意の $\varphi \in C(\partial V)$ に対し

$$\int \varphi \, d\mu^V_x$$

は V で harmonic ゆえ連続 したがって

$$\int \hat{u} \, d\mu^V_x$$

は V上 で下半連続となるから

$$\int \hat{u} \, d\mu^V_x \leqq \hat{u}(x) \qquad x \in V.$$

$\hat{u}$は U 上の下半連続な $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ － 函数であることがわかった。定理 2.4 より $\hat{u}$ は U 上で superharmonic。

$x_0 \in U$, $\alpha < \hat{u}(x_0)$ としよう. x_0で本当に正となる harmonic 函数 h をとってくる。$h(x_0) = 1$ としてよい。

$\alpha h(x_0) < \hat{u}(x_0)$。 したがって ある $V \in \mathcal{B}$, $x_0 \in V \subset \overline{V} \subset U$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

に対し. $\alpha h(y) \leqq \hat{u}(y) \quad {}^{\forall}y \in \bar{V}$。

$$\alpha = \alpha \int h \, d\mu_{x_0}^{V} \leqq \int \hat{u} \, d\mu_{x_0}^{V} \leqq \int^{*} u \, d\mu_{x_0}^{V} 。$$

これより 後半がしたがう。

系 2.6 u, v, w を U 上の $S_{\mathcal{B}}$－函数とし. $u = v + w$ とする。このとき

$$\hat{u} = \hat{v} + \hat{w} 。$$

なぜなら Proposition 2.5 より. $\hat{u} \leqq \hat{v} + \hat{w}$。 一方 l. s. r. の定義より $\hat{u} \geqq \hat{v} + \hat{w}$。

Proposition 2.7 開集合 U 上の 下から局所一様有界な $S_{\mathcal{B}}$－函数の族に対して. その下限として定義される函数は $S_{\mathcal{B}}$－函数となる。

証明は定義からしたがう.

その他 $S_{\mathcal{B}}$－函数の性質をあげておく。

(i) u_n を $S_{\mathcal{B}}$－函数の増加列とするとき $\sup u_n$ は $S_{\mathcal{B}}$－函数である。このとき.

$$\widehat{\sup u_n} = \sup \widehat{u_n} 。$$

(ii) 二つの $S_{\mathcal{B}}$－函数が、任意の regular set $V \in \mathcal{B}$ と任意の $x \in V$ に対して, μ_x^V－測度で ほとんどいたるところ一致すれば それらの l. s. r. はいたるところで一致する.

これは Proposition 2.5 よりわかる.

§3. ポテンシアル。掃散。

開集合 G 上のポテンシアルを定義しよう。

G 上の非負な superharmonic 函数 p が 次の性質をもつとき p を G 上のポテンシアルと言う；

$p + u \geqq 0$ on G となる G 上の Superharmonic 函数 u があれば $u \geqq 0$。

G 上の非負 Superharmonic 函数 s は G 上の非負 harmonic 函数 h と G 上のポテンシアル p に一意的に分解される (Riesz)。実際

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$h = \sup\{t\ ;\ -t \in \mathcal{S}(G),\ s \geqq t\}$$

とおくと

$$h = \inf \mathcal{U}$$

ただし

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{S}(G)\ ;\ u + s \geqq 0\}$$

となる。ところが $\mathcal{U}$ は Perron の族になることがすぐわかるので（系1.7
定理1.8より h は G 上で harmonic となる。 $p = s - h$ とおこう。
あきらかに p は非負な superharmonic 函数。 いま $V \in \mathcal{S}(G)$ に
対し、$p + V \geqq 0$ となれば $V - h \in \mathcal{U}$ したがって $V - h \geqq -h$,
$V \geqq 0$ がしたがう。ゆえに p は G 上 のポテンシアル。

定理 3.1. (Minimum principle) U を任意の開集合とし、u
を U 上の superharmonic 函数で次の性質をもつとする。

1. $\liminf\limits_{U \ni x \to y} u(x) \geqq 0$, $\forall y \in \partial U$.

2. 全空間 X 上のポテンシアル p で 任意の $x \in U$ に対し、$u(x) + p(x) \geqq 0$ となるものが存在する。

このとき $u \geqq 0$

証.

$$w = \begin{cases} \inf(u, 0) & \text{on } U \\ 0 & \text{on } X - U \end{cases}$$

は、Proposition 1.6 より $\mathcal{S}(X)$ に属する。また $w + p \geqq 0$ で
ある。したがって ポテンシアルの定義より $w \geqq 0$ とくに $u \geqq 0$。

Proposition 3.2 開集合 G 上のポテンシアル全体は convex
cone をつくる。

$$\left(\begin{array}{l} p_1,\ p_2 \text{ ポテンシアル} \\ \alpha \geqq 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} p_1 + p_2 \text{ 及び } \alpha p_1 \\ \text{はポテンシアル} \end{array}\right)。$$

定義。 f を X 上の非負な（∞ もゆるす）函数とする。任意の部分
集合 F に対し

$$R^F f = \inf\{u \in \mathcal{S}_+(X)\ ;\ u \geqq f \text{ on } F\}$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

とおく。Proposition 2.7 より $R^F f$ は X 上の nearly superharmonic 函数となる。$\mathcal{S}(X)$ が二点を分離するなら $R^F f$ の l. s. r. は X で superharmonic となる。この函数を $\hat{R}^F f$ と書く。

$\hat{R}^F f$ を函数 f の F 上への掃散（Balayage）と言う。

とくに f が X 上の superharmonic 函数 u のとき

$$R^F u = \inf\{ s \in \mathcal{S}_+(X)\ ;\quad s \geqq u,\ F\text{上では } s = u \}$$

となる。次のことがわかる。

$$0 \leqq \hat{R}^F u \leqq R^F u \leqq u \quad ,$$
$$R^F u(x) = u(x),\quad x \in F \ 。$$

Proposition 3.3 $u \in \mathcal{S}_+(X)$ と regular set V に対して、

$$\hat{R}^{X-V} u = R^{X-V} u = u^V$$

が成り立つ。ここに u^V は

$$u^V(x) = \begin{cases} \int u \, d\mu_x^V & x \in V \\ u(x) & x \in X-V \end{cases}$$

であった（系 1.7）。

（証）系 1.7 より $u^V \in \mathcal{S}_+(X)$，$u^V = u$ on $X-V$，より $u^V \geqq R^{X-V} u$。今 $s \in \mathcal{S}_+(X)$ が $X-V$ の上で $s \geqq u$ としよう。あきらかに $s \geqq u^V$ であるから $R^{X-V} u \geqq u^V$ となる。これより $R^{X-V} u = u^V$，$\hat{R}^{X-V} u = \hat{u}^V = u^V$ がしたがう。

今後次の仮定が満たされているとする。

(4) $\forall x \in X$ に対し、X 上のポテンシアル p で点 x において $p(x) > 0$ となるものが存在する。

（注） X 上のポテンシアルが 0 以外にないならば $\mathcal{S}_+(X) = \mathcal{H}_+(X)$ であり、任意の二つの X 上の harmonic 函数は互に比例する。

X 上のポテンシアル全体を $\mathcal{P}$ と書く。

定理 3.4 仮定 (4) は

(4)′ $\mathcal{P}$ は X の二点を分離する。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

と同値である.

（証） x, y を $x \neq y$ なる二点としよう。$p_1(x) > 0$, $p_2(y) > 0$ となる $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ が存在する。$p = p_1 + p_2$ はふたたび $\mathcal{P}$ の元である。さて $0 < p(x) < \infty$, $0 < p(y) < \infty$ としてよい. なぜなら Proposition 2.5 と系 1.7 より

$$p(x) = \sup\{p^V(x)\,;\ V \text{ は } x \text{ を含む regular set}\}$$

$$p(y) = \sup\{p^V(y)\,;\ V \text{ は } y \text{ を含む regular set}\}$$

だから. $x \in V$ なる regular set と $y \in W$ なる regular set が存在して

$V \cap W = \phi$, $p^V(x) > 0$, $p^W(y) > 0$,

とできる。p^V はポテンシアル p により上からおさえられた非負 superharmonic 函数だからポテンシアルである. 同じく $(p^V)^W$ もポテンシアルである。

$$(p^V)^W(x) = p^V(x) > 0\text{。}$$
$$(p^V)^W(y) = p^W(y) > 0,$$

であり

$$(p^V)^W \text{ は } V \cup W \text{ 上で harmonic,}$$

だから

$$(p^V)^W(x) < \infty, \quad (p^V)^W(y) < \infty\text{。}$$

この $(p^V)^W$ をあらためて p とすればよい。

さて $\mathcal{U}$ を x 又は y のどちらかを含まないような regular set の全体としよう。また

$$p^{V_1 V_2 \cdots V_n}$$

は

$$(\cdots((p^{V_1})^{V_2})\cdots)^{V_n}$$

なるポテンシアルを記すとしよう。

$$\mathcal{G} = \{p^{V_1 V_2 \cdots V_n}\,;\ n \geq 1,\ V_j \in \mathcal{U}\}$$

とおくと (i) $\mathcal{G}$ は下向きに方向づけられている。なぜなら

$$f = p^{V_1 V_2 \cdots V_n},\ g = p^{W_1 W_2 \cdots W_n} \text{ に対し } h = p^{V_1 V_2 \cdots V_n W_1 W_2 \cdots W_n}$$

は $h \in \mathcal{G}$ $h \leqq \inf(f, g)$ だから。$\mathcal{G}$ は (ii) 下から一様に有界 ($\geqq 0$) である.

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

(iii) 任意の $V \in \mathfrak{U}$ に対し $f \in \mathfrak{G}$ なら $f^V \in \mathfrak{G}$。したがって 定理1.8 より $\inf \mathfrak{G}$ は X 上で harmonic となるが、$\inf \mathfrak{G} \leqq p$ より $\inf \mathfrak{G}$ は又 ポテンシアルでもある。よって $\inf \mathfrak{G} = 0$。

$\inf \mathfrak{G} = 0$ だから $p^{V_1 \cdots V_n}(x) < p(x)$ となる有限個の $V_1, V_2, \cdots, V_n \in \mathfrak{U}$ が存在する。n をこのような数のうち最小のものとしよう。$x \in V_n$ を示す。もし $x \notin V_n$ なら、$n = 1$ ならば

$$p^{V_1}(x) = p(x)$$

であるし, $n > 1$ なら

$$p^{V_1 \cdots V_{n-1}}(x) = p^{V_1 \cdots V_n}(x)$$

となって n の定義とムジュンするからである。

$x \in V_n \in \mathfrak{U}$ だから $y \notin V_n$。

次の二つの場合が考えられる。

Case 1. $p^{V_1 \cdots V_n}(y) = p(y)$。 このときは この左辺の函数を g とすると $g \in \mathcal{P}$ で

$$g(y)\,p(x) \neq p(y)\,g(x)。$$

Case 2. $p^{V_1 \cdots V_n}(y) < p(y)$。 このときは $y \notin V_n$ より $p^{V_1 \cdots V_{n-1}}(y) = p^{V_1 \cdots V_n}(y) < p(y)$, また n の定義より $p^{V_1 \cdots V_{n-1}}(x) = p(x)$ だから $g = p^{V_1 \cdots V_{n-1}} \in \mathcal{P}$ とすると

$$g(x)\,p(y) \neq g(y)\,p(x)。$$

以上より $x \neq y$ に対し. $p, g \in \mathcal{P}$ が存在して $p(x)\,g(y) \neq g(x)\,p(y)$ となることがわかった。したがって $\mathcal{P}$ は X の二点を分離する。

掃散の性質をしらべよう。

Proposition 3.5. $s \in \mathcal{S}_+(X)$, $F \subset X$ に対して $\hat{R}^F_s$ は $X - F$ で harmonic である。

（証） $\mathfrak{U} = \left\{ t \in \mathcal{S}(X);\ 0 \leqq t \leqq s,\ F上で\ t = s \right\}$

とおくと $\mathfrak{U}$ は下向きに方向づけられ 下から一様に有界である。今 V を $X - F$ に含まれる任意の regular set とすると $t \in \mathfrak{U}$ なら $t^V \in \mathfrak{U}$ はすぐわかる。よって $X - F$ への $\mathfrak{U}$ の制限に定理1.8を適用して $\hat{R}^F s$ は $X - F$ で harmonic。

Sem. on Probab.
Vol.34　1971年
P1-97

Lemma 3.6　f を X 上の下半連続函数としある $u \in \mathcal{S}_+(X)$ により $u \geqq f$ となっているとする。

このとき $R^X f = Rf$，Rf の l.s.r. を $\hat{R}f$ と記すと

(a) $Rf = \hat{R}f$

(b) f の連続なところでは Rf も連続。

(c) f が x で連続で $f(x) < Rf(x)$ なら x のある近傍で Rf は harmonic。

(証) (a) $f \leqq Rf$ で f は下半連続より $f \leqq \hat{R}f$ ところが $\hat{R}f \in \mathcal{S}_+(X)$ より $\hat{R} \geqq Rf$ したがって等号が成り立つ。

(b) f が x で連続で $f(x) = +\infty$ とすると $Rf(x) = +\infty$ となる。$Rf = \hat{R}f$ は下半連続だから Rf は x で連続。次に f が x で連続で $f(x) < \infty$ としよう。定理3.4の証明に見たように $0 < p(x) < \infty$ となる $p \in \mathcal{P}$ がある.

$$\begin{aligned} Rf(x) &= \inf\{S(x);\ S \in \mathcal{S}_+(X),\ S \geqq f\} \\ &= \inf\{S(x) + \lambda p(x);\ S \in \mathcal{S}_+(X),\ S \geqq f,\ \lambda > 0\} \\ &= \inf\{t(x);\ t \in \mathcal{S}_+(X),\ t \geqq f,\ t(x) > f(x)\} \end{aligned}$$

である. さてこの最後の条件をみたす t に対して，x のある近傍で定義された harmonic 函数 h で

$$f(x) < h(x) < t(x)$$

となるものを取ってくる。公理(2)より それは可能である.

さらに小さく regular な近傍 V をとりなおして

$$f(z) < h(z) < t(z), \quad \forall z \in \overline{V}$$

とできる。$t - h$ は下半連続より $\overline{V}$ 上で $t - h \geqq {}^{\exists}\alpha > 0$ だから

$$h(y) = \int h\, d\mu_y^V < \int t\, d\mu_y^V = t^V(y), \quad {}^{\forall}y \in V.$$

以上より $t^V \in \mathcal{S}_+(X)$，$t^V \geqq f$，$t^V(x) > f(x)$ となることがわかった。これより とくに $Rf \leqq t^V$ となる。さて

$$\begin{aligned} \limsup_{y \to x} Rf(y) &\leqq \limsup_{y \to x} t^V(y) = \lim_{y \to x} t^V(y) \\ &= t^V(x) \leqq t(x) \end{aligned}$$

が t^V は V で harmonic なことに注意すればわかる。

t は $t \in \mathcal{S}_+(X)$，$t \geqq f$，$t(x) > f(x)$ なる任意の函数であったから．

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\limsup_{y \to x} Rf(y) \leqq Rf(x)。$$

Rf は x で上半連続．したがって x で連続。

(c) $f(x) < Rf(x)$ で f はxで連続としよう。
このとき $Rf \in \mathcal{S}_+(X)$，$Rf \geqq f$，$Rf(x) > f(x)$， だから (b) の推論より．x を含む適当な regular set V をとると $(Rf)^V$ もこの3つの性質を持つ。

したがって $Rf \leqq (Rf)^V$。ゆえに $Rf = (Rf)^V$ となり Rf は V で harmonic。

Proposition 3.7. $f \in C_c^+(X)$，すなわち $f \geqq 0$ で f は連続である Compact set の外では 0，としよう。

このとき Rf は連続なポテンシアルで f の Support の外では harmonicになる。

（証） Support $[f] = K$とする。Kの各点 x に対し $p_x(x) > 0$ となる $p_x \in \mathcal{P}$ が存在する。 p_x は下半連続より $\{p_x(y) > 0\}$ は開集合である. K はコンパクトだから $\exists x_j$，… $1 \leqq j \leqq n$，で K は $\{p_{x_j}(y) > 0\}$，$1 \leqq j \leqq n$，でおおわれる. そこで
$p = p_{x_1} + p_{x_2} + \cdots + p_{x_n}$ とおくと $p \in \mathcal{P}$ で $\inf p(K) > 0$。
したがって $\exists \lambda > 0$，$\lambda p \geqq f$。

これより $Rf \leqq \lambda p$ だから Rf はポテンシアル.

上の Lemma より Rf は X で連続であり、$Rf = R^K f$ に注意すれば Proposition 3.5 より Rf は K の外で harmonic となる.

Proposition 3.8 $\forall s \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し $\exists p_n \in \mathcal{P} \cap C(X)$ で．$p_n \uparrow s$ とできる。さらに p_nは (n に応じた) あるコムパクト集合の外で harmonic と取れる。

証 s は下半連続だから、台がコムパクトな連続函数の増加列の極限

$$s = \lim \uparrow f_n$$

である。前の Proposition より

$p_n = Rf_n$ とおけば $p_n \in \mathcal{P} \cap C(X)$ で p_n は f_nの台の外では harmonic となる。

$$f_n \leqq p_n \leqq s$$

だから 証明された。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Proposition 3.9　$1 \in \mathcal{S}_+(X)$ とする。$\mathcal{P}^*$ で連続なポテンシァル全体を表わす。K をコムパクト集合とすると K 上の任意の連続函数は $\mathcal{P}^*$ の二つの函数の差で K 上で一様に近似される。

（証）$E = \{ f|_K \,;\, f \in \mathcal{P}^* - \mathcal{P}^* \}$ は $C(K)$ の線形部分空間である。また定理 3.4 と *Proposition* 3.8 より E は K の二点を分離する。さて $d \in E$, $d = (p - q)|_K$ としよう。ここに $p, q \in \mathcal{P}^*$. このとき K 上で

$$|d| = p + q - 2 \inf (p, q)$$

だから $|d| \in E$。このことは E が lattice であることを示している。コンパクトな台をもつ連続函数 f で K 上では $f = 1$ X 上で $0 \leqq f \leqq 1$ なるものをとる。

$p = Rf$ とおくと *Proposition* 3.7 より $p \in \mathcal{P}^*$。K 上では $1 = f \leqq p$ だが仮定より $1 \in \mathcal{S}_+(X)$ だから $p \leqq 1$, ゆえに K で $p = 1$。以上で得られた結果に Stone − Weierstrass の定理を適用して E は $C(K)$ で dense を得る。

非負 Superhamonic 函数やポテンシァルのつくる cone が lattice になることを示しておこう。二つの非負 superharmonic 函数 s, t に対し $s \prec t$ とは $\exists u \in \mathcal{S}_+(X)$, $t = u + s$ となることを言う。

Proposition 3.10

(1) $u \in \mathcal{S}_+(X)$, $p \in \mathcal{P}$, $u \prec p \Rightarrow u \in \mathcal{P}$

(2) $u \in \mathcal{S}_+(X)$, $h \in \mathcal{H}(X)$, $u \prec h \Rightarrow u \in \mathcal{H}_+(X)$

したがって cone $\mathcal{P}$ 上に導かれた順序 $\prec$ は cone $\mathcal{P}$ 自身により定義される順序と一致する。すなわち $p, q \in \mathcal{P}$ に対し $p \prec q \Leftrightarrow$「$\exists u \in \mathcal{P}$, $q = u + p$」。同じく cone $\mathcal{H}_+(X)$ 上に $\prec$ により導かれた順序は cone $\mathcal{H}_+(X)$ 自身により定義される順序と一致する，$h, f \in \mathcal{H}_+(X)$ に対し $h \prec f \Leftrightarrow$「$\exists u \in \mathcal{H}_+(X)$, $f = h + u$」。

定理 3.11　$\mathcal{S}_+(X)$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}_+(X)$ はそれぞれ順序 $\prec$ に関して lattice となる。

（証）$s, t \in \mathcal{S}_+(X)$ をとり，

$$\mathcal{U} = \{ u \in \mathcal{S}_+(X) \,;\, u \prec s,\ u \prec t \}$$

を考えよう。$\mathcal{U} \neq \phi$.

$$r = \widehat{\inf \mathcal{U}} \ (= \inf \mathcal{U} \text{ の下半連続化})$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

とおく。Proposition 2.7 と仮定(4)，定理3.4，Proposition 2.5 より $r \in \mathcal{S}_+(X)$.

$$u = \widehat{\inf}\{v \in \mathcal{S}_+(X) ; v + s \succ t\}$$

とおくと $u \in \mathcal{S}_+(X)$，$u + s = r$ がわかる。したがって $r \succ s$ 同じく $r \succ t$ となる。さて $g \in \mathcal{S}_+(X)$ が $g \succ s$, $g \succ t$ となっているとしよう。

$$w = \begin{cases} g - r & r < \infty \text{ のとき}, \\ \infty & r = \infty \text{ のとき}, \end{cases}$$

とおく。

あきらかに $w \geqq 0$ だが w が nearly superharmonic であることを示せば Proposition 2.5 より $\hat{w} \in \mathcal{S}_+(X)$ となる。このとき $\hat{w} + r = g$ がわかるから $g \succ r$ が言え 結局 r は順序$\succ$による s と t の上限であることがわかる。w が nearly superharmonic を言うには 任意の regular 集合 G と $w(x) < \infty$ となる $x \in G$ に対し

$$w(x) \geqq H^G w(x)$$

が成り立つと言えばよい。$\varphi \in C(\partial G)$ を ∂G 上で $\varphi \leqq g$ となるものとする

$$f = \begin{cases} \inf(g - H^G\varphi + H^G r, r), & G\text{上で}, \\ r & X-G\text{上で}, \end{cases}$$

とおこう。Proposition 1.6 より $f \in \mathcal{S}_+(X)$

同様に

$$g = \begin{cases} \inf(v - H^G\varphi + H^G r, u) & G\text{上で}, \\ u & , X-G\text{上で}, \end{cases}$$

とおけば $g \in \mathcal{S}_+(X)$ となる。ただし $v \in \mathcal{S}_+(X)$ は $g = s + v$ となるようなものとする。以上より

$$f = g + s$$

がわかるから $f \succ s$．全く同様に $f \succ t$ もわかる。したがって $f \in \mathcal{U}$，$r \leqq f$。すなわち G上で $g + H^G r \geqq r + H^G\varphi$ となる.

φは任意だったから G 上で

$$g + H^G r \geqq r + H^G g$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

したがって $w(x) < \infty$ なら

$$w(x) \geqq H^G w(x)。$$

このようにして r が 順序 $\succ$ による s, t の上限であることがわかった。cone $\mathcal{S}_+(X)$ の任意の2元が上限をもつから $\mathcal{S}_+(X)$ は lattice となる。

とくに上の証明において $s, t \in \mathcal{P}$ ならば

$s+t \succ r$, $s+t \in \mathcal{P}$ だから $r \in \mathcal{P}$。

もし $s, t \in \mathcal{H}_+(X)$ ならば $r = \sup(s, t)$.（sup は順序 $\succ$ による）. の最大な harmonic minorant h に対し、$h \succ s$, $h \succ t$ がわかるから $h \succ r$。

すなわち $h = r$ だから $r \in \mathcal{H}_+(X)$。 かくして $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}_+(X)$ も lattice である。

§4. Polar set と thin set。

定義. $A \subset X$ は, X上のある非負 superharmonic 函数 s に対して $A \subset s^{-1}(\infty) = \{ x \in X ;\ s(x) = +\infty \}$

となるとき polar である.

(1) Polar 集合の部分集合は polar。 有限個の polar 集合の和は polar。

(2) polar 集合は harmonic 測度 0 集合である.

これを示そう. Proposition 1.3 より 有界下半連続函数 f に対し

$$x \to \int f \, d\mu_x^V$$

は regular set V 上で harmonic だが, 公理(3) より f が有界でなくても ある点 $x_0 \in V$ で,

$$\int f \, d\mu_{x_0}^V < \infty$$

ならば 同じことが言える。今 A を polar set として $s \in \mathcal{S}_+(X)$, $A \subset s^{-1}(\infty)$ とし, また V を regular set とする. 上の注意より,

$$\int s \, d\mu_x^V < \infty \ , \quad {}^\forall x \in V。$$

したがって $\mu_x^V(A) \leqq \mu_x^V(y : s(y) = +\infty) = 0$。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

(3) polar set の補集合は X で dense となる. これは公理(2)と上の性質と $\mu_x^V(1)>0$ よりわかる.

Proposition 4.1 polar set の可算和は polar である。
(証) X の位相の基をつくる可算個の regular set を V_n とし. 各 V_n に対し $x_n \in V_n$ をえらび

$$\mu_n = \mu_{x_n}^{V_n}$$

とおく。A_k を polar set, $S_k \in \mathcal{S}_+(X)$ を $A_k \subset S_k^{-1}(\infty)$ となる函数とする. 上の注意より

$$\int S_k \, d\mu_n < \infty \qquad \forall \; k = 1, 2, \cdots\cdots, \; n = 1, 2, \cdots\cdots$$

としてよい. そこで

$$\int S_k \, d\mu_n \leqq 2^{-k} \quad , \quad n = 1, 2, \cdots\cdots,$$

と仮定してもよい。 $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$ とおくと、あきらかに

$$\bigcup_n A_n \subset S^{-1}(\infty)。$$

S は下半連続で proposition 1.1 の条件式をみたすことはあきらかだから X の dense な点で有限であることを言えば S は superharmonic となる。

$$\int S \, d\mu_n \leqq \sum_{k=1}^{N} \int S_k \, d\mu_n + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

より ∂V_n の少なくとも一点 y_n で $S(y_n) < \infty$。ところが (V_n) は基だから集合 (y_n) は dense。

Lemma 4.2. A を polar set, $x \in X - A$ とする.
このとき $\exists\, S \in \mathcal{S}_+(X)$, $A \subset S^{-1}(\infty)$, $S(x) < \infty$。
(証) $t \in \mathcal{S}_+(X)$ を $A \subset t^{-1}(\infty)$ なるものとする.
V_n を regular set で

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{x\}$$

とする. すべての n に対して $t^{V_n}(x) < \infty$ だから $\sum \alpha_n t^{V_n}(x) < \infty$ となる $\alpha_n \geqq 0$ が見つかる.

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$u = \sum \alpha_n t^{V_n}$$

とすれば $u(x) < \infty$，また十分小さい V_n に対しては $V_n \cap A = \phi$ だから

$$t^{V_n}(y) = t(y) = \infty \quad \forall y \in A$$

したがって $u(y) = \infty$，$\forall y \in A$。そこで $S = \inf(u, t)$ とおくと Proposition 1.1 より $S \in \mathcal{S}_+(X)$ で $A \subset S^{-1}(\infty)$ さらに $S(x) < \infty$。

Proposition 4.3 A を polar set，f を A 上の非負有函数とする。このとき $X-A$ 上で $R^A f$ は 0 となる。さらに $\hat{R}^A f = 0$ on X。

逆に 集合 A 上の真に正となる函数 f に対して $\hat{R}^A f = 0$ となるなら A は polar である。

(証) Lemma 4.2 より $x \in X-A$ に対し $\exists S \in \mathcal{S}_+(X)$，$A \subset S^{-1}(\infty)$，$S(x) < \infty$。したがって $R^A f(x) = 0$。$X-A$ は X で dense だから $R^A f$ の下半連続正則化 $\hat{R}^A f = 0$。

逆を示そう。後に2章で示すが X 全体で真に正なる superharmonic 函数 S が存在する。$\inf(f, S)$ も命題の条件をみたすから $S \geqq f$ としてよい。Proposition 2.5 と $\hat{R}^A f = 0$ なることより，すべての regular set V とすべての $x \in V$ に対して

$$\int^* R^A f \, d\mu_x^V = 0.$$

したがって ∂V 上に $R^A f$ の零点がある。公理 (2) より dense な点 x_n で $R^A f(x_n) = 0$。したがって各 n に対し $\exists u_n \in \mathcal{S}_+(X)$，$u_n \geqq f$ on A，さらに

$$u_n(x_j) \leqq 1/2^n \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$

とできる。$u_n \leqq S$ と思ってよい。そこで

$$u = \sum u_n$$

とおくと

$$u(x_j) = \sum^{j-1} u_k(x_j) + \sum_{n=j}^{\infty} u_n(x_j)$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\leqq (j-1) S(x_j) + \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \quad , \forall j,$$

より u は superharmonic である. $x \in A$ に対しては $u_k(x) \geqq f(x) > 0$ より $u(x) = +\infty$ だから A は polar となる.

定義. $E \subset X$ は次のとき $x_0 \notin E$ で thin であるという。
$x_0 \notin \overline{E}$ または $x_0 \in \overline{E}$ であり, ある $u \in \mathcal{S}_+(X)$ に対して

$$\liminf_{E \ni y \to x_0} u(y) > u(x_0) 。$$

Lemma 4.4 $1 \in \mathcal{S}_+(X)$ と仮定する。 E thin at $x \in X-E$ とする。
このとき

$$\lim_{\substack{V \downarrow x \\ V:\text{regular}}} (\mu_x^V)(E) = 0$$

証 $x \in X - \overline{E}$ なら十分小さい regular set に対して $\overline{V} \cap E = \phi$ だから 何も証明することはない。

$x \in \overline{E} - E$ としよう。すると $u \in \mathcal{S}_+(X)$ と, 実数 $\alpha > u(x)$ と, x の regular な近傍 V_0 で 任意の $y \in E \cap \overline{V}_0$ に対し, $u(y) \geqq \alpha$ となるものが存在する. 任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $u(y) \geqq u(x) - \varepsilon$ が $\forall y \in \overline{V}_0$ で成り立つとしてよい。 $S \in \mathcal{S}_+(X)$ とするとき 二つの regular set $V, V', V \subset V'$, に対して

$$\int S \, d\mu^V \geqq \int S \, d\mu^{V'}$$

がわかるから これと Proposition 2.5 より

$$u(x) = \lim_{\substack{V \downarrow x \\ V:\text{regular}}} \int u \, d\mu_x^V \quad ,$$

$$1 = \lim_{\substack{V \downarrow x \\ V:\text{regular}}} \int d\mu_x^V$$

がわかる 。したがって

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\varepsilon = \lim_{\substack{V \downarrow x \\ V:\text{regular}}} \int (u - u(x) + \varepsilon)\, d\mu_x^V$$

$$\geqq \limsup \int_E (u - u(x) + \varepsilon)\, d\mu_x^V$$

$$\geqq (\alpha - u(x) + \varepsilon) \limsup\ (\mu_x^V)^* (E)。$$

εは任意（α は ε に依存しない）から

$$0 = \lim\ (\mu_x^V)^* (E) = 0 。$$

Proposition 4.5 $x \in X$，φ を x で下半連続な X 上の函数，E を $x \in X - E$ なる集合とする.

$$\inf_{x \in V} R^{E \cap V} \varphi(x) < \varphi(x)$$

なら E は x で thin となる．逆に φ が x で連続で $0 < \varphi(x)$ であるなら E が thin at x より上の不等式がしたがう。

（証） 上の不等式がみたされるなら ある x の近傍 V とある $u \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し $u \geqq \varphi$ on $E \cap V$，$u(x) < \varphi(x)$ となる.
$x \in \overline{E}$ としよう。

$$\liminf_{\substack{y \to x \\ y \in E}} u(y) = \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in E \cap V}} u(y) \geqq \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in E \cap V}} \varphi(y) \geqq \varphi(x) > u(x)$$

<u>細位相</u>（<u>Fine topology</u>）

集合 $G \subset X$ が 細位相で開集合であるということを $X - G$ が任意の $x \in G$ において thin となることにより定義する.

$$\mathcal{O}_f = \{ G \subset X ;\ X - G \text{ は } {}^\forall x \in G \text{ で thin} \}$$

$\mathcal{O}_f$ を開集合族とする位相を X の細位相という。
すぐわかるように これは X のもとの位相より細かい（強い）．この細位相は すべての非負 superharmonic 函数を連続にする．またそのような X の位相のうちで最も弱い。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

§5 ディリクレ問題。

Brelot の公理よりディリクレ問題をあつかうことは、相対コンパクトな開集合に対しては Brelot 自身により 一般な開集合に対しては Loeb [13] により行なわれた。

ここでは それを紹介する。

X_∂ で X の一点コンパクト化 $X_\partial = X \cup \{\partial\}$ を示す。Xの開集合 Ω の X_∂ における境界を $\delta\Omega$ で表わし Xにおける相対境界を今までどおり $\partial\Omega$ で表わす。Ω が相対コンパクトでなければ

$$\delta\Omega = \partial\Omega \cup \{\partial\}。$$

$\boxed{\text{定義}}$ Gを X の開集合とし，f を δG 上の函数とする。

$$\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(f, G) = \left\{ S \in \mathcal{S}(G) ;\ \liminf_{G \ni x \to y} S \geqq f(y), > -\infty\ \forall y \in \delta G \right\}$$

$\mathcal{V}(f) \neq \phi$ のとき $\overline{H}^G f = \inf \mathcal{V}(f)$ により G 上の函数を定義する。また単に $\overline{H} f$ とも書く。

$$\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(f, G) = \left\{ S \in -\mathcal{S}(G) ;\ \limsup_{G \ni x \to y} S \leqq f(y), < +\infty, \forall y \in \delta G \right\}$$

$\mathcal{U}(f) \neq \phi$ のとき $\underline{H}^G f = \sup \mathcal{U}(f)$。単に $\underline{H} f$ と書く。

以下において 我々は公理 (1) ～ (3) と仮定 (4) さらに $1 \in \mathcal{S}(X)$ を仮定する。

Lemma 5.1 (Minimum principle), $G \subset X$ を開集合．$S \in \mathcal{S}(G)$ が $\forall y \in \delta G$で

$$\liminf_{G \ni x \to y} S \geqq 0$$

を満たすなら $S \geqq 0$

証明は 定理 1.5 と同様である。

Proposition 5.2 G を開集合，f を δG 上の函数とする。

a. $\overline{H} f \geqq \underline{H} f$.

b. $\lambda \overline{H} f = \overline{H}(\lambda f)$。

c. $\overline{H}(f+g) \leqq \overline{H} f + \overline{H} g$。(すべてが定義されているとき)

d. $f \leqq g \Rightarrow \overline{H} f \leqq \overline{H} g$, $\underline{H} f \leqq \underline{H} g$.

証. (a) $V \in \mathcal{V}(f)$, $u \in \mathcal{U}(f)$ とすると

$$\liminf_{G \ni x \to y} (V - u) \geqq 0, \quad \forall y \in \delta G。$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Lemma 5.1 より $V \geqq u$ したがって $\overline{H}f \geqq \underline{H}f$。

Proposition 5.2 G, f は 前のとおり。$\mathcal{V}(f) \neq \phi, \mathcal{U}(f) \neq \phi$ とする. このとき $\overline{H}f, \underline{H}f, Hf$ はG上で harmonic となる。

（証） $\forall u \in \mathcal{U}(f)$ に対し、$u \leqq \overline{H}f$ だから $\overline{H}f$ は G の dense な点で有限。いま $V \in \mathcal{V}(f)$ と G の regular な部分集合 U を考える。あきらかに

$$\liminf_{G \ni x \to y} V^{U} = \liminf_{G \ni x \to y} V \geqq f(y), > -\infty$$

が $\forall y \in \delta G$ で成り立つから $V^{U} \in \mathcal{V}(f)$。

V^{U} は U 上で harmonic だから公理(3)より U 上で $\overline{H}f = \inf \mathcal{V}(f) = \inf\{V^{U} ; V \in \mathcal{V}(f)\}$ も harmonic。公理(1)(2)より $\overline{H}f$ は G 上で harmonic となる.

$$\underline{H}f = -\overline{H}(-f)$$

だから $\underline{H}f$ も G 上で harmonic。

次の Proposition は G が局所コンパクトなときの Brelat Bauer の結果の拡張である.

Proposition 5.3. Gを開集合, $u \in \mathcal{S}_{+}(X)$ とする. いま δG 上の函数 f を

$$f(x) = \begin{cases} u(x) & , x \in \partial G \\ 0 & , x = \{\partial\} : G \text{ が相対コンパクトでないとき} \end{cases}$$

により定義する. このとき G 上で

$$\overline{H}f = \hat{R}^{X-G} u = R^{X-G} u$$

となる.

（証） f の定義よりあきらかに $u \in \mathcal{V}(f)$。また任意の $V \in \mathcal{V}(f)$ は非負である。なぜなら

$$\liminf_{G \ni x \to y} V(x) \geqq \begin{cases} u(y) \geqq 0 & , y \in \partial G \\ \geqq f(\partial) = 0 & , y = \{\partial\} \end{cases}$$

だから Lemma 5.1 より。$V \in \mathcal{V}(f)$ に対して

$$w(x) = \begin{cases} u(x) & , x \in X - G \\ \inf(u(x), V(x)), & x \in G \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

とおけば、w は Proposition 1.6より $\mathcal{S}_+(X)$ に属す。
したがって $R^{X-G}u(x) \leqq w(x) \leqq v(x)$, $x \in G$.
これより

$$R^{X-G}u \leqq \overline{H}f$$

が G上で成り立つ。逆に $t \in \mathcal{S}_+(X)$ を $X-G$上で $t \geqq u$ となるものとしよう。$z \in \delta G$ に対し、$z \in \partial G$ ならば、

$$\liminf_{G \ni x \to z} t(x) \geqq \liminf_{x \to z} t(x) = t(z) \geqq u(z) = f(z)$$

であり、$z = \partial$ ならば

$$\liminf_{G \ni x \to z} t(x) \geqq 0 = f(\partial)$$

だから $t|_G \in \mathcal{U}(f)$. したがって G 上で
$\overline{H}f \leqq t$。
ゆえに $\overline{H}f \leqq R^{X-G}u$ on G。
$R^{X-G}u = \overline{H}f$ は G 上で harmonic とくに連続だから

$$\hat{R}^{X-G}u = \overline{H}f \quad \text{on } G。$$

$\boxed{\text{定義}}$ δG 上の函数 f は $\overline{H}f$, $\underline{H}f$ が 定義されて $\overline{H}f = \underline{H}f$ が定義されて $\overline{H}f = \underline{H}f$ が G 上で成り立つときに、可解である。
regular set の定義を次のように拡張する。

$\boxed{\text{定義}}$ X の開集合 G は次のとき regular と言う。
$^\forall f \in C(\delta G)$ は、$\overline{G} = G \cup \delta G$ 上の連続函数 h に一意的に拡張されたのGへの制限 $h|_G$ は G 上で harmonic であり、もし $f \geqq 0$ なら $h \geqq 0$ である。
このとき $h(x) = \int f \, d\mu_x^G$ となる δG 上の測度 μ_x^G が存在する。G が相対コンパクトのときは $\delta G = \partial G$ で この測度は §1 の調和測度と一致するので その台は δG 全体だが Gが相対コンパクトでなければ μ_x^G は ∂G 上の集合には正の測度を与えるが $\mu_x^G(\{\partial\}) = 0$ となっているかもしれない。$X-A$ が regular となるような任意のコンパクト集合 A に対して $\mu_x^{X-A}(\{\partial\})$ が 恒等的に 0 となるか ならないかにより、空間 X を放物的、双曲的と呼び Royden がしたリーマン面の分類を、公理論的ポテンシャル論の場合に行なったのが Loeb である。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Gを regular set とすると 任意の $f\in C(\delta G)$ は可解になる。なぜなら fの $\bar{G}$ への連続な拡張 h の G への制限 $h|G$ は $\mathcal{V}(f)$ にも $\mathcal{U}(f)$ にも属すので

$$\bar{H}f \leqq h \leqq \underline{H}f。$$

ところが $\bar{H}f \geqq \underline{H}f$ だから 等号が成り立って f は可解。

Gが相対コンパクトな開集合なら ∂G上の任意の連続函数が可解となる。このことはまず ∂G上の可解な連続函数全体が $C(\partial G)$ の閉線形部分空間になることを示し、次に連続な非負 superharmonic 函数を ∂Gへ制限して考えた函数はすべて可解となることを示し、Proposition 3.9 の結果より、これらの差が $C(\partial G)$ で dense となることを使えばわかる。$\delta G=\partial G$が コンパクトであることを使うので 相対コンパクトでない開集合に対しては わからない。上に述べた証明は [1], P 124, 125 にある。

$\boxed{\text{定義}}$ $x_0\in\delta G$とする。x_0が G に対して regular な点であるとは、δG 上の任意の有界函数 f に対して

$$\limsup_{G\ni x\to x}\bar{H}f \leqq \limsup_{\delta G\ni y\to x} f。$$

となるときを言う。

このとき $\underline{H}f=-\bar{H}(-f)$ に注意すれば

$$\liminf_{\delta G\ni y\to x} f \leqq \liminf_{G\ni x\to x_0}\underline{H}f \leqq \limsup_{G\ni x\to x_0}\bar{H}f$$

$$\leqq \limsup_{\delta G\ni y\to x_0} f$$

がわかる。

Proposition 5.4

(Gが regular set) $\Leftrightarrow$ ($^\forall x\in\delta G$ はGに対して regular)

(証) Gを regular set, fを δG 上の有界函数, $x_0\in\delta G$, として $\limsup_{\delta G\ni x\to x_0} f<\alpha$ としよう。

δG 上の連続函数 φ で $\varphi\leqq f$ また $\varphi(x_0)<\alpha$ となるものを

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

とる。G は regular だから φ は可解になり、とくに

$$\overline{H}\varphi = \underline{H}\varphi \in \mathcal{U}(\varphi)。$$

したがって

$$\limsup_{G \ni x \to x_0} \overline{H}f \leqq \limsup_{G \ni x \to x_0} \overline{H}\varphi \leqq \varphi(x_0) < \alpha。$$

逆に任意の $x \in \delta G$ が regular ならば $f \in C(\delta G)$ に対し、上の不等式より

$$\lim_{G \ni x \to x_0} \overline{H}f = f(x_0), \quad {}^\forall x_0 \in \delta G,$$

となる. よって $h = \overline{H}f$ on G, $h = f$ on δG とおけば, h は f の連続な拡張で その G への制限 $\overline{H}f$ は harmonic であり Lemma 5.1 より $f \geqq 0$ ならば $h \geqq 0$。一意的な拡張であることはあきらか。

定理 5.5（比較定理） f を δG 上の函数で $\mathcal{V}(f) \neq \phi$, $\mathcal{U}(f) \neq \phi$ とする。V を G の開部分集合とし δV 上の函数 g を

$$g = \begin{cases} f & , \quad \delta V \cap \delta G \text{ 上で}, \\ \overline{H}f & \quad \delta V \cap G = \partial V \cap G \text{ 上で}, \end{cases}$$

により定義する。このとき V 上で $\overline{H}f = \overline{H}^V g$.

（証） $v \in \mathcal{V}(g, V)$ とし

$$u(x) = \begin{cases} \overline{H}f(x) & , \quad x \in G - V \\ \inf(\overline{H}f(x), v(x)), & x \in V \end{cases}$$

とおく。 $\displaystyle\liminf_{V \ni x \to x_0} v \geqq g(x_0) = \overline{H}f(x_0)$, ${}^\forall x_0 \in \partial V \cap G$,

だから Proposition 1.6 より $u \in \mathcal{S}(G)$。次に $w \in \mathcal{V}(f)$ とすると $w_1 = w + u - \overline{H}f \in \mathcal{S}(G)$.

$w_1 \in \mathcal{V}(f)$ を示そう。 $A = \{x \in G;\ u(x) = \overline{H}f(x)\}$, $B = \{x \in V;\ u(x) = v(x)\}$ とすると $G = A \cup B$。そこで $y \in \delta G$ に対し、もし $y \in \delta A$ なら、

$$\liminf_{A \ni x \to y} w_1 = \liminf_{A \ni x \to y} w \geqq \liminf_{x \to y} w \geqq f(y),$$

となり、もし $y \in \delta B$ なら

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\liminf_{B \ni x \to y} w_1 \geqq \liminf_{B \ni x \to y} u = \liminf_{B \ni x \to y} V$$

$$\geqq \liminf_{x \to y} V \geqq g(y) = f(y)$$

となる。したがって $w_1 \in \mathfrak{V}(f)$, $w_1 \geqq \bar{H}f$。
いま w をとくに $x \in V$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$w(x) - \bar{H}f(x) < \varepsilon$$

となるようにとったとする。すると

$$\bar{H}f(x) \leqq w_1(x) < u(x) + \varepsilon = V(x) + \varepsilon$$

となり V, $\bar{H}f$ は ε に関係しないから，$\forall x \in V$ で

$$\bar{H}f(x) \leqq V(x).$$

$V \in \mathfrak{V}(g\ V)$ は任意だったから V 上で

$$\bar{H}f \leqq \bar{H}^V g$$

を得る。逆はあきらかだから $\bar{H}f = \bar{H}^V g$。

$\boxed{\text{定義}}$ （Loeb の定義） $x_0 \in \delta G$。 G に対する x_0 での barrier とは x_0 の開近傍と G の共通部分で定義された harmonic 函数 $B \geqq 0$ で

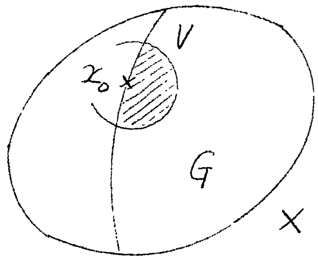
$$\lim_{G \ni x \to x_0} B = 0$$

となるものを言う。

定理 5.6 $x_0 \in \delta G \cap X = \partial G$ とする。G に対する x_0 での barrier B が存在すれば x_0 は G に対して regular な点になる。
（証） f を δG 上の有界函数，$C = \limsup_{\delta G \ni x \to x_0} f$

とおこう。公理 (2) より x_0 を含む（相対コンパクトな） regular set があるから x_0 で真に正となる x_0 の適当な近傍で定義された harmonic 函数がある. $\varepsilon > 0$ を任意に与え $h(x_0) = C + \varepsilon$ となるこのような harmonic 函数 h をとる。十分に小さく x_0 の regular な近傍 V をとって，(i) h は $\bar{V}$ で定義されている。(ii) B は $\bar{V} \cap G$ で定義されている，(iii) $\delta G \cap \bar{V} = \partial G \cap \bar{V}$ 上で $h \geqq f$ となっている，以上がみたされているとしてよい。
さて $\partial(V \cap G)$ 上の函数 g を

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97



$$g = \begin{cases} f & \partial(V\cap G)\cap\partial G \text{ 上で,} \\ \overline{H}f & \partial V\cap G \text{ 上で,} \end{cases}$$

により定義する. $|f| \leqq m$ とすれば $m \in \mathcal{U}(f)$ だから $|g| \leqq m$。次の二つの場合を考える。

(i) $\partial V\cap G = \phi$ のとき。このとき $h \in \mathcal{U}(g, V\cap G)$ だから

$$\limsup_{G\ni x\to x_0} \overline{H}^{V\cap G} g \leqq \lim_{G\ni x\to x_0} h = h(x_0) = C+\varepsilon$$

比較定理より

$$\limsup_{G\ni x\to x_0} \overline{H}f \leqq C+\varepsilon 。$$

(ii) $\partial V\cap G \neq \phi$ のとき。$M \geqq \sup_{x\in\partial V\cap G} |h(x)| + m$

とする.

$$H^V 1_D(x_0) = \int_D d\mu^V_{x_0} \leqq \frac{\varepsilon}{M}, \quad D = \partial V\cap G - K,$$

となるように $\partial V\cap G$ のコンパクト集合 K をとる.

$$t = h + M\cdot(\inf_K B(x))^{-1}\cdot B + M\cdot H^V 1_D$$

とおくと. $t \in \mathcal{S}(V\cap G)$ である。$\partial(V\cap G)\cap\partial G \ni y$ では

$$\liminf_{G\cap V\ni x\to y} t \geqq \liminf_{G\cap V\ni x\to y} h \geqq f(y) = g(y),$$

$\partial V\cap G \ni y$ に対し $y\in K$ では

$$\liminf_{G\cap V\ni x\to y} t \geqq M \geqq g(y)$$

$y\in D$ では

$$\liminf_{G\cap V\ni x\to y} t \geqq M\cdot\lim_{V\ni x\to y} H^V 1_D = M \geqq g(y),$$

ゆえに $t \in \mathcal{U}(g, G\cap V)$。さらに

$$\limsup_{G\ni x\to x_0} t \leqq h(x_0) + \varepsilon = C + 2\varepsilon$$

となる。ここで B が x_0 での barrier であることを使った。したがって

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\limsup_{G \ni x \to x_0} \bar{H} f \leqq \limsup_{G \ni x \to x_0} t \leqq C + 2\varepsilon.$$

以上より いずれの場合も

$$\limsup_{G \ni x \to x_0} \bar{H} f \leqq C + 2\varepsilon,$$

ε は任意だから x_0 は G に対し regular。

§6. Regular set による exhaustion

$\boxed{\text{定義}}$ $A \neq \phi$, コンパクトは 各 $x \in \partial A$ に対し、そこでの $X - A$ に対する barrier が存在するとき、外から regular であると言う。

Proposition 6.1 K をコンパクト集合とし、K を含む相対コンパクトな regular set U があるとしよう。このとき外から regular な集合 A を見つけて $K \subset \mathring{A} \subset A \subset U$ とできる。

（証） G_1, G_2 を二つの領域で

$$K \subset G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_2 \subset \bar{G}_2 \subset U$$

とする。$h = H^U 1$ とおく。また

$$p = \inf \{ s \in \mathcal{S}_+(U) ; \ \bar{G}_1 \text{ 上で } s \geqq h \}$$

とすると，$\hat{p} \in \mathcal{S}_+(U)$ で $\hat{p} = p \in \mathcal{H}(U - \bar{G}_1)$ が Proposition 3.5 と同様にわかる。また G_1 上で $\hat{p} = p = h > 0$ だから Proposition 1.4 の系 又は Lemma 2.2 より U 上で $\hat{p} > 0$。

$$\alpha = \min_{x \in \partial G_2} \frac{\hat{p}(x)}{h(x)}$$

とおくと，$\alpha > 0$。

$$A = \bar{G}_2 \cup \{ x \in U ; \ \hat{p}(x) \geqq \alpha h(x) \},$$

$$b = \alpha h - \hat{p} \ , \quad U - A \text{ 上で},$$

とおくと b は $X - A$ に対する ∂A の各点での barrier であることがわかる。したがって A は外から regular。

系 6.2 U を領域，$K \subset U$ をコンパクト集合とする。U 上に正の harmonic 函数が存在するとする。このとき相対コンパクトな regular sit G で $K \subset G \subset \bar{G} \subset U$ となるものが存在する。

（証） G_1, G_2 を $K \subset G_1 \subset \bar{G}_1 \subset G_2 \subset \bar{G}_2 \subset U$ となる領域とする。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

上の Propositon より

$$\partial G_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{A}_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \mathcal{V} - \overline{G}_1$$

となる 外から regular なコンパクト集合 A_i がある。

G を $G_2 - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ の component で G_1 を含むものとすると定理 5.6 より G は regular。

系 6.3　すべてのコンパクト集合は外から regular なコンパクト集合に含まれる。

A が外から regular なコンパクト集合であっても $X-A$ は regular にはならない。

$\mathcal{S}(X-A)$ 上の函数が $\{\partial\}$ で 0 である場合でも それは $X-A$ で harmonic な連続な拡張をもつとはかぎらない。反例はすぐできるが省略する。

A を外から regular なコンパクト集合とする。∂A 上で 1, $\{\partial\}$ で 0 となる $\mathcal{S}(X-A)$ 上の函数 t に対して $\underline{H}^{X-A}t$ のことを $H(\partial A, X-A)$ と書く。今任意の $\varepsilon > 0$ に対し $-\varepsilon \in \mathcal{U}(t)$ がわかるから(仮定 $1 \in \mathcal{S}(X)$ より) $-\varepsilon \leqq H(\partial A, X-A)$ が $X-A$ で成り立つ。したがって $X-A$ で

$$0 \leqq H(\partial A, X-A)。$$

A は外から regular だから定理 5.6 より任意の $y \in \partial A$ で

$$\lim_{X-A \ni x \to y} H(\partial A, X-A)(x) = 1,$$

また 上に見たように

$$\liminf_{X-A \ni x \to \{\partial\}} H(\partial A, X-A)(x) \geqq 0$$

したがって $H(\partial A, X-A) \in \mathcal{V}(t)$, $\geqq \overline{H}^{X-A}t$

となる。結局

$$H(\partial A, X-A) = \underline{H}^{X-A}t = \overline{H}^{X-A}t \ 。$$

∂A 上の函数 f に対して 以下 $\overline{H}^{X-A}f$ を

$$g = \begin{cases} f & \text{on } \partial A \\ 0 & \text{on } \{\partial\} \end{cases}$$

により定義される(もし定義されるなら) $\overline{H}^{X-A}g$ のことを意味するとしよう。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Lemma 6.4 ∂A 上の有界函数 f, $|f| \leqq m$, に対し,

$$-m H(\partial A, X-A) \leqq \bar{H}^{X-A} f \leqq m H(\partial A, X-A)。$$

Proposition 6.5 (*Minimum principle*)
Dを X の開集合で $X_0 = X \cup \{\partial\}$での Dの閉包 $\bar{D}$ は $\{\partial\}$ を含むとする。$S \in \mathcal{S}(D)$ が

$$\liminf_{D \ni x \to y} S \geqq 0 \quad \forall y \in \partial D$$

及び, ある $\overline{X-A} \subset \bar{D}$ なる外から *regular* なコンパクト集合Aに対し, $X-A$上で

$$S \geqq \bar{H}^{X-A} S = \bar{H}^{X-A} f$$

をみたすとする. ただし

$$f = \begin{cases} S & \partial A \text{ 上で,} \\ 0 & \{\partial\} \text{ で,} \end{cases}$$

である. このとき D上で

$$S \geqq 0 。$$

(証) Dは領域としてよい. $\alpha = \inf(S(x) ; x \in \partial A)$, $\beta = \inf(S(x) ; x \in D)$ とする。$-\infty < \alpha$ はあきらか。いま$\beta < 0$と仮定しよう. (i) $\alpha \geqq 0$ のとき。このとき $\partial A \cup \{\partial\}$ で $f \geqq 0$だから $\bar{H}^{X-A} f \geqq 0$ したがって $X-A$ 上で $S \geqq \bar{H}^{X-A} f \geqq 0 > \beta$ となる。(ii) $\alpha < 0$ のとき. このとき. $S - \alpha \in \mathcal{S}(X)$, さらに $-\alpha \geqq \bar{H}^{X-A}(-\alpha)$ だから $X-A$上で

$$S - \alpha \geqq \bar{H}^{X-A}(S-\alpha)。$$

さて $\bar{H}^{X-A}(S-\alpha)$とは $g = S - \alpha$ (∂A 上で), $g = 0$ ($\{\partial\}$で) なる $\delta(X-A)$上の函数g による $\bar{H}^{X-A} g$ のことであった。いま $u \in \mathcal{U}(g)$ とすると $u \in \mathcal{S}(X-A)$で

$$\liminf_{X-A \ni x \to y} u(x) \geqq 0, \quad \forall y \in \partial A \cup \{\partial\} = \delta(X-A),$$

となるから *Lemma 5.1* より $u \geqq 0$。したがって

$$\bar{H}^{X-A}(S-\alpha) = \bar{H}^{X-A} g \geqq 0 。$$

ゆえに $X-A$ 上で $S - \alpha \geqq 0$, 結局 $S \geqq \alpha \geqq \beta$ が $X - \mathring{A}$ で

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

成り立つ。以上二つの場合について見たように

$$\inf(S(x) ; x \in D-\mathring{A}) > \beta$$

又は

$$\alpha = \beta \quad 。$$

どちらの場合にしろ S は $\overline{D} \cap \mathring{A}$ の外で β より真に大である。一方仮定より ∂D の近くでは、非負だから S は ∂D 上で β にならない。したがって $\exists x_0 \in D \cap \mathring{A}$, $S(x_0) = \beta$。これより $\beta > -\infty$ であり. $S-\beta$ は D 上の非負な superharmonic 函数で x_0 で 0 となる。Proposition 1.4 の系 より D 上で $S \equiv \beta < 0$ これはムジュン。

Proposition 6.6 D, A は前と同じ。
$S \in \mathcal{S}_+(D)$ とすると

$X-A$ 上で $S \geq \overline{H}^{X-A} S$ 。

(証) 右辺は $\overline{H}^{X-A} f$,

$$f = \begin{cases} S & \text{on } \partial A \\ 0 & \text{on } \{\partial\} \end{cases}$$

であることと $S \in \mathcal{S}_+(D)$ より $S \in \mathcal{U}(f)$ だから.

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

第2章　連続なポテンシァルで近似できる函数のつくる空間。

この章ではまず表題の空間 E をある Banach 空間の帰納的極限として導入する。これは後に「superharmonic 函数 $\geqq 0$ の全体をエクセシヴ函数とする Submarkov resolvent 」をつくるが その値域と Eとは同じ uniform closure をもつので、上の resolvent の値域の特徴づけとなる。このことより Ray，国田，渡辺のリゾルベントのコンパクト化の理論とあわせて考えると E の函数全部を連続にするような X のコンパクト化により得られる境界が（Brelot の公理論的ポテンシァル論における）Martin 流入境界にほかならないことがわかる。なお これらの結果は筆者〔11, §1, 2, 4〕の特別な場合である。

§7　Minimal な fullharmonic 構造。連続なポテンシァルによる近似。

Brelotの公理 1, 2, 3 と仮定 (4) $1 \in \mathcal{S}(X)$
及び (5) $^\forall x \in X$ に対し $^\exists p \in \mathcal{P}$ such that $p(x) > 0$ を仮定する。

KをX の compact 集合 f を ∂K 上の函数とし、$\mathcal{S}(X-K)$ 上の函数 f' を ∂K 上では $f'=f$，$\{\partial\}$上では $f'=0$ により定義する。このとき $\mathcal{V}(f') \neq \phi$ ならば $\overline{H}^{X-K} f'$ のことを $\overline{H}^{X-K} f$と書くことにする。

次のような X の領域 D の集まりを $\mathcal{D}$ とと書く：$X_0 = X \cup \{\partial\}$において Dの閉包は $\{\partial\}$ を含む。

各 $\{\partial\}$ の近傍 $D \in \mathcal{D}$ に対して

$$(7.1)\quad \widetilde{\mathcal{H}}_0(D) = \left\{ h \in \mathcal{H}(D) : \begin{array}{l} \text{外から regular なコンパクト集合} A \text{で } X - A \subset D \text{ となる} \\ \text{ものが存在し} \\ \quad h = \overline{H}^{X-A}[h|\partial A]\text{。} \end{array} \right\}$$

とおく。

族 $\widetilde{\mathcal{H}}_0 = \{\widetilde{\mathcal{H}}_0(D) : D \in \mathcal{D}\}$ はあきらかに次の性質をもつ。

(＊) $D, D' \in \mathcal{D}, D' \subset D, u \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(D)$ とする。

このとき $u|_{D'} \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(D')$ となる；

もし $u \in \mathcal{H}(D)$ で、あるコンパクト集合K に対し $\partial D \subset \mathring{K}$，

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$u/_{D-K} \in \mathfrak{H}_0(D-K)$ となるなら $u \in \mathfrak{H}_0(D)$である。

$\boxed{\text{定義}}$ Brelot の公理 (1),(2) (3) が与えられているとき,上の(*)をみたす $\mathfrak{D}$ 上の函数空間 $\mathfrak{H}(D)$, $D \in \mathfrak{D}$, が与えられるなら fullharmonic 構造 $\mathfrak{H}$ が与えられたという。

(7.1) により一つの fullharmonic 構造 $\mathfrak{H}_0$ が与えられたが,この $\mathfrak{H}_0$ は 最小な fullharmonic 構造を与えている。

B. Walsh は 外から regular なコンパクト集合 A の補集合 X−A は 任意の fullharmonic 構造 $\mathfrak{H}$ に対して regular となることを示した。すなわち $^\forall f \in C(\partial A)$ は $(X-\mathring{A})$ 上に連続な一意的な拡張を持ち,その X−A への制限は $\mathfrak{H}(X-A)$ に属するようにできる。さらに $f \geqq 0$ なら この拡張も非負である。このことと系 6.3 より,任意のコンパクト集合 K_0 に対し あるコンパクト集合 K, $K_0 \subset \mathring{K}$, が存在して X−K は $\mathfrak{H}$ に対し regular となる。

次のことに注意しておこう。$h \in \mathfrak{H}_0(D)$, $D \in \mathfrak{D}$, ならば h は有界である。なぜならある外から regular なコンパクト集合 A に対し $h = \overline{H}^{X-A}[h|\partial A]$ となるが h は ∂A 上で有界だから Lemma 6.4 と $1 \in \mathcal{S}(X)$ より h はX−A で有界になる。

K を外から regular なコンパクト集合とし
$$E^K = C(X) \cap \mathfrak{H}_0(X-K)$$
とおこう。E^K は有界連続函数全体 $C_f(X)$ の線形部分空間だが $\mathfrak{H}_0(X-K)$ の定義と Lemma 6.4 より X 上の一様収束の位相に関し閉じているから 同じ位相で $C_f(X)$ のバナハ部分空間になる。

$f \in E^K$ を K へ制限して Proposition 3.9 を適用すると,$^\forall \varepsilon > 0$ に対して $p, q \in \mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cap C(X)$ が存在して $\sup_K |f-(p-q)| < \varepsilon$ となる。

Proposition 5.3 より,X−K 上で
$$\overline{H}^{X-K} p = \hat{R}^K p = R^K p,$$
$$\overline{H}^{X-K} q = \hat{R}^K q = R^K q,$$

となる。この最右辺の Superharmonic 函数はそれぞれ p, q により上からおさえられるからポテンシアルになることに注意しよう。X−K上では
$$f - (\hat{R}^K p - \hat{R}^K q) = \overline{H}^{X-K}(f-(p-q))$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

となる。 Lemma 6.4 より $X-K$ 上で

$$|f-(\hat{R}^K p - \hat{R}^K g)| < \varepsilon$$

となるから，結局 X 全体で一様に

$$|f-(\hat{R}^K p - \hat{R}^K g)| < \varepsilon 。$$

$\hat{R}^K p = R^K p$ は K 上で連続函数 p に等しく、$X-K$ 上では harmonic ゆえ連続となり K は外から regular だから 結局 X で連続，したがって

$$\hat{R}^K p \ , \ \hat{R}^K g \in \mathcal{P}^* ,$$

さらに 上に見たように $\mathcal{H}(X-K)$ に属す.

$C(K)$ は可分なバナハ空間だから 次の Proposition を得る。

Proposition 7.1 $\mathcal{P} \cap C_f(X) \cap \mathcal{H}(X-K)$ の可算個の函数 (p_n^K) を見つけて、それらの差がバナハ空間 E^K で dense となるようにできる.

$(K_n)_{n\geq 1}$ を外から regular なコンパクト集合による X の exhaustion とし E をある K_n の 外では $\mathcal{H}_0(X-K_n)$ に属すような連続函数，したがって有界連続函数，の全体としよう。

$$E = \bigcup_n E^{K_n} 。$$

E に Banach 空間 E^{K_n} の帰納的極限としての位相を入れると E は局所凸線形位相空間，さらにいわゆる（LB）－空間になるが，我々は別にこのことを使わない。さて K_n 毎に上の Proposition より可算個の

$$(p_j^{K_n}) \subset \mathcal{P} \cap C_f(X) \cap \mathcal{H}_0(X-K_n)$$

を選び それらを

$$Q = (p_j)$$

とする．各 p_j はある K_n の外では $\mathcal{H}_0(X-K_n)$ に属すことに注意しよう。

定理 7.2 $Q-Q$ は（LB）－空間 E で dense である.
$Q-Q$ は E の $C_f(X)$ の中での一様閉包 $\bar{E}$ で dense である.

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

系 7.3 任意の台がコンパクトな函数は $Q-Q$ の元で一様に近似される。

さて

$$p_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,\frac{p_k}{\sup\limits_{x} p_k(x)}, \qquad p_k\in Q,$$

とおく。

$p_0\in C_b(X)\cap\mathcal{S}_+(X)$ はあきらかだろう。

Proposition 7.4 p_0 はポテンシアルである。さらに真に *superharmonic*（X上いたるところで *harmonic* にならない）である。とくに真に正である。

（証） $u\in\mathcal{S}(X)$ に対し、$u+p_0\geqq 0$ なら $u\geqq 0$ となることを示す。上の級数は一様に収束するから $\forall\varepsilon>0$ に対して n があり、

$$p_0-g_n\equiv p_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\,\frac{p_k}{\sup p_k}<\varepsilon$$

とできる。したがって $0\leqq g_n+u+\varepsilon$。ところが g_nはポテンシアルで $u+\varepsilon\in\mathcal{S}(X)$ だから $u+\varepsilon\geqq 0$, $u\geqq-\varepsilon$。εは任意だから $u\geqq 0$。したがって p_0 はポテンシアルとなる。いまある *regular* な集合Gとある $x\in G$ に対し

$$H^G p_0(x)=p_0(x)$$

となったとしよう。各 $p_n\in Q$に対し

$$H^G p_n(x)\leqq p_n(x)$$

だから これより $\forall p_n\in Q$ に対し

$$H^G p_n(x)=p_n(x)$$

となる。よって系 7.3 より $\forall f\in C_c(X)$ に対して

$$H^G f(x)=f(x).$$

$H^G(x,dy)$ は ∂G上の *measure* だから これはムジュンである。
したがって p_0 は真に *superharmonic* とくに真に正となる。

上と同じようにして 任意の外から *regular* なコンパクト集合Aに対して

$$p_0(x)\gneqq\overline{H}^{X-A}p_0(x), \qquad \forall x\in X-A,$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

がわかる。

系 7.3 はもっと精密に：$^\forall f \in C_c(X)$ に対して，$^\forall \varepsilon > 0$ と，f の台の任意の近傍 U を与えると $\overline{U}$ の外で $\mathcal{H}_0(X-\overline{U})$ に属すような二つの連続なポテンシアル p, q を

$$\sup |f-(p-q)| < \varepsilon$$

となるよう見つけられ，さらに $X-\overline{U}$ 上では

$$p = q$$

とできる；が証明される。筆者〔11〕§1 を見ていただきたい。

次の Lemma は §13 で用いられる。

Lemma 7.5 p_n をポテンシアルの列で，各 p_n はコンパクト集合 K の外では harmonic とする。また u は非負 superharmonic 函数で p_n は $X-K$ の任意のコンパクト部分集合上で一様に u に収束するとしよう。このとき u もポテンシアルとなる。

証．相対コンパクトな開集合 $G \supset K$ をえらぶ。仮定より p_n は ∂G 上で n について一様に有界となるから，ある $\lambda > 0$ に対して ∂G 上で $p_n \leqq \lambda p_0$ となる．ここに p_0 は Proposition 7.4 のポテンシアル p_0 である。

$\lambda p_0 - p_n \in \mathcal{S}(X-\overline{G})$ であり p_n は $X-K$ 上で連続だから $\liminf_{X-\overline{G} \ni y \to x} (\lambda p_0 - p_n)(y) \geqq 0$，$^\forall x \in \partial G$，となり Minimum Principle より $X-\overline{G}$ 上で $p_n \leqq \lambda p_0$。したがって $X-\overline{G}$ 上で $u \leqq \lambda p_0$ だから u はポテンシアル。

§8. Q−コンパクト化。

§7と同じく

$$E = \bigcup_n E_n \ , \ E_n = C(X) \cap \mathcal{H}_0(X-K_n)$$

としよう。$Q = (p_n)_{n \geqq 1}$ を E の中で，X 上の一様収束の位相により，$Q-Q$ が dense となるような $\mathcal{P} \cap C_b(X)$ の函数の集まりで，各 p_n はある K_j の外で $\mathcal{H}_0(X-K_j)$ に属すものとする。

E の任意の有限部分族 F と $^\forall \varepsilon > 0$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\mathcal{U}_{F,\varepsilon} = \left\{ (y, z) \in X \times X \; ; \; \begin{array}{l} |f(y) - f(z)| < \varepsilon \\ \forall f \in F \end{array} \right\}$$

とおく。

このような $\mathcal{U}_{F,\varepsilon}$ 全体 $\mathcal{U}_E$ は X 上のある一様構造 $\mathcal{U}$ の被覆（*entourage*）の基本系をつくる（［ ］，2章の一番はじめ）。

距離の言葉で言うならば $\mathcal{U}$ は

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|P_k(x) - P_k(y)|}{1 + |P_k(x) - P_k(y)|}$$

により X 上に導かれる一様構造である．なぜなら $Q - Q$ は E で *dense* だから。

さて $\mathcal{U}$ により X 上に導かれる位相を考えよう．

すなわち，$x \in X$ の近傍系 $\mathcal{B}(x)$ が

$$\{ y \in X \; ; \; (x, y) \in V \}, \quad V \in \mathcal{U},$$

全体により与えられる位相を考える．これは定義からもとの位相より弱いが 系 7.3 より（$E \supset C_c(X)$ より） もとの位相と同等な位相を与える。

$\hat{X}$ を一様構造 $\mathcal{U}$（又は距離 d）による X の完備化とする．

定理 8.1　$\hat{X}$ は次の二つの性質をもつ一意的（位相同型をのぞいて）な X のコンパクト化である．

(a) $\forall f \in E$ は $\hat{X}$ 上へ連続に拡張される．

(b) Q の函数の $\hat{X}$ への連続な拡張は $\hat{X}$ の二点を分離する．

（証） X の Q − コンパクト化を X' とすると X' は位相同型をのぞいて一意的であり，上の a)，b) が X' に対し，みたされる．いま X の任意の無限点列（x_n）をとると，ある部分列（$x_{n'}$）をえらんで X' の中で収束するようにできる．あきらかに（$x_{n'}$）は *Cauchy* 列となる。したがって X は全有界（*precompact*）となる。よって $\hat{X}$ はコンパクト。$\hat{X}$ に対して a)，b) はみたされているから $\hat{X}$ と X' は位相同型となる。

（注） X の Q − *compact* 化 X' とは，(1) X' はコンパクトで X を *dense* な部分集合としてふくむ。(2) X' より導かれる X 上の位相は X のもとの位相である。(3) 任意の $\varphi \in Q$ は X' 上へ連続に拡張される。(4) Q は $X' - X$ の二点を分離する。以上をみたす X' のことで

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

ある．

いまの場合，$I = [-\infty, \infty]$ の Q 回直積 I^Q をつくる．これがコンパクトである．写像

$$X \ni x \longrightarrow \{ f(x) : f \in Q \} \in I^Q$$

の像の I^Q での閉包を X' とおく。くわしくは〔6〕の $p.$ 97を見よ．

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

第3章 ポテンシアルの台の理論。エクセシブ函数

最初に Herve の分割定理を紹介し、次に抽象的なポテンシアルの台の理論を Boboc, Constantinescu, Cornea と Hansen にしたがって紹介する。これは独立した理論と考えられる。次にこのポテンシアルの台の理論を Brelot の公理に適用して「excessive 函数が非負 superharmonic 函数となるような」リゾルベントを構成する。このことは確率論的に言えば「Hitting Probability が、与えられている調和測度と同じになるような」マルコフ過程を構成するという事である。しかし 我々はマルコフ過程には一切触れない。

§9. Herve の分割定理

$\boxed{\text{定義}}$ 任意の非負 superharmonic 函数 p と、任意の開集合 G に対し、

$$\mathcal{B}_G(p) = \left\{ u \in \mathcal{S}_+(X) ;\ \text{ある } t \in \mathcal{S}(G) \text{ に対して } G \text{ 上で } u = p + t \text{ となる} \right\}$$

とおく。

$$p_G = \inf \{ u : \ u \in \mathcal{B}_G(p) \}$$

とおく。

定理 9.1 (Herve の分割定理)

(i) p_G は X 上の非負 superharmonic 函数で $X - \overline{G}$ 上では harmonic である.

(ii) ある G 上で harmonic となるような X 上の非負 superharmonic 函数 w が存在して

$$p = p_G + w$$

と書ける.

(証) (i) Proposition 2.7 より p_G は X 上で nearly superharmonic となる。 Proposition 2.5 より、下半連続化 $\hat{p}_G$ は $\mathcal{S}_+(X)$ に属する。さて $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}(G)$ を

$$\mathcal{U} = \left\{ s \in \mathcal{S}(G) : {}^{\exists} u \in \mathcal{B}_G(p) \text{ に対して } G \text{ 上で } u = p + s \right\}$$

により定義する。定理 1.8 より $s_0 = \inf \mathcal{U}$ は G 上で harmonic

となる。G上では $\hat{p}_G = p + s_0$ であるから $\hat{p}_G \in \mathcal{B}_G(p)$, したがって $\hat{p}_G \geqq p_G$ 。 $p_G = \hat{p}_G \in \mathcal{S}_+(X)$ 。定理1.8より $p_G \in \mathcal{H}(X-\bar{G})$。

(ii)
$$t(x) = \begin{cases} p(x) - p_G(x), & p_G(x) < \infty \text{ のとき}, \\ \infty & , p_G(x) = \infty \text{ のとき}, \end{cases}$$
とおこう。regular な相対コンパクト集合 V と ∂V 上の連続函数 φ で $\varphi \leqq p$ となるものをとる。
$$g = \begin{cases} \inf(p - H^V\varphi + H^V p_G, \ p_G), & V\text{上で} \\ p_G & , X-V\text{上で}, \end{cases}$$
とおく。Proposition 1.6 より $g \in \mathcal{S}_+(X)$。同じく
$$f = \begin{cases} \inf(-H^V\varphi + H^V p_G, \ s_0), & G\cap V \text{上で}, \\ s_0 & G-V\text{上で}, \end{cases}$$
は $\mathcal{S}(G)$ に属す。G上で $g = p + f$ だから $g \in \mathcal{B}_G(p)$, したがって $g \geqq p_G$, よってG上で
$$p - H^V\varphi + H^V p_G \geqq p_G \text{ 。}$$
φは $\varphi \leqq p$ で任意だから
$$p + H^V p_G \geqq p_G + H^V p \text{ 。}$$
これより $t(x) < \infty$ なる x に対しては任意の regular set V に対して $H^V t(x) \leqq t(x)$。したがって t は nearly superharmonic となる。Proposition 2.5 より $\hat{t} \in \mathcal{S}_+(X)$。系2.6より $p_G + \hat{t} = p$ だからG上では $\hat{t} = -s_0$ 。したがって $w = \hat{t}$ は求めるものである。

さて二つの $u, v \in \mathcal{S}_+(X)$ に対して ある $t \in \mathcal{S}_+(X)$ により
$$v = u + t \text{ となっているとき}$$
$$v \succ u$$
と書く。$\succ$ が semi-order を定義することはあきらかである。

Proposition 9.2 p_G は順序 $\prec$ について集合 $\mathcal{B}_G(p)$ の最大下界である。

(証) $u \in \mathcal{B}_G(p)$ としよう。$\exists s \in \mathcal{S}(G)$ して G上で $u = p + s$ 。上の定理より $w \in \mathcal{S}_+(X) \cap \mathcal{H}(G)$ に対して $p = p_G + w$. したがってG上で
$$u = p_G + s + w.$$
Vを regular な集合とし $\varphi \in C(\partial V)$ を $\varphi \leqq u$ とする

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$g = \begin{cases} \inf(u - H^V\varphi + H^V p_G,\ p_G), & V\text{上で}, \\ p_G & , X-V\text{上で}, \end{cases}$$

とおく。Proposition 1.6より $g \in \mathcal{S}_+(X)$。同じく

$$f = \begin{cases} \inf(s - H^V\varphi + H^V p_G,\ -w), & V\cap G\text{上で}, \\ -w & , G-V\text{上で}, \end{cases}$$

は $\mathcal{S}(G)$ に属す。G上で $g = f + p$ だから $g \in \mathcal{B}_G(p)$ したがって $g \geqq p_G$。これより

$$u + H^V p_G \geqq p_G + H^V\varphi 。$$

φ は任意だから

$$u + H^V p_G \geqq p_G + H^V p$$

となる。以上より

$$t(x) = \begin{cases} u(x) - p_G(x), & p_G(x) < \infty \text{のとき}, \\ \infty & , p_G(x) = \infty \text{のとき}, \end{cases}$$

は X 上の nearly superharmonic 函数である。したがって $\hat{t} \in \mathcal{S}_+(X)$。$\hat{t} + p_G = u$ だから $u \succ p_G$ すなわち p_G は $\mathcal{B}_G(p)$ の下界。それが最大な下界であることもすぐわかる。

さて任意のコンパクト集合Kに対して定理 9.1 (ii) より $X-K$ 上で harmonic な X 上の superharmonic 函数 p_K で

$$p = p_{X-K} + p_K$$

となるものが存在する.

Proposition 9.2 (ii) p_K は、順序 $\prec$ により p より小となる非負 superharmonic 函数で K の外では harmonic となるようなもののうち、最大の函数である。

$$p_K = \max\{g \in \mathcal{S}_+(X) \cap \mathcal{H}(X-K);\ g \prec p\}。$$

(証) 右辺の条件をみたす g をとる。$p = g + u$ となる $u \in \mathcal{S}_+(X)$ があるが $u \in \mathcal{B}_{X-K}(p)$ がわかる。Proposition 9.2 より $u \succ p_{X-K}$ である。
したがって $g \prec p_K$。

系 9.3 Gを開集合、$p \in \mathcal{S}_+(X)$ とする。もし $p \in \mathcal{H}(G)$ ならば $p_G = 0$ である。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

もし $p \in \mathcal{H}(X-K)$ ならば $p = p_K$ である。

Proposition 9.4 $p, q \in \mathcal{S}_+(X)$ とする。

$$(p+q)_G = p_G + q_G,$$

$$(\alpha p)_G = \alpha p_G, \quad (\alpha \geqq 0),$$

$$(p+q)_K = p_K + q_K, \quad (\alpha p)_K = \alpha p_K。$$

（証） まず $s \succ t$ なら $s_G \succ t_G$ となることを示そう。$s = t + u$, $u \in \mathcal{S}_+(X)$ とする。また定理 9.1 より $s = s_G + w$ となる $w \in \mathcal{S}_+(X) \cap \mathcal{H}(G)$ がある. G 上では $s_G = t + u - w$ で $u - w \in \mathcal{S}(G)$ だから $s_G \in \mathcal{B}_G(t)$ したがって $s_G \succ t_G$。

上の注意より $(p+q)_G = p_G + u$ となる $u \in \mathcal{S}_+(X)$ が見つかる。定理 9.1 より

$$p + q = (p+q)_G + s,$$

$$p = p_G + w,$$

となる $s, w \in \mathcal{S}_+(X) \cap \mathcal{H}(G)$ がある. したがって G 上で $u = q + w - s$ となり $u \in \mathcal{B}_G(q)$ がわかる。*Proposition* 9.2 より $q_G \prec u$。よって

$$p_G + q_G \prec (p+q)_G.$$

逆に $p_G + q_G \in \mathcal{B}_G(p+q)$ が *Proposition* 9.2よりわかるから同じ *Proposition* より $p_G + q_G \succ (p+q)_G$ となる。

Proposition 9.5. pをポテンシアルとする。K をコンパクト, Gを開集合とし $K \subset G$とする。このとき

$$p_K \prec p_G.$$

（証）

$$t = \begin{cases} p_G - p_K & , \ p_K < \infty \text{ のとき}, \\ \infty & , \ p_K = \infty \text{ のとき}, \end{cases}$$

とおく。定理 9.1 よりある $w \in \mathcal{S}_+(X) \cap \mathcal{H}(G)$に対して $p = p_G + w$。G上で考えると $t(x) < \infty$ なるような $x \in G$ では

$$t(x) = -w(x) + p(x) - p_K(x) = p_{X-K}(x) - w(x)$$

で右辺は G 上の *superharmonic* 函数だから t はGで *nearly*

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

superharmonic となる. $\hat{t} \in \mathcal{S}(G)$。他方 P_K は $X-K$ 上で harmonic で $X-K$ 上では $t = P_G - P_K$ だから $t \in \mathcal{S}(X-K)$。したがって $\hat{t} \in \mathcal{S}(X)$。系 2.6 より $\hat{t} + P_K = P_G \geqq 0$ したがって $\hat{t} + P \geqq 0$ となるが P はポテンシャルだから $\hat{t} \geqq 0$ ゆえに $\hat{t} \in \mathcal{S}_+(X)$, $P_K \prec P_G$。

実は P はポテンシャルでなくても ∂G がコンパクトなら $P \in \mathcal{S}_+(X)$ について. この Proposition は正しい。しかし その証明は Minimal fullharmonic 構造のいくつかの性質を使わないとできないと思えるし、次の§には P がポテンシャルの場合で十分なので、ここではこのようにしておく。必ずしも ∂G がコンパクトでない開集合 G と $\forall p \in \mathcal{S}_+(X)$ についてもこの命題が正しいかどうかわからない。

§10. ポテンシャルの台の理論

この節は N. Boboc, C. Constantinescu と A. Cornea 〔3〕と W. Hansen 〔10〕の結果を少し改良して紹介する. この方面の研究は G. Mokobodzki と D. Siboney により. さらに抽象化されて行なわれているが むつかしい. この節は独立しているが後の節とは関係している.

X を局所コンパクトな第2可算公理をみたすハウスドルフ空間とし. 次の cone Q と Q からコンパクト集合への写像が与えられているとする。$\mathfrak{K}(X)$ で X のコンパクトな部分集合全体を表わす.

(1) Q は非負下半連続函数よりなる一つの convex cone である.

(2) 写像 $C: Q \to \mathfrak{K}(X)$ が与えられ次の条件をみたす.

a. $p, q \in Q$, $\lambda \geqq 0$ に対して

$$C(p+q) = C(p) \cup C(q)$$
$$C(\lambda p) = C(p)$$

b. $p = 0 \iff C(p) = \phi$

c. 任意の開集合 U_1, U_2 による X の被覆 $X = U_1 \cup U_2$ と任意の $p \in Q$ に対し ある $p_1, p_2 \in Q$ が存在して

$$p = p_1 + p_2$$
$$C(p_i) \subset U_i, \quad i = 1, 2。$$

(3) $p, q \in Q$ に対し $p \succ q \iff (\exists u \in Q;\ p = u + q)$ により順序を定めるとき Q はこの順序に関し lattice になっている.

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Lemma 10.1.（上の定義につづけて番号を記した。）

d. $C(P_1+P_2)=C(P_1 \curlyvee P_2)=C(P_1)\cup C(P_2)$

e. $C(P_1 \curlywedge P_2) \subset C(P_1)\cap C(P_2)$

f. $p \in \mathcal{Q}$ とし 開集合 $U_1, \cdots, U_n$ は

$$C(P) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

となっているとする。このとき $p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{Q}$ が存在して

$$C(p_i) \subset U_i, \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

$$p = \sum p_i$$

となる。

（証） $n=2$ とする。 $X=U_1\cup U_2 \cup (X-C(P))$ だから $p_1, p_2 \in \mathcal{Q}$ に対し $p=p_1+p_2$ $C(p_1) \subset U_1$, $C(p_2)\subset U_2 \cup (X-C(P))$ とできる。しかしながら性質 e. より $C(p_2)\subset C(P)$ だから $C(p_2)\subset U_2$。あとは帰納法で。

さて X 上の距離 ρ として X の位相と同値な位相を与えるものを一つ固定しよう。このとき $C(P)$ がコンパクトであることに注意すれば 任意の $p\in\mathcal{Q}$ に対し その細分の列（p_i^n : $i\in I_n$, $n=1, 2 \cdots$）が次のように得られる。

1. $$p=\sum_{i\in I_n} p_i^n, \quad n=1, 2, \cdots 。$$

2. 各 n に対して I_{n+1} の区別け,

$$I_{n+1} = \bigcup_{k\in I_n} J_k,$$

が存在して

$$\sum_{j\in J_i} p_j^{n+1} = p_i^n, \quad i\in I_n$$

3. 各 $i\in I_n$ に対し. $C(p_i^n)$ の直径は $\frac{1}{2n}$ より小さい。

今 $p\in\mathcal{Q}$ と上記の列 $\{p_i^n : i\in I_n, n\}$ が与えられたとする。任意の $f\in C_f^+(X)$ に対し.

$$W_n f = \sum_{i\in I_n} \inf\{f(x) ; x\in C(p_i^n)\}\cdot p_i^n,$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$W^n f = \sum_{i \in I_n} \sup \{ f(x) \,;\, x \in C(P_i^n) \} \cdot P_i^n$$

とおく。$W_n f$, $W^n f \in \mathcal{Q}$ となる。
あきらかに $m \geqq n$ に対し

$$W_n f \prec W_m f \prec W^m f \prec W^n f$$

であり

$$0 \leqq W^n f - W_n f \leqq \sup_n [\sup f(C(P_i^n)) - \inf f(C(P_i^n))] \cdot p$$

となる。

$\forall \varepsilon > 0$ に対し $x, y \in C(p)$, $\rho(x, y) \leqq \frac{1}{2^n}$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となるように n を十分大きくとれば $W^n f - W_n f \leqq \varepsilon p$.

今 $p \in \mathcal{Q}$ が $\varepsilon \downarrow 0$ に対し X で $\varepsilon p \downarrow 0$ をみたすような元ならば極限 $\lim_{n \to \infty} \uparrow W_n f$ 及び $\lim_{n \to \infty} \downarrow W^n f$ が存在して それらは一致する。

この極限は細分列のとり方に依存しない事はすぐわかるであろう。すなわち $p = \sum p_k$ となるとき $\{p_k\}$ を p の分割ということにして 分割全体を Δ で表わし. $\delta = (p_i)_{i \in I}$

$\in \Delta$ に対し

$$W^\delta f = \sum_{i \in I} [\sup f(C(p_i))] \cdot p_i$$

としたときの下限 $\bigwedge_{\delta \in \Delta} W^\delta f$ は上記の $\lim \downarrow W^n f$ に一致すること

がわかるからである。(ダルブーの定理)。

$V f = \lim W^n f = \lim W_n f \ (f \in C_k^+(X))$ とおく。

$$\begin{aligned} V(f+g) &= \lim W_n (f+g) \geqq \lim W_n f + \lim W_n g \\ &= Vf + Vg = \lim W^n f + \lim W^n g \\ &\geqq \lim W^n (f+g) = V(f+g) \end{aligned}$$

より $f \to Vf$ は 加法的, また $\alpha \geqq 0$ に対し $V(\alpha f) = \alpha V f$ さらに $f_n \uparrow f$ に対し $V f_n \uparrow V f$ となる.

V より決まる kernel を $V(x\ dy)$ とする.

$\boxed{\text{定義}}$ X 上の kernel $V(x, dy)$ は 次の条件をみたすとき Potential kernel であると言う:

$\forall f \in C_c^+(X)$ に対し $Vf = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$, $g_n \in \mathcal{Q}$ と表わされ各 n につ

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

いて　$C(g_n) \subset \mathrm{Supp}\,[f]$。

Proposition 10.2. 任意の有限な $P \in \mathcal{Q}$ に対して $V1 = P$ となる potential kernel が存在する。

(証) 上につくった kernel V が $V1 = P$ をみたすことはあきらか。$g_n = W_{n+1}f - W_n f$ とおけば

$$g_n = \sum_{i \in I_n} \sum_{j \in J_i} [\inf f(C(P_j^{n+1})) - \inf f(C(P_i^n))] \cdot P_j^{n+1}$$

で この和は $C(P_j^{n+1}) \subset \mathrm{Supp}\,[f]$ となる $j \in J_i$ についてのみの和であるから $C(g_n) \subset \mathrm{Supp}\,[f]$ となる. $Vf = \sum g_n$。

$$\mathcal{Q}^{\sigma} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} P_k : P_k \in \mathcal{Q},\ < \infty \right\}$$

とする。$P \in \mathcal{Q}^{\sigma}$ に対して potential kernel は $V = \sum_{k=1}^{\infty} V_k$, $V_k 1 = P_k$, $P = \sum P_k$ として存在する。$V1 = P$。$f \in C_c^+(X)$ に対して $Vf \in \mathcal{Q}^{\sigma}$ は あきらかである. 今 $V1 = P$ が連続なら $0 \leqq f \leqq 1$, $f \in C(X)$ に対して $V1 = Vf + V(1-f)$ で 各項は下半連続だから Vf は連続になる.

Proposition 10.3 $P \in \mathcal{Q}^{\sigma}$, $< \infty$, に対し 次の (1). (2) は同値である。

(1) $V1 = P$ なる potential kernel は一意的である。

(2) $P', P'' \in \mathcal{Q}$, $< \infty$ で $P - P'$, $P - P'' \in \mathcal{Q}^{\sigma}$ さらに $C(P') \cap C(P'') = \phi$ とする。このとき $P - (P' + P'') \in \mathcal{Q}^{\sigma}$。

(証) (1) ⇒ (2). (P_n'), $(P_n'') \subset \mathcal{Q}$, $< \infty$, $C(P_1') \cap C(P_1'') = \phi$,

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n' = \sum_{n=1}^{\infty} P_n''$$

としよう. V_n', V_n'' を $V_n' 1 = P_n'$, $V_n'' 1 = P_n''$ となる. potential kernels としよう.

$$V' = \sum V_n' \qquad V'' = \sum V_n''$$

とおくと V', V'' は $V'1 = V''1 = P$ となる.

potential kernel である。したがって $V' = V''$。 さて $f', f'' \in C_c^+(X)$ を $f' \leqq 1$, $C(P_1')$ 上で $f' = 1$ 及び $f'' \leqq 1$, $C(P_1'')$ 上で $f'' = 1$ さらに $\mathrm{Supp}\,[f'] \cap \mathrm{Supp}\,[f''] = \phi$ とな

Sem. on Probab.
Vol.34　1971年
P1-97

るように選ぶ。

このとき

$$p-(p_1'+p_1'') = V1-(V_1'f'+V_1''f'')$$
$$= V'(1-(f'+f''))+V'f'-V_1'f'+V''f''-V_1''f''$$
$$= V'(1-(f'+f''))+\sum_{n=2}^{\infty}(V_n'f'+V_n''f'')$$
$$\in \mathcal{Q}^{\sigma}。$$

(2) ⇒ (1)　V を $V1=p$ なる *potential kernel* としよう。開集合 G に対して

$$\tilde{V}1_G = \sup\{p'\in\mathcal{Q},<\infty\ ;\ C(p')\subset G,\ p-p'\in\mathcal{Q}^{\sigma}\}$$

と定義する。$V1_G = \tilde{V}1_G$ を言えばよい。$f\in C_c^+(X)$, $0\leqq f\leqq 1$, Supp. $[f]\subset G$ とする。$Vf=\sum g_k$, $g_k\in\mathcal{Q}$ とすると

$\sum_{k=1}^{n} g_k \in \mathcal{Q}$,

$C(\sum^{n} g_k) \subset$ Supp. $[f]\subset G$,

さらに $p-\sum^{n} g_k\in\mathcal{Q}^{\sigma}$ だから $\sum^{n} g_k$ は右辺の $\{\ \}$ の中の条件を満たし $\sum^{n} g_k\leqq\tilde{V}1_G$. $Vf\leqq\tilde{V}1_G$, $V1_G\leqq\tilde{V}1_G$ となる。今あるG とある $x\in X$ に対して

$$V1_G(x) < \tilde{V}1_G(x)$$

となったとしよう。このとき $\exists\varepsilon>0$, $\exists p'\in\mathcal{Q}$, $C(p')\subset G$, $p-p'\in\mathcal{Q}^{\sigma}$, で

$$V1_G(x) < p'(x)-\varepsilon。$$

一方　上に証明したことから開集合 $X-C(p')$ に対して $p''\in\mathcal{Q}$ で $C(p'')\subset X-C(p')$, $p-p''\in\mathcal{Q}^{\sigma}$ となるものが存在して

$$V1_{X-C(p')}(x)\leqq p''(x)+\varepsilon$$

とできる.

ゆえに

$$p(x) = V1_G(x)+V1_{X-G}(x)$$
$$\leqq V1_G(x)+V1_{X-C(p')}(x)$$
$$< p'(x)+p''(x)。$$

ところが $p-p'\in\mathcal{Q}^{\sigma}$, $p-p''\in\mathcal{Q}^{\sigma}$, $C(p')\cap C(p'')=\phi$ だから条件 (2) より $p-(p'+p'')\geqq 0$ でこれはムジュンである。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Corollary 10.4　$\mathcal{Q}$は 次の(a)をみたすとする。
(a) $p \in \mathcal{Q}$, $q \in \mathcal{Q}^{\sigma}$, $p + q \in \mathcal{Q} \Rightarrow q \in \mathcal{Q}$ このとき 任意の$p \in \mathcal{Q}$に対し $V1 = p$ となる potential kernel が唯一つ存在する。

（証） まず cone $\mathcal{Q}$ は order $\prec$ に関し lattice であるから 次の decomposition lemma が成り立;「q, p_1, $p_2 \in \mathcal{Q}$, $q \prec p_1 + p_2 \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$ such that $q = q_1 + q_2$, $q_1 \prec p_1$, $q_2 \prec p_2$ 」

さて Proposition 10.3 の(2)をたしかめよう。p, p', p'' をそこに述べられた$\mathcal{Q}$の元とする。
(a)を $p'' \in \mathcal{Q}$, $p - p'' \in \mathcal{Q}^{\sigma}$に適用して $p - p'' \in \mathcal{Q}$ したがって$p'' \prec p$。
Decomposition lemmaより p_1'', $p_2'' \in \mathcal{Q}$で $p'' = p_1'' + p_2''$ $p_1'' \prec p - p'$, $p_2'' \prec p'$ となるものが存在する。$C(p_2'') \subset C(p') \cap C(p'') = \phi$ だから $p_2'' = 0$。 したがって $p'' = p_1'' \prec p - p'$ すなわち $p - (p' + p'') \in \mathcal{Q}$。

上に述べた Decomposition lemma の証明は Phelps [20], p61 にある。さらに $\{p_i ; i \in I\}$ $\{q_j ; j \in J\} \subset \mathcal{Q}$ で

$$\sum_I p_i = \sum_J q_j$$

となるなら ある$\{r_{ij} ; (i\ j) \in I \times J\} \subset \mathcal{Q}$ に対し

$$p_i = \sum_J r_{ij}$$

$$q_j = \sum_I r_{ij}$$

となるものがとれる。ここに I, J は有限集合。

Proposition 10.5　p, q, $r \in \mathcal{Q}$, $< \infty$ に対し 各々に対応する potential kernel を V^p, V^q, V^r とするとき

$$V^p = V^q + V^r .$$

(註)　$p = \sum_{i \in I_n} p_i^n = q + r$ とするなら
$q = \sum_{i \in I_n} q_i^n$, $r = \sum_{i \in I_n} r_i^n$, $q_i^n + r_i^n = p_i^n$ とできるから，このように p, q, r の細分をつくると

$$W_n^{(p)} f \leq W_n^{(q)} f + W_n^{(r)} f$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

さらに $V^p f \leqq U^q f + V^r f$, $f \in C_K^+(X)$ が示され 同様にして W^n を考えれば

$$V^p f \geqq V^q f + V^r f$$

もわかる。

一意性の条件がみたされているときには $p \in \mathcal{Q}^\sigma$, $p = \sum p_n$, $p_n \in \mathcal{Q}$ に対応するポテンシアル kernel は p_n のえらび方に依存しないから $p, q, r \in \mathcal{Q}^\sigma$, $< \infty$, $p = q + r$ のときも

$$V^p = V^q + V^r$$

がわかる。

これまでに構成された potential kernel に対して Submarkov となる条件を定義し resolvent を構成したりエクセシブ函数をしらべることがかなり一般に Hansen [10], Mokovodzki Siboney [19] で行なわれているがここでは述べない。

(注意) §9 までにおいて我々がポテンシアルと呼び $\mathcal{P}$ と書いてきたものは この節の $\mathcal{Q}$ の一つの例を与えるのではないから注意しておく。Brelot のポテンシアルは この節の $\mathcal{Q}^\sigma$ に相当するものである。この節の $\mathcal{Q}$ は 次節の $\mathcal{P}_c$ に相当する。

§11. Brelot のポテンシアル論における potential kernel.

この節からふたたび Brelot のポテンシアル論にもどり表題のことを調べよう。これは最初 Herve, Meyer により論ぜられた。
我々は §10 の応用として述べる。

§3 で定義されたポテンシアル全体を $\mathcal{P}$ とする。

$\boxed{\text{定義}}$ ポテンシアル p の台とは閉集合 F で F の外では p が harmonic となるようなもののうち最も小さい閉集合を言う。それを $C(p)$ と書く。

$$\mathcal{P}_c = \{ p \in \mathcal{P} \,;\ C(p) \text{ はコンパクト} \}$$

とおく。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Proposition 11.1.

$$\mathcal{P} = \{ p \in \mathcal{S}_+(X) \,;\; p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \,,\; p_n \in \mathcal{P}_c \}$$

（証） $g \in \mathcal{P}$, (K_n) を compact 集合 K_n による X の exhaustion とし §9 における P_{K_n} を g_n とおこう。g_n は $X-K_n$ 上で harmonic だから $g_n \in \mathcal{P}_c$。また $g = \sum^{n} g_k + g_{X-K_n}$ と書ける。$h = \lim_{n\to\infty}\downarrow g_{X-K_n}$ としよう。Proposition 2.7 と Proposition 2.5 より $\hat{h} \in \mathcal{S}_+(X)$, $\hat{h} \leqq g$ だから $h \in \mathcal{P}$。各 n に対し $g_{X-K_n} \in \mathcal{H}(\mathring{K}_n)$ だから すぐわかるように $h \in \mathcal{H}(X)$ したがって $h = 0$。

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \,,\quad g_n \in \mathcal{P}_c \,。$$

逆に $p \in \mathcal{S}_+(X)$, $p = \sum p_n$, $p_n \in \mathcal{P}_c$ としよう。

$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} p_k$ とおくと $r_n \in \mathcal{S}_+(X)$ である。r_n の最大な harmonic minorant を h_n としよう。さて $r_n = r_{n+1} + p_n$ で、p_n はポテンシアルだから $h_n = h_{n+1}$, $\forall n$。$p(x) < \infty$ なる x では $r_n(x) \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ したがって $h_m(x) = h_n(x) \leqq r_n(x) \downarrow 0$ だから $h_m(x) = 0$. $\forall m$。ところが $p \in \mathcal{S}_+(X)$ より $p(x) < \infty$ なる x は dense な集合をつくり、X 上で $h_m = 0$, $\forall m$。結局 r_m はポテンシアルになる。$\sum^{m-1} p_k$ は勿論ポテンシアルだから

$$p = \sum^{m-1} p_k + r_m$$

はポテンシアルになる。

上の証明より、

Lemma 11.2. $p_n \in \mathcal{S}_+(X)$ が $n \geqq m$ に対し、

$$p_m = p_n + u_{m\,n} \,,\quad u_{m.n} \in \mathcal{S}_+(X)$$

をみたし、各 $u_{m.n}$ はポテンシアルであるとする。

p_n が X の dense 集合上で 0 に減少するなら すべての m に対し、p_m はポテンシアルである。

このLemma は簡単だが大変有効である。この本において今後使うかどうかはわからないが。

さて §10 の台の理論を $\mathcal{P}_c$ に適用しよう。$C : \mathcal{P}_c \to \mathcal{K}(X)$ を $\mathcal{P}_c \ni P$ にその台を対応させる写像とする。($\mathcal{P}_c$, C) が §10 の最初の条

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

件 (1) と (2) の a, b をみたすことはすぐわかる。(2) の c をたしかめよう。$p \in \mathcal{P}_c$, $X = U_1 \cup U_2$ U_1, U_2 は開集合 とする。p の台 $C(p)$ を K とおこう。$K - U_1 \subset U_2$ であるからコンパクト集合 K' を $K - U_1 \subset \mathring{K}' \subset K' \subset U_2$ となるように選べる。そこで $p_1 = p_{X-K'}$, $p_2 = p_{K'}$ と、§9の分割定理にしたがっておくことにしよう。定理 9.1 より $p_1 \in \mathcal{H}(\mathring{K}')$, $p_2 \in \mathcal{H}(X - K')$ だが $p \in \mathcal{H}(X-K)$ より $C(p_1) \subset K \cap (X - \mathring{K}') \subset U_1$, $C(p_2) \subset K \cap K' \subset U_2$ がしたがう。$p = p_1 + p_2$ だから (2) c はみたされる。

次に条件 (3) を確かめよう。$p, g \in \mathcal{P}_c$, $p = g + s$, $s \in \mathcal{P}$ となっているとき $s \in \mathcal{P}_c$ を見るのはやさしい。$C(p) \cup C(g)$ の外では p, g ともに harmonic だからである。したがって $\mathcal{P}$ における順序 $\succ$ は $\mathcal{P}_c$ に制限するとき convex cone $\mathcal{P}_c$ から決まる順序と一致する。$p, g \in \mathcal{P}_c$ に対し定理 3.11 より その上限 $r = p \curlyvee g$ が $\mathcal{P}$ の中に定まる。$r \prec p + g$ であり $p + g$ は $C(p) \cup C(g)$ の外で harmonic だから r も $C(p) \cup C(g)$ の外で harmonic となり $r \in \mathcal{P}_c$, よって (3) が確かめられた。

Proposition 10.3 (2) の一意性の条件をたしかめよう。今の場合に書きなおすと; $p', p'' \in \mathcal{P}_c$, $< \infty$ で $p \succ p'$, $p \succ p''$ さらに $C(p') \cap C(p'') = \phi$ とするとき $p \succ (p' + p'')$ がしたがう; ことを示そう。

$C(p') = K'$, $C(p'') = K''$ とおく。$K' \cap K'' = \phi$。

$p' \prec p$ だから Proposition 9.2 (ii) とその証明より $p' \prec p_{K'}$ となる。同じく $p'' \prec p_{K''}$ となるが Proposition 9.5 より $p_{K''} \prec p_{X-K'}$ だから $p'' \prec p_{X-K'}$, したがって $p' + p'' \prec p_{K'} + p_{X-K'} = p$。

以上確かめられたことと §10 より、

定理 11.3. 任意の有限な $p \in \mathcal{P}$ に対し 次の条件をみたす X 上の kernel $V(x, dy)$ が唯一つ存在する。

(a) $\forall f \in C_c^+(X)$ に対し $Vf = \sum p_n$ 、ここに

$$p_n \in \mathcal{P}_c \text{ であり } C(p_n) \subset Supp.[f]。$$

(b) $$V1 = p.$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

系 11.4　$Vf \in \mathcal{P} \cap \mathcal{H}(X - \mathrm{Supp}[f])$ が $\forall f \in C_c^+(X)$ に対し成り立つ。（公理(3)と Proposition 11.1 より）。したがって $Vf \in \mathcal{P}_c$ となる。

Proposition 11.5　$P \in \mathcal{P} \cap C(X)$ なら V は $B_b^+(X)$ を $\mathcal{P} \cap C(X)$ へ写す.（Proposition 10.3 の 直前に述べられている。）

Proposition 11.6　$VI_K = P_K$ 。

(証) U をコンパクト集合 K の開近傍とし $\mathfrak{A} = \{ f \in C_c^+(X) ; f = 1$ on K, $= 0$ out of $U \}$ さらに

$\mathcal{U} = \{ Vf ; f \in \mathfrak{A} \}$ とおく。$\mathcal{U}$ は $X - \bar{U}$ 上で harmonic なポテンシャルの族である。定理 1.8 を $G = X - \bar{U}$ に適用して $\inf \mathcal{U}$ が $X - \bar{U}$ 上で harmonic となることがわかる.

$$VI_K = \inf \{ Vf ; f \in \mathfrak{A} \} = \inf \mathcal{U} \in \mathcal{H}(X - \bar{U}).$$

U は任意でよいから $VI_K \in \mathcal{H}(X - K)$. さて $VI_K \prec P$ だから Proposition 9.2 (ii) より $VI_K \leqq P_K$ がしたがう. 今ある $x \in X$ に対し $VI_K(x) \lneq P_K(x)$ となったとしよう. Proposition 9.2 (ii) より ある $\varepsilon > 0$ とある $g \in \mathcal{P} \cap \mathcal{H}(X - K)$ に対し $g \prec P_K$ で

$$VI_K(x) < g(x) - \varepsilon$$

となるようにできる。一方

$$VI_{X-K}(x) = \sup \{ VI_{K'}(x) ; K' \text{コンパクト} \subset X - K \}$$

$$\leqq \sup \{ P_{K'}(x) ; K' \text{ compact} \subset X - K \}$$

だから あるコンパクト集合 $K_0 \subset X - K$ に対し

$$VI_{X-K}(x) \leqq P_{K_0}(x) + \varepsilon 。$$

したがって　$P(x) = VI(x) = VI_K(x) + VI_{X-K}(x)$

$$< g(x) + P_{K_0}(x)$$

$$\leqq P_K(x) + P_{K_0}(x) \leqq P_K(x) + P_{X-K}(x) = P(x),$$

ここにおいて最後から二つ目の不等号で Proposition 9.5 を使った。これはムジュンであるから

$$VI_K = P_K 。$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

kernel $V(x,dy)$ の measure としての台は すべての x に対して同じであり それはポテンシアル p の台 $C(p)$ と一致することがわかる。読者で試していただきたい。

次節での計算の際、有界性が問題になるが、いちいちことわらないで、次の性質に注意しておく。

Proposition 11.7 $p \in \mathcal{P}_c \cap C(X)$ なら p は有界。

(証) $C(p) = K$, $m = \sup_K p$ とおこう。

$m - p \in \mathcal{S}(X-K)$, $\liminf_{X-K \ni y \to x} (m-p) \geqq 0$, $\forall x \in \partial K$ となる。

さらに $p \in \mathcal{P}$ で $(m-p) + p = m \geqq 0$ だから定理 3.1 より $X-K$ 上で $m - p \geqq 0$。したがって X 上で $m \geqq p$.

Proposition 3.8 より $\forall s \in \mathcal{S}_+(X)$ は下から $g \in \mathcal{P}_c \cap C(X)$ で近似できるが、この g は有界となることがわかった。

§12. ポテンシアル kernel に対応するリゾルベントとエクセシブ函数。

有限な $p \in \mathcal{P}$ に対し 定理 11.3 により与えられる kernel を V^p と書く。ボレル可測函数全体を $B(X)$ と書く。添字 $+$, b, c はそれぞれ非負 有界, 台がコンパクトを意味する.

$\boxed{\text{定義}}$ W を kernel とする。$d \in B_+(X)$ が W-dominant であるとは次のことを言う。

$f, g \in B_+(X)$ に対し, $\{x \in X, g(x) > 0\}$ の上で $d + Wf \geqq Wg$ なる関係があれば X 全体で $d + Wf \geqq Wg$。

系 ある $\lambda > 0$ に対して $(I + \lambda W)u$ が W-dominant になれば $u \geqq 0$ である.

このことは良く使う。

Proposition 12.1 $p \in \mathcal{P} \cap C(X)$ とする。すべての非負 superharmonic 函数は V^p-dominant である。

(証) $p = 0$ のときはあきらか。($V^p \equiv 0$)。

Meyer [17] Ch. X. T.4 と同様にして, V^p が真に正な continuous

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

kernel であることから，次のことを確かめればよいことがわかる．任意の $S \in \mathcal{S}_+(X)$ と任意の $f, g \in C_c^+(X)$ に対し，

$$\{g > 0\} \text{ 上で} \quad S + V^p f \geq V^p g$$

なら

$$X \text{ 全体で} \quad S + V^p f \geq V^p g.$$

$(g_n) \subset C(X) \cap \mathcal{P}_c$ を $C(g_n) \subset \{g > 0\}$ かつ $g_n \uparrow V^p g$ となるように選ぼう。（$g_n = V^p(g \cdot 1_{\{g \geq \frac{1}{n}\}})$ とすればよい）。このとき

$C(g_n)$ 上で $S + V^p f - g_n \geq 0$

が成り立つ．さらに $S + V^p f - g_n$ は $X - C(g_n)$ 上で superharmonic となる。また $g_n \in \mathcal{P}$，$(S + V^p f - g_n) + g_n = S + V^p f \geq 0$ もみたされるから 定理 3.1 より $S + V^p f - g_n \geq 0$。

したがって $n \uparrow \infty$ として $S + V^p f \geq V^p g$。

系 12.2 $I \in \mathcal{S}_+(X)$ だから $p \in \mathcal{P} \cap C(X)$ に対し V^p は完全最大値の原理：

$$m + V^p f \geq V^p g \quad \text{on } \{g > 0\}$$
$$\Rightarrow$$
$$m + V^p f \geq V^p g$$

をみたす．

$p \in \mathcal{P} \cap C_f(X)$ に対し V^p は完全最大値の原理をみたす有界な kernel だから submarkov なリゾルベント $(V^p_\lambda)_{\lambda > 0}$ が存在して

$$(12.1) \quad V^p - V^p_\lambda = \lambda V^p V^p_\lambda = \lambda V^p_\lambda V^p$$

となる。このとき $\forall S \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し $\lambda V^p_\lambda S \leq S$ となる．なぜなら $g \in \mathcal{P}_c \cap C(X)$，$g \leq S$，を一つとってくると $V^p g$ は有界だから $h = \lambda(g - \lambda V^p_\lambda g)$ は有限なポテンシアル $V^p h = \lambda V^p_\lambda g$ をもつ．集合 $\{S - \lambda V^p_\lambda g > 0\}$ の上では $S \geq V^p h$ だから とくに集合 $\{h > 0\}$ の上で $S \geq V^p h$。したがって X 全体で $S \geq V^p h = \lambda V^p_\lambda g$.

Proposition 3.8 より $S \in \mathcal{S}_+(X)$ は このような $g \in \mathcal{P}_c \cap C(X)$ で下から近似できるから，$S \geq \lambda V^p_\lambda S$。

さて任意の (V^p_λ) - excesive な函数，すなわち

$\lim_{\lambda \to \infty} \uparrow \lambda V^p_\lambda u = u$ となる $u \in B_+(X)$，は有限なポテンシアル $V^p f$，$f \in B_+(X)$，で下から近似できる（[17]. Ch. IX. T.64）；

$$V^p f_n \uparrow u, \quad f_n \in B_+(X), \quad V^p f_n < \infty.$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

したがって Proposition 1.4より すべての(V_λ^p)-excessive 函数は X 上で superharmonic になる。以上まとめて

Proposition 12.3 $p \in \mathcal{P} \cap C_b(X)$とする.

(1) $s \in \mathcal{S}_+(X) \Rightarrow \lambda V_\lambda^p s \leqq s$

(2) uが(V_λ^p)-excessive $\Rightarrow u \in \mathcal{S}_+(X)$.

次の Lemma は一般に有効であると思う。以下で本質的な役をする。

Lemma 12.4 $p \in \mathcal{P} \cap C_b(X)$, $q \in \mathcal{P}$ とする。
$q < p$ ならば リゾルベント(V_λ^q)も存在して、

$$V_\lambda^p s \geqq V_\lambda^q s$$

なる関係が $\forall \lambda > 0$ と $\forall s \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し成り立つ.

(証) $p \in C_b(X)$ だから $q \in C_b(X)$, $p - q \in \mathcal{P} \cap C_b(X)$ がすぐわかる. したがって V_λ^q, V_λ^{p-q} が定義される. さて $s \in \mathcal{P}_c \cap C(X)$, $\lambda > 0$ としよう。

$t = V_\lambda^p s - V_\lambda^q s$ とおく。(V_λ^p) と (V_λ^q) に対する (12.1)式を計算すれば

$$t = -\lambda V^p t + (V^p - V^q) h,$$
$$h = s - \lambda V_\lambda^q s,$$

がわかる。($s \in \mathcal{P}_c \cap C(X)$ より $V^q s$ 等はすべて有界).

Proposition 10.5 とその直後に述べたことより

$$V^p - V^q = V^{p-q} \text{ だから } t = -\lambda V^p t + V^{p-q} h.$$

集合$\{t > 0\}$上で $V^{p-q} h - \lambda V^p t \geqq 0$, また $V^{p-q} h \in \mathcal{S}_+(X)$ は V^p-dominant だから X 全体で $V^{p-q} h \geqq \lambda V^p t$。したがって $t \geqq 0$. 一般の $s \in \mathcal{S}_+(X)$ は Proposition 3.8 より $q \in \mathcal{P}_c \cap C(X)$ の下からの極限だから そのときも $V_\lambda^p s \geqq V_\lambda^q s$。

§7で述べた Banach 空間の列 $E^{kn} = E^n$ と $E = \bigcup_n E^n$ をとってくる。定理7.2とその前の説明より $\mathcal{P}_c \cap C_b(X)$ の函数の可算列 $Q = (P_n)_{n \geqq 1}$ で $Q \cap E^n - Q \cap E^n$ が E^n の中で dense となり、$Q - Q$ が E の一様収束位相による閉包 $\bar{E}$ の中で dense となるようなものが存在する.

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$p_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k}{\sup p_k}$$

$$g_n = \sum_{r \in Q \cap E^n} \frac{1}{2^{k(r)}} \frac{r}{\sup r}$$

とおこう。ただし $k(r)$ は $r = p_k \in Q$ に対し $k(r) = k$ として定められる $Q \to \mathbb{N}$ なる写像。

Proposition 7.4 より $p_0 \in \mathcal{P} \cap C_b(X)$ である。
$g_n \in \mathcal{P}_c \cap E^n$, $g_n \prec p_0$ なることもすぐわかるであろう。p_0 に対応するポテンシャル *kernel*, リゾルベントを $V(x, dy)$, $V_\lambda(x, dy)$ と書こう。また

$$V^{g_n}(x, dy) = V^n(x, dy), \quad V_\lambda^{g_n}(x, dy) = V_\lambda^n(x, dy)$$

とおこう。

Proposition 12.5. $f \in E^n$ に対し

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda^n f(x) = f(x)。$$

(証) $x \in X$ とする。$\nu_\lambda = \lambda V_\lambda^n(x, \cdot)$, $\lambda > 0$, とする。ν_λ の台は $C(g_n)$ であり コンパクトである。また ν_λ の全変動 $\nu_\lambda(1) \leqq 1$. $\{\nu_\lambda ; \lambda \geqq \lambda_0\}$ を $K_n = C(g_n)$ 上の *measure* のつくる空間の中で考え その弱位相での閉包を $M(\lambda_0)$ とする. $\{M(\lambda_0) ; \lambda_0 > 0\}$ は有限交叉性をもつ閉集合族であり、全変動が 1 より小さい K_n 上の測度全体は弱コンパクトだから

$$M = \bigcap_{\lambda_0 > 0} M_{\lambda_0} \neq \phi 。 \quad \mu \in M \text{ としよう。}$$

Proposition 12.3 より $\mu(g_n) \leqq g_n(x)$, $\mu(r) \leqq r(x)$, $\forall r \in Q \cap E^n$。一方

$$\mu(g_n) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda^n \cdot g_n(x) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda^n V^n 1(x)$$

$$= V^n 1(x) = g_n(x)$$

となる。したがって $\forall r \in Q \cap E^n$ に対し $\mu(r) = r(x)$。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$Q \cap E^n$は その差がE^nで dense だから $^\forall f \in E^n$ に対し、
$\mu(f) = f(x)$。したがって

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda^n f(x) = f(x)。$$

定理 12.6 (V_λ) - excessive 函数全体はちょうど $\mathcal{S}_+(X)$ と一致する。

(証) Proposition 12.3 より (V_λ) - excessive 函数は superharmonic となる。逆を示そう。

$S \in \mathcal{P}_c \cap C(X)$ とする。E^nのつくり方より n が $C(g_n) \supset C(S)$ となるくらい大きければ $S \in E^n$ となる。Proposition 12.5 より $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda^n S(x) = S(x)$。ところが Lemma 12.4 より

$$0 \leqq S(x) - \lambda V_\lambda S(x) \leqq S(x) - \lambda V_\lambda^n S(x)。$$

したがって

$$\lim \uparrow \lambda V_\lambda S(x) = S(x)。$$

一般の $S \in \mathcal{S}_+(X)$ は $\mathcal{P}_c \cap C(X)$ の函数で下から近似され、また excessive 函数の増加列の極限は再び excessive だから S は excessive となる。

定理 12.7 リゾルベント V_λ の値域 $V_\lambda(B_\ell(X))$ の一様閉包とEの一様閉包は $C_\ell(X)$ の中で一致する。

(証) $g_n \uparrow P_0$ は一様収束だから $^\forall f \in B_\ell(X)$ に対し $V^n f$ は一様に Vf に収束する。$V^n f \in E^n \subset E$ だから $Vf \in \overline{E}$ ゆえに $\overline{V(B_\ell(X))} \subset \overline{E}$。

逆に $g \in E$ とする。ある n に対し $g \in E^n$となる。$^\forall \varepsilon > 0$ に対し $u, v \in E^n \cap Q$ を $|g - (u - v)| < \varepsilon$ が X 上で一様に成り立つように選ぼう。このとき $\lambda V_\lambda(|g - (u - v)|) < \varepsilon$。定理 12.6 より十分大なる λ に対し $0 \leqq u - \lambda V_\lambda u < \varepsilon$ が各点 x で成り立つが Dini の定理よりコンパクト集合 $K_n = C(g_n)$ 上では一様に成り立つようにできる。ところが $\varepsilon + \lambda V_\lambda u - u = \varepsilon + \lambda V(u - \lambda V_\lambda u) - u \in \mathcal{S}(X - K_n)$ であり $(\varepsilon + \lambda V_\lambda u - u) + u \geqq 0$, $u \in \mathcal{P}$, であるから定理 3.1 より $X - K_n$ 上で $\varepsilon + \lambda V_\lambda u - u \geqq 0$ となる。したがって全空間 X で $0 \leqq u - \lambda V_\lambda u \leqq \varepsilon$。同じく

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$0 \leqq v - \lambda V_\lambda v \leqq \varepsilon$ が一様に成り立つ。
以上より $|\lambda V_\lambda g - g| < 4\varepsilon$ が一様に成立する。したがって $g \in \overline{V_\lambda(B_b(X))}$。$E \subset \overline{V_\lambda(B_b(X))}$。

系 12.8 $\forall f \in C_c(X)$ に対し $\lambda \to \infty$ のとき $\lambda V_\lambda f$ は一様に f に収束する。

定理 12.6 が成り立つような resolvent の構成は Meyer が [18] において最初行なったが そこにおける議論はコンパクト集合上で stop したマルコフ過程のリゾルベントをつくり それを拡げていくといったものであった。その結果、上の系 12.8 は証明される。しかしちょうどリゾルベントの値域になる空間 E、あるいはそれを近似する E^n、を考えることにより 我々の議論の方がずっと見通しよく 又一般的になっている。その際 n が大きくなって行くときの V_λ^n の関係を与えるのが Lemma 12.4 であった。Meyer の方法は Brelot の公理系によるポテンシアル論であることを本質的に用いている(上に述べたコンパクト集合を拡げていく操作で)。その点は Boboc 等 [2] 及び Hansen [9] により Bauer の公理系の場合にも適用できるように為された。我々の議論は それらよりさらに一般で Fullharmonic structure から出発するときにも そのまま適用される。(前者達と最後の場合とは本質的なちがいがあり 前者の場合 $\mathcal{S}_+(X)$ は adapted cone になるが、後者の場合はならない。adapted cone よりつくられる線形空間は C_0 (= 無限遠で 0 になる連続函数) より 少し広いが その上の linear functional は X 上の測度で表現できる。後者の場合はおそらくこのようなことは成り立たないであろう。) もう少し雑談するなら Meyer, Boboc 等, Hansen の場合は submarkov な semi-group の構成ができる。すなわち X 上の kernel として構成できる。しかし 我々の場合はおそらく出来ないと思う。この点 筆者は証明も反例も出来ない。次の大問題の解決と同じ程度にむつかしい。

問題: $C_b(X)$ の線形部分空間 E で 写像 $E \to C_b(X)$ が連続となり、また E 上の線形汎函数 ℓ は すべて X 上の測度 μ_ℓ で表現される;

$$\ell(f) = \int f \, d\mu_\ell, \quad \forall f \in E,$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

このようなEで最も広い空間を決定すること。

Eが *adapted* な場合（例えば半直線（0. ∞）上のブラウン運動を0で殺したもののリゾルベントの値域の場合）に　その上の線形汎函数は測度で表現されることが *Choquet* により示されている。*adapted* な空間であることが必要条件かというと　そうでない。もっと広いが、ここでは述べない。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

第4章 Riesz - Martin型 表現定理と Martin 境界。非負優調和函数よりつくられる核型線形位相空間。

§13. 線形位相空間 $[\mathcal{S}_+(X)]$

いま直積 $\mathcal{S}_+(X)\times\mathcal{S}_+(X)$ に次の関係を入れる。$(p, p'), (q, q') \in \mathcal{S}_+(X)\times\mathcal{S}_+(X)$

$$(p, p') \sim (q, q') \Leftrightarrow p + q' = q + p' 。$$

これは同値関係となる。この関係により商空間 $\mathcal{S}_+(X)\times\mathcal{S}_+(X)/\sim$ をつくり それを $[\mathcal{S}_+(X)] = F$ と記す。Fの元を $[p, p']$ と書く。

$$[p, p'] + [q, q'] = [p+q, p'+q']$$

$$\alpha[p, p'] = [\alpha p, \alpha p']$$

$$-\alpha[p, p'] = [\alpha p', \alpha p], \quad \alpha \geqq 0.$$

なる演算により F は線形空間になる. さらに F の元に(半)順序を次のように定義して導く。

$$[p, p'] \succ [q, q'] \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{S}_+(X),$$
$$p + q' = q + p + u 。$$

また $\mathcal{S}_+(X)$ は $\{[u, 0]; u \in \mathcal{S}_+(X)\}$ と同一視して、上の順序による F の position cone になる。F が Vector lattice になることは 定理 3.11 よりしたがう。

F を局所凸な線形位相空間とするような位相を考えたい。以下それを行なおう。

$f \in C_b^+(X)$, $p \in \mathcal{P}$, としよう。f は階段函数の 増加列 $\varphi_n = \sum \alpha_{i,n} 1_{G_{i,n}}$ により 近似される。ここに $\alpha_{i,n} > 0$ であり、各 n 毎に,

$$\{f > 0\} = \bigcup_i G_{i,n} 。$$

いま

$$W^p \varphi_n = \sum_i \alpha_{i,n}\, p_{G_{i,n}}$$

とおこう。記号 p_G は定理 9.1 に従う。$W^p\varphi_n$ はポテンシァルであり n とともに増加することがわかるから その極限の Super-harmonic 函数を $W^p f$ としよう。§10 におけると同じようにして $W^p f$ が φ_n のとり方に依存しないこと、又

$$W^p(f+g) = W^p f + W^p g$$

なることがわかる. ところで $W^p f \leqq \|f\|\cdot p$ だから $W^p f$ はポテンシ

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

アルとなる。f の Support の外では $W^p f$ が harmonic となることは 次のようにわかる。各 $p_{G_{i,n}}$ は $X - \overline{G_{i,n}}$ 上で harmonic となる。

したがって $W^p \varphi_n$ は $X - \bigcup_i \overline{G_{i,n}} = X - \overline{\{f>0\}}$ において harmonic $n \uparrow \infty$ として $W^p f$ は harmonic 函数の増加列の極限として $X - \overline{\{f>0\}}$ で harmonic となる。

p が有限なポテンシアルのときには W^p は §11 において構成された V^p と同じであることはすぐにわかる。

$X_0 = X \cup \{\partial\}$ を X の一点コンパクト化としよう。
$s \in \mathcal{S}_+(X)$, $f \in C_+(X_0)$ に対して

$\mho^s f(x) = W^p f(x) + f(\partial)\, h(x)$, $x \in X$, とおく。ただし $s = p + h$ は Riesz 分解で p はポテンシアル, h は X 上の非負調和函数とする。

次のことは すぐにわかる。

(a) $\mho^s : C_+(X_0) \to \mathcal{S}_+(X)$ は linear map。

(b) もし (X_0 で考えた) f の Support が X に含まれるなら、すなわち $\overline{\{f>0\}}$ が X の コンパクト集合ならば, $\mho^s f$ はポテンシアルである。

(c) $\mho^s f$ は $X - \mathrm{Supp}\,[f]$ 上で harmonic である。

(d) $\mho^s 1 = s$

(e) $f, g \in C_+(X_0)$ に対し $g = \mho^s f$ とおくと,

$$\mho^g g = \mho^s (f \cdot g)。$$

Proposition 13.1 $C_+(X_0)$ を $\mathcal{S}_+(X)$ へうつす線形写像 L が 上の (a)～(c) をみたすとしよう。このときある $s \in \mathcal{S}_+(X)$ が存在して, $L = \mho^s$ と書ける。

(証) $s = L1 \in \mathcal{S}_+(X)$ を Riesz 分解する. $s = p + h$, $p \in \mathcal{P}$, $h \in \mathcal{H}_+(X)$。まず $f \to Lf(x)$, $x \in X$, は X_0 上の mesure L_x に拡張できるから L を $C_+(X_0)$ のみならず X_0 上の非負な任意の可測函数に operate できるとしてよい。$K \subset X$ をコンパクト集合とし, U_n を K の開近傍の列で $K = \bigcap_n U_n$ とし, また $f_n \in C_c^+(X)$, $f_n = 1$ on K, $= 0$ out of $\overline{U_n}$, $f_n \downarrow 1_K$ としよう。$t = \inf_n L f_n$ は, 仮定(b)(c)より 各 $L f_n$ が U_n の外で harmonic なポテンシアルだから, K の外で harmonic なポテン

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

シアルとなる。$\mathcal{L}1_{X_0-K} = \sup_n \mathcal{L}(1-f_n)$はsuperharmonicであり $\mathcal{L}1 = S = t + \mathcal{L}1_{X_0-K}$ となるから結局 $\mathcal{L}1_K = t$ である。すなわち $\mathcal{L}1_K$ は ポテンシアルで K の外で harmonic。$\mathcal{L}1_K \prec p$ もわかるから Proposition 9.2 (ii) より $\mathcal{L}1_K \leqq p_K$。あとは Proposition 11.6 と同じようにして $\mathcal{L}1_K = p_K$ がしたがう。ゆえに

$$\mathcal{L}(f|_X) = W^p f, \quad \mathcal{L}(1_X) = p,$$
$$\mathcal{L}(1_{\{\partial\}}) = \mathcal{L}1 - \mathcal{L}1_X = h,$$

となり、さらに $\mathcal{L}f = \mathcal{L}(f|_X) + f(\partial)\mathcal{L}1_{\{\partial\}} = W^p f + f(\partial)h = U^S f$ がしたがう。

X上の台がコンパクトな測度μ と函数 $f \in C_c^+(X_0 - Supp[\mu])$ の組を couple (μ, f) という。$S \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し、$U^S f$ は $X - Supp[f]$ の上で harmonic だから (μ, f) が couple ならば

$$\langle \mu, U^S f \rangle = \int U^S f(x)\mu(dx)$$

は有限値。$[S, S'] \in F$に対し $\langle \mu, U^S f\rangle - \langle \mu, U^{S'} f\rangle$ を対応させる写像は F 上の線形写像である。すべての couple (μ, f) に対し、線形写像

$[S, S'] \to \langle \mu, U^S f - U^{S'} f \rangle$

を連続にするような最弱の位相を F に与える。この位相により F は局所凸な線形位相空間になる。

定理 13.2 F は上の局所凸な topology に関して核型空間 (nuclear space) となる。

(準備) E を局所凸線形位相空間とする。E 上の semi norm p が pre-nuclear であるとは次のときを言う。$(E', \sigma(E', E))$ の closed, equicontinuous な部分集合 A と、($\sigma(E', E)$ - compact set) A 上のラドレ測度 μ とが存在して

$$p(f) \leqq \int_A |\langle u, f\rangle| \, d\mu(u), \quad \forall f \in E,$$

が成り立つ。

Schaeffer, Topological vector spaces P 178に紹介

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

されている Pietsch の定理より；
E nuclear $\Leftrightarrow$ すべての continuous な semi-norm は prenuclear，となる。

定理 13.2 の証明．F 上の連続なセミノルム h は

$$h([u,u']) = \int |U^u f - U^{u'} f|\, d\mu$$

により与えられる．ただし μ は台がコンパクトな X 上の測度で $f \in C_c^+(X_0 - Supp.[\mu])$。
今点 $x_0 \in Supp[\mu]$ と相対コンパクトな regular な領域 G, G' を次のようにとろう。
$x_0 \in Supp.[\mu] \subset G \subset \overline{G} \subset G' \subset \overline{G'} \subset X - Supp[f]$。
Harnack の不等式より定数 α, β が存在して

$$\sup_{x \in \overline{G}} h(x) \leqq \alpha\, h(x_0), \quad {}^\forall h \in \mathcal{H}_+(G'),$$

$$\sup_{x \in Supp[\mu]} h(x) \leqq \beta\, h(x_0), \quad {}^\forall h \in \mathcal{H}_+(G),$$

とできる．$\nu_1 = \mu_{x_0}^G$，$\nu_2 = \mu_{x_0}^{G'}$ をそれぞれ ∂G, $\partial G'$ 上の x_0 に関する調和測度としよう．F における原点の近傍 $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U} = \{ [u,u'] \in F \;;\; \alpha \cdot \int |U^u f - U^{u'} f|\, d\nu_2 \leqq 1 \}$$

とする。各 $x \in \partial G$ に対して $L_x \in F'$ を

$$L_x([u,u']) = U^u f(x) - U^{u'} f(x)$$

により定義する．F' に弱位相を与えて考えると $x \to L_x$ は ∂G から F' の中への連続写像であることがわかる．さて L_x は $\mathcal{U}$ の polar に属すことを示そう．

$$|L_x([u,u'])| = |U^u f(x) - U^{u'} f(x)|$$
$$= |H^{G'}(U^u f - U^{u'} f)(x)| \leqq H^{G'} |U^u f - U^{u'} f|(x)$$
$$\leqq \alpha H^{G'} |U^u f - U^{u'} f|(x_0) = \alpha \int |U^u f - U^{u'} f|\, d\nu_2$$
$$\leqq 1 \quad , \quad ([u\ u'] \in \mathcal{U} \text{ に対して})。$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

ここで最初に述べた Harnack の不等式を使った。したがって $\forall x \in \partial G$ に対して

$$L_x \in \mathcal{U}^\circ = \{ \varphi \in F' ; |\langle \varphi, [u, u'] \rangle| \leqq 1 \text{ for } \forall [u, u'] \in \mathcal{U} \}$$

がわかった。

$\mathcal{U}$ が原点の近傍だから その polar $\mathcal{U}^\circ$ は F' の同等連続な部分集合である。$\mathcal{U}^\circ$ が $\sigma(F' F)$ 位相で閉なることはあきらか。よって $\mathcal{U}^\circ$ は $\sigma(F' F)$ 位相でコンパクトになる $\mathcal{U}^\circ$ 上のラドン測度 Ⓗ $(d\varphi)$ を次のように定める；

$\Phi \in C(\mathcal{U}^\circ)$ に対し，$\Phi \circ L_x$ は ∂G 上で連続だから，

$$\int \Phi \circ L_x \, d\nu_1(x) \text{ が定まるが これを } \int \Phi \, d Ⓗ$$

とする．Ⓗ は $\{ \varphi \in F' ; \varphi = L_x$ となる $\exists x \in \partial G \}$ 上にのみ台をもつ。とくに

$$\int |\langle \varphi, [u, u'] \rangle| \, Ⓗ(d\varphi) = \int | U^u f(x) - U^{u'} f(x) | \nu_1(dx)$$

である．

Harnack の不等式より

$$\sup_{x \in S[\mu]} | U^u f(x) - U^{u'} f(x) | = \sup_{x \in S[\mu]} | H^G (U^u f - U^{u'} f)(x) |$$

$$\leqq \sup_x H^G | U^u f - U^{u'} f | (x) \leqq \beta H^G | U^u f - U^{u'} f | (x_0)$$

$$= \beta \int | U^u f - U^{u'} f | d\nu_1$$

だから

$$\mathfrak{p}([u, u']) \leqq \beta \cdot \mu(1) \int | U^u f - U^{u'} f | d\nu_1$$

$$= \beta \cdot \mu(1) \int_{\mathcal{U}^\circ} |\langle \varphi, [u, u'] \rangle| \, Ⓗ(d\varphi)$$

が得られる．Pietsch の定理より F は nuclear space となる。

$\mathcal{S}_+(X)$ は F の metrisable な cone であることが次のようにしてわかる。（F は metrisable かどうかわからない。）$\mathfrak{X} = (x_j)$ を X の可算個の dense な点列とする。また $\mathfrak{F}$ を次の性質をもつ X_0 上の連続函数の可算列とする。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$\forall x \in X$ と $\forall f \in C_c^+(X_0 - \{x\})$ と任意の x を含み $K \cap Supp[f] = \phi$ となるコンパクト集合 K と，$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\mathfrak{F}$ に属す函数 f_i，f_j で K 上では 0 となり

$$f_j \leqq f \leqq f_i,$$
$$|f - f_k| \leqq \varepsilon \text{ on } X_0, \quad (k = i, j)$$

がみたされる。以上の $\mathfrak{X} = (x_j)$ と $\mathfrak{F} = (f_j)$ に対して

$$\{u \in \mathcal{S}_+(X) ; |U^u f_n(x_j) - U^s f_n(x_j)| \leqq \frac{1}{r}\}$$

，r 有理数，$x_j \in \mathfrak{X}$，$f_n \in \mathfrak{F}$，$x_j \notin Supp[f_n]$，の全体は $S \in \mathcal{S}_+(X)$ の基本近傍系の基をつくる。（Herve [ ]，定理 21.2）。

次の Lemma は Herve の一つの結果の拡張である。

Lemma 13.3 $l_{n,x}$，$n \geqq 1$，$x \in X$，を X_0 上の測度の族で x の函数として

$$l_{n,\cdot}(f) \in \mathcal{S}_+(X) \cap \mathcal{H}(X - Supp.[f])$$

が各 $f \in C_+(X_0)$ に対し成り立つとする。

各 $x \in X$ に対して $\{l_{n,x} ; n \geqq 1\}$ は $X_0 - \{x\}$ 上の測度の族として弱収束（$n \to \infty$ のとき）するとしよう。このとき $C_+(X_0)$ から $\mathcal{S}_+(X)$ への写像

$$f \longrightarrow Uf = \widehat{\liminf_{n \to \infty}} \, l_{n,\cdot}(f)$$

は，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ に対して，

$$U(af + bg) = a\,Uf + b\,Ug$$

をみたす。

（証） §2 の最後より $\liminf l_{n,\cdot}(f)$ は nearly superharmonic だから Uf は superharmonic となる。また $l_{n,\cdot}(f) \in \mathcal{H}(X - Supp[f])$ だから 公理 3 -（iii），公理 3 -（ii），より $l_{n,\cdot}(f)$ は $X - Supp[f]$ に含まれる任意のコンパクト集合上で一様に収束する（Ascoli - Arzela）。したがって その極限 Uf も $X - Supp[f]$ 上で harmonic となる。

さて $l_{n,x}(f) + l_{n,x}(g) = l_{n,x}(f + g)$ より

$$\mho(f+g) \geqq \mho f + \mho g$$

がわかるから逆の不等式を示そう。regular domain よりなる X の開基 $\mathcal{B}$ が存在して，不等式

$$\liminf_n \ l_{n,y}(f+g) \leqq \mho f(y) + \mho g(y)$$

が μ_x^V 測度でほとんどすべての $y \in \partial V$ について成り立つことが任意の $V \in \mathcal{B}$ に対して言えれば Proposition 2.5 より

$$\mho(f+g) = \mho f + \mho g$$

がわかる．このことは．X の開集合 G_0 とその開基 $\mathcal{B}_0$ について上述のように言えば十分である．$\mathcal{B}_0$ を次のように与えよう．$x_0 \in X - G_0$ とし，l_{n,x_0} は $X_0 - \{x_0\}$ 上の測度 ν_0 に弱収束するとしよう。$\mathcal{B}_0$ を G_0 に含まれる regular な領域 D，$D \subset \overline{D} \subset G_0$，でその境界 ∂D の ν_0－測度が 0 となるようなものよりなる開基とする．このような $\mathcal{B}_0$ の存在はすぐ後に示す．

(1) $D \in \mathcal{B}_0$ と数 $h > 0$ が与えられたとき次の条件をみたす ∂D のコンパクト部分集合 K の調和測度が 0 $(\mu_x^D(K) = 0,\ \forall x \in D \in \mathcal{B}_0)$ となることが言えればよい；

条件「$\liminf_{n\to\infty} l_{n,x}(f+g) \geqq \mho f(x) + \mho g(x) + \dfrac{S_0(x)}{h}$，$\forall x \in K$」

ただし S_0 は連続で真に正な superharmonic 函数で与えられているとする．

(2) 上記のような K は polar であると言えばよい（§4）。それには任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して．ある非負 superharmonic 函数 u が存在して $u(x_0) \leqq \varepsilon$ であり K 上で $u \geqq \frac{S_0}{h}$ となることが言えればよい。

$\varepsilon > 0$ が与えられたとしよう。開集合 G を $K \subset G \subset \overline{G} \subset G_0$ であり

$$\int_G (f+g)\, d\nu_0 \leqq \varepsilon$$

となるようにえらぶ。次に函数 $a \in C_+(X_0)$ を $0 \leqq a \leqq 1$．$X_0 - G$ 上で $a = 0$．K のある近傍 V 上で $a = 1$ となるようにえらぶ。

(3) $\lim_{n\to\infty} l_{n,x_0}(a(f+g)) \leqq \varepsilon$

及び

(4) $x \in K \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} l_{n,x}(a(f+g)) \geqq \dfrac{S_0(x)}{h}$ を示そう。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

そうすれば $u = \widehat{\liminf}\, l_{n,\cdot}\,(a(f+g))$ は $u(x_0) \leqq \varepsilon$ 及び K上で $u \geqq \frac{s_0}{h}$ をみたす。

$x_0 \in X - G_0$ より $x_0 \notin \mathrm{Supp}\,[a(f+g)]$ だから

$$\lim_{n\to\infty} l_{n,x_0}\,(a(f+g)) = \int a(f+g)\,d\nu_0$$
$$\leqq \int_G (f+g)\,d\nu_0 \leqq \varepsilon$$

これで(3)が示せた。次に(4)を言おう。

V上では $(1-a)f$, $(1-a)g$, $(1-a)(f+g)$ は 0 だから $l_{n,x}((1-a)f)$ 等は V 上で harmonic となり，したがって極限

$$\lim_{n\to\infty} l_{n,x}((1-a)f),\quad \lim_{n\to\infty} l_{n,x}((1-a)g)$$

及び

$$\lim_{n\to\infty} l_{n,x}((1-a)(f+g))$$

は $x \in V$ に対し存在し，これらは V上の harmonic 函数となる。さらに $x \in V$ に対し

$$\lim l_{n,x}((1-a)(f+g)) = \lim_{n\to\infty} l_{n,x}((1-a)f)$$
$$+ \lim_{n\to\infty} l_{n,x}((1-a)g)$$

となる。これよりさらに，$x \in V$に対し，

$$\liminf_n l_{n,x}(f+g) = \liminf_n l_{n,x}(a(f+g))$$
$$+ \lim_n l_{n,x}((1-a)(f+g)),$$

及び

$$\liminf_n l_{n,x}(f) = \liminf l_{n,x}(af) + \lim_n l_{n,x}((1-a)f)$$

と同様の形の g に対する式がしたがう。ゆえに

$$Uf(x) = \widehat{\liminf}\, l_{n,x}(f) = \widehat{\liminf}\, l_{n,x}(af) + \lim l_{n,x}(1-a)f$$

$$Ug(x) = \widehat{\liminf}\, l_{n,x}(ag) + \lim l_{n,x}((1-a)g)$$

が $x \in V$ に対し成り立つ。以上より $x \in K$ に対し(1)の『 』の中の式は

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\liminf_n l_{n,x}(a(f+g)) \geqq \widehat{\liminf}\, l_{n,x}(af) + \frac{S_0(x)}{h}$$
$$+ \widehat{\liminf}\, l_{n,x}(ag)$$

となり、これより、$x \in K$ に対し、

$$\liminf_{n\to\infty} l_{n,x}(a(f+g)) \geqq \frac{S_0(x)}{h}$$

がしたがう。

ゆえに $u = \liminf_{n\to\infty} l_{n,\cdot}(a(f+g))$ は $u(x_0) \leqq \varepsilon$ をみたす K 上で $u \geqq \frac{S_0}{h}$ となる superharmonic 函数である。$\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ に対して 上の superharmonic 函数をつくり u_n とする。$S = \sum u_n$ とおけば $S(x_0) \leqq 1$ だから S は superharmonic 函数となり K 上で $S = +\infty$ となる。したがって K は polar 集合である。

上の証明における開基 $\mathcal{B}_0$ の存在は 次のようにわかる。系6.2より開集合 U と点 $y_0 \in U$ に対して非可算個の regular な領域列 G_α で $y_0 \in G_\alpha \subset \overline{G}_\alpha \subset U$ であり $\alpha \neq \beta$ なら $\partial G_\alpha \cap \partial G_\beta = \phi$ となるものがある。したがって少なくとも一つの G_α は $\nu_0(\partial G_\alpha) = 0$ でなくてはならない。

Proposition 13.4 $S_n \in \mathcal{S}+(X)$, $n \geqq 1$, とする。各点 $x \in X$ に対し $X_0 - \{x\}$ 上の measure と考えて

$$U^{S_n}(x, dy)$$

が 弱収束するとしよう。このとき S_n は $\widehat{\liminf_{n\to\infty}} S_n$ に収束する（F の位相で収束する）。

とくに S_n が F の収束列であるならば その極限は $\widehat{\liminf_{n\to\infty}} S_n$ である。

証．Lemma 13.3 より

$$f \longrightarrow Uf = \widehat{\liminf_{n\to\infty}}\, U^{S_n} f$$

は $C_+(X_0)$ から $\mathcal{S}_+(X)$ への linear map である。これが Proposition 13.1 の条件をみたすことを言おう。各 $U^{S_n} f$ は X −

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Supp $[f]$ において harmonic であり $X-$Supp $[f] \ni x$ で収束するのだから Harnack の不等式（公理 3 − iii）より $X-$Supp$[f]$ に含まれる任意のコンパクト集合上で一様に収束する。したがって $U f$ は $X-$Supp$[f]$ で harmonic になる。さらに f の台がコンパクトならば Lemma 7.5 より $Uf \in \mathcal{P}$ となる。Proposition 13.1 よりある $S \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し $Uf = U^S f$ と表わせる。

$S = U1 = \widehat{\liminf_{n\to\infty}} S_n$ がわかる.

S_n が F で S に収束することを言おう。(μ, f) を任意の couple とする. $U^{S_n} f$ は $X-$Supp$[f]$ に含まれる任意のコンパクト集合上で一様に $U^S f$ に収束するから $\langle \mu, U^{S_n} f\rangle \to \langle \mu, U^S f\rangle$ となる。

定理 13.5

(i) $\mathcal{S}_+(X)$ は complete である（F の中で）。

(ii) F の有界閉集合で $\mathcal{S}_+(X)$ に含まれるものはすべて compact になる。

(iii) $\mathcal{S}_+(X)$ は compact base をもつ cone である。

証明 (i) $\{S_n ; n \geqq 1\}$ を $\mathcal{S}_+(X)$ の函数よりなる Cauchy 列としよう。$x \in X$, $f \in C_c^+(X_0 - \{x\})$ とする。(δ_x, f) は couple だから

$$\{[u, u'] ; |U^u f(x) - U^{u'} f(x)| < \varepsilon\}$$

は 0 の近傍である. したがって ある N が存在して

$$|U^{S_n} f(x) - U^{S_m} f(x)| < \varepsilon, \quad m, n \geqq N,$$

となる。$X_0 - \{x\}$ 上の測度の列 $U^{S_n}(x, dy)$ が弱収束に関して Cauchy 列をつくることがわかった。したがって $U^{S_n}(x, dy)$ はある $X_0 - \{x\}$ 上の測度に弱収束する. Proposition 13.4 より S_n は $S = \widehat{\liminf_{n\to\infty}} S_n$ に収束する.

(ii) F は nuclear space だからすべての有界集合は全有界（precompact）になる。それが $\mathcal{S}_+(X)$ に含まれているなら $\mathcal{S}_+(X)$ は complete だから その全有界集合はコンパクトになる。

(iii) $x_1, x_2 \in X$ 及び $f_0 \in C_r(X_0)$ を x_1 の近くで $f_0 = 0$, x_2

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

の近くで $f_0=1$ 全体で $0 \leqq f \leqq 1$ となるようにとる。いま (μ, g) を一つの couple とする。

$U^S(f_0 \cdot g)$ は任意の $S \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し $X-$Supp $[g]$ 及び $X-$Supp $[f_0]$ の上で harmonic である.

したがって Harnack の不等式より. ある定数 α に対して

$$\sup_{y \in \mathrm{Supp}[\mu]} U^S(f_0 \cdot g)(y) \leqq \alpha U^S(f_0 \cdot g)(x_1)$$

が任意の $S \in \mathcal{S}_+(X)$ に対して成り立つようにできる。同じく. ある β と. 任意の $S \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し.

$$\sup_{y \in \mathrm{Supp}[\mu]} U^S(1-f_0) \cdot g(y) \leqq \beta U^S(1-f_0) \cdot g(x_2)$$

となる。α と β の大きい方を α として.

$$\sup_{y \in \mathrm{Supp}[\mu]} U^S g(y) \leqq \alpha (U^S(f_0 \cdot g)(x_1) + U^S(1-f_0)\, g(x_2))$$

$$\leqq \alpha \cdot \|g\| \cdot (U^S f_0(x_1) + U^S(1-f_0)(x_2)) .$$

さて

$$K = \{ S \in \mathcal{S}_+(X) ;\ U^S f_0(x_1) + U^S(1-f_0)(x_2) = 1 \}$$

とおこう。

$S \in K$ ならば 任意の couple (μ, g) に対して, 上に見たように.

$$\langle \mu, U^S g \rangle \leqq \alpha \|g\|$$

となるから、K は有界集合である. K は勿論 clo ed だから (ii) より Compact になる。

さて $u \in \mathcal{S}_+(X)$, $U^u f_0(x_1) + U^u(1-f_0)(x_2) = 0$

ならば $u = U^u f_0 + U^u(1-f_0) = 0$ でなくてはならない。したがって 任意の $S \in \mathcal{S}_+(X)$, $S>0$, に対して

$$a = (U^S f_0(x_1) + U^S(1-f_0)(x_2))^{-1}$$

とおけば $aS \in K$ となる。すなわち K は cone $\mathcal{S}_+(X)$ の base である.

これまで見てきたことより $\mathcal{S}_+(X)$ は locally convex な線形位相

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

空間 F の中の convex cone で それは metrisable であり、compact な base をもっている。さらに F に定義された order で lattice になっている、ことがわかった。したがって Choquet の定理より；

定理 13.6　任意の $S \in \mathcal{S}_+(X)$ は、ある K 上のラドン測度 ν により

$$S = \int u \, \nu(du)$$

と表わされる。ν は K の extreme points 上にのみ台をもつようにできる。このような ν は一意的である。

上記は、F 上の任意の連続線形汎函数 L に対して

$$L(S) = \int L(u) \, \nu(du)$$

を意味している。我々は次の節で

$$S(x) = \int u(x) \, \nu(du) \ , \quad x \in X,$$

なる表現が成り立つことを示す。

§14　Riesz-Martin 表現定理.

定理 13.6 において、測度 ν は cone $\mathcal{S}_+(X)$ の compact base K の端点に支えられていた。以下しばらくこの端点の集合をしらべよう。

一般にある convex cone C があるとき、$x \in C$, $x \neq 0$, に対して $R^+x = \{\lambda x ; \lambda \geqq 0\}$ なる集合を ray と言う。ray ρ は次の性質をもつとき extreme ray という：

$x \in \rho$, y, $z \in C$, $x = \lambda y + (1-\lambda) z$, $0 \leqq \lambda \leqq 1 \Rightarrow$, $z \in \rho$ 。

C の extrem ray 全体を $(C)ex$, と書く。

今 B を convex cone C の base とすると、B の端点(extreme point) 全体と $B \cap (C)ex$. とは一致する。

さて 上記の convex cone として $\mathcal{S}_+(X)$ 等を考え $(\mathcal{S}_+(X))ex$, $(\mathcal{P})ex$, $(\mathcal{H}_+(X))ex$. をそれぞれを、ξ ξ_i, ξ_h と書こう。このとき容易に

$$\xi = \xi_i \cap \xi_h ,$$

$$\xi_i = \xi \cap \mathcal{P} ,$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\xi_\alpha = \xi \cap \mathcal{H}_+(X).$$

がしたがう。

ポテンシアル $p \in \xi_i$, $\neq 0$, はただ一点のみをその台（§11の定義）に持っている．言いかえれば $C(p)$ は X の点である。なぜなら $C(p) \ni y_1$, y_2, $y_1 \neq y_2$ としてみよう。コンパクト集合 K を $y_1 \in \mathring{K}$, $y_2 \notin K$ ととり、p の Herve 分割を $p = p_K + p_{X-K}$ とする。$p \in \xi$ だから $p_{X-K} = \alpha p$, $(0 \leq \alpha \leq 1)$ と書ける．したがって p は K の内部で harmonic となるから $\mathring{K} \cap C(p) = \phi$, これは $y_1 \in \mathring{K} \cap C(p)$ とむじゅんする。

さて X の任意の点 y はある ξ_i に属するポテンシアルの台になっていることを見よう。$x_0 \in X$ を $x_0 \neq y$ として任意に定めておく。集合

$$A = \{ p : \text{ポテンシアル},\ C(p) = y,\ p(x_0) = 1 \}$$

を考える。これはあきらかに $\mathcal{S}_+(X)$ の中で閉じた凸集合になるが、さらにコンパクであることがわかる。A がコンパクトであることを言うには定理13.5より有界集合であることを言えばよいが，F の位相の定義より．

$$\sup \{ \langle \mu, U^p f \rangle ;\ p \in A \} < \infty$$

が任意の couple (μ, f) に対し成り立つことを言えばよい。ところで $p \in A$ の台が一点 $\{y\}$ であるから

$$U^p f(x) = f(y)\, p(x), \quad \forall x \in X - \mathrm{Supp}[f],$$

となることがわかる。さて Harnack の不等式より．$p \in A$ はすべて $X - \{y\}$ で harmonic となることに注意すれば，ある定数 λ が存在して

$$\sup_{x \in \mathrm{Supp}.[\mu]} p(x) \leqq \lambda\, p(x_0) = \lambda$$

が任意の $p \in A$ に対し成り立つ．ことがわかる．ゆえに

$$\sup \left\{ \int U^p f \, d\mu ;\ p \in A \right\}$$

$$= \sup \left\{ f(y) \int p(x)\, \mu(dx) ;\ p \in A \right\}$$

$$\leqq f(y) \cdot \lambda \cdot \mu(1) < \infty \quad .$$

以上より A は compact convex な集合，（F は局所凸な線形位

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

相空間）だから 端点を持っている。すなわちあるξ_iのポテンシアルPに対し $C(P)=\{y\}$となることがわかった。

$\mathcal{H}_+(X)\ni h$ に対して，その台$C(h)$を点$\{\partial\}$として定めておこう．すると，

$$P\in\xi_i \Rightarrow \text{点 } C(P)\in X \quad ,$$
$$h\in\mathcal{H}_+(X)\Rightarrow C(h)=\{\partial\},$$

だから $S\in\xi_i\cup\mathcal{H}_+(X)$に対し $C(S)$ は $X_\circ$のある一点であると思える。

$S\in\xi_i\cup\mathcal{H}_+(X)$, $x\in X$, $f\in C_c^+(X_\circ-\{x\})$
に対し

$$U^S f(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x=C(S)\in X,\\ f(C(S))\,S(x) & \text{if } x\neq C(S),\end{cases}$$

がわかる．

Proposition 14.1

(a) $\xi_i\cup\mathcal{H}_+(X)$ から $X_\circ$への写像
$$C:\ S\longrightarrow C(S)$$
は連続である．

(b) $S\longrightarrow S(x)$ は $\{S\in\xi_i\cup\mathcal{H}_+(X)\,;\,C(S)\neq x\}$の上の連続函数である。

証 (a) $P_\circ\in\xi_i$ とし．$C(P_\circ)$のコンパクトな近傍をK，$x\in X-K$とする．$C(P_\circ)$で真に正の値をとる連続函数で $X-K$ では 0 となるものをf とする。このとき $U^{P_\circ}f(x)=P_\circ(x)\cdot f(C(P_\circ))>0$。

$\mathcal{V}=\{P\in\xi_i\cup\mathcal{H}_+(X)\,;\,U^P f(x)=f(C(P))\,P(x)>0\}$ は $P_\circ$の近傍（$\xi_i\cup\mathcal{H}_+(X)$ 上に induce された F の位相による）だが，$P\in\mathcal{V}\Rightarrow C(P)\in K$ だから Cは点 $P_\circ$で連続となる。
$h_\circ\in\mathcal{H}_+(X)$ に対しても同じように証明される。

(b) $P_\circ\in\xi_i$ 又は $P_\circ\in\mathcal{H}_+(X)$，$x\neq C(P_\circ)$ とし Gを$X_\circ$での$C(P_\circ)$ の近傍で $x\notin\overline{G}$ なるものとする．$f\in C_c^+(X_\circ-\{x\})$をG上で $f=1$ となるようにとる。

$$\mathcal{V}=\left\{S\in\xi_i\cup\mathcal{H}_+(X)\,;\,\begin{array}{r}|U^S f(x)-U^{P_\circ}f(x)|<\varepsilon,\\ C(S)\in G\end{array}\right\}$$

とおくと $\mathcal{V}$は $P_\circ$ の近傍で $S\in\mathcal{V}\Rightarrow|S(x)-P_\circ(x)|=|U^S f(x)-$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$U^{p_0} f(x)| < \varepsilon$。

注意： 上の (a), (b) より $(u, x) \to u(x)$ が $(\xi_i \cup \mathcal{H}_+(X)) \times X$ 上で 下半連続になること 及び, $C(u) \neq x$ において連続となることがわかる。([11] Proposition 6.9 (c))。

Proposition 14.2 各 $y \in X$ に対し、台を $\{y\}$とするポテンシアル p_y が与えられ、$y \to p_y(x)$は $X - \{x\}$上で連続であるとする。もし $p_y \in \xi_i$ ($\forall y \in X$) ならば $y \to p_y$ は X から ξ_i への連続な写像である.

証. $y_n \to y_0$ とする. $x \neq y_0$, $f \in C_c^+(X - \{x\})$ に対し.

$$U^{p_n} f(x) = f(y_n) p_n(x) \to f(y_0) p_0(x) = U^{p_0} f(x)$$

であり、ただし $p_n = p_{y_n}$, $p_0 = p_{y_0}$ とした また $x = y_0$, $f \in C_c^+(X - \{x\})$ に対し $U^{p_n} f(x) = 0 = U^{p_0} f(x)$ となるから、任意の $x \in X$ と $f \in C_c^+(X - \{x\})$ に対し $U^{p_n} f(x) \to U^{p_0} f(x)$。

いま (μ, f) を couple とすれば $U^{p_n} f$ は $X - Supp[f]$ で harmonic で $U^{p_0} f$ に収束するから, $Supp[\mu]$ 上では一様に収束する (Harnack)。したがって p_n は E で p_{y_0} に収束する.

さて目的の Martin 型表現定理に進もう.

Proposition 14.3. K を $\mathcal{S}_+(X)$ の compact な base とし ν を K 上のラドン測度で K の extreme point 全体 $K \cap E$ に支えられているとしよう。このとき

(a) $\displaystyle\int u\, \nu(du) \in \mathcal{S}_+(X)$,

(b) $\displaystyle\int_{\xi_i \cap K} u\, \nu(du) \in \mathcal{P}$,

(c) $\displaystyle\int_{\xi_b \cap K} u\, \nu(du) \in \mathcal{H}_+(X)$

である.

証. Proposition 14.1 と その後の注意より

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$g(x) = \int u(x)\, \nu(du)$$

は X 上の下半連続函数である。もし、各 $x \in X$ と x の *regular* な近傍 G に対し

(1) $\int H^G u(x)\, \nu(du) < \infty$

が言えたとするなら *Fubini* の定理より (a) と (c) がすぐわかる。(1) は次のようにしてわかる。

点 x_1, x_2 とその近傍 G_1, G_2 を $\overline{G_i} \cap \overline{G} = \phi$, $x_i \in G_i$, $i = 1, 2$ とする。$f \in C_+(X_0)$ を $\overline{G_1}$ 上では $f = 0$, $\overline{G}$ 上では $f = 1$, その他で $0 \leqq f \leqq 1$ となるようにとる。このとき函数

$$h_1^p = \begin{cases} H^G U^p f, & G \text{ 上で}, \\ U^p f, & G_1 \text{ 上で}, \end{cases}$$

は任意の $p \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し $h_1^p \in \mathcal{H}(G \cup G_1)$ となる。同じく

$$h_2^p = \begin{cases} H^G U^p (1-f), & G \text{ 上で}, \\ U^p (1-f), & G_2 \text{ 上で}, \end{cases}$$

は $h_2^p \in \mathcal{H}(G \cup G_2)$ をみたす。したがって *Harnack* の不等式より、ある定数 α が存在して

$$H^G U^p f(x) \leqq \alpha\, U^p f(x_1)$$

$$H^G U^p (1-f)(x) \leqq \alpha\, U^p (1-f)(x_2)$$

がすべての $p \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し成り立つようにできる。ところで $p \to U^p f(x_1)$ 及び $p \to U^p(1-f)(x_2)$ は $\mathcal{S}_+(X)$ 上の連続函数だからコンパクト集合 K 上で有界となっている。したがって

$$H^G u(x) = H^G U^u f(x) + H^G U^u (1-f)(x)$$

$$\leqq \alpha\, U^u f(x_1) + \alpha\, U^u (1-f)(x_2)$$

も $u \in K$ に対し有界だから (1) がわかった。

Fubini の定理より、任意のコンパクト集合 $A \subset X$ に対し

$$I_A = \int_{C^{-1}(A)} u\, \nu(du) \in \mathcal{S}_+(X) \cap \mathcal{H}(X - A)$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

がわかる。ここに $C^{-1}(A)=\{u\in \xi\cap K;\ C(u)\in A\}$。

$I_A\in\mathcal{P}$ を示そう。$A\subset G\subset\overline{G}\subset X$ なる開集合をとる. *Proposition* 14.1 の後の注意より $u(x)$ は $(u,x)\in C^{-1}(A)\times(\partial G)$ の連続函数であり $C^{-1}(A)$ 及び ∂G はコンパクトだから $u(x)$ は $C^{-1}(A)\times(\partial G)\ni(u,x)$ に対し, 二つの正の定数ではさまれた値をとる.

したがって, いま $P_0\in C^{-1}(A)$ を一つとると, ある定数 λ が存在して $P(x)\leqq\lambda P_0(x)$ が任意の $(P,x)\in C^{-1}(A)\times(\partial G)$ に対して成り立つ. $\lambda P_0-P\in\mathcal{S}(X-\overline{G})$ であり、また $P\in\mathcal{H}(X-A)$ だが、とくに $X-G$ で連続だから *Minimum Principle*(定理1.5)より, $X-G$ 上で $\lambda P_0\geqq P$ となる. したがって $x\in X-G$ に対し

$$I_A(x)\leqq\lambda P_0(x)\cdot\nu(C^{-1}(A))。$$

この右辺はポテンシアルだから I_A もポテンシァルになる. さて あきらかに

$$g>I_A$$

だが, I_A はポテンシァルだから $g-h\geqq I_A$ となる. ここに h は g の *Riesz* 分解における *harmonic* 部分である. したがって, A は任意だったから,

$$(2)\quad g-h\geqq\int_{C^{-1}(X)}u\,\nu(du)$$

$$=\int_{\xi_i\cap K}u\,\nu(du)$$

がわかる. 一方

$$\int_{\xi_e\cap K}u\,\nu(du)$$

は *harmonic* であり, h は g の最大な *harmonic minorant* だから

$$(3)\quad h\geqq\int_{\xi_e\cap K}u\,\nu(du)。$$

(2) と (3) より これらはともに等号が成り立たなくてはならない。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

系 14.4 $f \in C_c^+(X_0 - \{x\})$ に対し

$$W^p f(x) = \int_{\xi_i \cap K} f(C(u))\, u(x)\, \nu(du)$$

となる。

Theorem 14.5 (Martin)

K を $\mathcal{S}_+(X)$ の compact base とする。
任意の $u \in \mathcal{S}_+(X)$ は K 上のラドン測度 ν により

$$u(x) = \int s(x)\, \nu(ds), \quad x \in X,$$

と表現される。ν は K の端点 $\xi \cap K$ に支えられ、このような表現は一意的である。

証. Theorem 13.6 より $\xi \cap K$ に支えられたラドン測度 ν があり、

$$u = \int s\, \nu(ds)$$

が E の元として成立つ。したがって $\forall x \in X$ と $\forall f \in C_c^+(X_0 - \{x\})$ に対し

$$U^u f(x) = \int U^s f(x)\, \nu(ds)$$
$$= \int f(C(s))\, s(x)\, \nu(ds)$$

が成立つ。

さて任意の有界可測函数 g に対し $U^u g$ は下半連続であるから、ある X 上の測度 m を選んで $U^u(x, dy)$ が、すべての $x \in X$ に対し、$m(dy)$ に絶対連続となるようにできる。

いま $x \in X$ を $m(\{x\}) = 0$, $p(x) < \infty$, $\nu(\xi \cap K \cap C^{-1}(\{x\})) = 0$ となるような点としよう。そして $f_n \in C_c^+(X_0 - \{x\})$ を $f_n \uparrow 1_{X_0 - \{x\}}$ となるように選ぶ。

このとき

$$u(x) = U^u 1_{X_0 - \{x\}}(x) = \lim \uparrow U^u f_n(x)$$
$$= \lim \uparrow \int \xi(x) f_n(C(\xi))\, \nu(d\xi)$$
$$= \int \xi(x)\, \nu(d\xi)$$

となる。ところが $m(\{x\}) > 0$ 又は $\nu(\xi \cap K \cap C^{-1}(\{x\})) > 0$ と

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

なるような点 x は多くとも可算個であるし、$u(x)=\infty$ となる点 x の集合は Polar set である。

したがって二つの Superharmonic 函数 u と $\int g\, \nu(dg)$ は、いたるところ一致する。

(一意性) $V \in \mathcal{S}_+(X)$ が K 上のラドン測度 μ により

$$V(x) = \int_K s(x)\, \mu(ds), \quad \forall x \in X,$$

と表わされたとしよう。上の系より

$$\mathcal{U}^V f(x) = \int f(c(s))\, s(x)\, \mu(ds)$$
$$= \int \mathcal{U}^s f(x)\, \mu(ds)$$

がしたがう。したがって F 上の任意の線形連続形式 L に対し

$$L(V) = \int L(s)\, \mu(ds)$$

となる。とくに μ が $\mathfrak{S} \cap K$ に支えられるならば 定理 13.6 より μ は一意的に定まる。

§15 Martin 境界。

この節 以後は次の仮定を置く。

(6) $\forall y \in X$ に対し、二つのポテンシアル p, g が $C(p)=C(g)=\{y\}$ をみたすなら、それらは互に比例する。

この仮定のもとに次のことがわかる。証明は [8. Chap. III] 又は [11, §5] を見ていただきたい。

Proposition 15.1 各 $y \in X$ に対して $\{y\}$ を台とするポテンシアル p_y が存在して、

$(x, y) \to p_y(x)$ は 下半連続であり、$x \neq y$ においては連続となっている。

二点 $x_0, x_1 \in X$ を任意に選び固定しておく。x_0 の近傍 δ_0 とコンパクト集合 K_0 を次のようにとる;

$$x_0 \in \delta_0 \subset \overline{\delta_0} \subset \mathring{K_0}, \quad x_1 \in X - K_0 \quad 。$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

また $f_0 \in C_+(X_0)$ を $\mathcal{S}_0$ 上では $f_0 = 0$ $X_0 - K_0$ 上では $f_0 = 1$, その他で $0 < f_0 < 1$ となるように選ぶ。

定理 13.5 (iii) の証明より

$$K_0 = \{S \in \mathcal{S}_+(X) \ ; \ U^S f_0(x_0) + U^S(1-f_0)(x_1) = 1\}$$

は cone $\mathcal{S}_+(X)$ の compact base になっている。

さて 連続函数 $\alpha_0(y)$ を;

$$\alpha_0(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{f_0(y)\,P_y(x_0) + (1-f_0)(y)\,P_y(x_1)}, & y \neq x_0,\ y \neq x_1 \text{ のとき} \\[2ex] \dfrac{1}{P_{x_0}(x_1)}, & y = x_0 \text{ のとき} \\[2ex] \dfrac{1}{P_{x_1}(x_0)}, & y = x_1 \text{ のとき} \end{cases}$$

として定める。

$$\alpha_0(y) \text{ は } y \in X - K_0 \text{ では } \frac{1}{P_y(x_0)} \text{ に等しい。}$$

$\alpha_0(y)$ は真に正である。$\alpha_0(y) P_y \in K_0 \cap \Xi_i$ が計算してみればわかる。 $\alpha_0(y) P_y(x) = k_y(x)$ とおこう。

Proposition 15.1

写像： $y \to k_y$, は X から $K_0 \cap \Xi_i$ への *homeomorphism* になる.

証。 $\Xi_i \cap K_0 \ni P$ は一点を台にするポテンシアルであるから、その点を y とすれば 仮定 (6) より $P = a(y) P_y$ となる。

$P \in K$ だから

$$\begin{aligned} 1 &= U^P f_0(x_0) + U^P(1-f_0)(x_1) \\ &= f_0(y) P(x_0) + (1-f_0)(y) P(x_1) \\ &= a(y)\,(f_0(y) P_y(x_1) + (1-f_0)(y) P_y(x_2)) \end{aligned}$$

したがって $a(y) = \alpha^{-1}(y)$, $P = k_y$ となる.

写像 $P \to C(P)$ は 1 対 1 であることがわかった。

また $k_y \in \Xi_i \cap K_0$ ($\forall y \in X$) だから *bijective* である。

Proposition 14.1 (a) より これは *continuous*.

また *Proposition* 14.2 より逆写像も *continuous*。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

Fの位相は couple (μ, f) に対し
$[u, u'] \to \langle \mu, U^u f - U^{u'} f \rangle$
を連続にする最弱位相として定義されていたが、とくに $\mathcal{S}_+(X)$ 上ではそれは

$$[u, u'] \to U^u f(x) - U^{u'} f(x)$$

を $\forall f \in C_c^+(X_0 - \{x\})$ に対し連続にする最弱位相と一致する。なぜなら $U^{s_n} f(x) \to U^s f(x)$ とすると各項は $X - Supp[f]$ で harmonic だから、そこでコンパクト一様収束する。したがって $Supp[\mu]$ がコンパクト、$Supp[\mu] \cap Supp[f] = \phi$ なる任意の測度 μ に対して $\langle \mu, U^{s_n} f \rangle \to \langle \mu, U^s f \rangle$ となる。

このことに注意すると $\mathcal{S}_+(X)$ の部分集合 $\mathcal{A}$ に対し、

$$\left\{ (s, t) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \,;\, \begin{array}{l} |U^s f_j(x_j) - U^t f_j(x_j)| < \varepsilon \\ 1 \le j \le n \end{array} \right\},$$

ここに $f_j \in C_c^+(X_0 - \{x_j\})$、は $\mathcal{A}$ 上へ induce された F 上の uniformity の基本被覆系になっており、それにより定まる $\mathcal{A}$ 上の位相は、$\mathcal{A}$ 上に induce された F の位相と一致する。そして（Fの中での）$\mathcal{A}$ の閉包は この uniformity による $\mathcal{A}$ の完備化と一致する。（Theorem 13.5）。

さて X 上の uniformity $\mathcal{U}^*$ を $\Xi_i \cap K_0$ 上の uniformity の写像 $y \to k_y$ の逆像として定義する。すなわち $\mathcal{U}^*$ は $y \to k_y$ を一様連続にするような X 上の uniformity で最弱 (the coarest) のものである。

$$\left\{ (y_1, y_2) \in X \times X \,;\, |f_j(y_1) k_{y_1}(x_j) - f_j(y_2) k_{y_2}(x_j)| < \varepsilon, 1 \le j \le n \right\},$$

ここに $f_j \in C_c^+(X_0 - \{x_j\})$，$\varepsilon > 0$，は $\mathcal{U}^*$ の基本被覆系になっている。

一様構造 $\mathcal{U}^*$ より導かれる X 上の位相は $\Xi_i \cap K_0$ 上の位相の写像 $y \to k_y$ による逆像であるから Proposition 15.1 より X のもともとの位相と一致している。また $y \to k_y$ が bijection だから $\Xi_i \cap K$ 上の一様構造の任意の被覆（entourage）は $\mathcal{U}^*$ に属す被覆の像になっており、したがって X と $\Xi_i \cap K_0$ は一様空間として isomorphic になり、とくに $k_y \to y$ も一様連続である。（[4], Chap

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

II, 2.4)。

X^*を$\mathcal{U}^*$によるXの完備化とすると（[4], Chap II, 3.6）よりX^*と$\overline{\xi_i \cap K_\circ}$は一様空間としてisomorphicになる。とくに位相空間としてhomeomorphになり、写像$y \to k_y$はX^*上へ連続に拡張される。それを$\xi \to k_\xi$, $\xi \in X^*$, と書こう。

定理 15.2 (1) X^*はXのcompactificationである。
(2) $\xi_\ell \cap K_\circ \subset \{k_\xi ; \xi \in X^* - X\} \subset \mathcal{P}_e \cap K$.
(3) $\xi \to k_\xi(x)$は$X^* - \{x\}$で連続になる。

証. (2) $\xi_\ell \cap K_\circ \ni u$とする。$u$はcompact convex set $K_\circ$のextreme pointだから、Bourbaki [ ], p108, の命題よりFの中のopenな半平面でuを含むものの$K_\circ$上へのtraceの全体を考えると、それはKでのuの基本近傍系をつくっている。そのような近傍の一つを

$$v = \{S \in K ; \varphi(S) > \alpha\}$$

としよう。ここにφはF上の0でない連続線形形式で、$\alpha > 0$。さてProposition 3.8より$\exists\, p_n \in \mathcal{P}$, $p_n \uparrow S$ だが実はp_nはFでSに収束する。なぜなら任意のcouple (μ, f)に対して

$$\sup_n \int U^{p_n} f \, d\mu \leqq \int U^S f \, d\mu < \infty$$

だから$\{p_n\}$は有界集合だがTheorem 13.5より相対コンパクトになる。したがってある部分列$\{p_m\}$は

$$\widehat{\liminf_{m \to \infty}}\ p_m = \sup p_m$$

に収束する。これより$\{p_n\}$が$\sup p_n = S$に収束することがわかった。以上より$\exists\, g \in \mathcal{P} \cap v$がわかった。ところが、$g$は

$$g = \int u \ \nu(du)$$

と$K_\circ$上の確率測度νで$\xi_i \cap K_\circ$に支えられているもので表現されるから

$$\alpha < \varphi(g) = \int \varphi(u) \ \nu(du).$$

もし$\xi_i \cap v = \phi$ ならば 右辺 $\leqq \alpha$ で 矛盾するから$\xi_i \cap v \neq \phi$。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

したがって Sに収束する $\Xi_i \cap K_0$ の元の列があることがわかった．
すなわち $S \in \overline{\Xi_i \cap K_0}$， $S \in \{k_\xi ; \xi \in X^* - X\}$。

次に k_ξ ; $\xi \in X^* - X$，は k_{y_n}，$y_n \in X$，で，$\{y_n\}$ は X内に集積点をもたないような収束列，の極限である。ところが 十分大なる n に対して k_{y_n} は X の相対コンパクトな開集合内で *harmonic* となる。また そこで一様に収束する．したがって k_ξは Xで *harmonic*。

(3) *Proposition* 14.1 (b) より $S \to S(x)$ は $S \in \Xi_i \cup \mathcal{H}_+(X)$, $x \neq C(S)$，で連続である。ところが (2) より $\{k_\xi, \xi \in X^*\} \subset \Xi_i \cup \mathcal{H}_+(X)$ だから

$$k_\xi \to k_\xi(x)$$

は $(\Xi_i \cup \mathcal{H}_+(X)) \cap K_0$ の上で $\xi \neq x$ のとき連続．一方 $\xi \to k_\xi$ は *homeomorphism* だから連続である．したがって $\xi \to k_\xi(x)$ は $\xi \neq x$ で連続になる。

注： $(x, \xi) \to k_\xi(x)$ は $X \times (X^* - X)$ 上で連続である．
$(x, \xi) \to k_\xi(x)$ は $X \times X^*$ 上で 下半連続である．

系 14.3 ～ 定理 14.5 より

Proposition 15.3. νをX^*上のラドン測度とするとき
$$\int k_\xi \, \nu(d\xi) \in \mathcal{S}_+(X)。$$
もし ν が $\Delta = X^* - X$ に支えられているならば これは $\mathcal{H}_+(X)$ に属す．

$$\Delta = X^* - X$$
$$\Delta_1 = \{\xi \in X^*, \ k_\xi \in \Xi_e \cap K_0\}$$

とおくとき

定理 15.4 任意の $S \in \mathcal{S}_+(X)$, $(h \in \mathcal{H}_+(X))$ は $\Delta_1 \cup X$の $(\Delta_1$の$)$ 上に支えられたラドン測度で
$$S = \int k_\xi \, \nu(d\xi)$$
$$\left(h = \int k_\xi \, \nu(d\xi)\right)$$
と一意的に表現される。ν の 全変動は
$$\nu(X^*) = U^S f_0(x_0) + U^S(1 - f_0)(x_1)$$
である。

Sem. on Probab.
Vol.34　1971年
P1-97

第5章　あ と が き

§16. Minimal fullsuperharmonic functions

§7において fullharmonic 構造 $\widetilde{\mathcal{H}}_0$を導入した。これについてもう少し述べよう。

$D \in \mathcal{D}$ に対し、D 上の Superharmonic 函数 u が minimal fullsuperharmonic on D であるとは u が次の条件をみたすときを言う。

(d) 任意の $X-K \subset D$となる外から regular なコンパクト集合 K と任意の $f \in C(\partial K)$ に対して

$$f \leqq S \text{ on } \partial K \Rightarrow \overline{H}^{X-K} f \leqq S \text{ on } X-K.$$

これより Proposition 6.5 は、Sが D 上で minimal full superharmonic で、$\forall y \in \partial D$ に対し

$$\liminf_{D \ni x \to y} S(x) \geqq 0 \quad \text{ならば} \quad S \geqq 0,$$

と言いかえることができる。また Proposition 6.6 より

Proposition 16.1. D 上の非負 superharmonic 函数は すべて minimal full superharmonic である。

$D \in \mathcal{D}$ に対し D 上の full superharmonic 函数全体を $\widetilde{\mathcal{S}}(D)$ で表わす。全空間 X に対しては

$$\widetilde{\mathcal{S}}(X) = \widetilde{\mathcal{S}}_+(X) = \mathcal{S}_+(X)$$

となることがわかる。([11])。

§9と同様にして、$G \in \mathcal{D}$ と $p \in \mathcal{S}_+(X)$ に対し

$$\widetilde{\mathcal{B}}_G(p) = \left\{ u \in \widetilde{\mathcal{S}}_t(X) = \mathcal{S}_+(X) \;;\; \begin{array}{l} \text{ある } t \in \widetilde{\mathcal{S}}(G) \text{ に対して} \\ G \text{ 上で } u = p + t \text{ となる。} \end{array} \right\}$$

とおく。また

$$\widetilde{P}_G = \inf \{ u \;;\; u \in \widetilde{\mathcal{B}}_G(p) \}$$

とおく。このようにして §9 の議論をくりかえすことができる。こちら

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

の方が本質的と思える点や また Green 函数の構成等において、P_G をあつかうより $\widetilde{P_G}$ をあつかう方が、結果は同じものが得られるが より簡単に議論できる点がある。（Herve [8], Chap III と筆者 [11] §5とくらべればその点がわかる。）

$\mathcal{S}_+(X) \ni S$ を $S = P + h$ と $P \in \mathcal{P}$, $h \in \mathcal{H}_+(X)$ に Riesz 分解するとき

$$\widetilde{S}_G = S_G + h = P_G + h = \widetilde{P}_G + h$$

となることがわかる。とくに $\widetilde{h}_G = h$, $h_G = 0$ である。

このnoteも fullharmonic 構造をいたるところで用いているが minimal なそれであるので、表に出さずに議論することができた。さて minimal ということを説明しよう。

fullharmonic 構造が与えられたとき、外から regular なコンパクト集合Kに対し $X-K$ は このfullharmonic 構造で regular となることを §7で注意した。そこで二つのfullharmonic 構造 $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ に対し、

$\widetilde{\mathcal{H}}_1 \succ \widetilde{\mathcal{H}}_2$ を 任意の外から regular なコンパクト集合Kと任意の $f \in C_+(\partial K)$ に対し

$$\widetilde{H}_1^{X-K} f \geqq \widetilde{H}_2^{X-K} f \quad \text{on} \quad X-K$$

なることと定義する。ここに $\widetilde{H}_i^{D}\varphi$ とは $\varphi \in C(\partial D)$ の D上への $\widetilde{\mathcal{H}}_i$ - fullharmonic な 拡張であった（§7）。

今 $\widetilde{\mathcal{H}}$ を一つの fullharmonic 構造とする。
Kを外から regular なコンパクト集合，$f \in C_+(\partial K)$，とする。

$$u = \widetilde{H}^{X-K} f$$

は $X-K$ 上で harmonic であり

$$\liminf_{X-K \ni y \to x} u(y) = \lim u = f(x) \quad \forall x \in \partial K,$$

$$\liminf_{X-K \ni y \to \{\partial\}} u(y) \geqq 0$$

だから $u \in \mathcal{V}(f, X-K)$ である（§5）。

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

したがって
$$\widetilde{H}^{X-K} f \geqq \overline{H}^{X-K} f$$
となる。これより $\widetilde{\mathcal{H}}$。は minimal な fullharmonic 構造である。

§17 Green の公式

我々の議論は第4章以後は $1 \in \mathcal{S}_+(X)$ を使わず行なわれたことに注意しよう。

次のようにして $\mathcal{H}$ に adjoint な harmonic 構造 $\mathcal{H}^*$ を導入する。

定義　開集合 G が C.d. (completement determinant) であるとは；

G 相対コンパクト，

$\forall p \in \mathcal{P}$, harmonic on G, に対して
$$R^{X-G} p = p$$
となることである。

仮定(7)　C.d. set よりなる topology の base がある。

さて G, open, $y \in G$ に対し $\hat{R}^{X-G} p_y$ は $X - \overline{G}$ 及び G 上において harmonic なポテンシァルであるから ∂G 上の measure $\sigma_y^G(dz)$ により
$$\hat{R}^{X-G} p_y(x) = \int p_z(x) \quad \sigma_y^G(dz)$$

定義　G open 上の 函数 h^* が $*$-harmonic

$\Leftrightarrow$ (1) $h^* \in C(G)$

(2) $\forall U$ C.d. set, $\overline{U} \subset G$, と $\forall y \in U$, に対し
$$h^*(y) = \int h^*(z) \quad \sigma_y^U(dz).$$

このように G 上の harmonic function を定義すれば Brelot の公理 (1) (2), (3) をみたす harmonic Sheaf $\mathcal{H}^*$ の存在が言える。

又 $\mathcal{H}^*$ に対し 仮定(4)もみたされており、とくに $y \to p_x^*(y) = p_y(x)$ は 各 $x \in X$ に対し y の函数として $*$-potential でありまた

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$X-\{x\}$ 上で $*$-harmonic になる。

$\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}^*$ に関係して次の公式は重要である。

$u^* \in \mathcal{S}^*_+(X)$ と $y \in X$ に対し E 上への reduced function を $R^{*E}u^*(y) = \inf\{S^*(y) ; S^* \in \mathcal{S}^*_+(X) ; S^* \geqq u^* \text{ on } E\}$ と定義すれば，

$$\hat{R}^E p_y(x) = \hat{R}^{*E} p^*_x(y)$$

が成り立つ。（これは確率論的には Hunt の Markov process and Potentials, part III, で導かれている。）

さて $*$-potential で同じ一点を carrier とするものが比例する（仮定（6））ためには次の仮定（8）が必要である。

（8）X の任意の点は polar である。

以上の仮定の下に 4 章の議論は adjoint に対しても完全に平行になされる。

定理 15.2 も適用され adjoint な Martin 境界が得られる。

以下において次のように記号を定めよう。

$\overline{X}$ 定理 15.2 の Martin 境界

$\Delta = \overline{X} - X$

$\Delta_1 = \{\xi \in \Delta : k_\xi \in \xi_b \cap K.\}$

$\overline{X}^*$ dual な Martin 境界

$\Delta^* = \overline{X}^* - X$

$\Delta^*_1 = \{\eta \in \Delta^* ; k^*_\eta \in \xi^*_b \cap K^*_0\}$

但し

$K^*_0 = \{S^* \in \mathcal{S}^*_+(X) ; \ U^{S^*} f_0(x_0) + U^{S^*}(1 - f_0)(x_1) = 1\}$

である。

Ⓗ - kernel

$x \in X$, $\xi \in \overline{X}$ に対し

Ⓗ $(x, \xi) = \alpha^*(x) k_\xi(x)$,

$$\text{とくに、} = \frac{k_\xi(x)}{p^*_x(x_0)} \quad (x \in X - K_0)$$

また $\eta \in \overline{X}^*$, $y \in X$ に対し

Ⓗ $(\eta, y) = \alpha(y) k^*_\eta(y)$,

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\text{とくに}, \; = \frac{k_\eta^*(y)}{P_y(x_0)} \quad (y \in X - K_0 \text{ のとき})$$

として Ⓗ(・, ・) を定義する。

$\eta \in \Delta^*$, $\xi \in \Delta$ に対する定義は次のようにする。

$$f_K^\xi(\eta) = \int_{\partial K} k_\eta^*(z)\, \nu_\xi^K(dz) \quad (\eta \in \overline{X}^*)$$

とおく。ただし ν_ξ^K は

$$\hat{R}^K k_\xi(x) = \int_{\partial K} P_z(x)\, \nu_\xi^K(dz)$$

より定まる ∂K 上の測度。

$f_K^\xi(\eta)$ は 下半連続な函数で K の内点では Ⓗ(η, ξ) と一致している。また $K \subset K'$ に対し $f_K^\xi(\eta) \leqq f_{K'}^\xi(\eta)$ となる。そこで

$$Ⓗ(\eta, \xi) = \lim_{K \uparrow X} \uparrow f_K^\xi(\eta), \quad \eta \in \overline{X}, \; \xi \in \Delta$$

と定義する。

定義 (1) $E \subset X$ が thin at $\xi \in \Delta$

$\Leftrightarrow$ $\exists \mu$ measure on X such that

$$\liminf_{E \ni y \to \xi} \int k_y(x)\mu(dx) > \int k_\xi(x)\mu(dx) .$$

(2) G が $\xi \in \Delta$ の fine neighborhood

$\Leftrightarrow$ $X - G$ thin at ξ。

定理 (Naim)

(1) $u \in \mathcal{S}_+(X) ; = \int_{X \cup \Delta_1} k_\xi \, \mu(d\xi)$

と $\eta \in \Delta_1^*$ に対し

$$*\text{-fine limit}_{x \to \eta} \frac{u}{P_{x_0}}(x) = \liminf_{x \to \eta} \frac{u}{P_{x_0}}(x) = \int_{X \cup \Delta_1} Ⓗ(\eta, \xi)\mu(d\xi)$$

(2) $u^* \in \mathcal{S}_+^*(X) ; = \int_{X \cup \Delta_1^*} k_\eta^* \, \mu^*(d\eta)$

と $\xi \in \Delta_1$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

$$\text{fine limit}_{y \to \xi} \frac{u^*}{P^*_{x_0}}(y) = \liminf_{y \to \xi} \frac{u^*}{P^*_{x_0}}(y) = \int_{X \cup \Delta_1^*} \text{Ⓗ}(\eta, \xi)\, \mu^*(d\eta)$$

定義．

$u \in \mathcal{P}$, $u^* \in \mathcal{P}^*$ のとき 上式 (1)．(2) の値を $D_n u(\eta)$, $\eta \in \Delta_1^*$,

$$D_n^* u^*(\xi), \quad \xi \in \Delta_1$$

と書く。（添字 n は normal derivative のつもり。）

定理

$$D_n P_y(\eta) = k_\eta^*(y),$$

$$D_n^* P_x^*(\xi) = k_\xi(x)。$$

（P_y の Δ_1^* での normal 方向微分が k_η^* で，P_x^* の Δ_1 での normal 方向微分が k_ξ に注意。）

定理（Green の公式）

$$p^* \in \mathcal{P}^*; = \int P_y^* \, \nu^*(dy)$$

$$h \in \mathcal{H}_+(X); = \int_{\Delta_1} k_\xi \, \mu(d\xi)$$

とすると

$$\int_X h(x)\, d\nu^*(x) = \int_{\Delta_1} D_n^* p^*(\xi)\, \mu(d\xi),$$

これと dual に

$$p = \int P_y \, \nu(dy)$$

$$h^* = \int_{\Delta_1^*} k_\eta^* \, \mu^*(d\eta)$$

に対して

$$\int_X h^* \, d\nu = \int_{\Delta_1^*} D_n p(\eta)\, \mu^*(d\eta)。$$

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

§18 雑 Sheaf Cohomology

(1) 解析函数の理論において 次の Silva－Köthe－Grothendieck の定理は基本的である。

$\mathcal{O}$を複素直線 $\mathbb{C}$ の上の正則函数のつくる Sheaf とし、開集合 V に対し その上への Section を $\mathcal{O}(V)$ と表わし、$\mathcal{O}(V)$ は V 内のコンパクト一様収束の位相で考える。またコンパクト集合 K に対し $\mathcal{O}(K) = \varinjlim_{V \supset K} \mathcal{O}(V)$ と書く。このとき $\mathcal{O}(K)$ の dual space は

$$\mathcal{O}(K)' = H^1_K(\mathbb{C}, \mathcal{O})$$

である。ここに 右辺は K 内に台をもつ1次の相対コホモロジー群である。この duality は $\Phi \in \mathcal{O}(K)'$ に対し、

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \Phi_t\left(\frac{1}{t-z}\right), \quad z \in \mathbb{C} - K,$$

として、$\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - K)$ の Cohomology class $[\varphi] \in \frac{\mathcal{O}(V-K)}{\mathcal{O}(V)} = H^1_K(V, \mathcal{O})$ を対応させて、

$$\begin{aligned}
\langle f, [\varphi] \rangle &= -\int_{\Gamma} f(z)\varphi(z)\,dz \\
&= -\int_{\Gamma} f(z) \frac{1}{2\pi i} \Phi_t\left(\frac{1}{t-z}\right) dz \\
&= \Phi_t\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)\frac{1}{t-z}\,dz\right) \\
&= \langle f, \Phi \rangle, \quad f \in \mathcal{O}(K),
\end{aligned}$$

として、得られる。ここに V は K の開近傍であり、Γ は f の定義域と V の共通部分に含まれる閉曲線である。

B. Walsh は これに類似の結果を Brelot の harmonic sheaf に対し、証明した。筆者はまだ、くわしく読んでいないが

$$(\mathcal{H}^*(K))' = H^1_K(X, \mathcal{H}),$$

$$(\mathcal{H}(K))' = H^1_K(X, \mathcal{H}^*)$$

となるのだと思っている。 Walsh はこの duality を与えるのに flux functional を導入している。我々は §17 において

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

normal derivative に相当するものを導入しているので、すぐ上に述べたように微分構造に関係した事も（微分構造のないところに）拡張できると思う，（Walsh はそのようにしていないが）。この方面へのポテンシャル論の展開は最重要であろう。

(ロ) 我々はふれなかったが Mokobodzki − Sibony の一連の仕事 巻末文献、を調べてみる必要があるだろう。

あとがき

第一章 §1〜4 は H Bauer [1] にしたがった。§5. 6 は P. Loeb [13] にしたがった。Proposition 5.3 及び 6.5 は筆者による。

第二章は 筆者による。一章 §5.6 の Loeb の結果が自然に full-harmonic 構造を与え、それは minimal であり（§16），さらに Meyer により Brelot の harmonic 構造に対し 構成された resolvent の値域を特徴づけており、この resolvent が "minimal な resolvent" らしきものを与えていると言われていたが、その内容をはっきりさせた・事に注意しよう。

第三章 §9 は Hervé による。§10 は Boboc, Constantinescu, Cornea [3] 及び Hausen [10]。Proposition 11.1 と Lemma 11.2 は筆者による。§12 は Meyer により最初扱われたものと同じ内容であるが より見通しよく、次に述べるように一般化されている。それは Lemma 12.4 と Banach 空間の列 E^n を考えたためである。

Meyer [18] では各 regular な相対コンパクト開集合上で killing した process のリゾルベントをつくり、それをひろげていっている。が、この方法は Bauer の axion に対しては適用できない。それは Boboc, Constantinescu, Cornea [2] Hansen [9] による方法で解決された。この場合，superharmonic 函数の言葉で言えば（Hansen は excessive 函数の言葉で言ってるが）

$$\lim_{K\uparrow} \downarrow \inf \{ t \in \mathcal{S}_+(X),\ t \geqq s \text{ on } X-K \} = 0$$

を本質的に使っており，Semigroup of kernels の構成までできている。我々の方法は さらに full harmonic 構造に対し resolvent をつくるとき（[11]）にも適用できるが、このとき，上の条件はふつう

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

(minimal fullharmonic 構造以外では)みたされない。その意味で 我々の方法(Lemma 12.4と 空間列 E^n) は 上記の人達の方法より一般である. しかし Semigroup of kernels を作ることを含んでいないし. minimal な場合をのぞけば それはできないだろう。また 我々の方法はリゾルベントの値域を特徴づける方法を与えている.

第四章の Martin 表現定理を Choquet の理論により与えることは Herve [8]により為された。$F = [\mathcal{S}_+(X)]$ 上の局所凸な topology は Herve により導かれた。T-topology と呼ばれている. ここで採用した F が 核型空間になることより出発する方法は筆者による(未発表12)。しかし 線形位相空間論的にすべてができるのではなく、Herve による Lemma 13.3 は本質的でありポテンシャル論的である. なお Loeb-Walsh [14]は $\mathcal{H}(X)$ が T-topology on $\mathcal{H}(X)$ = Compact 一様収束位相により nuclear になることを示している。§15 は筆者による。$\mathcal{S}_+(X)$ の Compact base 上の Choquet の表現定理と、X の完備化を使う Martin の方法とは全く同じであると 以前から誰も思っていただろうがこのように対応づけられているのを筆者はまだ見たことがない。Bauer の Hamburg のノートにも単体円の場合以外はきっちり書いてなかったように思う。それは定理 15.2 の(2)の前半の証明が(認識が)はっきりとされていなかったせいだと思うし、この証明は純粋に線形位相空間論的であるためであろう。§17. 18 に関連して Tillmann [21] の古典的な結果がある. Walsh [23] の §18 の内容もそれに依るのだと思う。[21]は佐藤超函数論の発生とも関係していそうだし面白い.

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

文　献　表

(1) H. Bauer : Harmonische Räume und ihre Potential theorie, Lecture Notes in Mathematics, Springer

(2) Boboc, Constantinescu and Cornea : Semigroups of transitions on harmonic spaces, Revue Roumaine Math. Pures et appl. (1967)

(3) ________ : Axiomatic theory of harmonic functions, Non-negative superharmonic functions, Ann. Inst. Fourier 15 (1965)

(4) Bourbaki : General topology

(5) ________ : Espaces vectorielles topologiques

(6) Constantinescu and Cornea : Ideale Ränder der Riemannschen Flächen, Springer

(7) ________ : On the axiomatic of harmonic functions I, Ann. Inst. Fourier 13 (1963)

(8) Hervé : Rechérchés axiomatiques sur la theorie des fonctions surharmoniques, Ann. Inst. Fourier 12 (1962)

(9) Hansen : Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen, Inv. math. 3 (1967)

(10) ______ : Charakterisierung von Famillien exzessiver Funktionen, Inv. math. 5 (1968)

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

(11) Kori : Axiomatic theory of non-negative fullsuperharmonic functios (to appear)

(12) 郡 : 数理解析研究所講究録 112 「マルコフ過程論」の中の二報告

(13) Loeb : An axiomatic treatment of pairs of elliptic differential equations, Ann. Inst. Fourier 16 (1966)

(14) Loeb and Walsh : Nuclearity in axiomatic potential theory Bull. Amer. Math. Soc. 72

(15) ________: The equivalence of Harnack's principle and Harnack's inequality, Ann. Inst. Fourier 15 (1965)

(16) Maeda : Axiomatic treatment of full-superharmonic functions, J. Sci. Hiroshima Univ. 30 (1966)

(17) Meyer : Probabilités et potentiel, Hermann

(18) ________: Brelot's axiomatic theory of Dirichlet problem and Hunt's theory, Ann. Inst. Fourier 13 (1963)

(19) Mokobodzki et Sibony : Théorie globale du potentiel,
C. R. A. S tom 263 pp. 126
264 pp. 15
pp. 238
pp. 506
265 pp 21
pp 102
266 pp. 714

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

(20) Phelps : Lectures on Choquet's theorem

(21) Tillmann : Dualitat in der Potentiel Theorie, Port. Math. 13 (1954)

(22) Hunt : Markov processes and potential

(23) Walsh : Flux in axiomatic potential theorie, Homology, Inv. Math. (1969)

(24) ______ : ____________________ , Duality, Ann Inst Fourier 19 (1970)

(25) Mokovodzki : Cone de potentiels et noyaux subordonnés, Centro Internasionale Matematico (1970)

Sem. on Probab.
Vol.34 1971年
P1-97

1971年6月発行　確率論セミナー