Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

撞 球 問 題

ある粒子系のエルゴード性について

久 保 　 泉

Seminer on Probability Vol. 37

論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

撞 球 問 題

ある粒子系のエルゴード性について

久 保 泉

Seminer on Probability Vol. 37

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

まえがき

このノートは，1972年名古屋大学大学院の講義のために用意したノートに多少手を入れたものである．エルゴード理論の知識を仮定せず，積分論だけを前提として Sinai の撞球問題のエルゴード性の証明をすることを意図したため，すでにエルゴード定理を知っている方にとっては，導入部が冗長であると感じられるかもしれない。しかし，"Sinai の撞球問題"のエルゴード性の証明のために必要なエルゴード理論の道具は，1930年代はじめの Birkhoff の個別エルゴード定理 [4] と，1930年代おわりの Hopf の transversal foliations を使う方法 [5] の二つだけであることを，印象づけるためにもこのような形態にした．

ついでに，注意しておきたいのだが，Sinai の撞球問題から二粒子系のエルゴード性の証明への移行のためには，やはり1930年代の Neumann [9] によるスペクトル理論があれば十分である．また，エルゴード性より一歩進んで K-system であることを示すには，1961年の Rohlin-Sinai [10] の定理が必要で十分である。

もとのノートから手直しした主な点は次の二点である．説明が言きにくいか，もしくは繁雑でノートから証明を省いた所の説明を Appendix で追加したこと．第二は，Appendix 9 で解説するが，ちょっとした拡張をするとき平行して議論できる形にしていた場所を，我々の系

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

固有な事実をより多く使う形にしたことである．それは主に§6と§7に関してである。

本文では触れないので，ここに記しておくが，撞球問題を始めて着目し，それが，その時まで知られていたコンパクト，負曲率空間の測地的 flow と本質的に同じだと認識したのは Sinai [11] であった．残念ながらその論文は完全ではなかった．続いて，Sinai は [12] でもって，中心力ポテンシャルをもつ多粒子系のエルゴード性を主張するが，それは証明が付されていなかったが，その頃 Anosov と共に詳しく調べていた，コンパクト負曲率空間の測地的 flow の研究に確信を裏づけられてのことだったと思われる。その後，[13] を著わし，エルゴード性を証明する唯一の一般的方法＝Hopf による方法＝を，まさに，一般論につくりあげ，エントロピーの計算，K-system であることの検証に有効であることを示した．これ等の仕事の紹介と [11] を多少前進させることは著者 [7] に記しておいた．より幾何学的な set up としては Anosov = Sinai の共同の仕事により C-system の研究 [3] へと発展していった．

そうして，Boltzmann，Maxwell の統計力学の研究からちょうど100年程経た1970年 Sinai [14] がやっと，統計力学に現われる最も単純な系に対してエルゴード性を証明するのに成功した．ただし，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

それは，多少の不充分な点と，ノートの混乱によるとみられる，本質的ではないが，基本的であって実は初等的な *miss print* を含んでいる。更に，彼自身のいくつかの結果を仮定するので，読みにくい。このノートは，それらを訂正したが，反面長すぎて，読むのをためらわせる結果になったとすれば，私としては残念である。

最後に，引用文献はできるだけ少くして，みやすくした。その代り文献年表をつけたので，歴史的発展の様子はそれをみて頂きたい。著者の不勉強ゆえに，今世紀前半および前世紀の文献が不充分であることをおわびする。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

目次

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

撞球問題

第I章 序

§1. エルゴード定理

100年程前，力学から熱力学を導くことが，Boltzmann，Maxwellを中心として物理＝数学者の手によって精力的になされた．我々の手にする物質は多くの分子の集まりで，その状態は力学によって規定されているはずである．しかし我々が実際に観測する物質の性質——特に熱的性質——は力学的な性質とは相容れない面がある．その異質な面を乗越えて多粒子系における総体的量＝平均量に着目することにより，熱学を説明しようとするのが統計力学である．統計力学を正当化する為に幾つか仮説が提唱された．そのうち一つがエルゴード仮説であった．

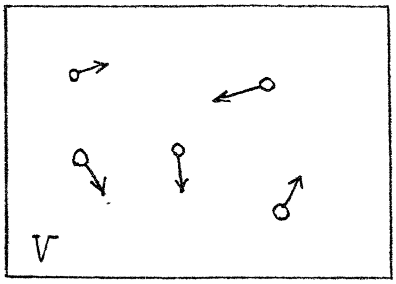
エルゴード仮説とは“時間平均と相平均が一致する”という仮説であるが，特殊な系を除外すれば，成立すると想像される事柄である．実際には，逆に特殊な系に対してしか示されていない．この講義で紹介するSinaiの撞球問題はその数少ない例のうち最も，本来の目的に必要な系である．

今箱Vに閉じこめられたNヶの粒子系の運動は

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$m_i \quad (1 \le i \le N)$

を質量



$\underline{q}_i = (q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}),\ 1 \le i \le N$

$\underline{p}_i = (p_{3i-2}, p_{3i-1}, p_{3i}),\ 1 \le i \le N$

をそれぞれ位置および運動量とするとき，Hamiltonian

(1.1) $$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} \|p_i\|^2 + U(q)$$

ただし $U(q)$ は相互作用のポテンシャル

を使って，運動方程式

(1.2) $$\begin{cases} \dfrac{dp_j}{dt} = -\dfrac{\partial}{\partial q_j} H \\ \dfrac{dq_j}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial p_j} H \end{cases}$$

で記述される．

相空間 $\overline{X} = \{(q, p);\ q \in V^N,\ p \in R^{3N}\}$ の点 (p, q) に対して，(q, p) を初期値とする (1.2) の解を (q_t, p_t) としよう．変換 $\{S_t\}$ を

(1.3) $$S_t(q, p) \equiv (q_t, p_t)$$

で定義する．常微分方程式の解の一意性から，

(1.4) $$S_{t+s} = S_t S_s$$

を充たすことに注意しておこう。相空間 $\overline{X}$ 上の測度 $\bar{\mu}$ を

(1.5) $$d\bar{\mu}(q, p) = dq\, dp$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

で与えると，Liouville の定理により，$\bar{\mu}$ は $\{S_t\}$-不変である。

また，Hamiltonian H は (1.2) の第一積分である．すなわち，

$H(q,p)$ は $\{S_t\}$-不変な函数である。そこで，定数 E を与えたとき，

エネルギー曲面

$$X = X_E = \{(q,p);\ H(q,p) = E\}$$

は $\{S_t\}$-不変である．また，X 上の測度 $\mu = \mu_E$ は

(1.6) $$d\mu(q,p) = c\,(E - U(q))^{\frac{3}{2}N-1}\,dq\,d\omega_{3N-1}$$

ただし，$d\omega_{3N-1}$ は 3N-1 次元球面の一様測度であり

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m_1}}\underline{\underline{p}}_1, \frac{1}{\sqrt{m_2}}\underline{\underline{p}}_2, \cdots, \frac{1}{\sqrt{m_N}}\underline{\underline{p}}_N\right) = \sqrt{2E - 2U(q)}\ \omega_{3N-1}.$$

また

$$d\bar{\mu} = d\mu_E\, dE\ 。$$

$\{S_t\}$ の X_E への制限を再び $\{S_t\}$ と記せば，μ_E は $\{S_t\}$-不変な測度である．ここでエルゴード仮説を述べよう．

エルゴード仮説： $(q,p) \in X_E$ ならば

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\int_{-N}^{N} f(S_t(q,p))\,dt = \frac{1}{\mu_E(X_E)}\int_{X_E} f(q,p)\,d\mu_E\ .$$

我々の得たい結果は，いかなるポテンシャルに対してこの仮説が成立するかということである。もちろん，(1.2) が H 以外に第一積分をもてば，このままでは成立しない。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

注意．幾つかの第一積分が存在する場合には，それらが一定値をとる曲面の上で同種の仮説を考えるのが普通だが，あとに述べるように第一積分の定義いかんによっては，無意味な問題となる。

ところで，具体的な系に対して，エルゴード仮説を検証することは非常に難しいことであって，むしろ抽象化された形での結果が早く得られた。

今世紀初め，Lebesgue 積分の確立と共に次のように定式化された．

$(X, \mathfrak{F}, \mu)$ をある確率空間，すなわち，$\mathfrak{F}$ は X 上の σ-field，μ は全測度 1 の $\mathfrak{F}$ 上の測度とする．$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ および $\mathcal{R}$ で実数空間とその上の Borel field を表わす．

$\{T_t\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ が X 上の 1:1 点変換の系で次の条件を充たすとき，力学系（dynamical system）という．

(i) $T_t T_s = T_{t+s}$

(ii) T_t ; bimeasurable，保測

i.e. $T_t \mathfrak{F} = T_t^{-1} \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$，$\mu(T_t A) = \mu(A)$，$A \in \mathfrak{F}$

(iii) $(t, x) \to T_t x$: 可測．

このとき，エルゴード問題とは，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^{N} f(T_t x)\,dt = \int f\,d\mu \quad ?$$

である．この問題は1930年頃，Birkhoff [4]，Neumann [8] 等によって解かれた．ここではBirkhoffの個別エルゴード定理とその簡単な証明を紹介しよう．まず，記号を導入しておこう．集合族$\mathcal{J}$を次のように定義する：

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}\{T_t\} \equiv \{A \in \mathcal{F};\ \mu(T_t A \ominus A) = 0,\ \forall t\}.$$

<u>Theorem 1.</u> (Birkhoff)

$f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$に対して，

(i) 次の極限が存在する（殆どすべてのxで）

$$\lim_{N\to\pm\infty} \frac{1}{N} \int_0^N f(T_t x)\,dt \equiv \bar{f}^{\pm}(x) \qquad a.e.\ (\mu)$$

(ii) $\bar{f}^{+}(x) = \bar{f}^{-}(x) \quad a.e.\ (\mu)$

$\bar{f}^{\pm}(T_t x) = f^{\pm}(x)$

(iii) $\bar{f}^{\pm}(x) = E_\mu[f \mid \mathcal{J}]$

i.e. $\bar{f}^{\pm}$は$\mathcal{J}$-可測でかつ

$$\int_A f\,d\mu = \int_A \bar{f}^{\pm}\,d\mu \qquad A \in \mathcal{J}.$$

(iv) (i)の収束はL^1収束もする．

この定理から次の系が直ちに出る．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

系． $\{T_t\}$ がエルゴード的

$\iff$ $\mathcal{J}=\{X,\phi\}$, i.e. $A\in\mathcal{J}$ iff $\mu(A)=0$ or 1.

$\iff$ $\{T_t\}$-不変な可測函数は，常数と μ 測度 0 の集合を除いて一致する．

我々は，上の第二の条件を *metrically transitive* と呼んでいる．

前述の注意にふれておこう．第一積分の定義を $\{S_t\}$-不変な可測函数とすれば，この系からわかるようにすべての第一積分が定数となる集合の上ではエルゴード性があることになり，めでたく問題が解決されたことになるのだが，具体的な系で $\{S_t\}$-不変な可測函数をすべて見つけることは非常に難しく，上の系は何等問題を易しくすることに寄与していない．

系の証明．

$\{T_t\}$ がエルゴード的であって，$\mu(T_tA\ominus A)=0$ としよう。

$$\chi_A(x)=\frac{1}{N}\int_0^N\chi_A(T_tx)dt=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^N\chi_A(T_tx)dt$$

$$=\int\chi_A\,d\mu=\mu(A)\qquad a.e.(\mu)$$

だから $\mu(A)=0$ or 1.

第二の条件から第三の条件は明らかである。第三の条件を充たしていたとしよう。$f\in L^1$ に対して Birkhoff のエルゴード定理から，$\bar{f}^{\pm}$ が存在し，これ等は不変な可測函数だから，定数 a が存在して

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$f^+(x) = f^-(x) = a \qquad a.e. (\mu)$$

$$a = \int_X f^{\pm}(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu .$$

このことはエルゴード性を意味する。

定理の証明の為のLemmaから始める。TをX上の1:1点変換で両可測かつ保測であるとする。

Lemma 1.1 (Maximal ergodic theorem)

$f \in L^1$,

$E \equiv \{x ; \exists k ; f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^k x) \geq 0\}$

$\Rightarrow \quad \int_E f\, d\mu \geq 0 .$

証明. 自然数 m, n を固定する.

$$E_m \equiv \bigcup_{k=0}^{m} \{x ; f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^k x) \geq 0\}$$

$$S(x) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x)\chi_{E_m}(T^j x) + \sum_{j=0}^{m-1} |f(T^{n+j} x)|$$

とおくと，明らかに

$$S(x) \geq 0$$

$$0 \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int f(T^j x)\chi_{E_m}(T^j x)\, d\mu + \sum_{j=0}^{m-1} \int |f(T^{n+j} x)|$$

$$\leq n \int_{E_m} f\, d\mu + m \int_X |f|\, d\mu .$$

よって $n \to \infty$ とすれば，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$0 \leq \int_{E_m} f \, d\mu .$$

明らかに $E = \bigcup E_m$ だから結論を得る.

Lemma 1.2 (Birkhoffの個別エルゴード定理)

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = f^* x \quad a.e.(\mu) \qquad f \in L^1 .$$

証明.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \equiv h^*(x)$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \equiv h_*(x)$$

とおくと, いずれも, T-不変な函数である. もし $\mu(h^*(x) \neq h_*(x))$ > 0 ならば, $a < b$ が存在し集合

$$Y = \{x ;\ h_*(x) < a < b < h^*(x)\}$$

の測度 $\mu(Y)$ が正になる。TをYに制限して考え,

$$g(x) = f(x) - b, \quad g'(x) = a - f(x)$$

に, Lemma 1.1を適用すれば, $Y = E$ にとれ

$$\int g(x)\, d\mu , \quad \int g'(x)\, d\mu \geq 0$$

を得る。従って

$$b\mu(Y) \leq \int_Y f(x)\, d\mu \leq a\mu(Y) .$$

これは矛盾である。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

定理の証明.

$T \equiv T_1$ とおく. Fubini の定理から,

$$g(x) \equiv \int_0^1 f(T_t x)\,dt$$

もまた可測で可積分。Lemma 1.2 により

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x) = \frac{1}{n}\int_0^n f(T_t x)\,dt$$

は $n \to \infty$ のとき $g^*(x)$ へ概収束する。一方

$$h(x) \equiv \int_0^1 |f(T_t x)|\,dt$$

とおくとやはり, 可積分であり Lemma 1.2 から

$$\frac{1}{n} h(T^n x) \to 0 \qquad n \to \infty \qquad a.e.\ x$$

を得る。従って $0 \le s \le 1$ に対し

$$\frac{1}{n}\left|\int_0^s f(T_{t+n} x)\,dt\right| \le \frac{1}{n} h(T^n x)$$

であることに注意すれば,

$$\left|\frac{1}{N}\int_0^{[N]} f(T_t x)\,dt - \frac{1}{N}\int_0^N f(T_t x)\,dt\right| \le \frac{1}{N} h(T^{[N]} x)$$

が成立する ([ ] はガウス記号) から,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_0^N f(T_t x)\,dt = g^*(x) \qquad a.e.\ (\mu).$$

これで, f^+ の存在がいえたが, f^- も同様であり $\{T_t\}$-不変なことも明らかである。(iii) の性質を示そう。$f^\pm$ が $\mathcal{J}\{T_t\}$-可測は $f^\pm$ の不変性から明らか. $A \in \mathcal{J}\{T_t\}$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_A f(T_t x)\,d\mu = \frac{1}{N}\int_0^N \int_A f(T_t x)\,d\mu\,dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_A \frac{1}{N}\int_0^N f(T_t x)\,dt\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu .$$

演習問題 1.1.

定理1 の (iv) を証明せよ.

§2. パイこね変換

次に非常に単純な例に対して，エルゴード性を示してみよう。ここで考える方法が全くそのまま撞球問題で使われるであろう。

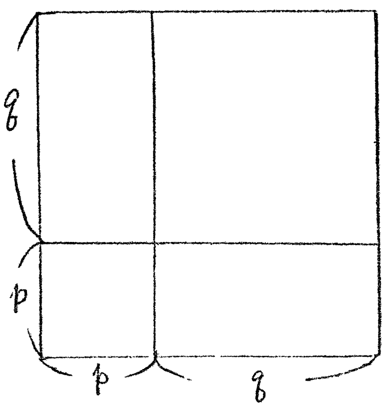
$X = [0,1) \times [0,1)$, $\mathfrak{F}$ は通常の Borel field, μ は通常の Lebesgue 測度 $du\,dv$.

X 上の点変換 T を次のように定義する.

$$p,\ q > 0,\quad p + q = 1$$

$$T(u,v) = (u', v')$$

$$\equiv \begin{cases} \left(\frac{1}{p}u,\ pv\right) & 0 \le u < p \\ \left(\frac{1}{q}(u-p),\ qv + p\right) & q \le u < 1. \end{cases}$$



Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

変換 T の性質を列挙しておく.

(イ) T は区分的に滑らかな変換であり, 保測

$$X_1^{(e)} \equiv \{(u,v);\ 0 \leq u < p\},\quad X_2^{(e)} \equiv X - X_1^{(e)}$$

$$X_1^{(c)} \equiv \{(u,v);\ 0 \leq v < p\},\quad X_2^{(c)} \equiv X - X_1^{(c)}$$

とおくと,

$$TX_j^{(e)} = X_j^{(c)},\qquad j = 1, 2$$

であり, 各 $X_j^{(e)}$ の上に T を制限すれば diffeo. である.

(ロ)

$$\gamma_v = \{(u,v);\ 0 \leq u < 1\}$$

$$\gamma_u = \{(u,v);\ 0 \leq v < 1\}$$

を, それぞれ水平線, 垂直線と呼ぶことにしよう.

水平線 (垂直線) の微小切片は T および T^{-1} により再び水平線 (垂直線) へ写る。

(ハ) γ を垂直線とするとき, $z, z' \in \gamma$ に対し

$$d(T^k z, T^k z') \leq \lambda^k d(z, z')$$

また γ が水平線ならば, $z, z' \in \gamma$

$$d(T^{-k} z, T^{-k} z') \leq \lambda^k d(z, z')$$

ただし, $\lambda = \max\{p, q\}$, $d(z, z')$ は z と z' の距離.

(ニ) $\zeta^{(c)}$ は X の水平線への分割, $\zeta^{(e)}$ は垂直線への分割, $\alpha^{(c)} = \{X_1^{(c)}, X_2^{(c)}\}$, $\alpha^{(e)} = \{X_1^{(p)}, X_2^{(p)}\}$ とする。($\alpha \vee \beta$ で分割 α と β の細分割を表わすと)

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\zeta^{(c)} = \bigvee_{k=0}^{\infty} T^k \alpha^{(c)} \qquad \zeta^{(p)} = \bigvee_{k=0}^{\infty} T^k \alpha^{(p)}.$$

(ホ) 水平線と垂直線をXの座標表示につかえ可測集合A に対し

$$\mu(A) = \int_0^1 du \int_{A \cap \gamma_u} dv = \int_0^1 dv \int_{A \cap \gamma_v} du$$

が成立する。

以上の (イ)〜(ホ) からエルゴード性が示せることをいう。

Birkhoff のエルゴード定理から，時間平均の存在は保証されているから，それが定数になることを主張すればよい。L^1 の中で，Lipschitz 連続な函数が稠密だから，Lipschitz 連続函数に対して時間平均が定数になることを示せばよい。

$$|f(z) - f(z')| \leq K\, d(z, z')$$

としよう。

$$X^{\pm} \equiv \left\{ x \,;\, \exists \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(T^{\pm k} x) = f^{\pm}(x) \right\}$$

$$X^{\circ} \equiv \left\{ x \,;\, f^{+}(x) = f^{-}(x) \right\}$$

とおくと，$\mu(X^+) = \mu(X^-) = \mu(X^\circ) = 1$.

(1°) $z \in X^+$ に対し $\gamma_{直}(z)$ で z を通る垂直線を表わせば，

$$\forall z' \in \gamma_{直}(z) \text{ に対し，} \quad z' \in X^+$$

$$f^+(z) = f^+(z').$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

何故ならば，

$$|f^+(z)-f^+(z')| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(T^k z)-f(T^k z')|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\frac{K}{n}\sum_{k=0}^{n-1} d(T^k z, T^k z')$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\frac{K}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k d(z, z') = 0$$

が成立するからである。同様に

(2°) $z \in X^-$, $\gamma_{平}(z)$; z を通る水平線

$\Longrightarrow$ $\forall z' \in \gamma_{平}(z)$ に対し，$z' \in X^-$

$$f^-(z) = f^-(z').$$

$\mu(X^\circ)=1$ だから，殆どすべての u に対し γ_u 上の殆どすべての (u,v) において $(u,v)\in X^\circ$ である。いま，そのような (u_0, v_0) を固定する。γ_{u_0} 上の殆どすべての (u_0,v) が X° に属すが そのような v に対しては

$$f^-(u_0,v_0)=f^+(u_0,v_0)=f^+(u_0,v)=f^-(u_0,v)$$

が成立する。$\gamma_{平}(u_0,v)=\gamma_v$ 上の点はすべて X^- に属し

$$f^-(u,v) = f^-(u_0,v)$$

だから，

$$f^-(u_0,v_0)=f^-(u,v) \qquad \forall v\ ;\ (u_0,v)\in X^\circ$$

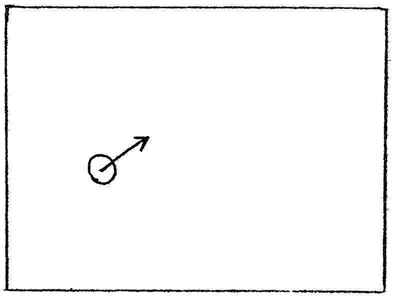
が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\int_X |f^-(u_0,v_0)-f^-(u,v)|\,d\mu$$
$$=\int_0^1 dv \int_{\gamma_v} |f^-(u_0,v_0)-f^-(u,v)|\,du=0$$

だから f^- は殆どすべての点で定数に一致する。f^+ もまた同じである。

ついでに、Weyl の撞球問題と geodesic flow にふれておこう。Weyl の撞球問題は撞球台上の一ヶの撞球の運動のエルゴード性である。



この系では運動量が(縦,横軸に対称なものを同一視して)第一積分になっているから,運動量一定 (p_1°, p_2°) の曲面で考えれば,

p_1°/p_2° が無理数ならばエルゴード的であり,

p_1°/p_2° が有理数ならば軌道は閉じている.

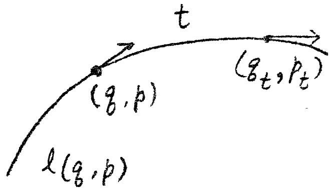
Compact 連結 負の曲率をもつ Riemann 空間 M とその unit tangent bundle $T_1M \equiv X$ を考える。$x=(q,p)$, $q\in M$, $p\in T_1M$ に対して, q を通り p 方向の測地線 $l(q,p)$ を考え, $l(q,p)$ に沿って p 方向に測地距離 t の点を q_t, その点における

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$\ell_{(q,p)}$ の単位接ベクトルを p_t とし

$$S_t(q,p) \equiv (q_t, p_t)$$

なる $\{S_t\}$ を考える。



$\{S_t\}$ がエルゴード的である

ことは transversal foliations を使う方法により Hopf [5] によって示されている。

以下で取扱う Sinai の撞球問題は本質的にはこの Hopf の方法によってエルゴード性が示せる。 すなわち, Birkhoff の個別エルゴード定理と Hopf の方法があれば充分である。

§3. トーラス上の二つの円板の運動

二次元トーラス上に二つの円板が載っていて, 完全弾性衝突をしながら運動しているとするこの系のエルゴード性を問題とするのだが, この問題は次に述べる Sinai の撞球問題に帰着される。

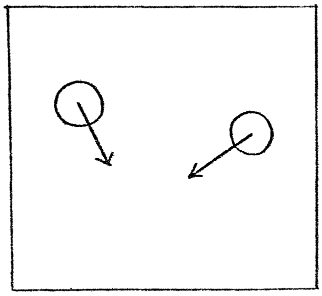


図 3-1

Sinai の撞球問題は, 二次元トー

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

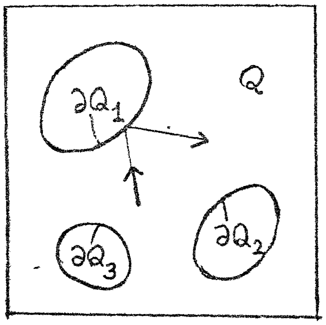


図 3-2

ラス $\mathbb{T}^2$ 内から滑らかな境界をもつ凸領域を有限ヶ抜いた領域 Qの内部を質点が壁で入射角と反射角が等しく完全弾性衝突を行いながら内部では慣性運動をしている系のエルゴード性の問題である。

まず前者が後者の問題に帰着されることを説明しておこう。二つの円板は共に直径 a，質量 m とし，第一の円板の中心の座標，運動量は $(q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,1}, p_{1,2})$，第二のは $(q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,1}, p_{2,2})$ であるとしよう。

いま Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_{1,1}^2 + p_{1,2}^2 + p_{2,1}^2 + p_{2,2}^2\right) + U(q)$$

$$U(q) \equiv \begin{cases} \infty & (q_{1,1}-q_{2,1})^2 + (q_{1,2}-q_{2,2})^2 < a^2 \pmod 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。第一積分は H，$p_{1,1}+p_{2,1}$，$p_{1,2}+p_{2,2}$ の三つ（エネルギーと重心系の運動量）である。定数 E，p_1^0，p_2^0 を定め，相空間

$$W = \left\{ \begin{array}{l} (q_{1,1}, q_{1,2}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{2,1}, p_{2,2}); \\ (q_{1,1}-q_{2,1})^2 + (q_{1,2}-q_{2,2})^2 \geq a^2 \\ p_{1,1}+p_{2,1} = p_1^0, \quad p_{1,2}+p_{2,2} = p_2^0 \\ p_{1,1}^2 + p_{1,2}^2 + p_{2,1}^2 + p_{2,2}^2 = 2mE \end{array} \right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

における力学系を $\{S_t\}$ としよう。座標変換

$$
\begin{aligned}
\tilde{q}_1 &= q_{1,1} + q_{2,1} & \tilde{p}_1 &= p_{1,1} + p_{2,1} \\
\tilde{q}_2 &= q_{1,2} + q_{2,2} & \tilde{p}_2 &= p_{1,2} + p_{2,2} \\
\tilde{q}_3 &= q_{1,1} - q_{2,1} & \tilde{p}_3 &= p_{1,1} - p_{2,1} \\
\tilde{q}_4 &= q_{1,2} - q_{2,2} & \tilde{p}_4 &= p_{1,2} - p_{2,2}
\end{aligned}
\qquad (\mathrm{mod}\ 1)
$$

を行うと，相空間は，

$$
\tilde{W} = \left\{
\begin{array}{l}
(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4)\ ;\ \tilde{q}_3^{\,2} + \tilde{q}_4^{\,2} \geq a^2 \ (\mathrm{mod}\ 1) \\
\qquad \tilde{p}_3^{\,2} + \tilde{p}_4^{\,2} = 4mE - (p_1^\circ)^2 - (p_2^\circ)^2 \\
\qquad (\tilde{q}_1, \tilde{q}_3) \in \mathbb{L}(\sqrt{2}),\quad (\tilde{q}_2, \tilde{q}_4) \in \mathbb{L}'(\sqrt{2})
\end{array}
\right\}
$$

に移る。ただし $\mathbb{L}(\sqrt{2})$, $\mathbb{L}'(\sqrt{2})$ は一辺 $\sqrt{2}$ の斜傾したトーラスである。

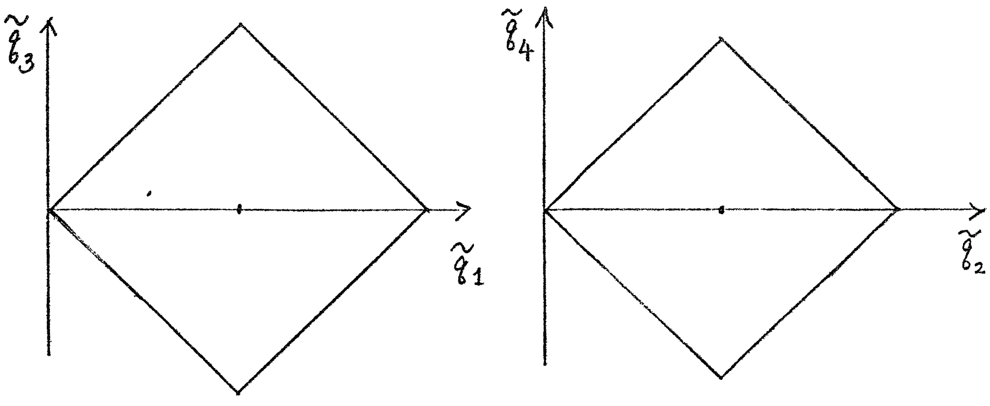


図 3-3

今，別に次のような力学系を考えよう。$\mathbb{L}(2)$, $\mathbb{L}'(2)$ は図の如き一辺 2 のトーラスとする。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

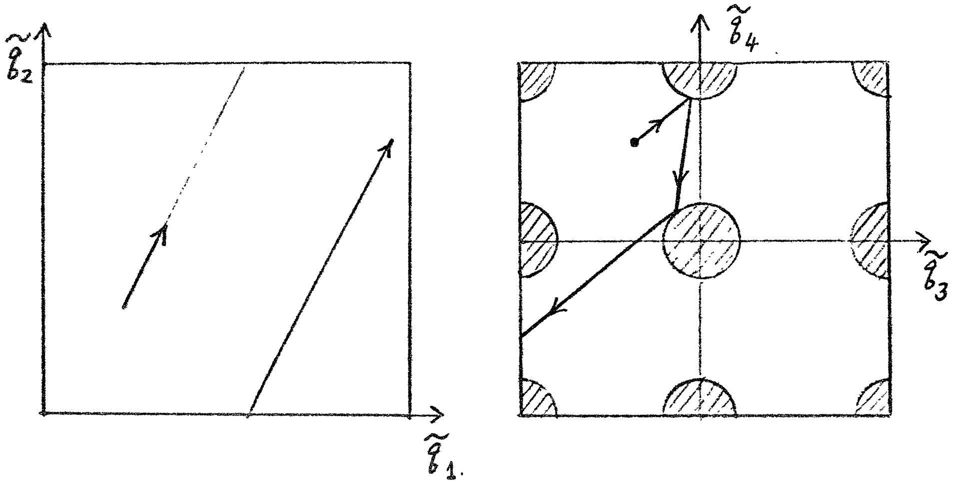


図3-4

$\{T_t\}$ を $\mathbb{L}(2)$ 上の運動量 (p_1°, p_2°) の Weyl の力学系，すなわち

$$T_t(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \equiv (\bar{q}_1 + \frac{1}{m} p_1^\circ t,\ \bar{q}_2 + \frac{1}{m} p_2^\circ t) \pmod 2$$

であるとしよう。

Q' を図3-4 のように $\mathbb{L}'(2)$ から半径 a の円板を4ヶ抜いた領域とし，$\{T_t'\}$ を Q' における Sinai の撞球系としよう。その相空間は

$$W' = \{(\bar{q}_3, \bar{q}_4, \bar{p}_3, \bar{p}_4);\ (\bar{q}_3, \bar{q}_4) \in Q' \quad \bar{p}_3^2 + \bar{p}_4^2 = 4mE - (p_1^\circ)^2 - (p_2^\circ)^2\}$$

である。

$\{\bar{S}_t\}$ を $\{T_t\}$ と $\{T_t'\}$ の直積力学系とする。すなわち，$\bar{W} = \mathbb{L}(2) \times W'$ 上で

$$\bar{S}_t(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4, \bar{p}_3, \bar{p}_4) \equiv (T_t(\bar{q}_1, \bar{q}_2), T_t'(\bar{q}_3, \bar{q}_4, \bar{p}_3, \bar{p}_4))$$

で定義される力学系である。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

さて，$\mathbb{L}(2)\times\mathbb{L}'(2)$ の点の組

$$\{(\bar{q}_1+\varepsilon_1,\ \bar{q}_2+\varepsilon_2,\ \bar{q}_3+\varepsilon_1,\ \bar{q}_4+\varepsilon_2);\ \varepsilon_1,\varepsilon_2=0 \text{ or } 1\}$$

を identify すれば $\mathbb{L}(\sqrt{2})+\mathbb{L}'(\sqrt{2})$ に自然に同型になる。その $\mathbb{L}(2)\times\mathbb{L}'(2)$ から $\mathbb{L}(\sqrt{2})\times\mathbb{L}'(\sqrt{2})$ への準同型写像を Θ' としよう。

$\Theta(\bar{q}_1,\bar{q}_2,\bar{q}_3,\bar{q}_4,\bar{p}_3,\bar{p}_4)\equiv(\Theta'(\bar{q}_1,\bar{q}_2,\bar{q}_3,\bar{q}_4),\bar{p}_3,\bar{p}_4)$

と定義すれば，Θ は $\overline{W}$ を $\widetilde{W}$ に写し，

$$\widetilde{S}_t\,\Theta=\Theta\,\overline{S}_t$$

を充たす。この事実から，次の主張が言える。

主張：$\{T_t'\}$ がエルゴード的であることが示されれば，$(p_1^\circ)^2+(p_2^\circ)^2=const$ のとき，高々可算ケの (p_1°,p_2°) を除外して $\{S_t\}$ がエルゴード的であることが示せる。

上の主張を言うには，二段にわけて，$\{\overline{S}_t\}$ が可算ケの p_1°/p_2° の値を除いてエルゴード的になること，と $\{\overline{S}_t\}$ がエルゴード的ならば $\{\widetilde{S}_t\}$ 従って $\{S_t\}$ がエルゴード的であることを示せばよい。後者は演習問題 3.2 に譲ろう。前者を証明するのにはスペクトル定理が必要なのでそれを述べよう。スペクトル定理に関しては，[9]，[15] 等を参照のこと。

一般に，$(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の力学系 $\{S_t\}$ が与えられたとき，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$L^2(X,\mathfrak{F},\mu)$ 上のユニタリ作用素の一径数群 $\{U_t\}$ が

$$U_t f(x) \equiv f(S_t x) \qquad f \in L^2$$

で定義される．$\{U_t\}$ のスペクトル，スペクトル型，固有値，固有函数等を $\{T_t\}$ のそれと呼ぶ。

Theorem 1 の系から次のことは明らかである．

Lemma 3.1. $\{S_t\}$ がエルゴード的

$\Longleftrightarrow$ 固有値 0 の固有函数は定数に限る．

Lemma 3.2. $\{S_t\}$ がエルゴード的であるとし

$\Lambda = \{\lambda;\ \{S_t\}$ の固有値$\}$，f_λ を $\lambda \in \Lambda$ に対する固有函数とする．

(i) Λ は実数 $\mathbb{R}$ の subgroup をなす．

(ii) 各固有値の重複度は 1．

(iii) $|f_\lambda|$ は定数．

<u>証明．</u> $\lambda,\mu \in \Lambda$ に対して

$$U_t(f_\lambda \bar{f}_\mu)(x) = f_\lambda(S_t x)\bar{f}_\mu(S_t x)$$
$$= e^{i\lambda t - i\mu t} f_\lambda \bar{f}_\mu$$

が成立することから，(i)，(iii) が出る。また λ に対応する固有函数が f_λ，g_λ と二つあれば

$$f_\lambda \bar{g}_\lambda(T_t x) = f_\lambda \bar{g}_\lambda(x)$$

を得て，エルゴード性から $f_\lambda = const\ g_\lambda$．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Lemma 3.3 (Weyl [16])。 $\mathbb{L}(\ell)$ を一辺 ℓ のトーラス．

$$T_t(q_1, q_2) \equiv (q_1+\gamma_1 t,\ q_2+\gamma_2 t) \pmod{\ell}.$$

このとき $\{T_t\}$ の固有値 Λ は，

$$\Lambda = \left\{\frac{2\pi}{\ell}(n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2)\ ;\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

特に γ_1/γ_2 が無理数 $\Longleftrightarrow$ エルゴード的．

<u>証明</u>． $L^2(\mathbb{L}(\ell)) \ni f$ を Fourier 展開する．

$$f(q_1, q_2) = \sum_{n_1, n_2} c_n e^{\frac{2\pi i}{\ell}(n_1 q_1 + n_2 q_2)}$$

$$V_t f \equiv f(T_t(q_1, q_2)) = \sum_{n_1, n_2} c_n e^{\frac{2\pi i}{\ell}(n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2)t} e^{\frac{2\pi i}{\ell}(n_1 q_1 + n_2 q_2)}$$

だから，$\frac{2\pi}{\ell}(n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2)$ が固有値，固有函数は $e^{\frac{2\pi i}{\ell}(n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2)}$ である。

二つの力学系 $(X, \mathfrak{F}, \mu, \{T_t\})$, $(X', \mathfrak{F}', \mu', \{T_t'\})$ を考え，直積確率空間 $(\bar{X}, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mu}) = (X\times X', \mathfrak{F}\times\mathfrak{F}', \mu\times\mu')$ 上の力学系 $\{\bar{S}_t\}$ を

$$\bar{S}_t \bar{x} \equiv (T_t x, T_t' x') \qquad \bar{x} = (x, x')$$

で定義し，これを $\{T_t\}$ と $\{T_t'\}$ の直積力学系という．$\{T_t\}$, $\{T_t'\}$, $\{\bar{S}_t\}$ に対応する unitary 作用素の一径数群をそれぞれ $\{V_t\}$, $\{V_t'\}$ $\{\bar{U}_t\}$ で表わそう．また $F(\lambda)$, $F'(\lambda)$, $\bar{E}(\lambda)$ をそれ等のスペクトル測度としよう。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\overline{U}_t = V_t \otimes V_t' = (V_t \otimes I)\cdot(I \otimes V_t')$$

$$= \iint e^{i\lambda t + i\lambda' t}\, d(F(\lambda)\otimes I)\, d(I \otimes F'(\lambda'))$$

だから $\overline{E}(\lambda)$ は

$$\overline{E}(\lambda) = \int (F(\lambda-\mu)\otimes I)\, d(I\otimes F'(\mu))$$

で与えられる. 従って次の Lemma を得る.

Lemma 3.4. $\{T_t\}$, $\{T_t'\}$, $\{\overline{S}_t\}$ の固有値を $\Lambda, \Lambda', \overline{\Gamma}$ とすれば,

$$\overline{\Gamma} = \{\lambda + \lambda' \,;\, \lambda \in \Lambda,\ \lambda' \in \Lambda'\}.$$

特に $\{T_t\}$ と $\{T_t'\}$ がエルゴード的であるとき $\{\overline{S}_t\}$ がエルゴード的であるのは, $\{T_t\} \subset \{T_t'\}$ が同じ固有値を持たないことが必要十分である.

演習問題 3.1.

Lemma 3.4 を証明せよ.

我々は, $\{T_t'\}$ がエルゴード的であるとし, 固有値は Λ' であるとしよう (実は $\Lambda' = \{0\}$ が示せるが今は留保しておこう). $\{T_t\}$ は p_1°/p_2° が無理数ならばエルゴード的であるが, $\Lambda =$ $\{\frac{2\pi}{m\ell}(p_1^\circ n_1 + p_2^\circ n_2)\,;\, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$, $(p_1^\circ)^2 + (p_2^\circ)^2 = e$ とし $\Lambda \cap \Lambda' \neq \phi$ となり得るのは, $\gamma \equiv p_1^\circ$ で方程式

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\frac{2\pi}{ml}\left(\gamma n_1 + \sqrt{c-\gamma^2}\, n_2\right) = \lambda_j \qquad \lambda_j \in \Lambda$$

がある λ_j, n_1, n_2 に対して成立するときである。

上の方程式の解は，すべての $n_1, n_2, \lambda_j \in \Lambda$ に対して高々可算ヶだから，その解を除外した (p_1^0, p_2^0) でエルゴード的になる。

演習問題 3.2.

力学系 $(X, \mathcal{F}, \mu, \{S_t\})$, $(\bar{X}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu}, \{\bar{S}_t\})$ において，$\bar{X}$ から X の上への可測かつ保測変換 Θ が与えられて

$$S_t \Theta = \Theta \bar{S}_t \qquad \forall t$$

が成立するとき $\{S_t\}$ は $\{\bar{S}_t\}$ に準同型という。このとき $\{\bar{S}_t\}$ がエルゴード的なら $\{S_t\}$ もエルゴード的である。

注意. 我々は後で述べるように，Sinai の撞球系は固有値をもたない。従って，除外される (p_1^0, p_2^0) は，p_1^0/p_2^0 が有理数のときだけでよい。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

第II章 撞球问題

§4. 基本的事項

Sinai の撞球問題を扱う。まず一辺の長さ 1 の 2次元トーラス $\mathbb{T}$ とその上の滑らかな閉凸曲線 $\partial Q_1, \cdots, \partial Q_{s_0}$ の外部を Q とする。Q 内を質量 1 の質点が速さ 1 で等速度運動をし，Q の境界 $\partial Q = \bigcup \partial Q_j$ で入射角と反射角が等しいように完全弾性反射をするとしよう。

質点の位置を $q = (q_1, q_2)$，運動量は $(p_1, p_2) = (\cos\theta, \sin\theta)$ であるとする．ただし θ は運動量とある定ベクトルのなす角度とする。相空间 M は

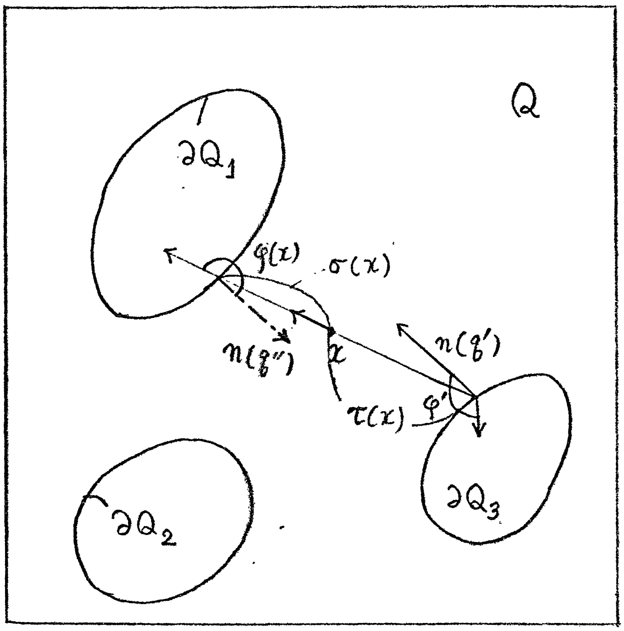


図 4-1

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$M \equiv \{ (q_1, q_2, \theta) ;\ (q_1, q_2) \in Q,\ 0 \le \theta < 2\pi \}.$$

$\{S_t\}$ を対応する力学系とする。このとき不変測度 μ は

$$d\mu = \frac{1}{2\pi |Q|} dq_1 dq_2 d\theta, \quad |Q| = \int_Q dq_1 dq_2$$

で与えられる。

次に別な座標系を使ってみよう。記号の準備から始める。π は,

$$\begin{array}{cccc} \pi : & M & \longrightarrow & Q \\ & \Psi & & \Psi \\ & (q, \theta) & \longrightarrow & q \end{array} \qquad \text{射影}$$

$n(q)$: $q \in \partial Q$ における単位内法線

$s(q)$: $s(q) = s$ iff $q \in \partial Q_s$

$r(q)$: $q \in \partial Q_s$ に対し, ∂Q_s 上に固定された原点から q まで法線方向を左に見て計った弧長

$k(q)$: $q \in \partial Q$ における ∂Q の曲率

$\varphi(x)$: $\pi(x) \in \partial Q$ における入射角

$$S_+ \equiv \{ x = (q, \theta) ;\ q \in \partial Q \ \ ((\cos\theta, \sin\theta), n(q)) \ge 0 \}$$

$$S_- \equiv \{ x = (q, \theta) ;\ q \in \partial Q \ \ ((\cos\theta, \sin\theta), n(q)) \le 0 \}$$

$$M_1 \equiv S_-$$

$$S \equiv S_- \cap S_+ .$$

次に, $x \in M$ に対して

$$\tau(x) \equiv \sup \{ t < 0 ;\ S_t x \in M_1 \}$$

$$\sigma(x) \equiv \inf \{ t \ge 0 ;\ S_t x \in M_1 \}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$s(x) \equiv s(\pi(S_{\sigma(x)}x))$$

$$r(x) \equiv r(\pi(S_{\sigma(x)}x))$$

$$\varphi(x) \equiv \varphi(S_{\sigma(x)}x)$$

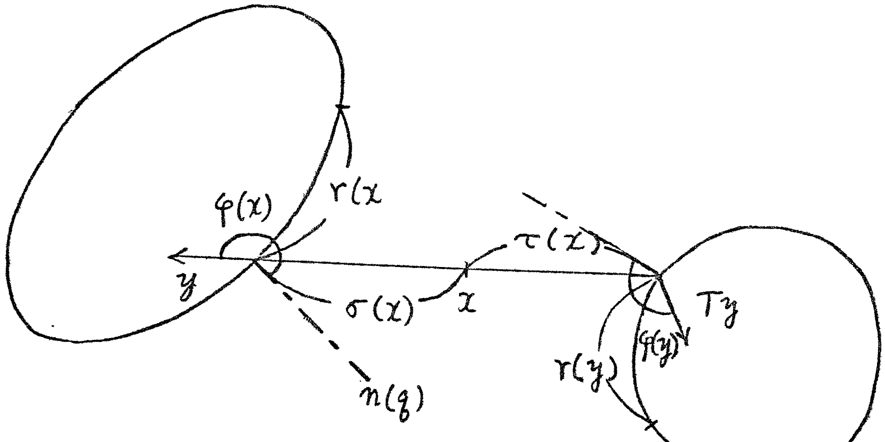


図4-2

各 s に対し ∂Q_s の弧長を $|\partial Q_s|$ で表わす. M_1 の点 x は座標 $(s(x), r(x), \varphi(x))$ で表わされる

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \longleftrightarrow & \{1,\cdots,s_0\}\times[0,|\partial Q_s|)\times[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}] \\ \Psi & & \Psi \\ x & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & (s,r,\varphi). \end{array}$$

また M の点 x は座標 $(s(x), r(x), \varphi(x), \sigma(x))$ で表わされる

$$\begin{array}{ccc} M & & \{(s,r,\varphi,\sigma);\ 0\le\sigma<\tau(s,r,\varphi),\ (s,r,\varphi)\in M_1\} \\ \Psi & & \\ x & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & (s,r,\varphi,\sigma) \end{array}$$

この (s,r,φ,σ)-座標では, 不変測度 μ は

(4.1) $$d\mu = -\mu_0 \cos\varphi\, d\sigma\, d\varphi\, dr.$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

但し

$$\frac{1}{\mu_0} = -\sum_s \int_0^{|\partial Q_s|} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \tau(s, r, \varphi) \cos\varphi \, d\varphi \, dr$$

である。

次のように M_1 上の変換 T が自然に導かれる。

$$(4.2) \qquad Tx \equiv S_{\tau(x)-0}\, x \qquad x \in M_1$$

$$(4.3) \qquad d\nu = -\nu_0 \cos\varphi \, d\varphi \, dr$$

$$\frac{1}{\nu_0} \equiv \sum_s 2|\partial Q_s| = 2|\partial Q|$$

なる M_1 上の測度 ν は T-不変である. これ等の座標表示が非常に有効なのは次の式が成立することによる。

$x = (s, r, \varphi, \sigma) \in M$ に対して $x_0 \equiv (s, r, \varphi)$ とおくと,

$$(4.4) \qquad S_t x = \begin{cases} \left(T^{-k} x_0,\ \sigma - t + \sum_{j=0}^{k} \tau(T^j x_0)\right) \\ \qquad \text{if } \ 0 \leq \sigma - t + \sum_{j=0}^{k-1} \tau(T^j x_0) < -\tau(T^k x_0), \ k \geq 0 \\ \left(T^{k} x_0,\ \sigma - t - \sum_{j=1}^{k} \tau(T^{-j} x_0)\right) \\ \qquad \text{if } \ 0 \leq \sigma - t - \sum_{j=1}^{k} \tau(T^{-j} x_0) < -\tau(T^{-k} x_0), \ k \geq 0. \end{cases}$$

これは, 我々の座標が Ambrose-Kakutani [2] の表現を与えていることを意味している.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Lemma 4.1.

$\{S_t\}$ がエルゴード的

$\Longleftrightarrow$ T がエルゴード的.

証明.

$\Rightarrow$) T がエルゴード的でないならば, $\exists A \subset M_1$, $TA = A$, $1 > \nu(A) > 0$ である.

$$\bar{A} \equiv \{(s, r, \varphi, \sigma) ;\ 0 \leq \sigma < -\tau(s, r, \varphi), (s, r, \varphi) \in A\}$$

とおけば $S_t \bar{A} = \bar{A}$, $1 > \mu(\bar{A}) > 0$ を得る.

$\Leftarrow$) 逆に $\{S_t\}$-不変な $\bar{B}$ $(\subset M)$ が存在すれば, ある $B \subset M$ が存在して, 上の形に書けるから明らかである.

以上の考察から, 新しい座標表示を使うこと, 特に変換 T のエルゴード性を調べることが重要なことがわかる. 引続いて T の性質をみておこう.

我々は記号の単純化のため約束をいくつかしておく. 今後の議論で, どの境界に衝突したかを正確に記述しておく必要はあまりない。そこで $s(x)$ を省いて記す. 例えば, ∂Q が一つの連結成分からのみなる場合と思っておいてもよい。更に, $x = (r, \varphi) \in M_1$ に対して, 次の記号をこのノートを通じて使う.

$$x_i \equiv T^{-i} x \qquad i \in \mathbb{Z}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\varphi_i = \varphi_i(x) \equiv \varphi(x_i)$$

$$r_i = r_i(x) \equiv r(x_i)$$

$$k_i = k_i(x) \equiv k(r(x_i))$$

$$\tau_i(r,\varphi) \equiv \tau(r_i,\varphi_i).$$

ところで，T および T^{-1} は，区分的に滑らかな変換であることに注意しておく。

Lemma 4.2.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = -k(r_1)\left[1+\frac{\tau(r_1,\varphi_1)k(r)}{\cos\varphi}\right]\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} - k(r)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} = -\left[1+\frac{\tau(r_1,\varphi_1)k(r_1)}{\cos\varphi_1}\right]$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial r} = -\left[1+\frac{\tau(r_1,\varphi_1)k(r)}{\cos\varphi}\right]\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial\varphi} = -\frac{\tau(r_1,\varphi_1)}{\cos\varphi_1}$$

$$\frac{\partial\tau(r_1,\varphi_1)}{\partial r} = \sin\varphi_1\frac{\partial r_1}{\partial r} - \sin\varphi$$

$$\frac{\partial\tau(r_1,\varphi_1)}{\partial\varphi} = \tau(r_1,\varphi_1)\tan\varphi_1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_1} = -k(r)\left[1+\frac{\tau(r_1,\varphi_1)k(r_1)}{\cos\varphi_1}\right]\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi} - k(r_1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1} = -\left[1+\frac{\tau(r_1,\varphi_1)k(r)}{\cos\varphi}\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\frac{\partial r}{\partial r_1} = -\left[1 + \frac{\tau(r_1, \varphi_1) k(r_1)}{\cos\varphi_1}\right] \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi_1} = -\frac{\tau(r_1, \varphi_1)}{\cos\varphi}$$

$$\frac{\partial \tau(r,\varphi)}{\partial r} = \sin\varphi_{-1} \frac{\partial r_{-1}}{\partial r} - \sin\varphi$$

$$\frac{\partial \tau(r,\varphi)}{\partial \varphi} = \tau(r,\varphi) \tan\varphi_{-1} .$$

証明は単純な幾何学的計算による。演習問題にしておく（Appendix 1 を参照）。

次の Lemma は Lemma 4.2 から直ちに導かれる。

Lemma 4.3. γ を M_1 上の滑らかな曲線，その方程式を $\varphi = \psi(r)$; $\bar{r} \leq r \leq \bar{\bar{r}}$ とする。$\gamma_i = T^{-i}\gamma$ とおき，その方程式を $\varphi = \psi_i(r)$ とすると，次の関係が成立する。

$$\frac{d\psi}{dr} = -k(r) - \frac{\cos\psi}{\cos\psi_1} \frac{1}{\dfrac{\tau(r_1, \psi_1)}{\cos\psi_1} - \dfrac{1}{\dfrac{d\psi_1}{dr_1} - k(r_1)}}$$

$$= -k(r) + \frac{\cos\psi}{\cos\psi_1} \frac{\dfrac{d\psi_1}{dr_1} - k(r_1)}{1 - \dfrac{\tau(r_1,\psi_1)\left(\dfrac{d\psi_1}{dr_1} - k(r_1)\right)}{\cos\psi_1}}$$

$$\frac{dr}{dr_1} = -\frac{\cos\psi_1}{\cos\psi}\left[1 - \frac{\tau(r_1,\psi_1)\left(\dfrac{d\psi_1}{dr_1} - k(r_1)\right)}{\cos\psi_1}\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\frac{d\psi_1}{dr_1} = k(r_1) + \frac{\cos\psi_1}{\cos\psi} \frac{1}{\dfrac{\tau(r_1,\psi_1)}{\cos\psi} + \dfrac{1}{\dfrac{d\psi}{dr} + k(r)}}$$

$$= k(r_1) + \frac{\cos\psi_1}{\cos\psi} \frac{\dfrac{d\psi}{dr} + k(r)}{1 + \dfrac{\tau(r_1,\psi_1)\left(\dfrac{d\psi}{dr} + k(r)\right)}{\cos\psi}}$$

$$\frac{dr_1}{dr} = -\frac{\cos\psi}{\cos\psi_1}\left[1 + \frac{\tau(r_1,\psi_1)\left(\dfrac{d\psi}{dr} + k(r)\right)}{\cos\psi}\right]$$

$$\frac{d\psi}{d\psi_1} = k(r)\frac{\cos\psi_1}{\cos\psi}\frac{dr_1}{d\psi_1} - \left[1 + \frac{\tau(r_1,\psi_1)k(r)}{\cos\psi}\right]\left[1 - k(r_1)\frac{dr_1}{d\psi_1}\right]$$

$$\frac{d\psi_1}{d\psi} = -k(r_1)\frac{\cos\psi}{\cos\psi_1}\frac{dr}{d\psi} - \left[1 + \frac{\tau(r_1,\psi_1)k(r_1)}{\cos\psi_1}\right]\left[1 + k(r)\frac{dr}{d\psi}\right]$$

$$\frac{d\tau(r_1,\psi_1)}{dr_1} = \sin\psi_1 - \sin\psi\frac{dr}{dr_1}$$

$$\frac{d\tau(r_1,\psi_1)}{dr} = \sin\varphi_1\frac{dr_1}{dr} - \sin\varphi .$$

このLemmaから導かれることをあげる前に記号を導入する.

$$k_{min} \equiv \min_{q\in\partial Q} k(q), \qquad k_{max} \equiv \max_{q\in\partial Q} k(q)$$

$$|\tau|_{min} \equiv \min_{x\in M_1} -\tau(x)$$

$$K_{max} \equiv k_{max} + \frac{1}{|\tau|_{min}} \qquad \eta \equiv k_{min}|\tau|_{min} .$$

M_1 上の滑らかな曲線 γ に対して

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$\theta(\gamma)$： φ-座標方向のγの全変動

$\rho(\gamma)$： r-座標方向のγの全変動．

Lemma 4.4. γをM_1上の滑らかな曲線とする．

(i) γが単調増加，T^{-1}がγ上で連続ならば，$\gamma_1 = T^{-1}\gamma$は単調増加，

$$k_{min} \leq \frac{d\psi_1}{dr_1} \leq K_{max}$$

$$\theta(T^{-1}\gamma) \geq (1+\eta)\,\theta(\gamma).$$

(ii) γが単調減少，Tがγ上で連続ならば，$\gamma_{-1} = T\gamma$は単調減少，

$$k_{min} \leq -\frac{d\psi_{-1}}{dr_{-1}} \leq K_{max}$$

$$\theta(\gamma) \geq (1+\eta)\,\theta(T\gamma).$$

さて，保留しておいた，TおよびT^{-1}の連続性に関して細かいことを調べておこう．

$S = \{(r,\varphi)\,;\, r \in \partial Q,\ \varphi = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\}$である．

$S(+) \equiv \{(r,\varphi)\,;\, r \in \partial Q,\ \varphi = \frac{1}{2}\pi\}$，$S(-) \equiv \{(r,\varphi)\,;\, r \in \partial Q,\ \varphi = \frac{3}{2}\pi\}$

とおこう．Tの不連続になる点は$T^{-1}S$であり，T^{-1}が不連続になる点はTSである．そのことは下図から明らかであろう．

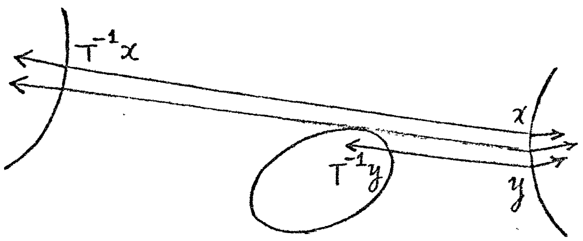


図 4-3

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

直線 $\gamma: \psi \equiv \frac{\pi}{2}$ (および $\gamma: \psi \equiv \frac{3}{2}\pi$) に Lemma 4.3, 4.4を適用してわかる通り, $T^{-1}S$ は単調増加, TS は単調減少な曲線群であって, 局所的には次の方程式で記述される,

$$\frac{d\psi}{dr} = k(r) + \frac{\cos\psi}{\tau(r,\psi)}, \quad \frac{d\psi}{dr} = -k(r) - \frac{\cos\psi}{\tau(r_1,\psi_1)}.$$

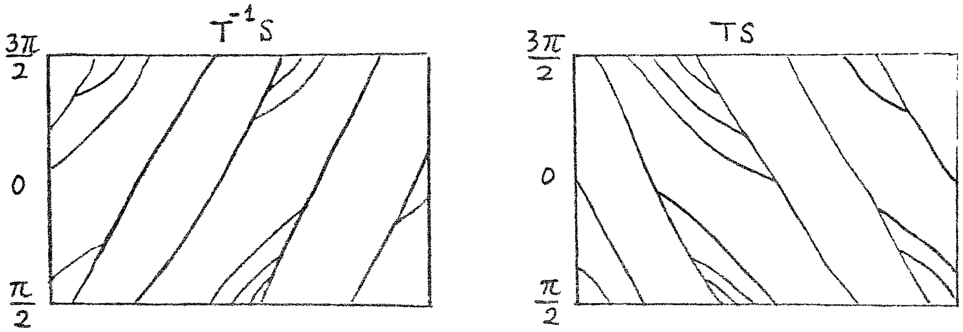


図 4-4

$T^{-1}S$, および TS の線分に, それが $S(+)$ の像なら $(+)$, $S(-)$ の像なら $(-)$ の符号をつける. 不連続性曲線 $T^{-1}S$ および TS の曲線の枝分れの法則は, 下図のものが許される. また同符号の二股の中に異符号の曲線は入らない (Appendix 2 参照).

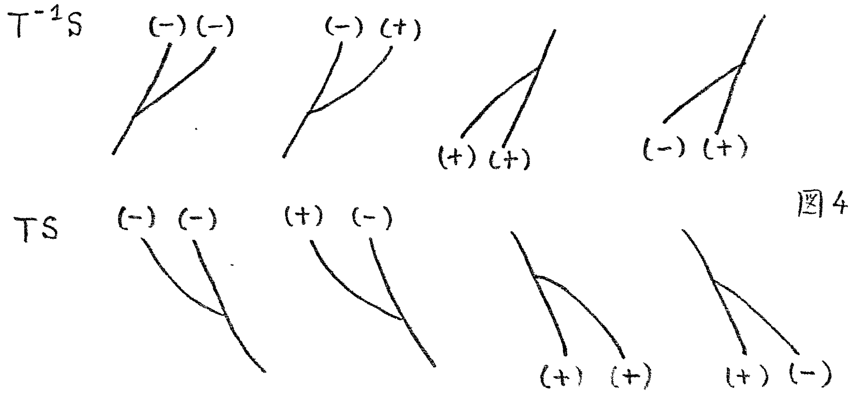


図4-5

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$T^{-1}S$, TS での不連続性は次図のように起る.

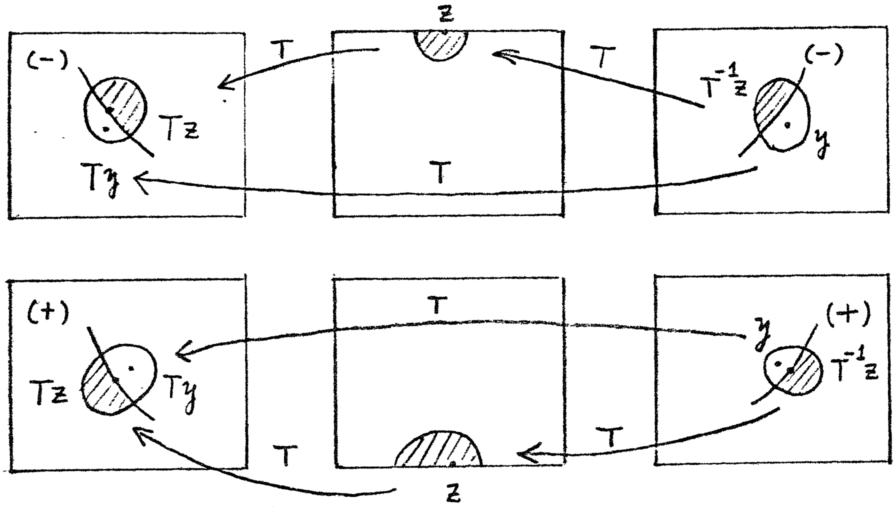


図4-6

S と $T^{-1}S$ で分けられる M_1 の連結成分を $X_j^{(e)}$, $j=1,2,\cdots$, とし, それを要素にする分割を $\alpha^{(e)}$ としよう. S と TS による分割を $\alpha^{(c)}=\{X_j^{(c)};\ j=1,2,\cdots\}$ とする. ただし, 符号 (+) の曲線はその曲線の下側の要素に, (−) なら上側の要素に含まれているものとする.

$T\alpha^{(c)}=\alpha^{(e)}$ が成立し, §2で述べた (イ) が成立することと (ハ) に近い事実が成立していることがわかった. (ロ), (ホ) に対応する事実が成立すれば §2で行ったのと類似の議論ができることが理解されよう. (ロ) に関しては次の§5で, (ホ) に関しては §6〜§9で論じる.

演習問題 4.1.

Lemma 4.1 を証明せよ. また不連続性曲線の枝分れの法則を検

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

証せよ．

演習問題 4.2．

$\alpha^{(c)} = \{X_j^{(c)}\}$，$\alpha^{(e)} = \{X_j^{(e)}\}$ の番号を適当につければ，

$$\frac{C_{25}}{j} \leq \max_{(r,\varphi)\in X_j^{(\cdot)}} |\cos\varphi| \leq \frac{C_{26}}{j}$$

$$C_{27} j \leq \min_{(r,\varphi)\in X_j^{(\cdot)}} |\tau(r,\varphi)| \leq \max_{(r,\varphi)\in X_j^{(\cdot)}} |\tau(r,\varphi)| \leq C_{28} j$$

が成立することを示せ．ただし，C_{25}，C_{26}，C_{27}，C_{28} は系にのみ依存する定数である．（Appendix 3 参照）

§5. Transversal Fibre の構成．

この§における我々の目的は，§3において水平線，垂直線が果した役割を演ずる Fibres の構成である．標準的な構成方法は Hopf = Sinai によって与えられている（[5]，[12]）．

我々は，Lemma 4.3，Lemma 4.4 を考慮して，次のような曲線の列を考えよう．$x \in M_1$ に対して，$x_n \equiv T^{-n}x$ を通る滑らかで単調減少な曲線 $\gamma_n^{(n)}$ をとる．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\gamma_0^{(n)} \equiv T^n \gamma_n^{(n)}$$

とおくとき，もし，$\gamma_0^{(n)}$ が x の近傍で $n \to \infty$ と共にある定曲線に収束すれば，それが局所的な fibre を与えていることになる．この収束を示すことを考えよう．

準備として，次の量を考える．

$d^-(x) \equiv x$ と $S \cup T^{-1}S$ の距離

$d^+(x) \equiv x$ と $S \cup TS$ の距離．

Lemma 5.1.

(i) $\displaystyle\int [d^{(\pm)}(x)]^{-\alpha}\, d\nu < \infty \qquad 0<\alpha<1$

(ii) $\displaystyle D^{\pm}(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} (1+\eta)^{-i} / d^{\pm}(T^{\pm i}x) < \infty \quad a.e.$

(iii) $\displaystyle\int [D^{\pm}(x)]^{\alpha} d\nu < \infty \qquad 0<\alpha<1.$

証明．Tの不連続性の状態から（演習問題4.2参照），φを固定したとき，高さφの直線γと$T^{-1}S$との交点の数は高々 定数$/|\cos\varphi|$である．また，$T^{-1}S$の曲線の勾配が $-k_{min}$ と $-K_{max}$ にはさまれていることからその直線γ上の点xに対し

$$d^-(x) \geq const \cdot dis\,(x,\ \gamma \cap T^{-1}S)$$

が成立する．一般に区間 $[0, a]$ に N ヶの点集合 $A = \{r_j\}$ があるとき，$d(r) \equiv dis\,(r, A)$ ，$r \in [0, a]$ とおくと

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\int [d(r)]^{-\alpha} dr \le \sum_{j=0}^{N} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \left[\frac{1}{|r-r_j|^{\alpha}} + \frac{1}{|r-r_{j+1}|^{\alpha}}\right] dr$$

$$\le \frac{2}{1-\alpha} \sum_{j=0}^{N} |r_{j+1} - r_j|^{1-\alpha} \le \frac{2(N+1)^{\alpha}}{1-\alpha}$$

が成立するから，(i) が得られる．$0<\alpha<1$ だから

$$\int [D^{\pm}(x)]^{\alpha} d\nu < \sum_{i=1}^{\alpha} (1+\eta)^{-i\alpha} \int [d^{\pm}(T^{\pm i} x)]^{-\alpha} d\nu < \infty$$

により，(iii) が得られ，従って (ii) を得る．

滑らかな曲線 γ に対して $\theta(\gamma)$ で φ-方向の全変動を表わしたが，γ が連結でなく，区分的に連結で滑らかな曲線の可算和になっているとき，$\theta(\gamma)$ で各連結成分に対する全変動の総和を表わすことにしよう．

$D^{-}(\bar{x})<\infty$ なる $\bar{x}$ を固定しよう．$\bar{x}_n \equiv T^{-n}\bar{x}$ を通る滑らかな単調減少曲線 $\gamma_n^{(n)}$ をとる。$\gamma_0^{(n)} \equiv T^n \gamma_n^{(n)}$ の $\bar{x}$ を含む連結成分 $\bar{\gamma}_0^{(n)}$ は，n, $\gamma_n^{(n)}$ によらぬ $\Delta(x)$ が存在して，評価

$$\theta(\bar{\gamma}_0^{(n)}) \ge \Delta$$

が成立することを示そう。(Appendix 9 の証明の仕方でもよい．)

一般に，$\bar{x}_n \in \tilde{\gamma}_n \subset \gamma_n^{(n)}$ なる連結曲線 $\tilde{\gamma}_n$ において，もし $\tilde{\gamma}_i \equiv T^{n-i}\tilde{\gamma}_n$ が

$$(5.1) \qquad \theta(\tilde{\gamma}_i) \le \left(1+\frac{1}{k_{min}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d^{-}(T^{-i}\bar{x}) \qquad 1 \le i \le n$$

を充たすならば，$d^{-}(\cdot)$ の定義から，$\tilde{\gamma}_n$ 上で T^n が連続となり，$\tilde{\gamma}_0$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

は連結になる．Lemma 4.4 から

$$\theta(\tilde{\gamma}_i) \leq (1+\eta)^{-i}\theta(\tilde{\gamma}_0)$$

だから　$c_1 \equiv (1+1/k^2_{min})^{-1/2}$ とおいて，

$$(1+\eta)^{-i}\theta(\tilde{\gamma}_0) \leq c_1 d^-(T^{-i}\bar{x}) \qquad 1 \leq i \leq n$$

ならば (5.1) が成立するから，もっと強く，

$$(5.2) \qquad \theta(\tilde{\gamma}_0) \leq \frac{c_1}{D(x)}$$

ならば，$\hat{\gamma}_0 \subset \gamma_0^{(n)}$ となる．言いかえれば，$\Delta(x) \equiv \dfrac{c_1}{D(x)}$ ととればよい．

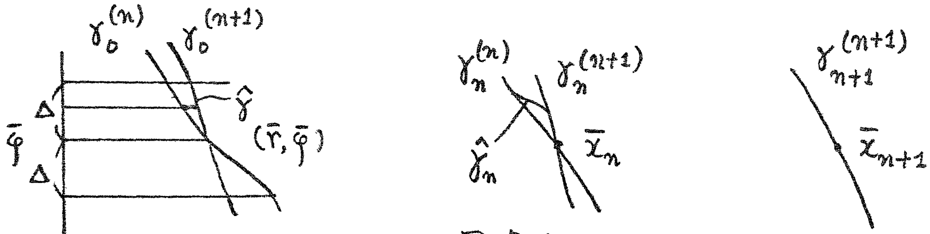


図 5-1

続いて $[\bar{\varphi}-\Delta, \bar{\varphi}+\Delta]$ で $\gamma_0^{(n)}$ が一様収束することを示そう．$\hat{\varphi} \in [\bar{\varphi}-\Delta, \bar{\varphi}+\Delta]$ を固定し，高さ $\hat{\varphi}$ の水平線の $\gamma_0^{(n)}$ と $\gamma_0^{(n+1)}$ による切片を $\hat{\gamma}^{(n)}$ としよう。上の議論から $\hat{\gamma}^{(n)}$ 上で T^{-n} が連続となり，$\hat{\gamma}_n^{(n)} = T^{-n}\hat{\gamma}^{(n)}$ は連結で，その全変動 $\rho(\hat{\gamma}_n)$ は，

$$\rho(\hat{\gamma}_n^{(n)}) \leq \pi/k_{min}$$

と評価される．一方 Lemma 4.3 から，$\hat{\gamma}_i^{(n)} \equiv T^{-i}\hat{\gamma}^{(n)}$ の方程式

$\varphi_i = \psi_i(r_i)$ に対し

$$\left(1+\frac{\tau(r_{i+1},\psi_{i+1})\left(\frac{d\psi_i}{dr_i}+k(r_i)\right)}{\cos\psi_i}\right) \geq 1+\eta \qquad 0 \leq i < n-1$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

が成立することに注意すれば，評価

$$\rho(\hat{\gamma}^{(n)}) \leq \frac{1}{|\cos\hat{\varphi}|}(1+\eta)^{-n}\rho(\hat{\gamma}_n) \leq \frac{\pi}{k_{min}}\frac{(1+\eta)^{-n}}{|\cos\varphi|}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho(\hat{\gamma}^{(n)}) \leq \frac{\pi}{k_{min}\,\eta\,\min|\cos(\bar{\varphi}\pm\Delta)|} < \infty$$

が $\hat{\varphi}\in[\bar{\varphi}-\Delta,\bar{\varphi}+\Delta]$ で成立するから $\gamma_0^{(n)}$ は一様収束する。その極限を γ_0 としよう。

次に γ_0 が滑らかであることを示し，その勾配を求めよう．近似列 $\gamma_0^{(n)}$ は，その方程式を $\varphi=\psi^{(n)}(r)$ とすれば，Lemma 4.4 から

$$k_{min} \leq -\frac{d\psi^{(n)}}{dr} \leq K_{max}$$

が成立するから，γ_0 は Lipschitz 連続な曲線である．従ってその方程式 $\varphi=\psi(r)$ は絶対連続でありその密度は

$$k_{min} \leq -\frac{d\psi}{dr} \leq K_{max}.$$

$T^{-j}\gamma_0 \equiv \gamma_j$ とおくと，$T^{j-n}\gamma_n^{(n)}$ が $\bar{z}_j=T^{-j}\bar{z}$ の近傍で $n\to\infty$ と共に γ_j に収束する。γ_j はやはりその方程式が絶対連続になる単調減少曲線である。これが任意の $j\geq 0$ に対して成立するから，T^{-j} は γ_0 上で滑らかであり，Lemma 4.3 を繰返し使用して

$$\frac{d\psi}{dr} = -k(r) - \cfrac{\cos\psi}{\tau(r_1,\psi_1)} + \cfrac{1}{\cfrac{2k(r_1)}{\cos\psi_1}} + \cfrac{1}{\tau(r_2,\psi_2)} + \cfrac{1}{\cfrac{2k(r_2)}{\cos\psi_2}}$$

$$+\cdots+\cfrac{1}{\cfrac{2k(r_{j-1})}{\cos\psi_{j-1}}} + \cfrac{1}{\tau(r_j,\psi_j)} + \cfrac{1}{\cfrac{k(r_j)-\frac{d\psi_j}{dr_j}}{\cos\psi_j}}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

なる連分数で $\frac{d\psi}{dr}$ が表わされる。この連分数は $j\to\infty$ で一様に収束しその極限は、$\chi^{(c)}(r,\varphi)\equiv -\cos\varphi\,\kappa^{(c)}(r,\varphi)+k(r)$ である。

ただし

$$(5.3)\qquad \kappa^{(c)}(r,\varphi)\equiv\frac{2k(r)}{\cos\varphi}+\frac{1}{|\tau(r_1,\varphi_1)}+\frac{1}{\left|\dfrac{2k(r_1)}{\cos\varphi_1}\right.}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\left|\dfrac{2k(r_{n-1})}{\cos\varphi_{n-1}}\right.}+\frac{1}{|\tau(r_n,\varphi_n)}+\cdots\ .$$

最後に、$x=(r,\varphi)\notin\bigcup_{j=0}^{\infty}T^{-j}S$ ならば連分数 (5.3) の係数が、(r,φ) で連続であることから $\kappa^{(c)}(r,\varphi)$. 従って $\chi^{(c)}(r,\varphi)$ が連続であることと、γ_0 上で全ての T^{-j}, $j\geq 0$ が連続だから、$x\in\gamma_0$ ならば、$x\notin\bigcup_{j=0}^{\infty}T^{-j}S$ に注意すれば、$\chi^{(c)}(r,\varphi)$ が γ_0 上で連続となり、$\varphi=\psi(r)$ 自身が一回連続微分可能になる。

以上のことをまとめて、

Lemma 5.2. $D^{-}(x)<\infty$ なる $x=(r,\varphi)$ に対して、$[\varphi-\Delta,\varphi+\Delta]$ で滑らかな単調減少な曲線 $\gamma_0\ni x$ が存在し、

(i) T^{-j} が γ_0 上で連続でかつ $T^{-j}\gamma_0$ は単調減少曲線、$0\leq j<\infty$.

(ii) γ_0 の方程式を $\varphi=\psi(r)$ とすると

$$\frac{d\psi}{dr}=\chi^{(c)}(r,\psi).$$

(iii) $\gamma_n\equiv T^{-n}\gamma_0$ の方程式を $\varphi=\psi_n(r)$ とすると

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\frac{d\psi_n}{dr_n} = \chi^{(c)}(r_n, \psi_n).$$

これで局所的な fibre が構成できた。この $D^-(x)<\infty$ なる各点 x で構成された曲線を $\tilde{\gamma}^{(c)}(x)$ と記そう。

(5.4) $$\Gamma^{(c)}(x) \equiv \bigcup_i T^i \tilde{\gamma}^{(c)}(T^{-i}x).$$

$i>0$ に対し，$T^{-i}\tilde{\gamma}^{(c)}(T^{-i}x)$ は，長さ有限の滑らかな単調減少曲線の和であるが，総変動は

$$\theta(T^i \tilde{\gamma}^{(c)}(T^{-i}x)) \geq (1+\eta)^i \Delta(T^{-i}x).$$

これと再帰定理から，$\Gamma^{(c)}(x)$ は総全変動無限大であり，各々は有限で滑らかな単調減少曲線の可算和である。

$\{\Gamma^{(c)}(x)\}$ が大域的な transversal fibre を与える，すなわち

$$T^i \Gamma^{(c)}(T^{-i}x) = \Gamma^{(c)}(x)$$

であることは構成において近似列のとり方によらないことから明らかである。

$\gamma^{(c)}(x)$ で $\Gamma^{(c)}(x)$ の x を含む連結成分を表わそう。$\{\gamma^{(c)}(x); x\}$ は M_1 の可測な分割を与える。それを $\zeta^{(c)}$ とする。

Proposition 5.1.

(i) $\zeta^{(c)} = \bigvee_{k=0}^{\infty} T^k \alpha^{(c)}$

(ii) $T^{-1}\zeta^{(c)} > \zeta^{(c)}$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

(iii) $\bigvee_{k\geq 0} T^{-k}\zeta^{(c)} = \varepsilon$

(iv) $\bigwedge_{k} T^{-k}\zeta^{(c)} = \{\Gamma^{(c)}\}$ の可測被覆.

証明. (iv) は

$$\Gamma^{(c)}(x) = \bigcup_{i} T^{i}\gamma^{(c)}(T^{-i}x)$$

から明らか。

(iii) は $i\leq 0$

$$\theta(T^{i}\gamma^{(c)}(T^{-i}x)) \leq (1+\eta)^{i}\theta(\gamma^{(c)}(T^{-i}x)) < \pi(1+\eta)^{i}$$

だから, $i\to -\infty$ のとき各点が分離される。

(i)を示せば (ii)は明らかである。

(i)の証明. $\gamma^{(c)}(x)$ 上では, T^{-i}, $0\leq i<\infty$, が連続だから $\gamma^{(c)}(x)$ は $T^{i}\alpha^{(c)}$ の一つの要素に含まれる. 従って $\zeta^{(c)}\geq T^{i}\alpha^{(c)}$ $\forall i\geq 0$. すなわち $\zeta^{(c)}\geq \bigvee_{i\geq 0} T^{i}\alpha^{(c)}$.

逆に, もし x, y が存在して $\gamma^{(c)}(x)$, $\gamma^{(c)}(y)$ が $\bigvee_{i\geq 0} T^{i}\alpha^{(c)}$ の同じ要素に属していたとしよう. $T^{-i}x$, $T^{-i}y$ の位置は, $T^{-i}x$ を原点として $T^{-i}y$ は斜線(開集合)の第1, 第3象限には存在しない。何故ならば, $T^{-i}x$, $T^{-i}y$ は $\alpha^{(c)}$ の同じ要素に含まれているが,

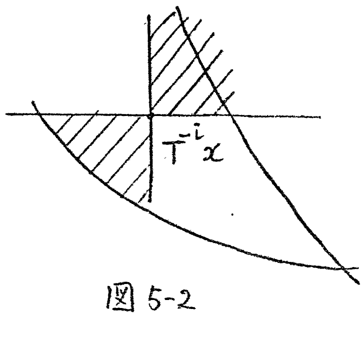


図 5-2

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

もし $T^{-i}y$ が斜線の部分にあれば，$T^{-i}y$ と $T^{-i}x$ を結ぶ単調増加な曲線 γ が存在する。かつまた，γ が $\alpha^{(c)}$ の同じ要素に入る．各 $j \geq 0$ に対し $T^{j}\gamma$ は $T^{-i-j}y$ と $T^{-i-j}x$ を結ぶ単調増加な曲線であり，$T^{-i-j}y$ と $T^{-i-j}x$ が $\alpha^{(c)}$ の同じ要素に含まれることから $T^{-j}\gamma$ もまた同じ要素に含まれる連結な曲線である．γ の変動は

$$2\pi \geq \theta(T^{-j}\gamma) \geq (1+\eta)^{j}\theta(\gamma) \qquad \forall j \geq 0$$

だから $\theta(\gamma)=0$，すなわち $\varphi(x)=\varphi(y)$ のときに限る．

そこで，$n>0$ に対し，$\gamma_n^{(n)}$ を $T^{-n}x$ と $T^{-n}y$ を結ぶ単調減少な曲線で，$\gamma_n^{(n)}$ が $\bigvee_{j=0}^{n} T^{j}\alpha^{(c)}$ の一つの要素に含まれるようにとれる。$T^{n}\gamma_n^{(n)} \equiv \gamma_0^{(n)}$ は x, y を結びかつ，$n \to \infty$ のとき $\gamma^{(c)}(x)$ の一部分へ収束するから $y \in \gamma^{(c)}(x)$．すなわち $\gamma^{(c)}(y)=\gamma^{(c)}(x)$ が出る．

同様にして，単調増加な曲線 $\gamma^{(e)}(x)$，$\Gamma^{(e)}(x)$ も構成できる。

Lemma 5.3. $D^{+}(x) < \infty$ なる x に対して，単調増加で滑らかな曲線 $\gamma^{(e)}(x)$ が存在して，

(i) T^{j} $(0 \leq j < \infty)$ が $\gamma^{(e)}(x)$ 上で連続

$T^{j}\gamma^{(e)}(x)$ もまた単調増加な曲線

(ii) $\gamma^{(e)}$ の勾配は

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\frac{d\psi}{dr} = \chi^{(e)}(r, \psi)$$

$$\chi^{(e)}(r,\varphi) = -\cos\varphi\, \kappa^{(e)}(r,\varphi) + k(r)$$

$$\kappa^{(e)}(r,\varphi) \equiv \frac{1}{|-\tau(r,\varphi)} + \frac{1}{\left|-\frac{2k(r_{-1})}{\cos\varphi_{-1}}\right.} + \frac{1}{|-\tau(r_{-1},\varphi_{-1})} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{|-\tau(r_{-n},\varphi_{-n})} + \frac{1}{\left|-\frac{2k(r_{-n})}{\cos\varphi_{-n}}\right.} + \cdots$$

(iii) $T^n \gamma^{(e)}(T^{-n}x) \subset \gamma^{(e)}(x) \qquad n \geq 0$

特に

$$\frac{d\psi_{-n}}{dr_{-n}} = \chi^{(e)}(r_{-n}, \psi_{-n}).$$

Proposition 5.2.

$$\zeta^{(e)} \equiv \{\zeta^{(e)}(x)\} \qquad \Gamma^{(e)}(x) \equiv \bigcup T^k \gamma^{(e)}(T^{-k}x).$$

(i) $\zeta^{(e)} = \bigvee_{k=0}^{-\infty} T^k \alpha^{(e)}.$

(ii) $T\zeta^{(e)} > \zeta^{(e)}$

(iii) $\bigvee_{k\leq 0} T^{-k} \zeta^{(e)} = \varepsilon$

(iv) $\bigwedge_k T^k \zeta^{(e)} = \{\Gamma^{(e)}\}$ の可測被覆

も同様に証明される.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

§6. Lemma.

前§で構成した Foliations の正則性を示すための準備 Lemma を用意しよう。

下図のように相対する二つの単調増加な曲線と相対する単調減少な曲線によって囲まれた M_1 上の図形 G を四辺形と呼ぶ。

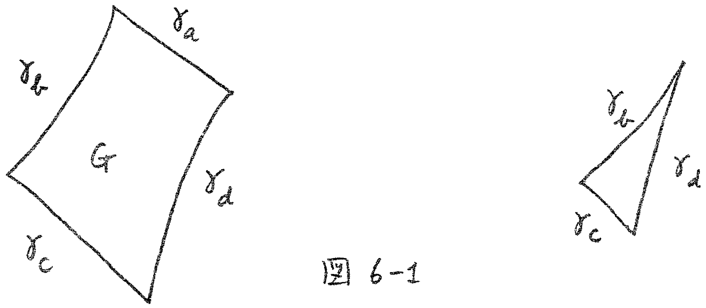


図 6-1

図のように，G の各辺に名前をつけて，$\gamma_a(G)$，$\gamma_b(G)$，$\gamma_c(G)$，$\gamma_d(G)$ で G の辺であることを示す。もしこれらの一ないし二辺が縮退して一点になっているとき，三辺形，二辺形と呼び，辺の名前は四辺形の場合を踏襲する。

一般に，曲線 γ の勾配が k_{min}，K_{max} ではさまれていれば，γ を K-増加と呼び，γ の勾配が，$-K_{max}$，$-k_{min}$ ではさまれていれば K-減少と呼ぶ。特に G の辺が K-増加と K-減少曲線で囲まれているとき，K-四辺形であるという。

今，G 上で，T^{-1} が連続で，$T^{-1}G$ もまた四辺形ならば，

$$T^{-1}\gamma_a(G) = \gamma_c(T^{-1}G), \quad T^{-1}\gamma_c(G) = \gamma_a(T^{-1}G)$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$T^{-1}\gamma_b(G)=\gamma_d(T^{-1}G),\quad T^{-1}\gamma_d(G)=\gamma_b(T^{-1}G)$$

が成立することに注意しておこう。

我々の目的は，$\tilde{G}$ を四辺形，T^{-m} が $\tilde{G}$ 上で連続で $\tilde{G}_m \equiv T^{-m}\tilde{G}$ もまた四辺形であるとする．次図のような $\tilde{G}_m$ 内の四辺形 $\tilde{\tilde{G}}_m$ を考えたとき

$$\frac{\nu(\tilde{\tilde{G}})}{\nu(\tilde{G})}=\frac{\nu(\tilde{\tilde{G}}_m)}{\nu(\tilde{G}_m)},\qquad \tilde{\tilde{G}}\equiv T^m\tilde{\tilde{G}}_m$$

の値を

$$\theta(\gamma_b(\tilde{\tilde{G}}_m))/\theta(\gamma_b(\tilde{G}_m))$$

で評価することである.

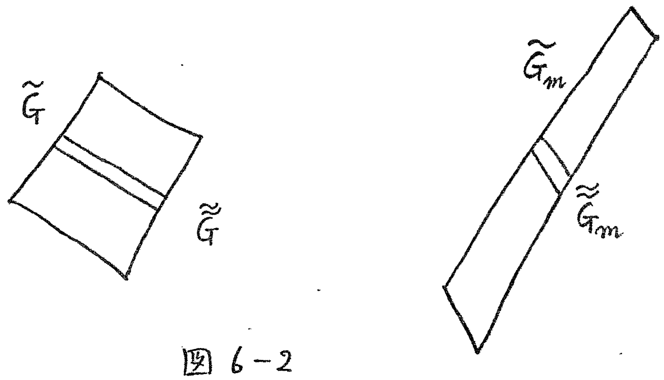


図 6-2

簡便のため次の記号を導入しておく.

$\max\theta_{in}(G)\equiv\max\{\theta(\gamma);\ \gamma\subset G$, 増加$\}$

$\max\theta_{de}(G)\equiv\max\{\theta(\gamma);\ \gamma\subset G$, 減少$\}$

$\min\theta_{in}(G)\equiv\min\{\theta(\gamma);\ \gamma\subset G$, K-増加, γ は $\gamma_a(G)$ と

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$\gamma_c(G)$ を結ぶ$\}$

$$\min \theta_{de}(G) \equiv \min\{\theta(\gamma);\ \gamma\subset G,\ K\text{-減少},\ \gamma \text{は} \gamma_c(G) \text{と} \gamma_d(G) \text{を結ぶ}\}$$

$\max \rho_{in}(G)$, $\max \rho_{de}(G)$, $\min \rho_{in}(G)$, $\min \rho_{de}(G)$ も同様.

$$\max\cos(G) \equiv \max_{x\in G} |\cos\varphi(x)|$$

$$\min\cos(G) \equiv \min_{x\in G} |\cos\varphi(x)|$$

$$\max\tau(G) \equiv \max_{x\in G} |\tau(x)|$$

$$\min\tau(G) \equiv \min_{x\in G} |\tau(x)|$$

$$\max\tau_1(G) \equiv \max_{x\in G} |\tau(T^{-1}x)|$$

$$\min\tau_1(G) \equiv \min_{x\in G} |\tau(T^{-1}x)|.$$

γ を M_1 内の曲線で，その方程式は，

$$\varphi=\psi(r),\ \text{もしくは}\ r=u(\varphi)$$

で与えられているとしよう． $a=a(r,\varphi)$; $(r,\varphi)\in\gamma$ を γ 上で定義された函数とし，$\gamma_i\equiv T^{-i}\gamma$ とおき γ_i の方程式は

$$\varphi=\psi_i(r),\ \text{もしくは}\ r=u_i(\varphi)$$

であるとする。γ_i 上の函数 $a_i(r_i,\varphi_i)$ を

$$a_i \equiv -k(r_i) - \cfrac{\cos\varphi_i}{\tau(r_{i+1},\varphi_{i+1}) - \cfrac{\cos\varphi_{i+1}}{a_{i+1}-k(r_{i+1})}} \tag{6.1}$$

あるいは，同じことだが，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$(6.2) \qquad a_{i+1} \equiv k(r_{i+1}) + \frac{\cos\varphi_{i+1}}{\tau(r_{i+1}, \varphi_{i+1}) + \dfrac{\cos\varphi_i}{a_i + k(r_i)}}$$

で与えられているとしよう．このとき明らかに，$a_{i+1} \leq 0$ $(a_i \geq 0)$ ならば，

$$k_{min} \leq -a_i \leq K_{max} \quad (k_{min} \leq a_{i+1} \leq K_{max})$$

が成立する．いま，$k_i = k(u_i(\varphi_i))$，$\tau_i \equiv \tau(u_i(\varphi_i), \varphi_i)$ と略記し，$\Lambda_i^* = \Lambda_i^*(r, \varphi; \gamma)$ および $\Lambda_{i+1} = \Lambda_{i+1}(r\varphi; \gamma)$ を

$$\Lambda_i^* \equiv \left\{ \frac{k_i \cos\varphi_{i+1}}{\cos\varphi_i} + k_{i+1} + \frac{\tau_{i+1} k_i k_{i+1}}{\cos\varphi_i} \right\} \frac{du_{i+1}}{d\varphi_{i+1}} - \left[1 + \frac{\tau_{i+1} k_i}{\cos\varphi_i} \right]$$

$$\Lambda_{i+1} \equiv -\left\{ \frac{k_{i+1} \cos\varphi_i}{\cos\varphi_{i+1}} + k_i + \frac{\tau_{i+1} k_i k_{i+1}}{\cos\varphi_{i+1}} \right\} \frac{du_i}{d\varphi_i} - \left[1 + \frac{\tau_{i+1} k_{i+1}}{\cos\varphi_{i+1}} \right]$$

で定義し，$\zeta_i^* = \zeta_i^*(\varphi; a_0)$ および $\zeta_{i+1} = \zeta_{i+1}(\varphi; a_0)$ を

$$\zeta_i^* \equiv \frac{2k_i}{\cos\varphi_i} \left\{ \tau_{i+1} - \frac{\cos\varphi_{i+1}}{a_{i+1} - k_{i+1}} \right\}$$

$$\zeta_{i+1} \equiv \frac{2k_{i+1}}{\cos\varphi_{i+1}} \left\{ \tau_{i+1} + \frac{\cos\varphi_i}{a_i + k_i} \right\}$$

で定義する。このとき Lemma 4.3 からわかるように

$$\frac{d\varphi_i}{d\varphi_{i+1}} = \Lambda_i^*, \qquad \frac{d\varphi_{i+1}}{d\varphi_i} = \Lambda_{i+1}$$

が成立し，γ が減少（増加）ならば

$$-\Lambda_i^* \geq 1 + \eta \qquad (-\Lambda_{i+1} \geq 1 + \eta)$$

が成立し，$a_{i+1} \leq 0$ $(a_i \geq 0)$ ならば，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\zeta_i^* \geq 2\eta \quad (\zeta_{i+1} \geq 2\eta)$$

が成立することを注意しておこう。再び Lemma 4.3 により

$$\frac{d\tau(u_{i+1}, \varphi_{i+1})}{d\varphi_{i+1}} = -\sin\varphi_i \frac{du_i}{d\varphi_i} \frac{1}{\Lambda_{i+1}} + \sin\varphi_{i+1} \frac{du_{i+1}}{d\varphi_{i+1}}$$

$$\frac{d\tau(u_{i+1}, \varphi_{i+1})}{d\varphi_i} = -\sin\varphi_i \frac{du_i}{d\varphi_i} + \sin\varphi_{i+1} \frac{du_{i+1}}{d\varphi_{i+1}} \frac{1}{\Lambda_i^*}$$

が成立することから，次の Lemma が導かれる．

Lemma 6.1. γ_i に沿っての微分は次のようである．

$$\frac{d}{d\varphi_{i+1}} \log(a_{i+1}+k_{i+1}) = \frac{2}{(a_{i+1}+k_{i+1})} \frac{dk_{i+1}}{du_{i+1}} \frac{du_{i+1}}{d\varphi_{i+1}} +$$

$$- \frac{\sin\varphi_{i+1}}{\cos\varphi_{i+1}(1+\zeta_{i+1})} \left\{1 + (a_{i+1}-k_{i+1}) \frac{du_{i+1}}{d\varphi_{i+1}}\right\}$$

$$+ \frac{\sin\varphi_i}{(1+\zeta_{i+1})\Lambda_{i+1}} \cdot \frac{1}{\tau_{i+1}(a_i+k_i)+\cos\varphi_i} \left\{1 + (a_i+k_i)\frac{du_i}{d\varphi_i}\right\}$$

$$+ \frac{1}{(1+\zeta_{i+1})\left(1+\frac{\tau_{i+1}(a_i+k_i)}{\cos\varphi_i}\right)\Lambda_{i+1}} \frac{d}{d\varphi_i} \log(a_i+k_i)$$

$$\frac{d}{d\varphi_i} \log(k_i-a_i) = \frac{2}{k_i-a_i} \frac{dk_i}{du_i} \frac{du_{i+1}}{d\varphi_{i+1}}$$

$$- \frac{\sin\varphi_i}{\cos\varphi_i(1+\zeta_i^*)} \left\{1 + (k_i+a_i)\frac{du_i}{d\varphi_i}\right\}$$

$$+ \frac{\sin\varphi_{i+1}}{(1+\zeta_i^*)\Lambda_i^*} \frac{1}{\tau_{i+1}(k_{i+1}-a_{i+1})+\cos\varphi_{i+1}} \left\{1 - (k_{i+1}-a_{i+1})\frac{du_{i+1}}{d\varphi_{i+1}}\right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$+\frac{1}{(1+\zeta_i^*)\left(1+\frac{\tau_{i+1}(k_{i+1}-a_{i+1})}{\cos\varphi_{i+1}}\right)\Lambda_i^*}\frac{d}{d\varphi_{i+1}}\log(k_{i+1}-a_{i+1}).$$

この Lemma 6.1 から次の Lemma が導かれる（証明は Appendix 4 を参照）。

Lemma 6.2. 定数 c_{12} が存在し, $m>0$ に対し,

Case 1. $a_0\geq 0$, γ が K-増加ならば,

$$\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log(a_m+k_m)\right|\leq c_{12}+(1+\eta)^{-3m}\left|\frac{d}{d\varphi_0}\log(a_0+k_0)\right|.$$

Case 2. $a_0\geq 0$, $T^{-m}\gamma$ が K-減少ならば,

$$\left|\frac{d}{d\varphi_0}\log(a_m+k_m)\right|\leq c_{12}(1+\eta)^{-m}+(1+\eta)^{-2m}\left|\frac{d}{d\varphi_0}\log(a_0+k_0)\right|.$$

Case 3. $a_m\leq 0$, γ が K-増加ならば,

$$\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log(k_0-a_0)\right|\leq c_{12}(1+\eta)^{-m}+(1+\eta)^{-2m}\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log(k_m-a_m)\right|.$$

Case 4. $a_m\leq 0$, γ が K-減少ならば,

$$\left|\frac{d}{d\varphi_0}\log(k_0-a_0)\right|\leq c_{12}+(1+\eta)^{-3m}\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log(k_m-a_m)\right|.$$

さて, M_1 上の単調な曲線 γ が class E(L) に属するとは, γ の方程式 $r=u(\varphi)$ が一回連続微分可能で, γ が増加(減少)ならば

$$\left|\frac{d}{d\varphi}\log\left(k(u(r))\underset{(-)}{+}\frac{1}{u'(\varphi)}\right)\right|\leq L$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

を充たすときに言うことにしよう．念のため，γ の方程式が $\varphi=\psi(r)$ で与えられていれば，この条件は

$$\left|\frac{d}{dr}\log\left(k(r)\underset{(-)}{+}\psi'(r)\right)\right| \leq L\left|\psi'(r)\right|$$

であることを注意しておく．

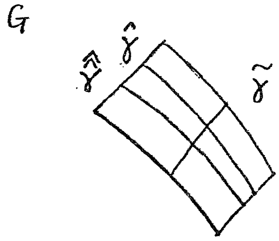
Lemma 6.3. $\gamma_1 \equiv T^{-1}\gamma$.

γ_1 が単調減少，$\gamma_1 \in H^{(2)}(L)$ ならば，

$$\gamma \in E\left(c_{12}+\frac{L}{(1+2\eta)^2(1+\eta)}\right).$$

特に，$L_0 \equiv \left(1+\frac{1}{\eta}\right)c_{12}$ にとれば，$L \geq L_0$ に対し $\gamma_1 \in H^{(2)}(L)$ ならば，$\gamma \in E(L)$．同様に単調増加な γ に対して，$\gamma \in E(L)$ なら $\gamma_1 \in E(L)$。

下図の如き，G, $\hat{\gamma}$, $\hat{\hat{\gamma}}$, $\tilde{\gamma}$, G_m, $\hat{\gamma}_m$, $\hat{\hat{\gamma}}_m$, $\tilde{\gamma}_m$ を考える．



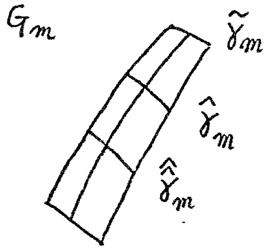


図 6-3

ここに G, $G_m=T^{-m}G$ は K-四辺形．$\hat{\gamma}_m$, $\hat{\hat{\gamma}}_m$ $(\subset G_m)$ は $\gamma_b(G_m)$ と $\gamma_d(G_m)$ を結ぶ K-減少，$\hat{\gamma} \equiv T^m\hat{\gamma}_m$, $\hat{\hat{\gamma}} \equiv T^m\hat{\hat{\gamma}}_m$. $\hat{\gamma}_j \equiv T^{m-j}\hat{\gamma}_m$, $\hat{\hat{\gamma}}_j \equiv T^{m-j}\hat{\hat{\gamma}}_m$ の方程式は

$$r=\hat{u}_j(\varphi), \quad r=\hat{\hat{u}}_j(\varphi)$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

で与えられるものとしよう.

$\tilde{\gamma} \subset G$ は単調増加で, $\gamma_a(\tilde{G})$ と $\gamma_c(\tilde{G})$ を結ぶとし

$$\tilde{\gamma}_j \equiv T^{-j}\tilde{\gamma}\ ,\ r = \tilde{u}_j(\varphi)$$

であるとしよう.

二点 $\hat{\gamma}_j \cap \tilde{\gamma}_j \equiv (\hat{r}_j, \hat{\varphi}_j)$, $\hat{\hat{\gamma}}_j \cap \tilde{\gamma}_j \equiv (\hat{\hat{r}}_j, \hat{\hat{\varphi}}_j)$ を対応させ, 対応する点での比

$$\frac{\hat{\hat{\Lambda}}_j^*}{\hat{\Lambda}_j^*} \equiv \frac{\left\{k(\hat{\hat{r}}_j)\dfrac{\cos\hat{\hat{\varphi}}_{j+1}}{\cos\hat{\hat{\varphi}}_j} + k(\hat{\hat{r}}_{j+1}) + \dfrac{\tau(\hat{\hat{r}}_{j+1}, \hat{\hat{\varphi}}_{j+1})k(\hat{\hat{r}}_j)k(\hat{\hat{r}}_{j+1})}{\cos\hat{\hat{\varphi}}_j}\right\}\dfrac{d\hat{\hat{u}}_{j+1}}{d\hat{\hat{\varphi}}_{j+1}} - \left[1 + \dfrac{\tau(\hat{\hat{r}}_{j+1}, \hat{\hat{\varphi}}_{j+1})k(\hat{\hat{r}}_j)}{\cos\hat{\hat{\varphi}}_j}\right]}{\left\{k(\hat{r}_{j+1})\dfrac{\cos\hat{\varphi}_{j+1}}{\cos\hat{\varphi}_j} + k(\hat{r}_{j+1}) + \dfrac{\tau(\hat{r}_{j+1}, \hat{\varphi}_{j+1})k(\hat{r}_j)k(\hat{r}_{j+1})}{\cos\hat{\varphi}_j}\right\}\dfrac{d\hat{u}_{j+1}}{d\hat{\varphi}_{j+1}} - \left[1 + \dfrac{\tau(\hat{r}_{j+1}, \hat{\varphi}_{j+1})k(\hat{r}_j)}{\cos\hat{\varphi}_j}\right]}$$

の評価をする. $\tilde{\gamma}_m$ に沿って, $a_m(\hat{r}_m, \hat{\varphi}_m) \equiv \dfrac{d\hat{\varphi}_m}{d\hat{u}_m}$, $a_m(\hat{\hat{r}}_m, \hat{\hat{\varphi}}_m) \equiv \dfrac{d\hat{\hat{\varphi}}_m}{d\hat{\hat{u}}_m}$ なる $a_m(r_m, \varphi_m)$; $(r_m, \varphi_m) \in \tilde{\gamma}_m$ を単調な函数として与え Lemma 6.2 を適用することにより 次の Lemma を得る. 証明は Appendix 5 を参照せよ.

Lemma 6.4. $^\exists c_{13}, {}^\exists c_{14} > 0$,

$$\frac{\hat{\hat{\Lambda}}_j^*}{\hat{\Lambda}_j^*} \underset{(\geqq)}{\leqq} \exp^{+}_{(-)}\left[c_{13}(1+\eta)^{j-m}\theta(\tilde{\gamma}_m) + c_{14}(1+\eta)^{j-m}\right] \qquad j \leq m-2$$

$$\frac{\hat{\hat{\Lambda}}_{m-1}^*}{\hat{\Lambda}_{m-1}} \underset{(\geqq)}{\leqq} \exp^{+}_{(-)}\left[c_{15} + \frac{\theta(\tilde{\gamma}_m)}{\min\cos(\tilde{G}_m)}\right] \qquad j = m-1.$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

次に四辺形 $\widehat{G}$ が次のような条件(G)を充たしているとしよう.

条件 G: $\gamma_a(\widetilde{G})$ と $\gamma_c(\widetilde{G})$ を結ぶ K-増加な曲線群 $\{\widetilde{\gamma}\}$ が存在して, $\widehat{G}$ の分割になっていて, 前述の如き, 任意の K-減少な $\hat{\gamma}$, $\hat{\hat{\gamma}}$ に対して, 写像 $\widetilde{\psi}$ を,

$$\hat{\psi} \equiv \widetilde{\psi}_{\hat{\gamma},\hat{\hat{\gamma}}} : \begin{array}{ccc} \hat{\gamma} & \longrightarrow & \hat{\hat{\gamma}} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \widetilde{\gamma}\cap\hat{\gamma} & \longrightarrow & \widetilde{\gamma}\cap\hat{\hat{\gamma}} \end{array}$$

が定義でき. 1:1 onto, $\exists K>0$. 任意の $\hat{\gamma}' \subset \hat{\gamma}$ に対して

$$\frac{\theta(\hat{\psi}\,\hat{\gamma}')}{\theta(\hat{\gamma}')} \underset{(\geqq)}{\leqq} \exp^{+}_{(-)} K .$$

条件(G)に対して次の Remark をしておこう. 証明は Appendix 6 を参照されたい.

Remark 6.1. G が K-四辺形で $\theta(\gamma_a(G)) \geq \theta(\gamma_b(G))$ ならば, $K=c_3$ として条件(G)が成立する. ただし $c_3 \equiv \log\dfrac{c_2(1+c_2)^4}{16}$, $c_2 \equiv \dfrac{K_{max}}{k_{min}}$.

条件(G)の下で,

$$\theta(\hat{\hat{\gamma}}_m) = \int_{\hat{\hat{\gamma}}} \Big[\prod_{j=0}^{m-1} \hat{\hat{\Lambda}}_j^*\Big]^{-1} d\hat{\hat{\psi}}$$

$$\underset{(\geqq)}{\leqq} \exp^{+}_{(-)} K \times \int_{\hat{\gamma}} \Big[\prod_{j=0}^{m-1} \hat{\Lambda}_j^*\Big]^{-1} d\hat{\psi} \times$$

$$\times \exp^{+}_{(-)}\Big[K + c_{15} + (c_{13}\theta(\widetilde{\gamma}_m) + c_{14})\sum_{j=0}^{m-2}(1+\eta)^{j-m} + \frac{c_{16}\theta(\widetilde{\gamma}_m)}{\operatorname{mincos}(\widetilde{G}_m)}\Big]$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\underset{(\geqq)}{\leqq} \theta(\hat{\gamma}_m) \times \exp_{(-)}^{+} \left[K + c_{16} + \frac{\max \theta_{in}(\tilde{G}_m)}{\min \cos(\tilde{G}_m)} \right]$$

ただし $c_{16} = c_{15} + (\pi c_{13} + c_{14})(1+\eta)^2 \eta^{-1}$.

Lemma 6.5. $\tilde{G}$ は条件 (G) を充たし, $\tilde{\tilde{G}} \subset \tilde{G}$ は図 6-2 の如き四辺形であって, $\tilde{G}_m \equiv T^{-m}\tilde{G}$, $\tilde{\tilde{G}}_m \equiv T^{-m}\tilde{\tilde{G}}$ も共に四辺形とする。c_{18}, $c_{19} > 0$ が存在して,

$$\frac{\nu(\tilde{\tilde{G}})}{\nu(\tilde{G})} = \frac{\nu(\tilde{\tilde{G}}_m)}{\nu(\tilde{G}_m)} \leqq \frac{\max \theta_{in}(\tilde{\tilde{G}}_m)}{\theta(\gamma_b(\tilde{G}_m)) - \theta(\gamma_a(\tilde{G}_m))} \times$$

$$\times \exp\left[K + c_{18} + c_{19} \frac{\max \theta_{in}(\tilde{G}_m)}{\min \cos(\tilde{G}_m)} \right].$$

証明. $d\nu = -\nu_0 \cos\varphi \, d\varphi \, dr$ だから

$$\nu(\tilde{\tilde{G}}_m) \leqq \max \cos(\tilde{\tilde{G}}_m) \max \theta_{in}(\tilde{\tilde{G}}_m)$$

$$\times \max \theta_{de}(\tilde{\tilde{G}}_m) \times \frac{2}{k_{min}} \times \nu_0$$

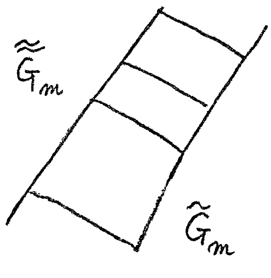


図 6-4

$$\nu(\tilde{G}_m) \geqq \min \cos(\tilde{G}_m) \cdot \min \theta_{in}(\tilde{G}_m)$$

$$\times \min \theta_{de}(\tilde{G}_m) \times \frac{2}{K_{max}} \times \nu_0$$

であることと

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

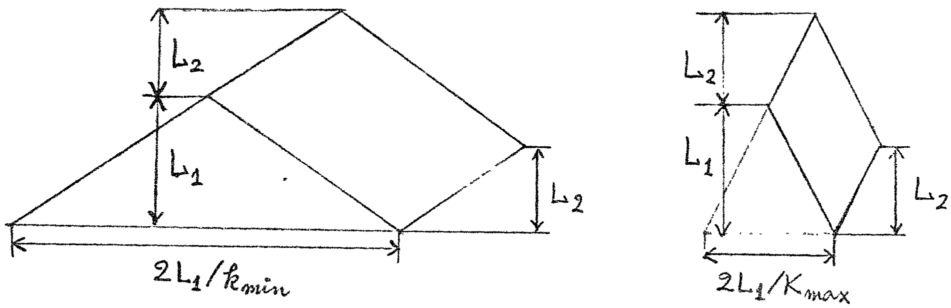
$$\frac{\max\cos(\widetilde{G}_m)}{\min\cos(\widetilde{G}_m)} \leq \exp \frac{\max\theta_{in}(\widetilde{G}_m)}{\min\cos(\widetilde{G}_m)}$$

$$\min\theta_{in}(\widetilde{G}_m) \geq \theta(\gamma_b(\widetilde{G}_m)) - \theta(\gamma_a(\widetilde{G}_m))$$

なることと，前頁でのべたことから

$$\frac{\max\theta_{de}(\widetilde{G}_m)}{\min\theta_{de}(\widetilde{G}_m)} \leq \exp\left[K + C_{17} + \frac{\max\theta_{in}(\widetilde{G}_m)}{\min\cos(\widetilde{G}_m)}\right]$$

なる評価ができるから結論を得る。ただし面積の評価には図6-5を参照されたい。



Gのルベーグ測度は $2L_1 \cdot L_2/k_{min}$　　Gのルベーグ測度は $2L_1L_2/K_{max}$

図 6-5

演習問題 6.1.

$\gamma^{(c)}(x)$, $\gamma^{(e)}(x) \in E(L_0)$を示せ.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

§7. Main Lemma

この§の目的は次の Main Lemma を証明することである．

Lemma 7.1. (Main Lemma)

任意の α $(0<\alpha<1)$，任意の Ω (≥ 1) と任意の ω $(0<\omega<1)$ に対して，自然数 $l_0 = l_0(\alpha, \Omega, \omega)$ が存在して次の性質をもつ．

G が K-四辺形であり，$\gamma_b(G), \gamma_d(G) \in H^{(2)}(L_0)$

$$\min\cos(G) \geq \omega$$

$$\frac{1}{\Omega} \leq \frac{\theta(\gamma_a(G))}{\theta(\gamma_b(G))} \leq \Omega ,$$

さらに，T^{-l_0} が G 上で滑らかで，$T^{-l_0}G$ も四辺形であって，

$\delta_0 = \theta(\gamma_b(G))$ とおくとき，$\omega \geq \delta_0$，

$$T^{-l_0}G \cap V_{l_0}(\delta_0) = \phi$$

ならば，G の可測部分集合 $G^{(\alpha)}$ が存在して

(a) $x \in G^{(\alpha)}$ に対して，$\gamma^{(c)}(x)$ は $\gamma_b(G)$ と $\gamma_d(G)$ を結んでいて，

$\gamma^{(c)}(x) \cap G^* = \gamma^{(c)} \cap G.$

(b) $\nu(G^{(\alpha)}) \geq (1-\alpha)\nu(G)$

(c) $\gamma, \gamma' \in E(L_0)$ を $\gamma_a(G)$ と $\gamma_c(G)$ を結ぶ任意の K-増加曲線とする． canonical map

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & \gamma \cap G^* & \longrightarrow & \gamma' \cap G^* \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longrightarrow & \gamma' \cap \gamma^{(c)}(x) \end{array}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

が絶対連続である。さらに α, ω, Ω, G に依存しない定数 β_1 が存在し

$$\frac{1}{\beta_1} < \frac{d\Psi\sigma}{d\sigma} < \beta_1 .$$

ただし上の Lemma で

$$V_m(\delta) \equiv \{(r,\varphi)\,;\ |\cos\varphi| \le \delta(1+\eta)^{-\frac{m}{32}},\ r \subset \partial Q\}$$

また

Ψ が絶対連続とは，$A \subset \gamma \cap G^*$ に対し

$$\sigma(A) = 0 \iff \sigma(\Psi A) = 0$$

ただし σ は φ 方向変動 θ から導かれる測度，すなわち

$$\sigma(A) = \int_A \theta(d\gamma).$$

証明は次のような考察から始めよう。まず十分大きい k_0 に対して Lemma 7.1 の条件を満たす G を固定する。$m \ge k_0$ に対して，G の分割列 $\pi_0^{(m)} = \{G_{m,s}^{(0)}, H_{m,t}^{(0)}\}$ を次の性質をもつように構成する。

(イ) $\pi_m^{(0)}$ は増加列

(ロ) $\Pi_m^{(0)} \equiv \bigcup_s G_{m,s}^{(0)}$ ，　$\Pi_\infty \equiv \bigcap_{m \ge l_0} \Pi_m^{(0)}$

$\Pi_m^{(0)}$ は単調減少

$$\bigvee_{m=k_0}^{\infty} \pi_m^{(0)} \Big|_{\Pi_\infty} = \zeta^{(c)} \Big|_{\Pi_\infty}$$

$$\pi_{m+1}^{(0)} \Big|_{G-\Pi_m^{(0)}} = \pi_m^{(0)} \Big|_{G-\Pi_m^{(0)}} .$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

(ハ) $x \in \Pi_m^{(0)}$ なる必要十分条件は

$$\gamma^{(c)}(x) \text{ が } \gamma_b(G) \text{ と } \gamma_d(G) \text{ を結ぶ.}$$

(ニ) $G_{m,s}^{(0)}$, $G_{m,s} \equiv T^{-m} G_{m,s}$ 共に四辺形

(ホ) 多くの $G_{m,s}$ に対して

$$\delta_0 (1+\eta)^{-\frac{1}{2}m} \leq \theta(\gamma_b(G_{m,s})) \leq 5\delta_0 (1+\eta)^{-\frac{1}{8}m}.$$

まず手始めに, $c_2 \equiv \dfrac{K_{max}}{k_{min}}$ とおくと, Appendix 6 にみる如く

$$\theta(\gamma_b(T^{-l_0}G)) \geq (1+\eta)^{l_0}\delta_0 - (1+\eta)^{-l_0}\Omega\delta_0 .$$

だから, $T^{-l_0}G$ を次のような四辺形に分割できる.

$$T^{-l_0}G = \bigcup_s G_{l_0,s}$$

$$(1+\eta)^{-\frac{1}{8}l_0}\delta_0 \leq \theta(\gamma_b(G_{l_0,s})) \leq 5(1+\eta)^{-\frac{1}{8}l_0}\delta_0$$

さらに, $\gamma_a(G_{l_0,s})$, $\gamma_c(G_{l_0,s})$ は $\gamma_a(T^{-l_0}G)$ 及び $\gamma_c(T^{-l_0}G)$ に一致するか, ある n が存在して, $\bigcup_{m=0}^{n} T^m S$ の切片になっている.

$$\pi_{l_0} \equiv \{G_{l_0,s}\}$$

$$\Pi_{l_0} \equiv \bigcup_s G_{l_0,s}$$

$$G_{l_0,s}^{(0)} \equiv T^{-l_0} G_{l_0,s},$$

$$\pi_{l_0}^{(0)} \equiv \{G_{l_0,s}^{(0)}\} = T^{-l_0}\pi_{l_0}$$

$$\Pi_{l_0}^{(0)} \equiv \bigcup_s G_{l_0,s}^{(0)} = T^{-l_0}\Pi_{l_0}$$

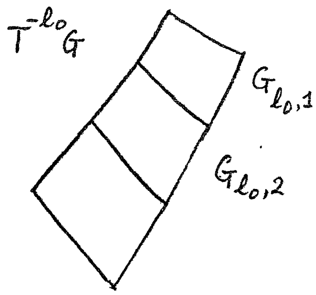


図 7-1

とおく。以下帰納的に行う.

$$\pi_{m-1} = \{G_{m-1,s}, H_{m-1,t}\}, \quad \Pi_{m-1} = \bigcup_s G_{m-1,s}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

が与えられているとして，π_m を構成しよう。

$G_{m-1,s}$ を曲線群 TS で切る。そのとき各部分は，四辺形もしくは三辺形，二辺形になる．四辺形には名前を $O_{m-1,s,j}=G_{m-1,s}\cap X_j^{(c)}$ とつけ，また三辺形（もしくは二辺形）の隣接したものがあれば，それ等を合し，再び三辺形（もしくは二辺形）を得る．それを $Q_{m-1,s,l}$ と名前をつける。

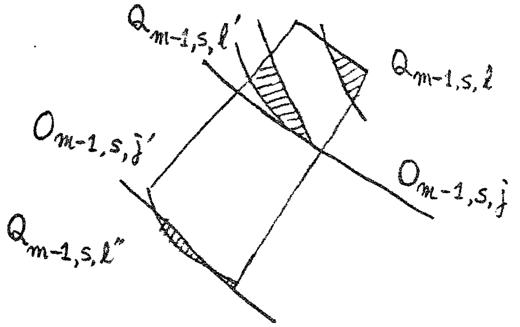


図 7-2

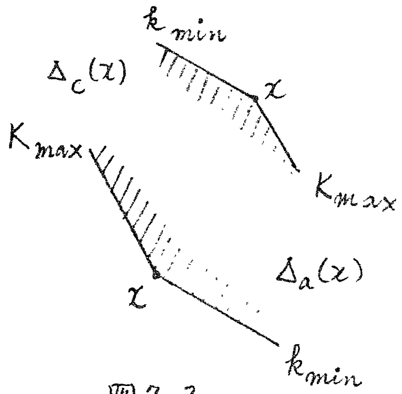


図 7-3

図7-3のように $\Delta_a(x)$ は勾配 $-K_{max}$ の直線の上側と勾配 $-k_{min}$ の直線の上側の共通部分で頂点を x にもつ集合，$\Delta_c(x)$ は，$-K_{max}$ の直線の下側と $-k_{min}$ の直線の下側の共通集合で x を頂点にもつものとする。

$$\bar{O}_{m-1,s,j,a} \equiv O_{m-1,s,j} \cap \bigcup_{x\in\gamma_a(O_{m-1,s,j})} T\Delta_a(T^{-1}x)$$

$$\bar{O}_{m-1,s,j,a} \equiv O_{m-1,s,j} \cap \bigcup_{x\in\gamma_c(O_{m-1,s,j})} T\Delta_a(T^{-1}x)$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$O'_{m-1,s,j} \equiv O_{m-1,s,j} - \bar{O}_{m-1,s,j,a} - \bar{O}_{m-1,s,j,c}$$

は，それぞれ K-四辺形であり，$F_{m-1,s,j} \equiv T^{-1} O'_{m-1,s,j}$ もまた K-四辺形である.

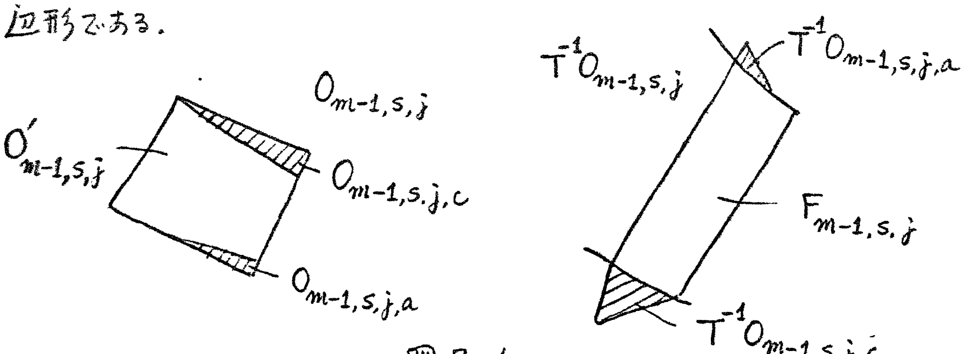


図 7-4

さらに，$F_{m-1,s,l}$ を四辺形に分割する．もし

$$\theta(\gamma_b(F_{m-1,s,j})) < 5\delta_0(1+\eta)^{-\frac{m}{8}}$$

ならば，

$$G_{m-1,s,j,1} \equiv F_{m-1,s,j}.$$

もし

$$\theta(\gamma_b(F_{m-1,s,j})) \geq 5\delta_0(1+\eta)^{-\frac{m}{8}}$$

ならば，四辺形 $G_{m-1,s,j,q}$，$q=1,2,\cdots$ に分割し，

$$\delta_0(1+\eta)^{\frac{m}{8}} \leq \theta(\gamma_b(G_{m-1,s,j,q})) \leq 5\delta_0(1+\eta)^{\frac{m}{8}}$$

であって，その辺 γ_a，γ_c は $F_{m-1,s,j}$ のそれと一致するかあるいは，適当な $n>0$ に対し，$\bigcup_{i=0}^{n} T^i S$ の切片になっているようにできる．

$G_{m-1,s,j,q}$ に適当に番号をつけ直して，$G_{m,s'}$ で表わす．また三辺

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

形，$\{Q_{m-1,s,j}, \bar{O}_{m-1,s,j,a}, \bar{O}_{m-1,s,j,c}\}$ 及び $\{H_{m-1,t}\}$ 等の T^{-1} による像に適当に番号を付して $\{H_{m,t'}\}$ で表わす。

$$\pi_m \equiv \{G_{m,s'}, H_{m,t'}\} \qquad \pi_m^{(0)} \equiv T^m \pi_m$$

$$\Pi_m \equiv \bigcup_{s'} G_{m,s'} \qquad \Pi_m^{(0)} \equiv T^m \Pi_m$$

が構成されるべきものである。

構成の方法から (イ)(ロ)(ハ) は明らかであり，(ハ) は Proposition 5.1 の証明と全く同様にできる。(ホ) は定量的に述べてないわけだから今のところ無意味な主張である。

これから (ホ) を充たす $\{G_{m,s}\}$ の測度の評価を行い l_0 が十分大きくとってあれば，$(1-\alpha)\nu(G)$ 以上であることを示そう。

除外集合

$$R_{m-1}(1) \equiv \bigcup_{s,j} Q_{m-1,s,j}$$

$$R_{m-1}(2) \equiv \bigcup_{s,j} \bar{O}_{m-1,s,j,a} \cup \bigcup_{s,j} \bar{O}_{m-1,s,c}$$

の測度を上から評価するわけだが，便宜的に除外集合を増しておいて行う。以下の議論の中で，l_0 がある程度大きい必要のある場合がある。その条件はその都度指摘し (*) Ep を付しておく。

定義． $O_{m-1,s,j}$ が docile

$$\Longleftrightarrow \quad T^{-1}\gamma_a(O_{m-1,s,j}) \subset S \quad \text{または}$$

$$T^{-1}\gamma_c(O_{m-1,s,j}) \subset S \ .$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

定義． $G_{m,s}$ が narrow

$$\Leftrightarrow \quad \theta(\gamma_b(G_{m,s})) \le \delta_0(1+\eta)^{-\frac{m}{4}}$$

$G_{m,s}$ が wide

$$\Leftrightarrow \quad \theta(\gamma_b(G_{m,s})) \ge \delta_0(1+\eta)^{-\frac{m}{8}}$$

$$R_m(3) \equiv \{G_{m,s}\,;\, G_{m,s} \cap V_m(\delta_0) \ne \phi\}$$

$$R_m(4) \equiv \{G_{m,s}\,;\, \text{narrow}\}.$$

(i) $R_m^*(3) \equiv R_m(3) \cup \{T^{-1}\bar{O}_{m,s,j}\,;\, T^{-1}\bar{O}_{m,s,j} \cap V_m(\delta_0) \ne \phi\}$

の評価．

$$\theta(\gamma_b(G_{m,s})) + \theta(\gamma_c(G_{m,s})) \le 5\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{8}m} + c_4\Omega\delta_0(1+\eta)^{-m}$$

が $c_4 \equiv \Omega - 1 + \frac{c_2}{2}(\Omega+1)$ に対して成立する（Appendix 6 参照）から

$$(*) \qquad (5+c_4\Omega)(1+\eta)^{\frac{1}{16}l_0} < 1$$

ならば

$$G_{m,s} \subset V_m(2\delta_0)$$

$$\begin{aligned} \nu(R_m^*(3)) &\le \nu(V_m(2\delta_0)) \\ &= -\nu_0 \iint_{|\cos\varphi| \le 2\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{32}m}} \cos\varphi \, d\varphi \, dr \\ &= 2(1+\eta)^{-\frac{1}{16}m}\delta_0^2 . \end{aligned}$$

(ii) $R_m^*(4) \equiv R_m(4) - \bigcup_{l=l_0}^{m} T^{-m+l} R_l^*(3)$.

図 4-5 の不連続性曲線の枝分れの法則からも分かるが，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

次図のように (−) と (+) の符号の曲線を結ぶ K-増加曲線 γ は定数 c_{20} が存在して

$$\theta(\gamma) \geq c_{20}$$

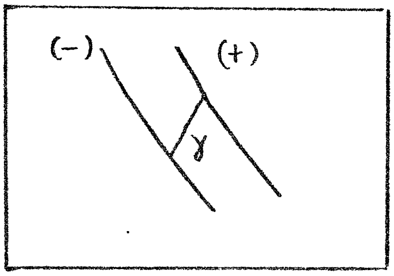


図 7-5

(**) $$10\pi(1+\eta)^{-\frac{1}{16}l_0} < c_{20}$$

を充たすように l_0 をとると，次の事実が成立する．

$$G_{m-1,s_1} \supset O_{m-1,s_1,j_1} \supset TG_{m-1}$$

に対して，

(い) G_{m-1,s_1} は高々一つの not docile component しか含まない．

(ろ) $G_{m,s} \Subset R_m(3)$， O_{m-1,s_1,j_1} が docile

$$\Rightarrow \theta(\gamma_t(G_{m,s})) \geq \delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{8}m}$$

すなわち wide である．

(は) $G_{m,s}$ が not wide， $G_{m,s} \Subset R_m(3)$

$\Rightarrow T^{-1}O_{m-1,s_1,l_1}$ が含む四辺形の component は $G_{m,s}$ のみである．

以上の事実から，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

(に) 各 wide な G_{n,s_n} に対して次のような系列は高々一つしか存在しない。ある p が存在して

$$G_{n,s_n} \supset O_{n,s_n,j_n} \supset TG_{n+1,s_{n+1}} \supset TO_{n+1,s_{n+1},j_{n+1}} \cdots$$
$$\cdots \supset T^{p-1}G_{n+p-1,s_{n+p-1}} \supset T^{p-1}O_{n+p-1,s_{n+p-1},j_{n+p-1}}$$
$$\supset T^{p}G_{n+p,s_{n+p}}$$

$O_{n+i,s_{n+i}}$; $0 \leq i \leq p-1$ not docile

$G_{n+i,s_{n+i}}$; $1 \leq i \leq p$ not wide

$G_{n+p,s_{n+p}}$; narrow.

$\nu(\bigcup_{m=l_0}^{\infty} R^*_m(2))$ の評価をする。

各 wide な $G_{m,s}$ に対して、高々一つの上の系列があるから、その最後の narrow な $G_{m+p,s_{m+p}}$ を考えよう。

$$\gamma_b(G_{m+p,s_p}) \leq \delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{4}(m+p)}$$

$$\gamma_c(G_{m+p,s_p}) \leq c_4\Omega\delta_0(1+\eta)^{-m-p}$$

だから、$\gamma \subset T^{-p}G_{m+p,s_{m+p}}$ なる増加曲線 γ に対し

$$\theta(\gamma) \leq (1+\eta)^{-p}\theta(T^p\gamma) \leq 2\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{4}m-\frac{5}{4}p}$$

すなわち、

$$\max\theta_{in}(T^{-p}G_{m+p,s_p}) \leq 2\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{4}m-\frac{5}{4}p}.$$

$\tilde{G} \equiv T^{m}G_{m,s_m}$, $\tilde{\tilde{G}} \equiv T^{-m-p}G_{m+p,s_{m+p}}$ に対して Lemma 6.5

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

が適用できて

$$\max \cos(G_\ell) \geq \delta_0 (1+\eta)^{-\frac{\ell}{32}} \quad \ell_0 \leq \ell \leq m$$

$$5\delta_0 (1+\eta)^{-\frac{m}{8}} \geq \theta(\gamma_b(\tilde{G}_m)) \geq \delta_0 (1+\eta)^{-\frac{m}{8}}$$

$$\theta(\gamma_a(\tilde{G})),\ \theta(\gamma_c(\tilde{G})) \leq \delta_0 C_4 \Omega (1+\eta)^{-m}$$

に注意すれば，(*)を考慮して，

$$\frac{\nu(\tilde{\tilde{G}})}{\nu(\tilde{G})} \leqslant \frac{2\delta_0 (1+\eta)^{-\frac{1}{4}m-\frac{5}{4}p}}{\frac{1}{2}\delta_0 (1+\eta)^{-\frac{1}{8}m}}$$

$$\times \exp\left[C_3 + C_{18} + C_{19} \frac{2\delta_0 (1+\eta)^{-\frac{1}{4}m}}{\delta_0 (1+\eta)^{-\frac{m}{32}}}\right]$$

$$\leqslant (1+\eta)^{-\frac{1}{8}m} \times C_{21} .$$

ただし

$$C_{21} \equiv 4 \exp[C_3 + C_{18} + 2C_{19}] .$$

従って

$$\nu(G_{m+p, s_p}) \leq C_{21} (1+\eta)^{-\frac{1}{8}m} \nu(G_{m,s}).$$

すなわち各 m 段階目で wide な $G_{m,s}$ から取除かれる $R_m^*(3)$ の集合の全測度は $C_{21}(1+\eta)^{-\frac{1}{8}m}\nu(G)$ で押えられる。

$$\nu\left(\bigcup_{m=\ell_0}^{\infty} R_m^*(3)\right) \leq C_{21} \sum_{m=\ell_0}^{\infty} (1+\eta)^{-\frac{1}{8}m} \nu(G).$$

(iii) $R_m^*(1) \equiv \{Q_{m,s,\ell}\ ;\ G_{m,s} \notin R_m^*(4) \cup \bigcup_{k=0}^{m} T^{-m+k} R_m^*(3)\}$.

$G_{m,s}$ が not narrow だから

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\theta(\gamma_b(G_{m,s})) \geq \delta_0 (1+\eta)^{-\frac{m}{4}}$$

$$\theta(\gamma_a(G_{m,s})),\ \theta(\gamma_c(G_{m,s})) \leq C_4 \Omega \delta_0 (1+\eta)^{-m}.$$

$Q_{m,s,l}$ が三辺だから

$$\max \theta_{in}(Q_{m,s,l}) \leq \delta_0 C_4 \Omega (1+\eta)^{-m}$$

に注意して Lemma 6.5 を適用すれば，

$$\frac{\nu(Q_{m,s,l})}{\nu(G_{m,s})} \leq C_{21} (1+\eta)^{-\frac{3}{4}m}.$$

ところで l_0 を十分大きくとると

(＊＊＊) 各 $G_{m,s}$ に対して $Q_{m,s,l}$ は高々三ヶしか含まない．

ようにできる．理由は，TS が枝分れする点の集積点は高々有限で S 上にあり，そこでは下図のようになっていることによる．

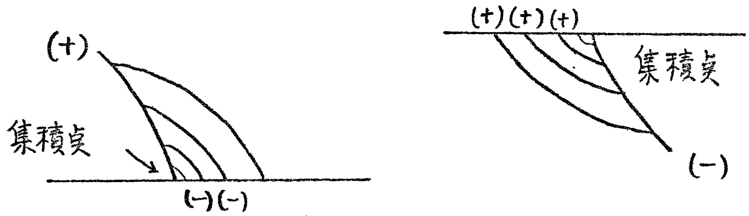


図 7-6

(＊＊＊) から

$$\nu(R_m^*(1)) \leq 3 C_{21} (1+\eta)^{-\frac{3}{4}m} \nu(G)$$

を得る．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

(iv) $$R_m^*(5) \equiv \left\{ \bar{O}_{m,s,j,a},\ \bar{O}_{m,s,j,c}\ ;\ O_{m,s,j} \text{ は not docile} \atop G_{m,s} \notin \bigcup_{l=l_0}^{m} T^{-m+l} R_l^*(3) \cup R_m^*(4) \right\}$$

$$R_m^*(6) \equiv \left\{ \bar{O}_{m,s,j,a},\ \bar{O}_{m,s,j,c}\ ;\ \theta(\gamma_b(O_{m,s,l})) \geq \delta_0 (1+\eta)^{-\frac{m}{2}} \atop G_{m,s} \notin \bigcup_{l=l_0}^{m} T^{-m+l} R_l^*(3) \cup R_m^*(4) \right\}$$

$$R_m^*(7) \equiv \left\{ \bar{O}_{m,s,j,a},\ \bar{O}_{m,s,j,c}\ ;\ \theta(\gamma_b(O_{m,s,j})) \leq \delta_0 (1+\eta)^{-\frac{m}{2}} \atop G_{m,s} \notin R_m^*(4) \cup \bigcup_{l=l_0}^{m} T^{-m+l} R_l^*(3) \right\}$$

とおいて，おのおのについて評価する．

$R_m^*(5)$ に関しては，各 $G_{m,s}$ に関して not docile な component は高々一つであり，$G_{m,s}$ が not narrow だから再び Lemma 6.5 により

$$\nu(R_m^*(5)) \leq 2 c_{21} (1+\eta)^{-\frac{3}{4}m}.$$

$R_m^*(6)$ に関しては，各 $O_{m,s,j}$ について，Lemma 6.5 を適用して

$$\nu(R_m^*(5)) \leq c_{21} (1+\eta)^{-\frac{1}{2}m}$$

を得る．

最後に $R_m^*(7)$ の評価を考えよう．

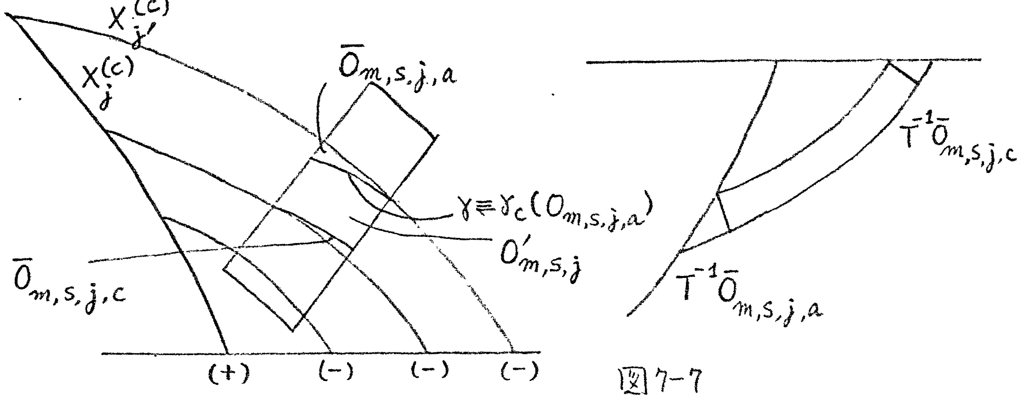


図7−7

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

有限ケの $X_j^{(c)}$; $j=1,2,\cdots,l_1$ を除外して, $X_j^{(c)}$ は上図の如く相対する二つの (−)-曲線と一つの (+)-曲線と S (あるいは, 二つの (+)-曲線と一つの (−)-曲線と S) に囲まれた領域である。$X_{j'}^{(c)}$ を (−)-曲線の上側に隣接している $\alpha^{(c)}$ の要素とする.

Lemma 7.2. 定数 c_{22}, c_{23}, c_{24} が存在して

$$0 \leq \max \tau_1(X_j^{(c)}) - \min \tau_1(X_{j'}^{(c)}) \leq c_{22}.$$

さらに $X_j^{(c)}$ の (−)-曲線と (−)-曲線 (あるいは (+)-曲線と (+)-曲線) を結ぶ K-増加曲線 γ に対して

$$\frac{c_{23}}{j^2} \leq \theta(\gamma) \leq \frac{c_{24}}{j^2} \qquad j \geq l_1$$

なることに注意すれば, (以下上図の場合に説明することにする.)

$$O_{m,s,j} \equiv G_{m,s} \cap X_j^{(c)}$$

は docile だから, $T^{-1}\overline{O}_{m,s,j,c} \subset V_m(\delta_0)$ となり, その評価は (i) で了っている. $O_{m,s,j,a}$ に対しては次の通りである.

$$\gamma \equiv \gamma_c(O_{m,s,j,a}), \quad \gamma_1 \equiv T^{-1}\gamma$$

とおこう. γ_1 の方程式は

$$\gamma_1 = -K_{max}\varphi_1 + const.$$

である。従って γ の方程式 $\varphi = \psi(\gamma)$ は

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\frac{d\psi}{dr} = -k(r) - \frac{\cos\psi}{\tau(r_1,\psi_1) + \dfrac{\cos\psi_1}{K_{max}+k(r_1)}} .$$

一方 $\tilde{\gamma} \equiv \gamma_a(O_{m,s,j})$ の方程式は，

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dr} = -k(r) - \frac{\cos\tilde{\psi}}{\tau(r_1,\tilde{\psi}_1)}$$

である。$(r_1,\psi_1)\in X_j^{(c)}$，$(r_1,\tilde{\psi}_1)\in X_{j'}^{(c)}$ だから演習問題4.2と組合わせて，

$$-\tau(r_1,\psi_1) \geq c_{27}\, j\,, \quad -\cos\psi_1 \leq c_{26}/j$$

$$-c_{28}\, j' \geq -\tau(r_1,\tilde{\psi}_1) \geq -\tau(r_1,\psi_1)+c_{22} \geq c_{27}\, j + c_{22}$$

$$-\cos\tilde{\psi}_1 \leq \frac{c_{26}}{j'} \leq \frac{c_{26}c_{28}}{c_{27}j+c_{22}}$$

だから，

$$\left|\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\tilde{\psi}}{dr}\right| \leq \frac{c_{26}}{c_{27}}\frac{1}{j^2} + \frac{c_{26}c_{28}}{(c_{27}j+c_{22})^2} \leq \frac{2c_{26}c_{28}}{c_{27}^2}\frac{1}{j^2}$$

を得る。従って $c_{29} \equiv 2c_4c_{26}c_{28}c_{27}^{-2}/k_{min}$ とおくと $\theta(\gamma) \leq c_4\Omega\delta_0(1+\eta)^{-m}$ だから，

$$\max|\psi(r)-\tilde{\psi}(r)| \leq c_{29}\frac{\Omega\delta_0}{j^2}(1+\eta)^{-m} .$$

よって各 $X_j^{(c)}$ から除外される集合は次図の斜線部分に含まれる。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

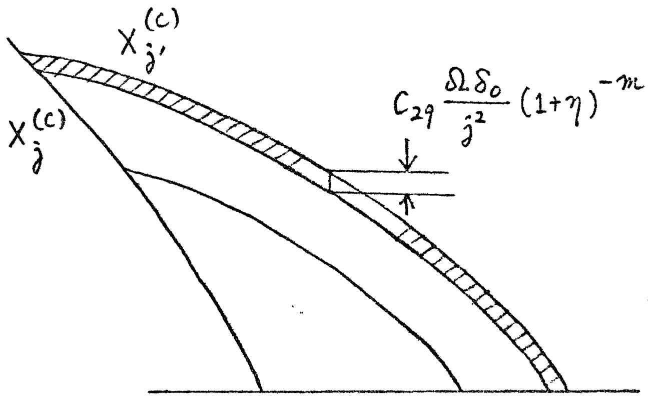


図7-8

各 $X_j^{(c)}$ から除外される測度は，定数 C_{30} が存在して

$$\int_{|\cos\varphi|\leq\frac{C_{26}}{j}} \frac{C_{29}\,\Omega\,\delta_0(1+\eta)^{-m}}{k_{min}\,j^2}\,d\varphi$$

$$\leq \frac{C_{30}}{j^4}\,\Omega\,\delta_0\,(1+\eta)^{-m}$$

で上から押さえられる。一方

$$\frac{C_{23}}{j^2} \leq \theta(\gamma_t(O_{m,s,j})) \leq \delta_0\,(1+\eta)^{-\frac{m}{2}}$$

だから，

$$j \geq j_m \equiv \left[\frac{\sqrt{C_{23}}}{\sqrt{\delta_0}}(1+\eta)^{\frac{m}{4}}\right]+1$$

なる j に対してのみ $\bar{O}_{m,s,j,a}$，$\bar{O}_{m,s,j,c} \in R_m^*(7)$.

$$\nu(R_m^*(7)) \leq \sum_{j=j_n}^{\infty}\frac{C_{30}}{j^4}\,\Omega\,\delta_0\,(1+\eta)^{-m}$$

$$\leq \frac{1}{3}C_{30}C_{23}^{-\frac{3}{2}}\,\Omega\,\delta_0^{\frac{5}{2}}(1+\eta)^{-\frac{7}{4}m}$$

$$\leq \frac{1}{3}C_{30}C_{23}^{-\frac{3}{2}}(1+\eta)^{-m}\,\delta_0^{\,2}.$$

以上で完全に評価がおわった。Appendix 6 (ハ)より

$$\frac{\nu_0\,\omega}{2K_{max}\,\Omega^2}\,\delta_0^{\,2} \leq \nu(G) \leq \nu_0\,\frac{1+C_2}{k_{min}}\,\Omega^2\,\delta_0^{\,2}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

に注意すれば、定数 c_{31} が存在して

$$\nu\left(\bigcup_{m=l_0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{7} T^m R_m^*(k)\right) \leq c_{31}(1+\eta)^{-l_0}\omega^{-1}\Omega^2\nu(G).$$

我々は今

$$G^{(\alpha)} \equiv G - \bigcup_{m=l_0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{7} T^m R_m^*(k)$$

とおき，l_0 を (*) (**) (***) および

$$(****) \qquad c_{31}(1+\eta)^{-l_0}\omega\cdot\Omega^2 < \alpha$$

を充たすよう十分大きくとると，$\nu(G^*) \geq (1-\alpha)\nu(G)$ となり，さらに Main Lemma の (a) も充たす．(c) について調べよう．

G の分割 π_0 を

$$\pi_0 \equiv \begin{cases} \text{各点分割} & \text{on } \bigcap_{m\geq l_0}\Pi_m^{(0)} \\ \{T^m Q_{m,s,l},\ T^m \bar{O}_{m,s,j,a},\ T^m \bar{O}_{m,s,j,c}\} & \text{on } \Pi_{m+1}^{(0)}-\Pi_m^{(0)} \end{cases}$$

と定義し，π_0 の γ 及び γ' への制限を

$$\pi \equiv \pi_0|_\gamma \qquad \pi' \equiv \pi_0|_{\gamma'}$$

で表わす．π の要素から π' への写像 Ψ_π を

$$\Psi_\pi : \gamma\cap\Delta \longrightarrow \gamma'\cap\Delta \qquad \Delta\in\pi_0$$

で与えておく。もちろん $\bigcap_{m\geq l_0}\Pi_m^{(0)}$ $(\supset G^{(\alpha)})$ 上では Ψ と一致する。

$$\gamma(\infty) \equiv \gamma\cap G^{(\alpha)} \qquad \gamma'(\infty) \equiv \gamma'\cap G^{(\alpha)}$$

$$\pi(m) \equiv \pi_m^{(0)}|_\gamma \qquad \pi'(m) \equiv \pi_m^{(0)}|_{\gamma'}$$

$$\Psi_m : \Delta\cap\gamma \longrightarrow \Delta\cap\gamma' \qquad \Delta\in\pi(m)$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

とおくと $\pi(m)\nearrow\pi$, $\pi'(m)\nearrow\pi'$ である。

$\mathfrak{M}$ を $\{\pi(m);\ m\geq l_0\}$ から生成される最小の σ-集合体，$\mathfrak{M}'$ を $\{\pi'(m);\ m\geq l_0\}$ から生成される最小の σ-集合体とする。

$$x\in\gamma(\infty),\qquad x'=\Psi(x)\in\gamma'(\infty)$$

に対して $\Delta_m(x)$, $\Delta'_m(x')$ でそれぞれ x, x' を含む $\pi(m), \pi'(m)$ の要素を表わす。

$$\theta(\Delta'_m(x'))=\int_{T^{-m}\Delta'_m(x')}\prod_{i=0}^{m-1}\frac{1}{|\Lambda_{i+1}(r',\varphi';\gamma')|}\,d\varphi_m$$

$$\theta(\Delta_m(x))=\int_{T^{-m}\Delta_m(x)}\prod_{i=0}^{m-1}\frac{1}{|\Lambda_{i+1}(r,\varphi;\gamma)|}\,d\varphi_m$$

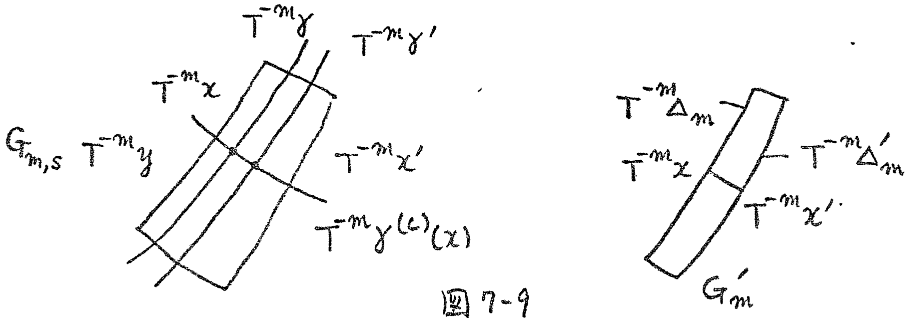


図 7-9

G'_m を $\gamma_a(G_{m,s})$, $\gamma_c(G_{m,s})$, $T^{-m}\gamma$, $T^{-m}\gamma'$ で囲まれる四辺形とする。Lemma 6.2 (Case 1) を使って

$$\theta(T^{-m}\Delta_m(x))\leq 5\delta_0(1+\eta)^{-\frac{m}{8}},\quad \min\cos(G_{m,s})\geq\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{32}m}$$

だから，$y, \hat{y}\in\Delta_m(x)$ に対して，

$$\frac{\Lambda_{i+1}(\hat{y},\gamma)}{\Lambda_{i+1}(y,\gamma)}\leq\exp\left[C_{32}(1+\eta)^{-m+i}(1+\eta)^{-\frac{m}{8}}\right]\qquad i\leq m-2$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\frac{\Lambda_m(\hat{y},\gamma)}{\Lambda_m(y,\gamma)} \leq \exp\left[C_{33}(1+\eta)^{-\frac{1}{8}m} + \frac{\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{8}m}}{\min\cos(G_m)}\right] \quad i=m-1$$
$$\leq \exp\left[(C_{33}+1)(1+\eta)^{-\frac{1}{16}m}\right]$$

が成立する．従って

$$\theta(\Delta_m(x)) \underset{(\geq)}{\leq} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{|\Lambda_{i+1}(x;\gamma)|} \times \theta(T^{-m}\Delta_m(x)) \exp_{(-)}^{+}\left[C_{34}(1+\eta)^{-\frac{1}{16}m}\right].$$

同様にして

$$\theta(\Delta_m'(x')) \underset{(\geq)}{\leq} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1}{|\Lambda_{i+1}(x';\gamma')|} \times \theta(T^{-m}\Delta_m'(x')) \exp_{(-)}^{+}\left[C_{34}(1+\eta)^{-\frac{1}{16}m}\right]$$

を得る。今，

$$\frac{\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{2}m} + C_4\Omega\delta_0(1+\eta)^{-m}}{\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{2}m} - C_4\Omega\delta_0(1+\eta)^{-m}} \leq \frac{\theta(T^{-m}\Delta_m'(x'))}{\theta(T^{-m}\Delta_m(x))} \leq \frac{\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{2}m} + C_4\Omega\delta_0(1+\eta)^{-m}}{\delta_0(1+\eta)^{-\frac{1}{2}m} - C_4\Omega\delta_0(1+\eta)^{-m}}$$

なる評価が成立するから，$m \geq l_0$ ならば Ω に依存しない C_{35} があって，

$$\frac{\theta(T^{-m}\Delta_m'(x'))}{\theta(T^{-m}\Delta_m(x))} \underset{(\geq)}{\leq} \exp_{(-)}^{+}\left[C_{35}(1+\eta)^{-\frac{1}{8}m}\right].$$

ここで Lemma 6.2 (Case 2) を使うと，Lemma 6.4 と類似に，定数 C_{36} が存在して，

$$\frac{\Lambda_{i+1}(x;\gamma)}{\Lambda_{i+1}(x';\gamma')} \underset{(\geq)}{\leq} \exp_{(-)}^{+}\left[C_{36}(1+\eta)^{-i}\right] \quad i \geq 1.$$

従って，無限乗積と極限

$$g(x) \equiv \prod_{i=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{i+1}(x;\gamma)}{\Lambda_{i+1}(x';\gamma')}, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{\theta(\Delta_m'(x'))}{\theta(\Delta_m(x))} = g(x)$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

は $x \in \gamma(\infty)$ で絶対一様収束する．α, ω, Ω および G にも依存しない定数 $\beta_1 \equiv \exp C_{36} \dfrac{1+\eta}{\eta}$ を定めると，

$$\frac{1}{\beta_1} \leq \frac{\theta(\Delta'_m(x'))}{\theta(\Delta_m(x))} \leq \beta_1, \quad m \geq l_0, \quad \frac{1}{\beta_1} \leq g(x) \leq \beta_1$$

が成立する．

さて，$A \subset \gamma(\infty)$ を Borel 集合とすると，$A \in \mathfrak{M}$ である．もし $\sigma(A)=0$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\{\Delta_i ; i=1,2,\cdots\}$，$\Delta_i \in \pi(m_i)$ が存在して

$$A \subset \bigcup_i \Delta_i, \qquad \Delta_i \cap \gamma(\infty) \neq \phi$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta(\Delta_i) < \varepsilon .$$

ところで

$$\Psi A = \Psi_\pi A \subset \Psi_\pi\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Psi_{m(i)} \Delta_i .$$

$$\Delta_i \cap \gamma(\infty) \neq \phi \qquad \Delta_i \in \pi(m_i)$$

だから

$$\theta(\Psi_{m(i)} \Delta_i) \leq \beta_1 \theta(\Delta_i) .$$

よって

$$\sigma'(\Psi A) \leq \beta_1 \Sigma \theta(\Delta_i) \leq \varepsilon \beta_1 .$$

すなわち

$$\sigma'(\Psi A) = 0 .$$

同様な議論で，逆がいえ，$\sigma(A)=0 \Longleftrightarrow \sigma'(\Psi A)=0$ ．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

§8. Canonical Map の絶対連続性

測度 ν に関して，$\gamma^{(c)}$，$\gamma^{(e)}$ がある意味で座標として使えることを示すのが目的である．Lemma 7.1 から直ちに導かれる次の Lemma から始めよう．

Lemma 8.1．任意の α $(0<\alpha<1)$，$\Omega \geq 1$，ω $(0<\omega<\frac{1}{2})$ を固定し，$l_0 = l_0(\alpha, \Omega, \omega)$ は Lemma 7.1 で与えられるものとする．

$x_0 \notin \bigcup_{i=0}^{l_0} T^i S$，$|\cos\varphi(x_0)| > 2\omega$ ならば

(1°) $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0, \alpha, \Omega)$ が存在して，x_0 の ε_0-近傍 U_{ε_0} で T^{-l_0} が滑らかである。K-四辺形 $G \subset U_{\varepsilon_0}$ が

(い) $\dfrac{1}{\Omega} \leq \dfrac{\theta(\gamma_a(G))}{\theta(\gamma_b(G))} \leq \Omega$

(ろ) $\gamma_b(G)$，$\gamma_d(G) \in E(L_0)$

(は) $T^{-l_0}G$ も四辺形

ならば，Lemma 7.1 の結論が成立する．

(2°) $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_1(x_0, \alpha, \Omega)$ $(<\varepsilon_0)$ が存在して x_0 の ε_1-近傍 U_{ε_1} で次のことが成立する．

K-増加曲線 $\gamma_0 \subset U_{\varepsilon_1}$ が $E(L_0)$ に属すならば，四辺形 G で $\gamma_b(G) = \gamma_0$ でありさらに (1°) の条件 (い) (ろ) (は) を充たすものが存在する．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

証明は，

(i) $$\delta(x_0, l_0) \equiv \min_{0\le j\le l_0} \frac{1}{2}|\cos\varphi(T^{-j}x_0)|$$

とおく．$\bigvee_{i=0}^{l_0-1} T^i\alpha^{(c)}$ の要素で x_0 を含むものを $X \equiv X(x_0, l_0)$ とおく．

$$X' \equiv X - \bigcup_{i=0}^{l_0-1} T^i V_i(\delta(x_0, l_0))$$

は連結な開集合で $x_0 \in X'$ である。十分小さい ε_0 ($<\frac{1}{4}\delta(x_0, l_0)$, $<\frac{\omega}{2}$) を選べば，$U_{\varepsilon_0} \subset X'$ であって，T^{-l_0} は U_{ε_0} で滑らか，さらに U_{ε_0} に含まれる K-四辺形 G が (い)(ろ)(は) を充たせば，Lemma 7.1 の仮定が充たされる。

(ii) $U_{\varepsilon_1} \ni \gamma_0$ に対し K-四辺形 G, $\gamma_\delta(G)=\gamma_0$ を (い) を充たすようにとれば，$G \subset U_{\varepsilon_0}$ となるように ε_1 を十分小さくとればよい。それには

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{3+(C_2+\frac{1}{k_{min}})\Omega}$$

ととれば充分である．(図 A-7 参照)

さて，二つの単調増加曲線 γ, γ' が与えられたとき，canonical map Ψ を

$$\Psi : x \longrightarrow \gamma^{(c)}(x) \cap \gamma'$$

で定義する．Ψ の定義域を Ξ，値域を Ξ'

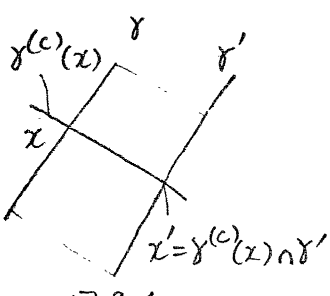


図 8-1

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

としよう.

$$\Phi = \{ x \in \gamma \,;\ \gamma^{(c)}(x) \cap \gamma' \neq \phi \}$$

$$\Phi' = \{ x' \in \gamma' \,;\ \gamma^{(c)}(x') \cap \gamma \neq \phi \}$$

である. 明らかに次のような四辺形 G が存在する.

$$\Phi \subset \gamma_b(G) \subset \gamma \qquad \Phi' \subset \gamma_d(G) \subset \gamma'.$$

さらに $\gamma_a(G)$, $\gamma_c(G)$ は縮小する *fibre* $\Gamma^{(c)}$ の切片 (従って, $T^{-i}\gamma_a(G)$, $T^{-i}\gamma_c(G)$ も減少曲線) である.

$$G^\circ \equiv \{ x \in G \,;\ \gamma^{(c)}(x) \cap \gamma \neq \phi \text{ かつ } \gamma^{(c)}(x) \cap \gamma' \neq \phi \}$$

とおけば,

$$\Phi = G^\circ \cap \gamma \qquad \Phi' = G^\circ \cap \gamma'.$$

Lemma 8.2. $\gamma, \gamma' \in E(L_0)$ は K-増加であるとする. G^* $(\subset G^\circ)$ が存在し

$$G \cap \gamma^{(c)}(x) \subset G^* \qquad x \in G^*$$

$$\nu(G^*) = \nu(G^\circ).$$

Ψ は $\gamma \cap G^* \longrightarrow \gamma' \cap G^*$ の写像として絶対連続. さらに, $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}' \in E(L_0)$ なる K-増加曲線 $(\subset G)$ に対して *canonical map* は $\tilde{\gamma} \cap G^* \longrightarrow \tilde{\gamma}' \cap G^*$ として絶対連続.

証明. α_0, $0 < \alpha_0 < 1$ を固定し, α を

$$\alpha \equiv \frac{1}{3}\alpha_0 \nu(G^\circ)$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

とおき，ω を

$$\min \cos(G) \geq 2\omega$$

$$\int_{|\cos\varphi| \leq 4\omega} d\nu \leq \alpha$$

を充たすよう十分小さく固定する．Lemma 7.1 から

$$l_0 = l_0(\alpha, \omega, 1+C_2)$$

が定まる．ε' を

$$\nu(\varepsilon(x, \alpha, 1+C_2) < \varepsilon') \leq \alpha$$

となるよう十分小さく固定する．自然数 m_0 を

$$4\pi(1+C_2)^2\left(1+\frac{1}{k_{min}}\right)(1+\eta)^{-m_0} < \varepsilon', \omega$$

を充たすようにとる．

$$M(\omega, \varepsilon') \equiv \{x ;\ |\cos\varphi| \geq 4\omega,\ \varepsilon(x, \alpha, 1+C_2) > \varepsilon'\}$$

とおき

$$G^0 \cap T^{m_i} M(\omega, \varepsilon')$$

を考えよう．

Lemma 6.1で構成した $\{G_{m,s}\}$ に類似の四辺形を構成する．

$$F_0 \equiv G$$

とおく．$\{F_{m-1,s}\}$ が構成できたとして，$\{F_{m,s}\}$ を構成する．

$$O_{m-1,s,j} \equiv F_{m-1,s,j} \cap X_j^{(c)}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$F_{m-1,s,j} \equiv T^{-1}O_{m-1,s,j} - \bigcup_{x\in\gamma_a(O_{m-1,s,j})} \Delta_a(T^{-1}x)$$
$$- \bigcup_{x\in\gamma_c(O_{m-1,s,j})} \Delta_c(T^{-1}x)$$

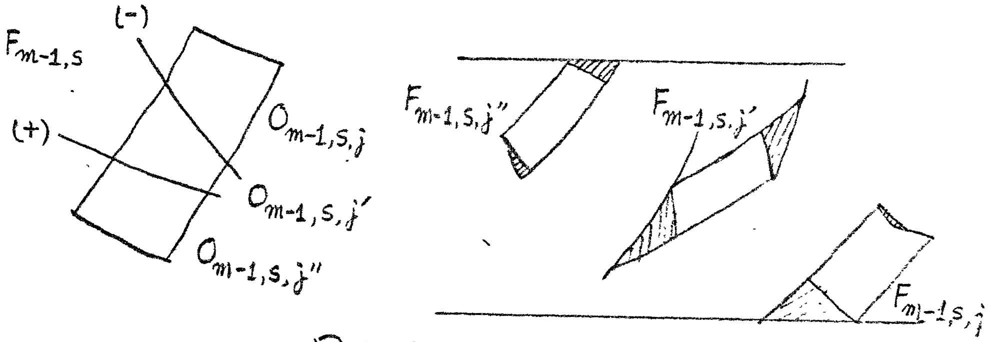


図 8-2

この $\{F_{m-1,s,j}\}$ に番号をつけ直したのを $\{F_{m,s'}\}$ とする.

$$G^\circ = \bigcap_m \bigcup_s T^m F_{m,s} \subset \bigcup_s T^{m_0} F_{m_0,s} \subset G$$

は明らかである。

$F_{m_0,s}$ において、点 $z_0' \equiv \gamma_a(F_{m_0,s}) \cap \gamma_d(F_{m,s})$ と同じ φ-座標 $\varphi(z_0') = \varphi(z_1)$ をもつ $\gamma_b(F_{m_0,s})$ 上の点 z_1 をとる。

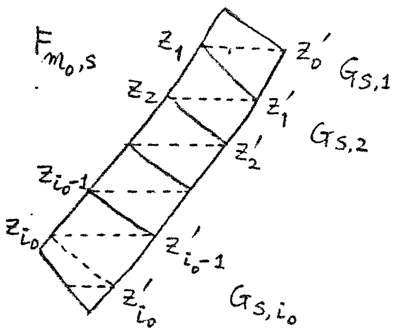


図 8-3

もし $z_1 \in T^{-m_0}G^\circ$ ならば、$\gamma^{(c)}(z_1)$ で $F_{m_0,s}$ を切って、小さな四辺形 $G_{s,1}$, $(\gamma_c(G_{s,1}) \subset \gamma^{(c)}(z_1))$ を作る。もし $z_1 \notin T^{-m_0}G^\circ$ ならば、ある $m \geq m_0 + l_0$ で、$T^{-m+m_0}z_1$ は除外集合に含まれるから その除外集合

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

内の減少曲線γをとり，$T^{m-m_0}\gamma$で$F_{m_0,s}$を切って$G_{s,1}$を作る。

$$z_1' \equiv \gamma_c(G_{s,1}) \cap \gamma_d(G_{s,1})$$

とおく。以下同様にして，$z_2, G_{s,2}, z_2', z_3, G_{s,3}, \cdots, z_{i_0}, G_{s,i_0}, z_{i_0}'$を構成する。(図8-3参照。) もし$\varphi(z_{i_0}') < \varphi(\gamma_b(F_{m_0,s}) \cap \gamma_c(F_{m_0,s}))$となれば$F_{m_0,s} - \bigcup_{i=1}^{i_0-1} G_{s,i}$を改めて$G_{s,i_0}$とおく。

この$\{G_{s,i}\}$は次のような性質をもっている。

$$G_{s,i} \cap T^{-m_0} G^0 \cap M(\omega, \varepsilon') \ni {}^{\exists}x$$

$$\Rightarrow \quad G_{s,i} \subset U_{\varepsilon(x,\alpha,1+c_2)}(x)$$

$$\min\cos(G_{s,i}) > \omega .$$

何故ならば，

$$\theta(\gamma_a(G_{s,i})) \le \pi(1+\eta)^{-m_0}$$

$$\theta(\gamma_b(G_{s,i})) \le (1+c_2)\,\theta(\gamma_a(G_{s,i}))$$

だから

$$\text{diameter of } G_{s,i} \le \pi(1+c_2)^2\left(1+\frac{1}{k_{min}}\right)(1+\eta)^{-m_0}$$

が成立することによる。

従って$G_{s,i} \cap T^{-m_0} G^0 \cap M(\omega, \varepsilon') \neq \phi$なる$G_{s,i}$に対してLemma 8.1が適用でき$G_{s,i}^{(\alpha)}$が存在し

$$\nu(G_{s,i}^{(\alpha)}) \ge (1-\alpha)\,\nu(G_{s,i}) .$$

$G_{s,i}^{(\alpha)}$の内部でcanonical map，Ψ_{m_0}は絶対連続であって

$$T^{m_0}\Psi_{m_0} = \Psi T^{m_0}$$

であり，T^{m_0} が $G_{s,i}^{(\alpha)}$ で diffeo だから，Ψ が $T^{m_0}G_{s,i}^{*}$ で絶対連続になる。

$$G^*(\alpha_0) \equiv \bigcup_{G_{s,i}\cap T^{-m_0}G^\circ \cap M(\omega,\varepsilon') \neq \phi} T^{m_0} G_{s,i}^{(\alpha)}$$

とおくと

$$G^*(\alpha_0) \subset G^\circ \subset \bigcup_{s,i} G_{s,i}$$

だから

$$\begin{aligned}\nu(G^*(\alpha_0)) &= \sum{}' \nu(G_{s,i}^{(\alpha)}) \geq \sum{}'(1-\alpha)\nu(G_{s,i}) \\ &\geq (1-\alpha)\{\nu(G^\circ) - \nu(M(\omega,\varepsilon'))\} \\ &\geq (1-3\alpha)\nu(G^\circ) = (1-\alpha_0)\nu(G^\circ)\end{aligned}$$

(ただし $\sum{}'$ は $G_{s,i}\cap G^\circ \cap M(\omega,\varepsilon') \neq \phi$ に対する和)

である。α_0 が任意だから，$\alpha_0 = \frac{1}{n}$ ととり

$$G^* \equiv \bigcup_{n\geq 1} G^*\left(\frac{1}{n}\right)$$

とおけばよい。

曲線 γ の方程式が $\varphi = \psi(r)$ であるとき

$$\partial\gamma(r,\varphi) \equiv \frac{d\psi}{dr} \qquad \varphi = \psi(r)$$

とおき

$$T^k \partial\gamma(r,\varphi) \equiv \partial T^k \gamma(T^k(r,\varphi))$$

と記す。

二曲線 γ, γ' に対して，canonical map を

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\Psi_{\gamma',\gamma} : \gamma \to \gamma', \quad \Psi_{\gamma',\gamma}(x) \equiv \gamma' \cap \gamma^{(c)}(x)$$

で表わし Lemma 8.2 で与えられる定義域および値域を

$$\Phi_{\gamma,\gamma'}, \quad \Phi_{\gamma',\gamma}$$

と記す. σ, σ' を Θ から定まる γ, γ' 上の測度とし

$$\Psi_{\gamma',\gamma}\sigma(A) \equiv \sigma(\Psi_{\gamma,\gamma'}(A \cap \Phi_{\gamma',\gamma})), \quad A \subset \gamma'$$

$$\Psi_{\gamma,\gamma'}\sigma'(A) \equiv \sigma'(\Psi_{\gamma',\gamma}(A \cap \Phi_{\gamma',\gamma})), \quad A \subset \gamma$$

で $\Psi_{\gamma',\gamma}\sigma$ および $\Psi_{\gamma,\gamma'}\sigma'$ を定義する.

$$g_{\gamma,\gamma'}(r,\varphi) \equiv \frac{d\Psi_{\gamma,\gamma'}\sigma_{\gamma'}}{d\sigma_\gamma} \qquad \text{on } \Phi_{\gamma,\gamma'}$$

とおくと, density $g_{\gamma,\gamma'}$ は次のような二通りの無限乗積で表わされることが, 前§の最後の議論と

$$\frac{d\varphi_i}{d\varphi_{i+1}} = \frac{dr_i}{dr_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dr_i} \frac{dr_{i+1}}{d\varphi_{i+1}}$$

なる関係式と, Lemma 4.3 からわかる。

Lemma 8.3.

$$g_{\gamma,\gamma'}(r,\varphi) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{\left\{\dfrac{k_{i+1}\cos\varphi_i}{\cos\varphi_{i+1}} + k_i + \dfrac{\tau_{i+1}k_i k_{i+1}}{\cos\varphi_{i+1}}\right\}\partial\gamma_i(r_i,\varphi_i) + 1 + \dfrac{\tau_{i+1}k_{i+1}}{\cos\varphi_{i+1}}}{\left\{\dfrac{k'_{i+1}\cos\varphi'_i}{\cos\varphi'_{i+1}} + k'_i + \dfrac{\tau_{i+1}k_i k_{i+1}}{\cos\varphi'_{i+1}}\right\}\partial\gamma'_i(r'_i,\varphi'_i) + 1 + \dfrac{\tau'_{i+1}k'_{i+1}}{\cos\varphi'_{i+1}}}$$

$$= \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1 + \dfrac{\tau_{i+1}\{\partial\gamma_i(r_i,\varphi_i) + k(r_i)\}}{\cos\varphi_i}}{1 + \dfrac{\tau'_{i+1}\{\partial\gamma'_i(r'_i,\varphi'_i) + k(r'_i)\}}{\cos\varphi'_i}}.$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

最後にLemma 8.1, 8.2 および 8.3 に平行したLemmaが $\gamma^{(e)}$ に対しても成立することを注意しておく．具体的にその命題を書くことはやめる．

§9. 分割 $\zeta^{(c)}$ の正則性

滑らかな曲線 γ に対して

$$A[\gamma] \equiv \bigcup_{x\in\gamma} \gamma^{(c)}(x)$$

とおくと

$$A[\gamma] = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{X_j^{(c)} \cap T^{-k}\gamma \neq \phi} T^k X_j^{(c)}$$

が成立するから $A[\gamma]$ は Borel 可測集合である．

Lemma 9.1.

$\gamma \in E(L_0)$ 単調増加ならば，

$\nu(A[\gamma]) > 0$.

証明．γ が単調増加だから $\gamma \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k S$ は可算集合である．従って $x_0 \in \gamma - \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k S$ が存在する，$\omega \equiv \frac{1}{4}|\cos\varphi(x_0)|$, $\Omega \equiv 1$ ととる．α を $0<\alpha<1$ で固定する．Lemma 8.1 を適用でき，$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x, \alpha, 1)$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

が定まる．$U_{\varepsilon_0}(x_0)$ 内に x_0 を内点に含む四辺形 G を構成し，

$\theta(\gamma_b(G))=\theta(\gamma_a(G))$，$\gamma_b(G)$，$\gamma_d(G)\in E(L_0)$，$\gamma$ が $\gamma_a(G)$ と

$\gamma_c(G)$ を結ぶようにする．

$$\nu(A[\gamma])\geq\nu(G^{(\alpha)})\geq(1-\alpha)\nu(G)>0.$$

さて γ を増加曲線 $\in E(L_0)$，$\theta(\gamma)=\pi$，その方程式を $r=u_0(\varphi)$ とし，γ を右方へ t 平行移動したものを γ_t と記す．その方程式は $u_t(\varphi)\equiv u_0(\varphi)+t$ とおいたとき，$r=u_t(\varphi)$ である．

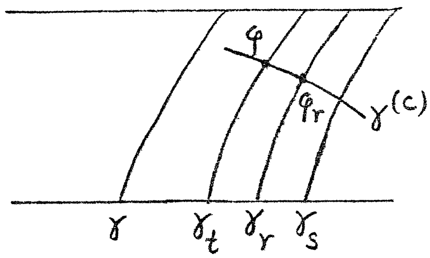


図 9-1

$G_{t,s}$ は γ_t，γ_s で囲まれる図形を表わす．

$$G^{o}_{t,s}\equiv\{x\in G_{t,s}\ ;\ \gamma_t\cap\gamma^{(c)}(x)\neq\phi,\ \gamma_s\cap\gamma^{(c)}(x)\neq\phi\}$$

$G^{*}_{t,s}$ は Lemma 8.2 で与えられる，canonical map が絶対連続になる集合とする．

$$\Phi_{t,s}\equiv\Phi_{\gamma_t,\gamma_s},\quad \Psi_{t,s}\equiv\Psi_{\gamma_t,\gamma_s},\quad g_{t,s}\equiv g_{\gamma_t,\gamma_s}$$

と略記し，$\gamma^{(c)}(u_t(\varphi),\varphi)$ の方程式を

$$r=\tilde{u}_{t,\varphi}(\psi)$$

としよう．Borel set B に対して

$$\nu(B\cap G^{*}_{t,s})\equiv-\nu_0\int_t^s dr\int_{B\cap G^{*}_{t,s}\cap\gamma_r}\cos\varphi\, d\sigma_{\gamma_r}(\varphi)$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$= -\nu_0 \int_t^s dr \int_{\Phi_{t,s} \cap \Psi_{t,s}(B \cap \gamma_r)} \cos\varphi_r \, g_{t,r}(\varphi) \, d\sigma_{\gamma_t}(\varphi)$$

$$= \int_{\Phi_{t,s}} d\sigma(\varphi) \int_{B \cap \gamma^{(c)}(u_t(\varphi),\varphi) \cap G^*_{t,s}} g_t(\varphi,\psi) \, d\sigma(\psi)$$

である，ただし

$$g_t(\varphi,\psi) \equiv -\nu_0 \cos\psi \left[g_{\tilde{u}_{t,\varphi}(\psi) - u_0(\psi),t}(\psi) \right]^{-1} \frac{d\tilde{u}_{t,\varphi}}{d\psi} .$$

いま，$G^*_{t,s}$ 上では，$0 < g_t(\varphi,\psi) < \infty$

だから

$$\zeta^{(c)}|_{G^*_{t,s}}$$

を考えれば，$\gamma^{(c)} \cap G^*_{t,s}$ 上の条件付測度

$$\nu(\cdot \,|\, \gamma^{(c)} \cap G^*_{t,s})$$

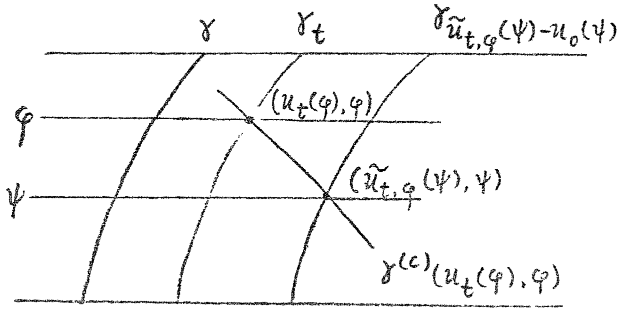


図 9-2

は $\sigma_{\gamma^{(c)}}$ と互いに絶対連続になる．

$$N^*_q \equiv \bigcup_n G^*_{n\cdot 2^{-q},(n+1)2^{-q}}, \quad N^* = \bigcup_q N^*_q$$

とおけば，$\nu(M_1 - N^*) = 0$ である。何故ならば $D^-(x) < \infty$ ならば $\theta(\gamma^{(c)}(x)) > 0$。従ってある q と n が存在して $x \in G^\circ_{n\cdot 2^{-q},(n+1)2^{-q}}$ であり，$\nu(G^\circ_{n\cdot 2^{-q},(n+1)2^{-q}} - G^*_{n\cdot 2^{-q},(n+1)2^{-q}}) = 0$ だから明らか．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\nu(B\cap N_q^*\cap A[\gamma]) =$$

$$= \sum_n \int_{\Phi_{n\cdot 2^{-q},(n+1)2^{-q}}} d\sigma(\varphi) \int_{B\cap A[\gamma]\cap G^*_{n\cdot 2^{-q},(n+1)2^{-q}}\cap\gamma^{(c)}(u_t(\varphi),\psi)} g_{n\cdot 2^{-q}}(\varphi,\psi)\,d\sigma(\psi)$$

$$= \sum_n \int_{\Phi_{0,n\cdot 2^{-q}}-\Phi_{0,(n+1)2^{-q}}} d\sigma_\gamma(\varphi) \int_{B\cap\gamma^{(c)}(u_0(\varphi),\varphi)\cap G^*_{0,n\cdot 2^{-q}}} g_0(\varphi,\psi)\,d\sigma(\psi)$$

$$\sum_n \chi_{\{\Phi_{0,n\cdot 2^{-q}}-\Phi_{0,(n+1)2^{-q}}\}}(u_0(\varphi),\varphi)\,\chi_{B\cap\gamma^{(c)}(u_0(\varphi),\varphi)}(\hat{u}_{u_0(\varphi),\varphi}(\psi))$$

は単調に増加して，$\chi_{A^*(\gamma)}$ に収束する．ただし

$$A^*(\gamma) \equiv \bigcup_{q,n}(G^*_{0,2^{-q}n} - G^*_{0,2^{-q}(n+1)}) = A(\gamma)\cap N^*.$$

$$\nu(A(\gamma)\cap B) = \nu(A^*(\gamma)\cap B)$$

$$= \int_{\gamma\cap A^*(\gamma)} d\sigma_\gamma(\varphi) \int_{\gamma^{(c)}(u_0(\varphi),\varphi)\cap B} g_0(\varphi,\psi)\,d\sigma_{\gamma^{(c)}}(\psi).$$

Lemma 9.2.

$\gamma\in E(L_0)$ ， 単調増加

$$\nu(B\cap A(\gamma)) = \int_\gamma d\sigma_\gamma(\varphi)\int_{\gamma^{(c)}(u_0(\varphi),\varphi)\cap B} g_0(\varphi,\psi)\,d\sigma_{\gamma^{(c)}}(\psi).$$

ただし　　γ の方程式　　$r = u_0(\varphi)$.

$\gamma^{(c)}(u_0(\varphi),\varphi)$ の方程式　$r = \tilde{u}_\varphi(\psi)$

$$g_0(\varphi,\psi) \equiv -\nu_0\cos\psi\,[g_{\tilde{u}_\varphi(\psi)-u_0(\psi),0}(\psi)]^{-1}\frac{d\tilde{u}_\varphi}{d\psi}.$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Lemma 9.3.

$\gamma \in E(L_0)$ 単調増加

$\bar{\gamma} \subset \gamma$ $\sigma_\gamma(\bar{\gamma}) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $\nu(A(\bar{\gamma})) = 0$.

証明. Lemma 9.2 と Lemma 9.3 をこみにして示す.

Lemma 9.2 を示すには $\sigma(\gamma \cap A^*(\gamma)) = \sigma(\gamma)$ を示せば十分である.

$\Rightarrow$ $\sigma_\gamma(\bar{\gamma}) = 0$ ならば,

$$\nu(A(\bar{\gamma})) = \nu(A(\bar{\gamma}) \cap A^*(\gamma)) = \int_{\bar{\gamma} \cap A^*(\gamma)} d\sigma_\gamma(\varphi) \int_{\gamma^{(c)}(x_0(\varphi),\varphi)} g_0(\varphi,\psi)\, d\sigma(\psi)$$

$$= 0$$

$\Leftarrow$ $\sigma_\gamma(\bar{\gamma}) > 0$ ならば, $\bigcup_{k=0}^{\infty} T^k S \cap \gamma$ が可算集合だから $x_0 \in \bar{\gamma} - \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k S$ を $\bar{\gamma}$ の γ における density point から選べる.

$0 < \alpha < \frac{1}{4}$ を固定して $\omega = \frac{1}{2} |\cos \varphi(x_0)|$ $\Omega = 1$

$$\varepsilon_1(x_0, \alpha) > \varepsilon'$$

なる ε' を定める. x_0 を含む γ の線分 γ_0 を $\theta(\gamma_0) = \delta_0$, $\gamma_0 \subset U_{\varepsilon'}(x_0)$ なるようにすれば, Lemma 8.1 により, K-四辺形 G, $\gamma_0 = \gamma_0(G)$ が選べ, (い) (ろ) (は) を充たし, さらに $\gamma_\alpha(G)$ は γ を平行移動したもの, ととれ, $G^{(\alpha)}$ が存在し Lemma 7.1 の結論が成立する. $G^{(\alpha)}$ では, canonical map の density が $\frac{1}{\beta_1}$, β_1 で押さえられてい

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

るから

$$\frac{\nu_0\omega}{\beta_1 K_{max}} \leqq g_0(\varphi,\psi) \leqq \frac{3\nu_0\beta_1\omega}{k_{min}}$$

である．等式

$$\nu(G^{(\alpha)}) = \int_{G^{(\alpha)}\cap\gamma_0} d\sigma_\gamma(\varphi) \int_{G^*\cap\gamma^{(c)}(x_0(\varphi),\varphi)} g_0(\varphi,\psi)\, d\sigma_{\gamma^{(c)}}(\psi)$$

が成立したから

$$(1+C_2)\delta_0 \frac{3\omega\beta_1\nu_0}{k_{min}} \sigma(G^{(\alpha)}\cap\gamma_0) \geq \nu(G^{(\alpha)}) \geq (1-\alpha)\nu(G) \geq \frac{(1-\alpha)\omega\nu_0}{2K_{max}}\delta_0$$

$$\frac{1-\alpha}{6\beta_1 C_2(1+C_2)} \leqq \frac{\sigma(G^{(\alpha)}\cap\gamma_0)}{\sigma(\gamma_0)}.$$

x_0 が density point だから，十分小さい δ_0 を選べば

$$\frac{\sigma(\gamma_0\cap\bar{\gamma})}{\sigma(\gamma_0)} \geq 1 - \frac{1-\alpha}{12\beta_1 C_2(1+C_2)}$$

にとれる。

$$\frac{\sigma(\gamma_0\cap\bar{\gamma}\cap G^{(\alpha)})}{\sigma(\gamma_0)} \geq \frac{1-\alpha}{12\beta_1 C_2(1+C_2)}$$

$$\nu(A(\bar{\gamma})) \geq \nu(A(\gamma_0\cap\bar{\gamma}\cap G^{(\alpha)})) = \int_{\gamma_0\cap\bar{\gamma}\cap G^{(\alpha)}} d\sigma(\varphi) \int g_0(\varphi,\psi)\, d\sigma(\psi)$$

$$\geq \frac{\omega\nu_0}{\beta_1 K_{max}} \sigma(\gamma_0)\cdot\sigma(\gamma_0\cap\bar{\gamma}\cap G^*)$$

$$\geq \frac{(1-\alpha)\omega\nu_0(\sigma(\gamma_0))^2}{12\beta_1^2 C_2(1+C_2)K_{max}} > 0.$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Lemma 9.4.

(i) $\zeta^{(c)}$に関する条件付測度は殆ど全ての$\gamma^{(c)}$で$\sigma_{\gamma^{(c)}}$と互いに絶対連続.

(ii) 殆どすべての$\gamma^{(e)} \in \zeta^{(e)}$に対して, $\tilde{\gamma} \subset \gamma^{(e)}$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\gamma}) \equiv \nu(A(\tilde{\gamma}))$$

とおくとき, $\tilde{\sigma}$と$\sigma_{\gamma^{(e)}}$は互いに絶対連続.

証明. $\gamma^{(e)} \in E(L_0)$であることと, Lemma 9.3から(ii)は明らか。

(i) Lemma 9.2の前に述べたような$\{\gamma_t\}$を考えよう.

$\{n \cdot 2^{-q};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,\ q = 0, 1, 2, \cdots\} = \{t_j\}$とおき

$$A_j \equiv A[\gamma_{t_j}] - \bigcup_{k=1}^{j-1} A[\gamma_k],\quad A_1 \equiv A[\gamma_1]$$

とおく. A_jは$\zeta^{(c)}$-可測集合であり, Lemma 9.2, Lemma 9.3からA_j上では主張が成立している,

$$\nu(M_1 - \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$$

を言えばよいが, 殆どすべての$x \in M_1$に対して$\theta(\gamma^{(c)}(x)) > 0$だから$\exists t_j$, $\gamma^{(c)}(x) \cap \gamma_{t_j} \neq \phi$. そのような$j$の最小のものを$j_0$とすると$x \in A_{j_0}$. よって主張が言えた.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

§10. Sinai の撞球問題はエルゴード的.

定理 2. Sinai の撞球問題はエルゴード的である。もちろん T もエルゴード的である。

証明の第一段階として次の Lemma から始めよう。

Lemma 10.1.

$$\zeta_{\infty}^{(c)} \wedge \zeta_{-\infty}^{(e)} = \nu \quad (\text{trivial な分割})$$

ただし $\zeta_{\infty}^{(c)} \equiv \bigwedge_{k=0}^{\infty} T^{k}\zeta^{(c)} \quad \zeta_{-\infty}^{(e)} \equiv \bigwedge_{k=0}^{\infty} T^{-k}\zeta^{(e)}$.

証明. §7〜8 の Lemma は $\zeta^{(e)}$ に対しても同様に成立する。ω, $\alpha = \dfrac{\omega}{32C_2(1+C_2)}$, $\Omega = 2$ に対して, Lemma 7.1 が $\zeta^{(e)}$, $\zeta^{(c)}$ に対して同時になりたつ $l_1 = l_1(\omega)$ をとる. 分割

$$\bigvee_{k=-l_0-1}^{l_1} T^{k}\alpha^{(c)} \equiv \{X_j^{(l_1)}\}$$

と記す. $M(\omega) \equiv \{|\cos\varphi| > 2\omega\}$, Lemma 8.1 (ii) から $X_j^{(l_1)} \cap M(\omega)$ の内点 x_0 に対して, 十分小さい $\varepsilon > 0$ をとれば, $U_\varepsilon(x_0) \subset X_j^{(l_1)} \cap M(\omega)$ であり, 任意の K-増加曲線 $\gamma \subset U_\varepsilon$ に対して, Lemma 8.1 の G が存在し, Lemma 7.1 の結論が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

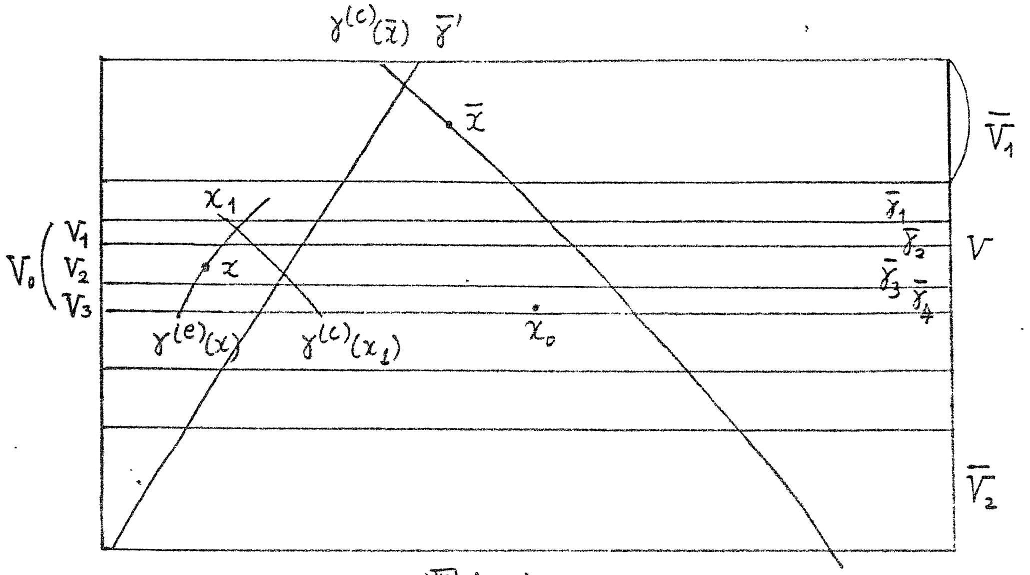


図 10-1

x_0 を中心とした長方形の近傍で，縦横の比率が $1:4/k_{min}$ のものを $U_{\frac{\varepsilon}{2}}$ の中にとり V とし，その縦巾二倍のものを $\bar{V}$ としよう。$\bar{V}$ の V より上部を $\bar{V}_1$，下部を $\bar{V}_2$ とする。

これだけ用意しておいて，$f(x)$ を $\zeta_{\infty}^{(c)} \wedge \zeta_{-\infty}^{(e)}$－可測函数とするとき，$f(x) = const$ a.e. $x \in V$ を示そう。

$$N_1 = \{x\,;\, ^{\exists}\gamma^{(c)}(x),\ ^{\exists}\gamma^{(e)}(x)\}$$

$$N(f) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x \in N_1\,;\ f(x) = f(y) = f(z) \quad ^{\forall}y \in \gamma^{(c)}(x),\ ^{\forall}z \in \gamma^{(e)}(x) \\ \qquad\qquad \nu(N_1 | \gamma^{(c)}(x)) = \nu(N_1 | \gamma^{(e)}(x)) = 1 \end{array} \right\}$$

とおくと，

$$\nu(N_1) = \nu(N(f)) = 1$$

である。

今 $\bar{V}$ の左側に K_{max} の勾配を持つ $\bar{\gamma}'$ をとって，$\bar{V}_1$ の上端と

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$\bar{V}_2$ の下端を結ぶものとする. K-四辺形 G で $\gamma_b(G)=\bar{\gamma}'$ なるものを構成し $\theta(\gamma_b(G))=\theta(\gamma_a(G))$ にとると

$$\nu(\bar{V}_1\cap G)\geq\frac{\omega}{16(1+C_2)C_2}\nu(G)\geq 2\alpha\nu(G)$$

であるから Lemma 7.1 の $G^{(\alpha)}$ に対し

$$\nu(G^{(\alpha)}\cap\bar{V}_1\cap N(f))\geq\alpha\nu(G)>0\text{。}$$

従って, $G^{(\alpha)}\cap N(f)\cap\bar{V}_1\ni\bar{x}$ が存在して, $\gamma^{(c)}(\bar{x})$ は $\bar{V}_2$ の下端に達している.

任意の $x\in N(f)$ に対し, $\gamma^{(c)}(x)$ を考えよう. $\bar{V}$ 内の帯 V_0 を高さの中央に x が来るように選び 巾は $\gamma^{(e)}(x)$ が V_0 の上端と下端を結ぶようにとる. V_0 の上部 $\frac{1}{4}$ を V_1, 中央 $\frac{1}{2}$ を V_2, 下部 $\frac{1}{4}$ を V_3 と名付け, V_1 の上端の水平線を $\bar{\gamma}_1$, V_2 の上端を $\bar{\gamma}_2$, V_3 の上端を $\bar{\gamma}_3$, V_3 の下端を $\bar{\gamma}_4$ とする (図10-1参照)。

$\gamma^{(c)}\cap V_0$ に Lemma 8.2 を適用し, $\gamma_b(G_1)=\gamma^{(c)}\cap V_0$, $\delta_0=\gamma_b(G_1)=\gamma_a(G_1)$ なる G_1 を構成すれば, 上と同じ議論で

$$\nu(V_1\cap N(f)\cap G_1^{(\alpha)})\geq\alpha\nu(G_1)>0.$$

Lemma 9.3 から $\sigma(V_1\cap N(f)\cap G_1^{(\alpha)}\cap\gamma^{(e)}(x))>0$。従って $\exists x_1\in V_1\cap N(f)\cap G_1^{(\alpha)}$, $\gamma^{(c)}(x_1)$ は $\bar{\gamma}_4$ までとどいている.

次に $V_0\cap\gamma^{(c)}(x_1)$ に対し Lemma 8.2 を適用し, $\gamma_c(G_2)=\gamma^{(c)}\cap V_0$, $\gamma_d(G_2)=\delta_0$ なる G_2 を構成すれば,

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\nu(G_2^{(\alpha)} \cap V_3 \cap N(f)) \geq \alpha\nu(G_2) > 0$$

となり，再び Lemma 9.3 から，$\sigma(G_2^{(\alpha)} \cap V_3 \cap N(f) \cap \gamma^{(c)}(x_1)) > 0$

$$\exists x_2 \in G_2^{(\alpha)} \cap V_3 \cap N(f) \cap \gamma^{(c)}(x_1),$$

$\gamma^{(e)}(x_2)$ は $\bar{\gamma}_1$ までとどいている。

以下この操作をくり返して，$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ をとり

$$\gamma^{(e)}(x_{2j}) \cap N(f) \ni x_{2j+1} \qquad f(x_{2j}) = f(x_{2j+1})$$

$$\gamma^{(c)}(x_{2j-1}) \cap N(f) \ni x_{2j} \qquad f(x_{2j-1}) = f(x_{2j})$$

であり，$\gamma^{(e)}(x_{2j})$，$\gamma^{(c)}(x_{2j-1})$ は共に V_2 の上端と下端を結んでいる。

従って各点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は着実に右へ少くとも $\dfrac{\delta_0}{2k_{min}}$ 移動しているから，有限回で，$\gamma^{(e)}(x_{2m}) \cap \gamma^{(c)}(\bar{x}) \neq \phi$ なる m が現われる。

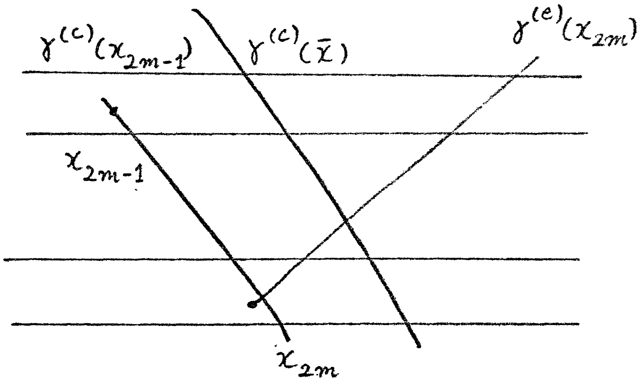


図 10-2

(必要ならば，$\gamma^{(c)}(x_{2m-1})$ の代りに $\gamma^{(c)}(x_{2m+1})$ を考えればよいのだから) $\gamma^{(c)}(x_{2m-1})$ から $\gamma^{(c)}(\bar{x})$ への canonical map が $\gamma^{(c)}(\bar{x})$ 上の正測度の集合で定義されている。Lemma 8.2 により canonical map が絶対連続だから

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\exists\ \tilde{x}_{2m} \in \gamma^{(c)}(x_{2m-1}) \cap N(f)$$
$$\tilde{x}_{2m+1} = \gamma^{(e)}(\tilde{x}_{2m}) \cap \gamma^{(c)}(\bar{x}) \in N(f).$$

従って

$$f(x) = f(x_1) = \cdots = f(x_{2m-1}) = f(\tilde{x}_{2m}) = f(\tilde{x}_{2m+1}) = f(\bar{x}).$$

これは x が，$\bar{\gamma}$ より左方にあるときであったが，右方にある場合も同様である。よって

$$f(x) = f(\bar{x}) \qquad {}^{\forall}x \in N(f) \cap V$$

が成立する。

以上のことから，

$$f(x) = \text{const.} \quad \text{on } X_j^{(\ell_1)} \cap N(f)$$

が導かれる。

次に $X_j^{(\ell_1)}$, $X_{j'}^{(\ell_1)}$ が隣り合っているときに，

$$f(x) = \text{const.} \quad \text{on } (X_j^{(\ell_1)} \cup X_{j'}^{(\ell_1)}) \cap N(f)$$

であることを示そう。

$X_j^{(\ell_1)}$ と $X_{j'}^{(\ell_1)}$ の境界は区分的に，単調増加および単調減少な K-曲線からなっていて，それらは $E(L_0)$ に属している。今増加な γ を境界上にもっているとしよう。γ を短くとれば，$\gamma \cap \bigcup_{0}^{\ell_1+1} T^k S = \phi$ にとれる。

γ 上で $T^{-\ell_1}$ は滑らかになる。$x_0 \in \gamma$ をとると Lemma 7.1 から

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$\omega \equiv \frac{1}{2}|\cos\varphi(x_0)|$ とおいて

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0(x_0, \alpha, \omega) = \varepsilon_1$$

をとれば,

$$U_\varepsilon(x_0) \subset (X_j^{(l_1)} \cup X_{j'}^{(l_1)}) \cap M(\omega) \cap U_{\varepsilon_0}(x_0).$$

K-四辺形 $G \ni x_0$ を $U_\varepsilon(x_0)$ の内部にとり

$\gamma_b(G)$ は γ の左側 $\gamma_d(G)$ は γ の右側,

γ は $\gamma_a(G)$ と $\gamma_c(G)$ を結び,

$$\gamma_a(G) = \gamma_b(G)$$

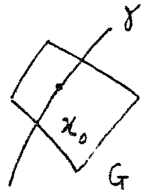


図10-3

となるようにすれば

$$\nu(G^{(\alpha)}) \geq (1-\alpha)\nu(G)$$

$$\nu(G^{(\alpha)} \cap X_j^{(l_1)}) > 0 \qquad \nu(G^{(\alpha)} \cap X_{j'}^{(l_1)}) > 0.$$

$$f(x) = \text{const} \qquad x \in N(f) \cap G^{(\alpha)}$$

だから主張が出る。

従って M_1 の連結部分では $f(x)$ は定数である. $M_1 = \bigcup_i M_{1,i}$ と分解され, 各 $M_{1,i}$ は連結部分であるとしよう.

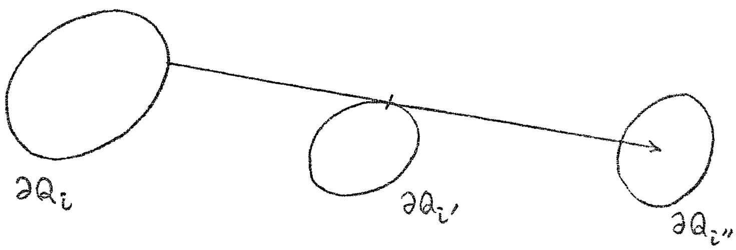


図10-4

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

上図の場合，図4-6（上）のような変換の状態である。

$$Tz \in \partial Q_i, \quad z \in \partial Q_{i'}, \quad T^{-1}z \in \partial Q_{i''}.$$

$T^{-1}z$ を通る（－）曲線の上側の近傍を U_1，下側の近傍を U_2 とする。$U_1 \cup U_2$ は $\zeta_{\infty}^{(-)} \wedge \zeta_{-\infty}^{(+)}$ の一つの要素に含まれる。ところで $\zeta_{\infty}^{(-)} \wedge \zeta_{-\infty}^{(+)}$ は T-不変な分割だから，$T(U_1 \cup U_2)$ も $\zeta_{\infty}^{(-)} \wedge \zeta_{-\infty}^{(+)}$ の一つの要素に入る。ところで $TU_1 \subset M_{1i'}$，$TU_2 \subset M_{1i}$ であり，$M_{1i'}$，M_{1i} 自身がそれぞれ $\zeta_{\infty}^{(c)} \wedge \zeta_{-\infty}^{(e)}$ の一つの要素に含まれるから $M_{1i'} \cup M_{1i}$ も一つの要素に含まれる。従って，直線でつなげる $\{\partial Q_i\}$ に対応する M_{1i} はすべて一つの要素に含まれ

$$M_1 = \bigcup_i M_{1i}$$

が $\zeta_{\infty}^{(-)} \wedge \zeta_{-\infty}^{(+)}$ の一つの要素に含まれ

$$\zeta_{\infty}^{(-)} \wedge \zeta_{-\infty}^{(+)} = \nu$$

を得る。

Lemma 10.2. T はエルゴード的である。

ここで直接証明を与えておく。

$f(x)$ を M_1 上の Lipschitz 連続な函数とする。

$$f^{\pm}(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{\pm k}x)$$

とおくと Birkhoff の個別エルゴード定理から，殆どすべての x で極限

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

が存在し $f^+(x)=f^-(x)$ a.e.

$$y\in\Gamma^{(c)}(x) \text{ に対して, } \exists m_0 \quad T^{-m_0}y\in\gamma^{(c)}(T^{-m_0}x)$$

だから $k\geq m_0$ に対し

$$|f(T^{-k}x)-f(T^{-k}y)|\leq\left(1+\frac{1}{k_{min}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\text{const.}\,\theta(T^{-k+m_0}\gamma^{(c)}(T^{-m_0}x))$$
$$\leq\left(1+\frac{1}{k_{min}}\right)^{\frac{1}{2}}\text{const.}\,(1+\eta)^{-k+m_0}\pi$$

だから

$$f^-(x)=f^-(y) \qquad y\in\Gamma^{(c)}(x).$$

同様に

$$f^+(x)=f^+(y) \qquad y\in\Gamma^{(e)}(x)$$

だから $f^+(x)=f^-(x)$ a.e. は $\zeta_{-\infty}^{(e)}\wedge\zeta_{-\infty}^{(c)}$ -可測である.

Lemma 10.2 から

$$f^+(x)=f^-(x)=\text{const.} \quad \text{a.e.}$$

Lipschitz 連続な函数が $L^1(M,\nu)$ で dense だから, T のエルゴード性が示された。Lemma 4.1 から $\{S_t\}$ のエルゴード性が示される.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

§11. T は K-system である.

前§までは，エルゴード理論の知識を何等仮定しないですすめてきたが，この§11 および次の§12では，力学系のエントロピーについての基本的知識を仮定する．必要なことは，十時[　]の第5章及び6章の§6.3に述べてある事柄である.

さて，§10でTのエルゴード性が示されたが，更に一歩進んで，K-system であることが，Rohlin-Sinai [10] の定理から直ぐにわかる．エントロピーの計算は Sinai [13] の方法による.

定理 3.

(1°) T は K-system である.

(2°) $\zeta^{(c)}, \zeta^{(e)}$ は K-分割

(3°) $$h(T) = \int \log\left(1+\frac{\tau(r_1,\varphi_1)(\chi^{(e)}(r,\varphi)+k(r))}{\cos\varphi}\right)d\nu$$

$$= \int \log\left(1-\frac{\tau(r,\varphi)(\chi^{(c)}(r,\varphi)-k(r))}{\cos\varphi}\right)d\nu.$$

まず，Rohlin-Sinai の定理を Lemma として引用しよう.

Lemma 11.1.

(i) $T\xi > \xi$, $\bigvee T^k\xi = \varepsilon$, $h(T\xi\,|\,\xi) = h(T)$ ならば

$$\bigwedge T^k\xi = \pi(T).$$

(ii) α が可算分割で，$H(\alpha) < \infty$ のとき，$\xi = \bigvee_{k=-\infty}^{0} T^k\alpha$ とおく.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

もし $T\xi > \xi$, $\bigvee T^k \xi = \varepsilon$ ならば

$$h(T\xi \mid \xi) = h(T), \quad \bigwedge T^k \xi = \pi(T).$$

(iii) $\quad \pi(T) = \pi(T^{-1})$.

証明は省略する．十時[15]の定理6.9の証明の読み直しをすればよい．

さて，Proposition 5.1から，$H(\alpha^{(c)}) < \infty$ を示せば，定理の(1°)が示される．$\alpha^{(c)} = \{X_j^{(c)}\}$ は有限ヶの j を除けば，演習問題4.2，Lemma 7.2からわかるように，

$$\nu(X_j^{(c)}) \sim \text{const}\ \frac{1}{j^4}$$

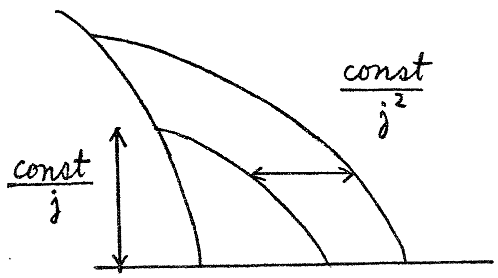


図11-1

$$\sum_j \frac{1}{j^4} \log j^4 < \infty$$

だから，$H(\alpha^{(c)}) < \infty$.

次に(2°)を示そう．Lemma 11.1の(ii),(iii)から

$$\zeta_{\infty}^{(c)} = \bigwedge T^k \zeta^{(c)} = \pi(T^{-1}) = \pi(T) = \bigwedge T^k \zeta^{(e)} = \zeta_{-\infty}^{(e)}$$

である．ところがLemma 10.1で，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\zeta_{\infty}^{(c)} \wedge \zeta_{-\infty}^{(e)} = \nu$$

が示してあるから

$$\zeta_{\infty}^{(c)} = \zeta_{-\infty}^{(e)} = \pi(T) = \pi(T^{-1}) = \nu .$$

よって，$\zeta^{(c)}$，$\zeta^{(e)}$ が K-分割であることがわかった。

最後の (3°) を証明しよう。証明は Sinai [ ] の方法による。

まず

$$h^{(e)} \equiv \int \log\left(1+\frac{\tau(r_1,\varphi_1)(\chi^{(e)}(r,\varphi)+k(r))}{\cos\varphi}\right) d\nu < \infty$$

$$h = h^{(c)} \equiv \int \log\left(1-\frac{\tau(r,\varphi)(\chi^{(c)}(r,\varphi)-k(r))}{\cos\varphi}\right) d\nu < \infty$$

を示そう。各 $X_j^{(c)}$ 上で，$-\tau(r,\varphi) \sim \mathrm{const}\, j$ であり $-\chi^{(c)}(r,\varphi)+k(r) \leq K_{max}$ だから，図 11-1 を参照して

$$h^{(c)} \leq \nu_0 \sum_j \int_{X_j^{(c)}} \frac{\mathrm{const}\cdot j}{\cos\varphi}\cdot \cos\varphi \, d\varphi \, dr$$

$$\leq \mathrm{const} \sum_j j^{-2} < \infty .$$

$h^{(e)} < \infty$ も同様である。今 Lemma 4.3 から

$$\frac{d\varphi}{d\varphi_1} = \frac{dr}{dr_1}\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr_1}{d\varphi_1} - \frac{dr}{dr_1} = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}\left[1-\frac{\tau(r_1,\varphi_1)\left(\frac{d\varphi_1}{dr_1}-k(r_1)\right)}{\cos\varphi_1}\right]$$

なる関係式から，Lemma 5.2 より，

$$\lambda(r,\varphi) \equiv \Lambda_0^*(r,\varphi;\gamma^{(c)}(r,\varphi))$$

$$= \frac{\chi^{(c)}(r,\varphi)}{\chi^{(c)}(r_1,\varphi_1)}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}\left[1-\frac{\tau(r_1,\varphi_1)(\chi^{(c)}(r_1,\varphi_1)-k(r_1))}{\cos\varphi_1}\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

が成立するから，Tが測度νを不変にすることより，

$$h = h^{(c)} = \int \log \lambda(x)\, d\nu$$

を得ることに注意しておく．また，$T^{-m}\zeta^{(c)}$ の x を含む要素が

$T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x)$ であることも確認しておこう．

Tがエルゴード的であるから，エルゴード定理により

$$H(T^{-1}\zeta^{(c)}|\zeta^{(c)}) = -\int \log \nu(T^{-1}\gamma^{(c)}(Tx)\,|\,\nu^{(c)}(x))\, d\nu$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log \nu(T^{-k-1}\gamma^{(c)}(T^{k+1}x)\,|\,T^{-k}\gamma^{(c)}(T^k x)) \quad \text{a.e.}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu(T^{-n}\gamma^{(c)}(T^n x)\,|\,\gamma^{(c)}(x)) \quad \text{a.e.}$$

が成立する．

$\zeta^{(c)}$ に関する ν の条件付測度 $\nu(\cdot|\gamma^{(c)})$ は，$\gamma^{(c)}$ 上の φ-方向の変動から定まる測度 $\sigma_{\gamma(c)}$ と互いに絶対連続であることが，Lemma 9.4 でわかっている．その density を

$$p(\cdot|\gamma^{(c)}) \equiv \frac{d\nu(\cdot|\gamma^{(c)})}{d\sigma_{\gamma(\cdot)}}$$

で表わそう。今 $\sigma(\gamma^{(c)}) = \theta(\gamma^{(c)}) \le \pi$ であることに注意すれば，

$$\bar{\nu}(A) \equiv \int\int_{\gamma^{(c)}(x)\cap A} d\sigma_{\gamma^{(c)}(x)}\, d\nu(x)$$

で定義される測度 $\bar{\nu}$ は ν と互いに絶対連続な有限測度である．

$\bar{\nu}$ の $\zeta^{(c)}$ に関する条件付測度は，$\sigma_{\gamma(c)}$ であることは定義の仕方から明らかである。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

もう一つ，やはりエルゴード性から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，集合 F と自然数 $m(\varepsilon)$ が存在して，$\nu(F) \geq 1-\varepsilon$，$x \in F$，$m \geq m(\varepsilon)$ ならば，

$$e^{m(h-\varepsilon)} \leq \lambda(x) \cdot \lambda(T^{-1}x) \cdot \cdots \cdot \lambda(T^{-m+1}x) \leq e^{(h+\varepsilon)}.$$

ここで，

$$F_1 \equiv \{ x ;\ \nu(F \mid \gamma^{(c)}(x)) > 1-\sqrt{\varepsilon} \}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \nu(F_1) &= 1-\nu\{ x ;\ \nu(F \mid \gamma^{(c)}(x)) \leq 1-\sqrt{\varepsilon} \} \\ &\geq 1-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int (1-\nu(F \mid \gamma^{(c)}(x)))\, d\nu \\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (1-\nu(F)) \geq 1-\sqrt{\varepsilon} . \end{aligned}$$

さて，適当な $a, b > 0$ に対して，

$$G = G(a,b) \equiv \{ x ;\ a < p(x \mid \gamma^{(c)}(x)) < b \}$$

$$G_1 = G_1(a,b) \equiv \{ x ;\ \nu(G(a,b) \mid \gamma^{(c)}(x)) \geq 1-\varepsilon \}$$

なる集合 G, G_1 の測度が

$$\nu(G) > 1-\varepsilon \qquad \nu(G_1) > 1-\varepsilon$$

になる。

$$E_m \equiv \{ c \in T^{-m}\zeta^{(c)} ;\ \sigma(c \cap G) \geq (1-\sqrt{\varepsilon})\, \sigma(c) \}$$

とおく。$T^{-m}\zeta^{(c)}$ に関する，$\bar{\nu}$ の条件付測度 $\bar{\nu}(\cdot \mid T^{-m}\zeta^{(c)} ; c)$ が

$$\bar{\nu}(G \mid T^{-m}\zeta^{(c)} ;\ c) = \frac{\sigma(c \cap G)}{\sigma(c)}$$

だから，$T^{-m}\zeta^{(c)} \nearrow \varepsilon$（各点分割）に注意すれば

$$\frac{\sigma(T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x)\cap G)}{\sigma(T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x))} \to \chi_G(x) \quad \text{a.e. } \bar{\nu}$$

$$\bar{\nu}(G \ominus E_m) \to 0 \quad m\to\infty.$$

ν と $\bar{\nu}$ が絶対連続だから，$\nu(G\ominus E_m)\to 0$。言いかえれば，

$\nu(E_m)\to\nu(G)>1-\varepsilon$．従って，十分大きな m に対して

$$\nu(E_m\cap T^{-m}G_1\cap T^{-m}F_1)\geq 1-4\varepsilon$$

が成立するから，測度 $1-4\varepsilon$ 以上の集合に属する x に対し，無限ヶの m があって，$x\in E_m\cap T^{-m}G_1\cap T^{-m}F_1$ が成立する。このような x と m に対して，$T^m x\in G_1\cap F_1$ だから

$$\begin{aligned}
&\nu(T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x)\mid\gamma^{(c)}(x))\\
&\geq \nu(T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x)\cap G\mid\gamma^{(c)}(x))\\
&\geq a(1-\sqrt{\varepsilon})\,\sigma(T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x))\\
&= a(1-\sqrt{\varepsilon})\int_{\gamma^{(c)}(T^m x)}\frac{d\sigma}{\lambda(y)\lambda(T^{-1}y)\cdots\lambda(T^{-m+1}y)}\\
&\geq a(1-\sqrt{\varepsilon})\int_{\gamma^{(c)}(T^m x)\cap G\cap F}\frac{d\sigma}{\lambda(y)\cdots\lambda(T^{-m+1}y)}\\
&\geq \frac{a(1-\sqrt{\varepsilon})}{b}e^{-m(h+\varepsilon)}\nu(G\cap F\mid\gamma^{(c)}(T^m x))\\
&\geq \frac{a(1-\sqrt{\varepsilon})}{b}(1-\varepsilon-\sqrt{\varepsilon})e^{-m(h+\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

よって

$$H(T^{-1}\zeta^{(c)}\mid\zeta^{(c)}) = -\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\nu(T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x)\mid\gamma^{(c)}(x))\leq h+\varepsilon.$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$\varepsilon>0$ が任意だから，$H(T^{-1}\zeta^{(c)}|\zeta^{(c)})$ の上からの評価を得る．下からの評価を求めよう．

$$E'_m \equiv \{x ;\, \nu(G\cap T^{-m}F \,|\, T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x)) \geq 1-\sqrt{\varepsilon}\,\}$$

とおくと

$$\nu(E'^{c}_m) \leq \int_{E'^{c}_m} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, \nu(G^c \cup T^{-m}F^c \,|\, T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x))\, d\nu(x)$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\nu(G)+\nu(F^c)) \leq 2\sqrt{\varepsilon}\,.$$

従って，十分大きな m に対し，$\nu(E'_m \cap T^{-m}G) \geq 1-\varepsilon-2\sqrt{\varepsilon}$ となり，測度正の集合に属する x に対して，無限ケの $\{m\}$ が存在して，$x\in E'_m \cap T^{-m}G$ である．このような x と m に対して，

$$\begin{aligned}
&\nu(T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x) \,|\, \gamma^{(c)}(x)) \\
&\leq \frac{1}{1-\sqrt{\varepsilon}}\, \nu(G\cap T^{-m}F\cap T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x) \,|\, \gamma^{(c)}(x)) \\
&\leq \frac{b}{1-\sqrt{\varepsilon}}\, \sigma(G\cap T^{-m}F\cap T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x)) \\
&= \frac{b}{1-\sqrt{\varepsilon}} \int_{T^m G\cap F\cap \gamma^{(c)}(T^m x)} \frac{d\sigma}{\lambda(y)\lambda(T^{-1}y)\cdots\lambda(T^{-m+1}y)} \\
&\leq \frac{b\pi}{1-\sqrt{\varepsilon}}\, e^{-m(h-\varepsilon)}\,.
\end{aligned}$$

従って，任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$H(T^{-1}\zeta^{(c)}|\zeta^{(c)}) = -\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log \nu(T^{-m}\gamma^{(c)}(T^m x)|\gamma^{(c)}(x)) \geq h-\varepsilon\,.$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$h(T^{-1}) = H(\zeta^{(c)} \mid T\zeta^{(c)}) = H(T^{-1}\zeta^{(c)} \mid \zeta^{(c)}) = h$ を得る. 同様にして $h(T) = H(T\zeta^{(e)} \mid \zeta^{(e)}) = h^{(e)}$ を示せるが, $h(T) = h(T^{-1})$ だから結論を得る.

§12. 撞球問題は K-system.

我々は §10 で $\{S_t\}$ がエルゴード的であることを示した. ここでは K-system であることを示そう. そのため, $\{S_t\}$ の transversal foliations の構成から始めよう.

transversal foliations の一般的構成は, Hopf [5] によって, 次のように作ればよいことが知られている.

$$\tilde{\Gamma}^{(c)}(x) = \lim_{t\to\infty} S_t \pi^{-1}(S_{-t}x)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(e)}(x) = \lim_{t\to\infty} S_{-t} \pi^{-1}(S_t x).$$

しかし, 我々は, すでに T に関して, transversal fibres の構成を行い, 各種の性質を得ているので, それを利用して構成しよう.

M上の点 $\hat{x}$ は四つの座標 $(\hat{s}, \hat{r}, \hat{\varphi}, v)$ で表示された. 射影 $\tilde{\pi}$ を $\tilde{\pi}(\hat{x}) \equiv (\hat{s}, \tilde{r}, \tilde{\varphi})$ と定義すれば, $\tilde{\pi}(\tilde{x}) \in M_1$ である. M上の測度 μ は

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$d\mu = \mathrm{const}\, dv\, dv$$

だったから，

$$D^{\pm}(\tilde{\pi}(\tilde{x})) < \infty \qquad a.e. \quad x \quad (\mu)$$

が成立し，殆どすべての $\tilde{x}$ に対して，$\gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))$，$\gamma^{(e)}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))$ が存在する．それぞれの曲線を表わす方程式を $\varphi = \psi^{(c)}(r)$，$\varphi = \psi^{(e)}(r)$ としよう．方程式

$$\begin{cases} s = \tilde{s} \\ \varphi = \psi^{(c)}(r) \\ v = \tilde{v} - \displaystyle\int_{\tilde{r}}^{r} \sin\psi^{(c)}(r)\, dr \end{cases} \qquad \begin{cases} s = \tilde{s} \\ \varphi = \psi^{(e)}(r) \\ v = \tilde{v} - \displaystyle\int_{\tilde{r}}^{r} \sin\psi^{(e)}(r)\, dr \end{cases}$$

は $(\tilde{s}, \tilde{r}, \tilde{v})$ の近傍でM内の滑らかな曲線を定義する．それらを $\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$，$\hat{\gamma}^{(c)}(x)$ と記そう（符号 e と c を入れかえているから注意!）．このとき $\tilde{\pi}(\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x}))$ は $\gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))$ の一部分であり $\tilde{\pi}(\hat{\gamma}^{(c)}(\tilde{x}))$ は $\gamma^{(e)}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))$ の一部である．

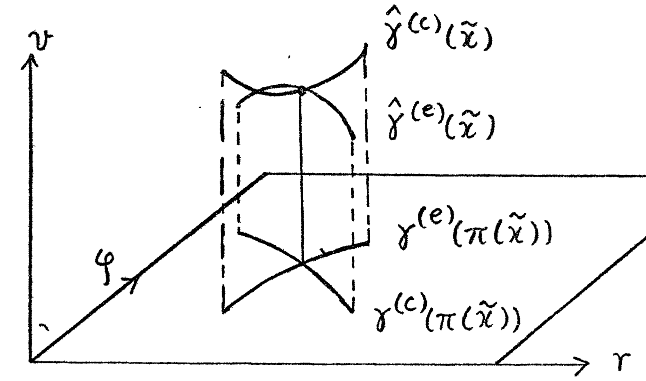


図12-1

さらに (r, v)-座標で $\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ は concave，$\gamma^{(c)}(\tilde{x})$ は convex

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

curve である．

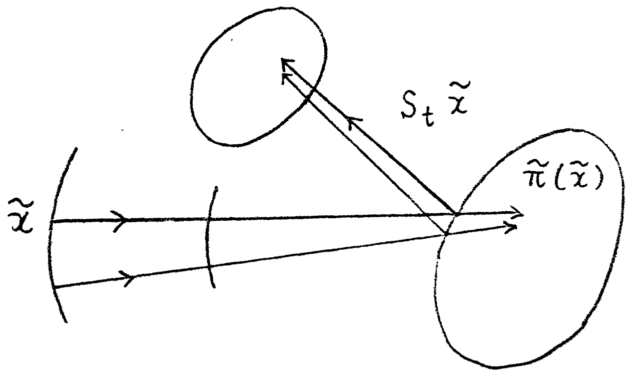


図12-2

$\{\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})\}$，$\{\hat{\gamma}^{(c)}(\tilde{x})\}$ はそれぞれ，局所的に不変な曲線群である．すなわち

(イ) $\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x}) \ni \tilde{y}$ に対して，$\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{y})$ と $\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ が一致する．

同じことが $\hat{\gamma}^{(c)}$ に対しても成立する．

(ロ) $\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ と $S_{-t}\hat{\gamma}^{(e)}(S_t\tilde{x})$ が $\tilde{x}$ の近傍で一致する．

同じことが $\hat{\gamma}^{(c)}$ に対しても成立する．

まず (イ) を示す．$\tilde{y} \in \hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ ならば，$\tilde{\pi}(\tilde{y}) \in \gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))$ だから，$\gamma^{(c)}(\pi(\tilde{y})) = \gamma^{(c)}(\pi(\tilde{x}))$．いま $\tilde{y} = (\tilde{\tilde{s}}, \tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{\varphi}}, \tilde{\tilde{v}})$ とすれば，

$$\tilde{\tilde{s}} = \tilde{s},\ \tilde{\tilde{\varphi}} = \psi^{(c)}(\tilde{\tilde{r}}),\quad \tilde{\tilde{v}} = \tilde{v} - \int_{\tilde{r}}^{\tilde{\tilde{r}}} \sin\psi^{(c)}(r)\,dr$$

だから

$$\tilde{\tilde{v}} - \int_{\tilde{\tilde{r}}}^{r} \sin\psi^{(c)}(r)\,dr = \tilde{v} - \int_{\tilde{r}}^{r} \sin\psi^{(c)}(r)\,dr$$

となり，$\tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{y})$ は $\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ と同じ方程式で表わされる．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

次に (ロ) を示す．$\tau(\tilde{x}) < t < \tilde{v}$ なる t に対しては；

$$S_t \tilde{x} = (\tilde{s}, \tilde{r}, \tilde{\varphi}, \tilde{v}-t)$$

である．従って $\hat{\gamma}^{(e)}(S_t \tilde{x})$ の方程式は

$$s = \tilde{s}, \quad \varphi = \psi^{(c)}(r), \quad v = \tilde{v} - t - \int_{\tilde{r}}^{r} \sin \psi^{(c)}(r) dr$$

であり r が十分 $\tilde{r}$ に近ければ．

$$S_{-t}(s, r, \varphi, v) = (\tilde{s}, r, \psi^{(c)}(r), \tilde{v} - \int_{\tilde{r}}^{r} \sin \psi^{(c)}(r) dr)$$

となり $\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ 上の点である．

次に一度だけ衝突する場合，$\tilde{v} < t < \tilde{v} - \tau(T^{-1}\tilde{\pi}(\tilde{x}))$ のときを考えよう．

$$S_t \tilde{x} \equiv \tilde{\tilde{x}} = (\tilde{\tilde{s}}, \tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{\varphi}}, \tilde{\tilde{v}})$$

とおくと．

$$(\tilde{\tilde{s}}, \tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{\varphi}}) = T^{-1}(\tilde{s}, \tilde{r}, \tilde{\varphi})$$

$$\tilde{\tilde{v}} = -\tau(\tilde{\tilde{s}}, \tilde{\tilde{r}}, \tilde{\tilde{\varphi}}) + \tilde{v} - t$$

であるから，

$$\gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(\tilde{\tilde{x}})) = T^{-1}\gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))$$

である．従って $\gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(\tilde{\tilde{x}}))$ の方程式を $\varphi_1 = \psi_1^{(c)}(r_1)$ と表わすと，$\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{\tilde{x}})$ の方程式は

$$s_1 = \tilde{\tilde{s}}, \quad \varphi_1 = \psi_1^{(c)}(r_1), \quad v_1 = \tilde{\tilde{v}} - \int_{\tilde{\tilde{r}}}^{r_1} \sin \psi_1^{(c)}(r) dr.$$

さて，$S_{-t}\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{\tilde{x}})$ の $\tilde{x}$ の近傍における方程式は，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$s=\tilde{s},\quad \varphi=\psi^{(c)}(r),\quad v=v_1+t+\tau(s_1,r_1,\varphi_1)$$

である。ところで Lemma 4.3 から

$$\frac{dv}{dr}=-\sin\psi_1^{(c)}(r)\frac{dr_1}{dr}+\frac{d\tau}{dr}=-\sin\psi^{(c)}(r)$$

が成立するから $r_1=\tilde{\tilde{r}}$ のとき，$\varphi_1=\tilde{\tilde{\varphi}}$，$v_1=\tilde{\tilde{v}}$ に注意すれば，$v(\tilde{\tilde{r}})=\tilde{v}$ となるから，

$$v(r)=-\int_{\tilde{r}}^{r}\sin\psi^{(c)}(r)\,dr$$

となり，$S_{-t}\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{\tilde{x}})$ の $\tilde{x}$ の近傍では $\hat{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ と一致する。

衝突の回数が多いときは，inductively に示せるから，(ロ)がわかった。

$$\tilde{\Gamma}^{(e)}(\tilde{x})\equiv\bigcup_t S_{-t}\hat{\gamma}^{(e)}(S_t\tilde{x})$$

$$\tilde{\Gamma}^{(c)}(\tilde{x})\equiv\bigcup_t S_{-t}\hat{\gamma}^{(c)}(S_t\tilde{x})$$

とおくことにより transversal foliation $\tilde{\Gamma}^{(e)}$, $\tilde{\Gamma}^{(c)}$ が構成できる。$\tilde{\Gamma}^{(e)}$, $\tilde{\Gamma}^{(c)}$ の configulation space へ射影 $\pi(\tilde{\Gamma}^{(e)})$, $\pi(\tilde{\Gamma}^{(c)})$ は連結した曲線である。

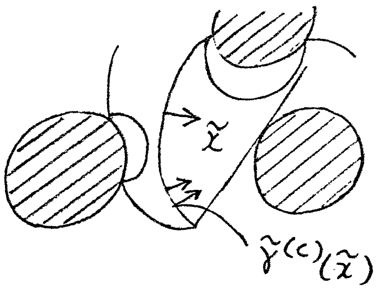


図12-3

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$\pi(\tilde{\Gamma}^{(e)})$ の滑らかさが，∂Q 上以外でこわれる点（そこでは実は，接するように折返されているのだが）で $\tilde{\Gamma}^{(e)}$ を切断し，$\tilde{x}$ を含む component を $\tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ と記す.

あるいは，次のように言ってもよい。入射ベクトルと反射ベクトルを identify して（$(s,r,\varphi,0)$ と $(T^{-1}(s,r,\varphi), -\tau(T^{-1}(s,r,\varphi)))$ を同一視する）自然な位相を入れれば，M 内の運動 $\{S_t\}$ が連続になる。また $\Gamma^{(e)}(\tilde{x})$ も，その位相で連結になるが，$\Gamma^{(e)}(\tilde{x})$ を $\bigcap_{t\le 0} S_t S$ で切断し，$\tilde{x}$ を含む component を $\tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ とする. 同様に $\tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{x})$ を定義すれば，容易に次の主張が言える。

$\tilde{\zeta}^{(e)}$ は $\tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$ への分割，$\tilde{\zeta}^{(c)}$ は $\tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{x})$ への分割とする。

Proposition 12.1.

(i) $\quad S_t\tilde{\zeta}^{(e)} > \tilde{\zeta}^{(e)} \qquad S_t\tilde{\zeta}^{(c)} < \tilde{\zeta}^{(c)} \qquad t>0$

(ii) $\quad \bigvee S_t\tilde{\zeta}^{(e)} = \bigvee S_t\tilde{\zeta}^{(c)} = \varepsilon$

(iii) 条件付測度 $\mu(\cdot\,|\,\tilde{\gamma}^{(e)})$ (or $\mu(\cdot\,|\,\tilde{\gamma}^{(c)})$) は $\tilde{\gamma}^{(e)}$ (or $(\tilde{\gamma}^{(e)})$ の φ-方向の変動から定まる測度 $\sigma_{\tilde{\gamma}(e)}$ $(\sigma_{\tilde{\gamma}(c)})$ と互いに絶対連続である。

(iii) は，M_1 上で $\gamma^{(c)}, \gamma^{(e)}$ が同じ性質をもっていたから，$\tilde{\gamma}^{(e)}, \tilde{\gamma}^{(c)}$ の構成の仕方から容易にわかる。

今 $t>0$ に対し，$\tilde{x}=(\tilde{s},\tilde{r},\tilde{\varphi},\tilde{v})$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\lambda_t(\tilde{x}) \equiv \begin{cases} 1, & 0 < t < v \\ \Lambda_0^*(\tilde{\pi}(\tilde{x}); \gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))), & 0 < v-t < -\tau(T^{-1}\tilde{\pi}(\tilde{x})) \\ \prod_{i=0}^{n-1} \Lambda_i^*(\tilde{\pi}(\tilde{x}); \gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))), & \\ \qquad 0 \leq v-t+\sum_{i=1}^{n+1}\tau(T^{-i}\tilde{\pi}(\tilde{x})) < \tau(T^{-n}\tilde{\pi}(\tilde{x})) \end{cases}$$

なる記号を導入しておこう。

力学系 $\{S_t\}$ がエルゴード的だから，高々可算ヶの t を除いて各 S_t がエルゴード的な変換になる（証明は Appendix 8 を参照されたい）。

$|\tau|_{min}/4$ より小さい S_t がエルゴード的になる $t>0$ をとってこよう。前§と同じく

$$H(S_t\tilde{\zeta}^{(e)}|\tilde{\zeta}^{(e)}) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu(S_{nt}\tilde{\gamma}^{(e)}(S_{-nt}\tilde{x})|\tilde{\gamma}^{(e)}(x))$$

が殆どすべての $\tilde{x}$ に対して成立する。一方

$$\sigma(S_{nt}\tilde{\gamma}^{(e)}(S_{-nt}\tilde{x})) = \int_{\tilde{\gamma}^{(e)}(S_{-nt}\tilde{x})}\frac{d\sigma(\tilde{y})}{\lambda_{nt}(\tilde{y})}$$

である。このことと

$$\frac{1}{n}\log\lambda_{nt}(\tilde{y}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log\lambda_t(S_{jt}\tilde{y})$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \int\log\lambda_t(\tilde{y})\,d\mu \quad a.e.$$

に注意すれば，前§と全く同じ方法で，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$H(S_t \tilde{\zeta}^{(e)} | \tilde{\zeta}^{(e)}) = \int \log \lambda_t(\tilde{y})\, d\mu$$

を得る．次に右辺の積分の計算を行おう．

$$\lambda(x) = \Lambda_0^*(x\,;\, \gamma^{(c)}(x))$$

であったことを思い出しておき，$0 < t < |\tau|_{min}/2$ だからすべての $\tilde{x}$ は $[0, t]$ の運動の間高々一回しか衝突しない．正確にいえば，集合

$$N_t \equiv \{(\tilde{s}, \tilde{r}, \tilde{\varphi}, \tilde{v})\,;\ 0 \le \tilde{v} < t\},$$

上では，一度衝突し，$N_t{}^c$ では衝突しない．

$$\lambda_t(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & \tilde{x} \notin N_t \\ \lambda(\tilde{\pi}(\tilde{x})) & \tilde{x} \in N_t \end{cases} .$$

従って

$$\int \log \lambda_t(\tilde{x})\, d\mu(\tilde{x}) = \int_{N_t} \log \lambda(\tilde{\pi}(\tilde{x}))\, d\mu$$

$$= -\mu_0 \sum_{\tilde{s}} \int_{0 \le \tilde{v} < t} \log \lambda(\tilde{s}, \tilde{r}, \tilde{\varphi}) \cos \tilde{\varphi}\, d\tilde{\varphi}\, d\tilde{r}\, d\tilde{v}$$

$$= t \cdot \frac{\mu_0}{\nu_0} \int \log \lambda(x)\, d\nu .$$

ところで，Ambrose-Kakutani 型の力学系に対しては，一般に

$$h(S_t) = |t|\, h(T) \Big/ \int |\tau|\, d\nu$$

$$= |t| \frac{\mu_0}{\nu_0} h(T)$$

が成立する（十時［15］参照）． §11で $h(T) = \int \log \lambda\, d\nu = h$ がわかっていたから

$$h(S_t) = H(S_t \tilde{\zeta}^{(e)} | \tilde{\zeta}^{(e)}) = |t| \frac{\mu_0}{\nu_0} h .$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

S_t に Rohlin-Sinai の定理を適用すれば，

$$\pi(S_t) = \bigwedge_n S_{nt} \tilde{\zeta}^{(e)} = \bigwedge_s S_s \tilde{\zeta}^{(e)} \quad (\equiv \tilde{\zeta}^{(e)}_{-\infty})$$

が得られる。同様にして

$$\pi(S_t) = \bigwedge_s S_s \tilde{\zeta}^{(c)} \quad (\equiv \tilde{\zeta}^{(c)}_{\infty})$$

を得る。最後に，$\{S_t\}$-不変な分割 $\pi\{S_t\} \equiv \tilde{\zeta}^{(e)}_{-\infty} \wedge \tilde{\zeta}^{(c)}_{\infty}$ が trivial な分割であることを示せば，$\{S_t\}$ が K-system であることがわかる。まず次の簡単な Lemma から始めよう。

Lemma 12.1. G を四辺形とし

$$v(G) = -\int_{\gamma_a} \sin\varphi(x)\,d\rho - \int_{\gamma_b} \sin\varphi(x)\,d\rho + \int_{\gamma_c} \sin\varphi(x)\,d\rho + \int_{\gamma_d} \sin\varphi(x)\,d\rho$$

とおくと，

$$0 < v(G) \leq 2\rho(\gamma_a) + 2\rho(\gamma_b).$$

証明．図12-5 の如く，$\rho(\gamma_b) \leq \rho(\gamma_c)$ のときには，r_1, r_2, r_3, r_4 を図のように定めよう。$\gamma_a(G)$，$\gamma_b(G)$，$\gamma_c(G)$，$\gamma_d(G)$ の方程式を与える函数をそれぞれ，$\psi_a(r)$，$\psi_b(r)$，$\psi_c(r)$，$\psi_d(r)$ とおけば，

$$\begin{aligned} v(G) &= \int_{r_1}^{r_2} (\sin\psi_c(r) - \sin\psi_b(r))\,dr \\ &+ \int_{r_2}^{r_3} (\sin\psi_c(r) - \sin\psi_a(r))\,dr \\ &+ \int_{r_3}^{r_4} (\sin\psi_d(r) - \sin\psi_a(r))\,dr \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

だから，$\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi$ で $-\sin\varphi$ が単調増加なことに注意すればば明らかである．$\rho(\gamma_b) \ge \rho(\gamma_c)$ の場合も同様に示せる．

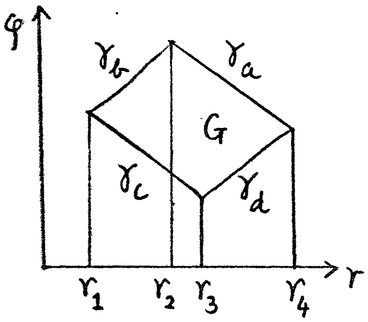


図 12-4

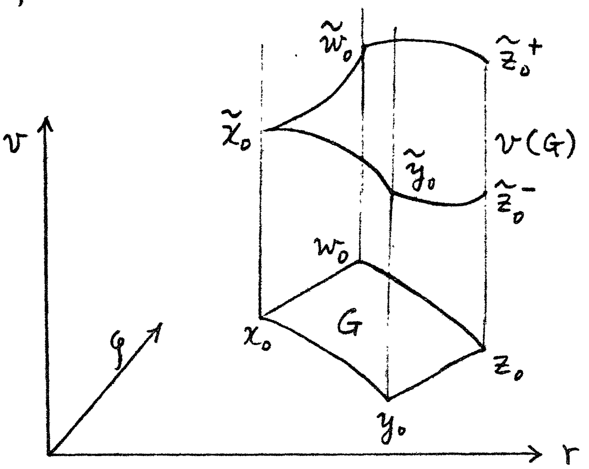


図 12-5

このLemmaを使って，$\pi\{S_t\}$ が trivial であることの直観的説明を試みておこう。$v_0 = \frac{1}{2}|\tau|_{min}$ とおき，x_0 を $D^{\pm}(x_0) < \infty$ なる M_1 の点とし $\tilde{x}_0 = (x_0, v_0)$ としよう。Lemma 7.1により，x_0 の十分小さい近傍の中に，K-四辺形 G が $\gamma_b(G) \subset \gamma^{(e)}(x_0)$，$\gamma_c(G) \subset \gamma^{(c)}(x_0)$ でありさらに $\gamma_a(G)$，$\gamma_b(G)$ も transversal fibres の一部であるようにとれ，Lemma 7.1で与えられる集合 $G^{(\alpha)}$ の測度が $\nu(G^{(\alpha)}) \ge (1-\alpha)\nu(G) > 0$ となる。

さて，図12-5のように，x_0, y_0, z_0, w_0 をGの頂点とする．

$$\tilde{w}_0 \equiv \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{x}_0) \cap \tilde{\pi}^{-1}(w_0), \qquad \tilde{z}_0^+ \equiv \tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{w}_0) \cap \pi^{-1}(z_0)$$

$$\tilde{y}_0 \equiv \tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{x}_0) \cap \tilde{\pi}^{-1}(y_0), \qquad \tilde{z}_0^- \equiv \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{y}_0) \cap \pi^{-1}(z_0)$$

とおく。$\tilde{z}_0^+$ と $\tilde{z}_0^-$ の第四座標の差は $v(G)$ であることが，foliation

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

の構成の仕方からわかる。

大ざっぱに言って，$\pi\{S_t\}$ の各要素は，foliation $\tilde{\Gamma}^{(e)}$ と $\tilde{\Gamma}^{(c)}$ によって織り成されているはずだから，

$$\tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{w}_0),\ \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{z}_0),\ \tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{x}_0),\ \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{y}_0)$$

は $\pi\{S_t\}$ のある一つの要素 C に含まれる。*)

$$\tilde{z}_0 \in C,\quad \tilde{z}_0^- = S_{v(G)}\tilde{z}_0^+ \in S_{v(G)}C$$

だから，$C = S_{v(G)}C$ **) である。エルゴード性から，$\{S_t\}$ が $\pi\{S_t\}$ の要素から要素への変換として，周期 $v(G)>0$ をもつことがわかる。ところが，G を十分小さくとれば $v(G)\to 0$ だから，周期は 0 でなければならない，すなわち，$\pi\{S_t\}$ の各要素が $\{S_t\}$-不変となり，再びエルゴード性から，$\pi\{S_t\}$ が trivial であることがわかる。

直観的には以上の説明でよいのだが，可測分割の議論は，測度 0 の集合は除外して行う必要があるので *) と **) の何処が直ちに正しいとは言えず，測度論的議論を経なければならない。

いま $\{S_t\}$ を $\pi\{S_t\}$ の要素たちの間の変換とみるときの周期は，殆どすべての要素の上で一定であることがエルゴード性からわかる。その周期を t^*，$0\le t^*\le\infty$，としよう。もし $t^*>0$ ならば，$t_0 \equiv \frac{1}{4}\min(t^*, v_0)$ とおく。上の説明でのべたような十分小さい G を選び，$v(G)<\frac{1}{2}t_0$ であるようにする。

$$\tilde{H} \equiv \bigcup_{\tilde{y}\in\tilde{\gamma}^{(e)}(x_0)} S_t\tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{y}) \cap \pi^{-1}(G^{(\alpha)})$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$H \equiv \bigcup_{0 \le t \le t_0} S_t \tilde{H}$$

とおくと，Hは可測集合で，測度は，

$$\mu(H) = \frac{\mu_0}{\nu_0}\nu(G^{(\alpha)}) > 0$$

であることがわかる．さらに，$\{S_t\}$－不変な測度0の集合$\tilde{N}$が存在して，$\pi\{S_t\}$の要素Cに対して

$$C \cap S_t C \cap \tilde{N}^c = \phi \qquad 0 < t < t^*$$

であることに注意しておこう．$\pi\{S_t\} < \tilde{\zeta}^{(e)}$だから，各$C$は，完全な$\tilde{\gamma}^{(e)}$の集まりであるとしてよい．

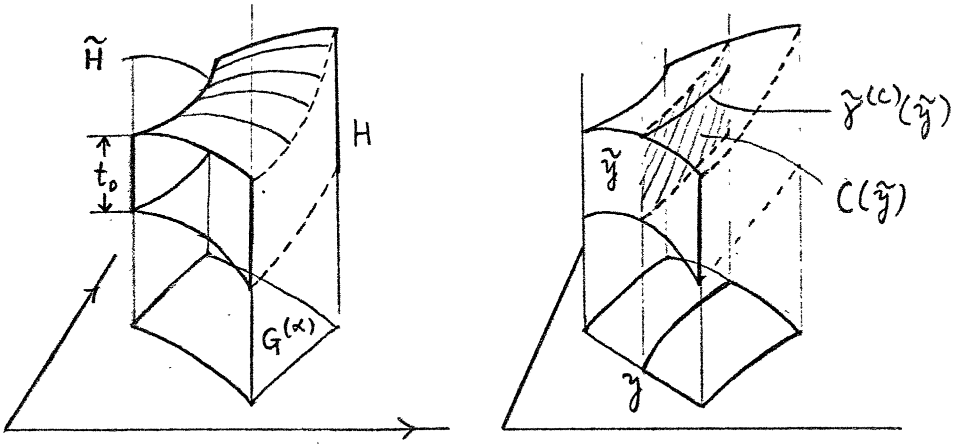


図12-6

$\{\bar{A}_i\}$を分割$\pi\{S_t\}$を生成する basis とすれば，各$\bar{A}_i$は$\tilde{\gamma}^{(e)}$の集まりである。すなわち

$$\bar{A}_i = \bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{A}_i} \tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{x})$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

と仮定してよい。$A_i \equiv \bar{A}_i \cap H$ とおこう。$\tilde{y} \in \tilde{\gamma}^{(e)}(x_0) \cap H$ に対して，

$$C(\tilde{y}) \equiv \bigcup_{|t| \leq 2t_0} S_t \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{y}) \cap H$$

とおき，$C(\tilde{y})$ への H の分割を ξ で表わそう。A_i は

$$A_i = \bigcup_{\tilde{z} \in A_i \cap C(x_0)} \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{z}) \cap H$$

とかける。また，

$$A_i \cap S_t \tilde{H} = \bigcup_{\tilde{z} \in A_i \cap S_t \tilde{\gamma}^{(c)}(x_0)} \tilde{\gamma}^{(e)}(\tilde{z}) \cap H$$

$$A_i \cap S_t \tilde{H} \cap C(\tilde{x}_0) = A_i \cap \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{x}_0)$$

$$\tilde{\pi}(A_i \cap S_t \tilde{H} \cap C(\tilde{y})) = \Psi_{\gamma^{(e)}(y), \gamma^{(e)}(x_0)} \tilde{\pi}(A_i \cap S_t \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{x}_0))$$

ただし $\quad y = \tilde{\pi}(\tilde{y})$

が成立することと測度の構造から

$$\mu(A_i) = \frac{\mu_0}{\nu_0} \nu(G^{(\alpha)}) \int_0^{t_0} \mu(A_i | S_t \tilde{H}) dt$$

$$= \frac{\mu_0}{\nu_0} \int_0^{t_0} dt \int_{\gamma^{(c)}(x_0)} d\sigma(y) \int_{\Psi_{\gamma^{(e)}(y), \gamma^{(e)}(x_0)} \tilde{\pi}(A_i \cap S_t \tilde{\gamma}^{(c)}(x_0))} g(x, y) d\sigma(x)$$

が成立する。従って，canonical map が絶対連続であることに注意し

$$F_i \equiv \{ t ; \ \sigma(\tilde{\pi}(A_i \cap S_t \tilde{\gamma}^{(c)}(x_0))) > 0 \}$$

とおくと，$\mu(A_i) > 0$ ならば F_i のルベーグ測度は正である。さらに，

$t \in F_i$ ならば

$$\sigma(\tilde{\pi}(A_i \cap S_t \tilde{H} \cap C(\tilde{y})) > 0 .$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

このことから，

$$\mu(A_i \mid C(\tilde{y})) = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \mu(A_i \mid S_t \tilde{H} \cap C(\tilde{y}))\, dt > 0$$

である。このことと，A_i が $\tilde{\xi}^{(c)}$-可測であることに注意すれば，

$$J_i \equiv \{(t, \tilde{y})\,;\, -t_0 \le t \le 2t_0,\ \tilde{y} \in \tilde{\gamma}^{(e)}(x_0),\ \mu(A_i - \tilde{N} \mid S_t \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{y}) \cap H = 1\}$$

とおくと，J_i の測度は正となる。t_0 の選び方から，殆どすべての $\tilde{y} \in \tilde{\gamma}^{(e)}(x_0)$ に対し，ルベーグ空間

$$J_0(\tilde{y}) \equiv \{t\,;\, \mu(H - \tilde{N} \mid S_t \tilde{\gamma}(\tilde{y})) > 0\}$$

において，$\{J_i(\tilde{y})\}$ が *basis* を成すことがわかる。ただし $J_i(\tilde{y})$ は J_i の $\tilde{y}$-切片とする。この事実は，殆どすべての $\tilde{y} \in \tilde{\gamma}^{(e)}(x_0)$ に対し，殆どすべての $t \in J_0(\tilde{y})$ において $S_t \tilde{\gamma}(\tilde{y}) \cap H$ 上の殆どすべての点がある共通の $\pi\{S_t\}$ の要素に入ることを意味している。*Canonical map* の絶対連続性に再び注意すれば，互いに異なる $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in \tilde{\gamma}^{(e)}(x_0)$，$t_1 \in J_0(\tilde{y}_1)$，$t_2 \in J_0(\tilde{y}_0)$，$x_1^*, x_1^{**} \in S_{t_1} \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{y}_1)$ が存在し，x_1^*, x_1^{**} および

$$x_2^* \equiv \tilde{\pi}^{-1}(\gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(x_1^*))) \cap S_{t_2} \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{y}_2)$$

$$x_2^{**} \equiv \tilde{\pi}^{-1}(\gamma^{(c)}(\tilde{\pi}(x_1^{**}))) \cap S_{t_2} \tilde{\gamma}^{(c)}(\tilde{y}_2)$$

は $\pi\{S_t\}$ の同じ要素 C に属し，$\tilde{N}$ には属さないようにできる。C は，$\tilde{\gamma}^{(c)}(x_1^*) \cap H$，$\tilde{\gamma}^{(c)}(x_1^{**}) \cap H$ を完全に含むとしておいたから，

$$x_3^* \equiv \tilde{\gamma}^{(c)}(x_1^*) \cap C(\tilde{y}_2),\quad x_3^{**} \equiv \tilde{\gamma}^{(c)}(x_1^{**}) \cap C(\tilde{y}_2)$$

もまた，C に属し，$\tilde{N}$ に属さない。$\tilde{N}$ を除外したところで，C は t^* 以下の

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

周期をもたぬから，

$$x_2^* = x_3^*, \qquad x_2^{**} = x_3^{**}$$

でなければならぬ。このことは四辺形 G' として，$\tilde{\pi}(x_1^*)$, $\tilde{\pi}(x_1^{**})$, $\tilde{\pi}(x_2^{**})$, $\tilde{\pi}(x_2^*)$ を頂点にもつものを考えれば，$v(G')>0$ であることに反する．従って $t^*=0$ でなければならない．

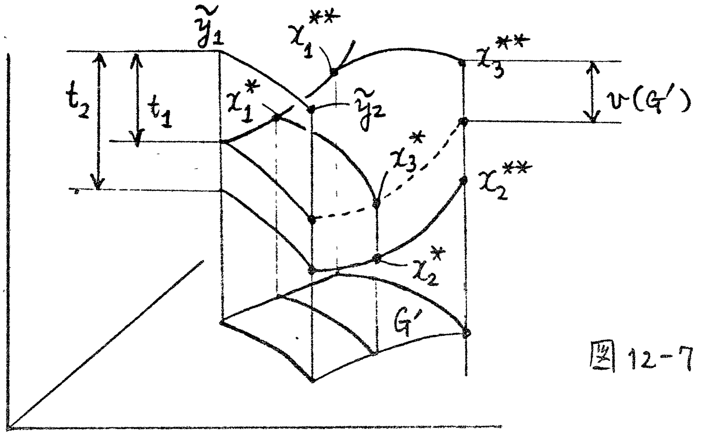


図 12-7

定理 4。 Sinai の撞球問題は K-system であり，

(i) $S_t\tilde{\zeta}^{(e)} > \tilde{\zeta}^{(e)}$, $\quad S_t\tilde{\zeta}^{(c)} < \tilde{\zeta}^{(c)} \qquad t>0$

(ii) $\bigvee_t S_t\tilde{\zeta}^{(e)} = \bigvee_t S_t\tilde{\zeta}^{(c)} = \varepsilon$

(iii) $\bigwedge_t S_t\tilde{\zeta}^{(e)} = \bigwedge_t S_t\tilde{\zeta}^{(c)} = \nu$

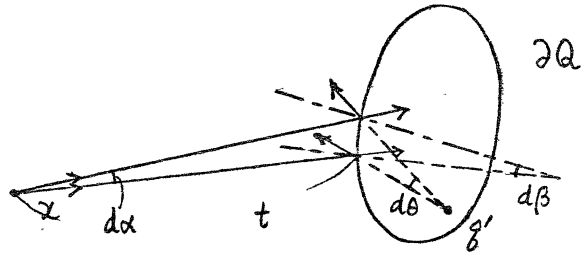
(iv) $h(S_t) = |t|\cdot\dfrac{\mu_0}{\nu_0}h(T)$.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

APPENDIX

Appendix 1.

Lemma 4.2 の証明のためには次のような事柄に注意しておけばよい。



一点 q から微小角 $d\alpha$ だけ異なった方向に出ている直線が ∂Q と交わる点および方向を、それぞれ (r, φ), $(r+dr, \varphi+d\varphi) \in M_1$ とする。$n(r)$ と $n(r+dr)$ のなす角を $d\beta$, また二つの反射角のなす角度を $d\theta$, 反射角方向の直線の交わる点（すなわち q の虚像の位置）を q' で表わす。このとき高位の微小量を除いて、次の式が成立する。

$$dr = -\frac{t}{\cos\varphi}\,d\alpha$$

$$d\beta = -k(r)\,dr = \frac{k(r)t}{\cos\varphi}\,d\alpha$$

$$d\varphi = d\alpha - d\beta = \left(1 - \frac{k(r)t}{\cos\varphi}\right)d\alpha$$

$$d\theta = d\beta - d\varphi = -\left(1 - \frac{2k(r)t}{\cos\varphi}\right)d\alpha$$

$$\rho = \cos\varphi\,\frac{dr}{d\theta} = \frac{t}{1 - \dfrac{2k(r)t}{\cos\varphi}}\,.$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Appendix 2.

$T^{-1}S$ および TS の分枝の仕方について：

左側の図の曲線が，右側の図のベクトル達に対応する．

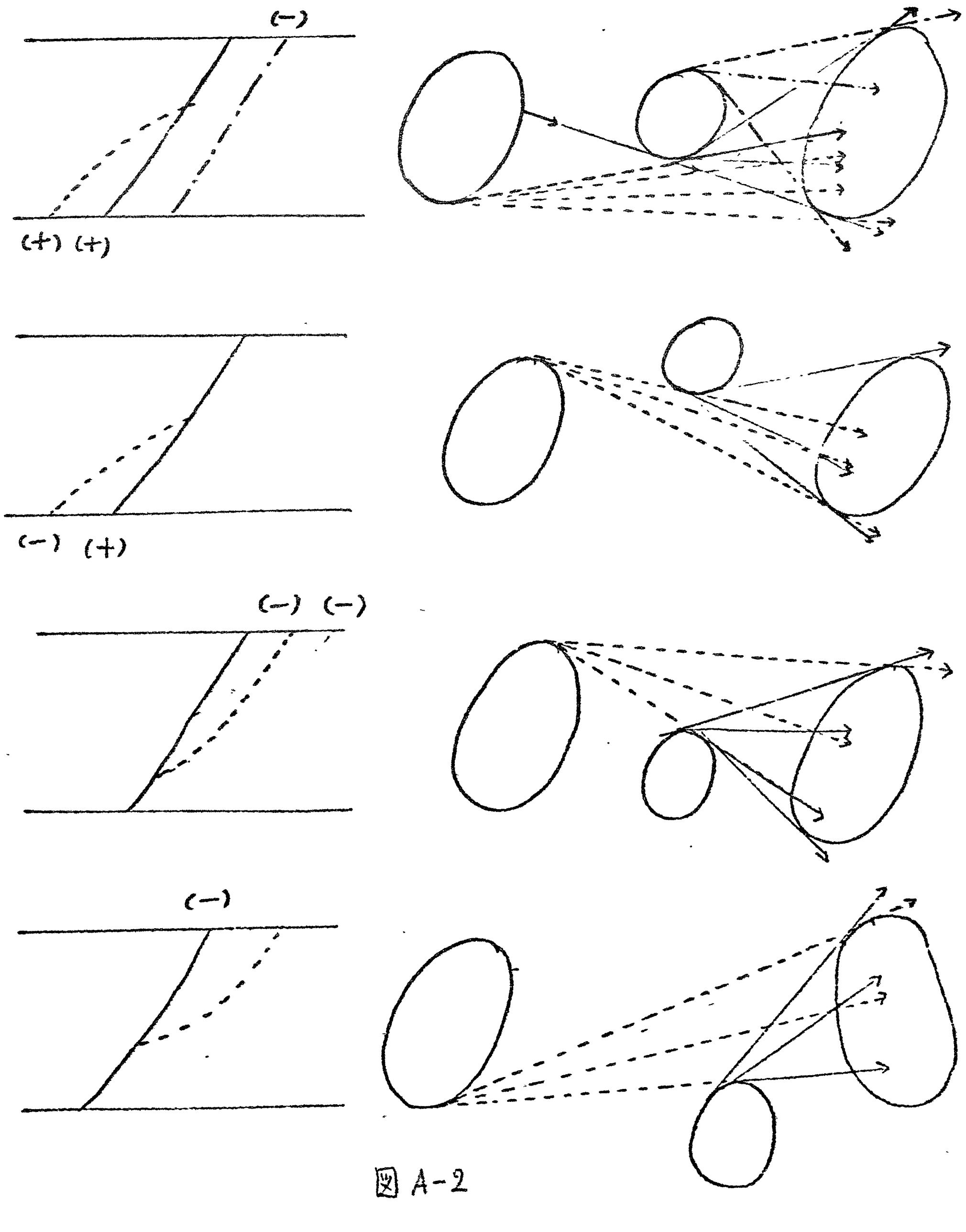


図 A-2

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Appendix 3.

$T^{-1}S$ および TS の集積点の囲りの状態を調べるには次のことに注意する必要がある。我々がトーラス上で考えているから，M_1 の点で

$$T^i z \in S \ , \quad \forall i$$

を充たす z_j ; $j = 1, 2, \cdots, I$ は高々有限ヶである。各 z_j の任意の近傍 U_j，$j = 1, \cdots, I$，を除外すれば $\{\tau(x) ;\ x \notin U\}$ は有界となる，ただし $U \equiv \bigcup_j U_j$。さらに $T^{-1}S \cap U^c$, $TS \cap U^c$ も高々有限集合である。

この状況をみるには，covering space $\mathbb{R}^2$ の運動としてみればわかりやすい。例を一つあげよう。

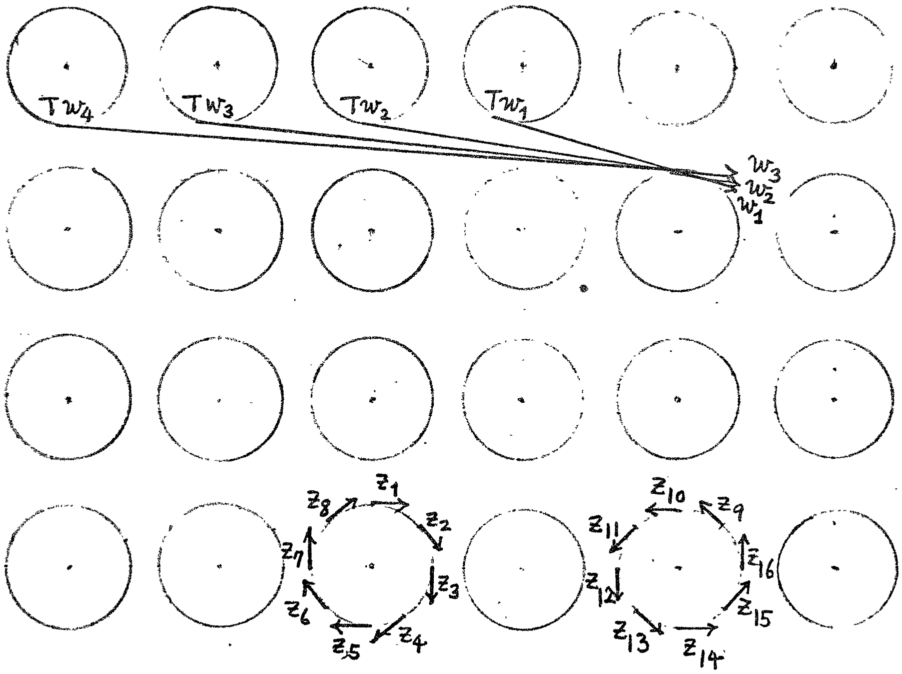


図 A-3

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

図 A-1 では，$z_1, z_2, \cdots, z_{16}$ がそのような点である。例えば，z_1 を考え，$\pi(z_1)$ と同じ足をもつ $T^{-1}S$ の点列 w_n があって，$w_n \to z_1$ であり，次の性質をもっている。

(i) $$|\tau(w_n)| \sim \text{const}\ n$$

(ii) $$|\cos\varphi(w_n)| \sim \frac{\text{const}}{n}$$

(iii) $$\varphi(w_{n+1}) - \varphi(w_n) \sim \frac{\text{const}}{n^2}.$$

他の case も同様の事実が成立することから，演習問題4.2，Lemma 7.2 および Lemma 7.2 の下の注意等が示される。

Appendix 4.

Lemma 6.2 の証明は，inductively に行えばよいわけである。まず Case 1 に対しては，

$$-\cos\varphi_{i+1}(1+\zeta_{i+1}) \geq 1+2\eta > 1+\eta \qquad i \geq 0$$

$$-\Lambda_{i+1} \geq 1+\eta \qquad i \geq 0$$

$$0 \leq \frac{d\mu_{i+1}}{d\varphi_{i+1}} \leq \frac{1}{k_{min}} \qquad i \geq 0$$

に注意して帰納的に評価していけばよい。定数 A_1 が存在し，

$$\left|\frac{1}{d\varphi_m}\log(a_m+k_m)\right| \leq A_1 + (1+\eta)^{-3}\left|\frac{d}{d\varphi_{m-1}}\log(a_m+k_m)\right|$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\leq A_1\{1+(1+\eta)^{-3}\}+(1+\eta)^{-6}\left|\frac{d}{d\varphi_{m-2}}\log(a_m+k_m)\right|$$

$$\leq A_1\sum_{j=0}^{m-1}(1+\eta)^{-3j}+(1+\eta)^{-3m}\left|\frac{d}{d\varphi_0}\log(a_0+k_0)\right|.$$

Case 2 に関しては，

$$-\Lambda_i^* \geq (1+\eta) \qquad i\leq m-1$$

$$0\leq -\frac{du_i}{d\varphi_i}\leq \frac{1}{k_{min}} \qquad i\leq m$$

が成立するから，

$$\left|\frac{d}{d\varphi_0}\log(a_m+k_m)\right|\leq A_2(1+\eta)^{-m}+(1+\eta)^{-2}\left|\frac{d}{d\varphi_0}\log(a_{m-1}+k_{m-1})\right|$$

$$\leq A_2\{(1+\eta)^{-m}+(1+\eta)^{-m-1}\}$$

$$+(1+\eta)^{-4}\left\{\frac{d}{d\varphi_0}\log(a_{m-2}+k_{m-2})\right\}$$

$$\leq A_2(1+\eta)^{-m}\sum_{j=0}^{m-1}(1+\eta)^{-j}+(1+\eta)^{-2m}\left|\frac{d}{d\varphi_0}\log(a_0+k_0)\right|.$$

Case 3, Case 4 も同様である。

Appendix 5.

Lemma 6.4 の証明と注意： $\tilde{\gamma}_m$ に沿って $a_m(r_m,\varphi_m)$ を単調な函数として定義し，$a_m(\hat{r},\hat{\varphi}_m)=d\hat{\varphi}_m/d\hat{u}_m$，$a_m(\hat{\hat{r}}_m,\hat{\hat{\varphi}}_m)$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$\equiv d\hat{\hat{\varphi}}/d\hat{\hat{u}}_m$ なるようにする。Lemma 6.3 Case 3 を適用すれば

$$\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log(-a_j)\right| \leq \left|\frac{k_j-a_j}{a_j}\frac{d}{d\varphi_m}\log(k_j-a_j)\right| + \left|\frac{1}{a_j}\frac{du_j}{d\varphi_j}k'(u_j)\right|\left|\frac{d\varphi_j}{d\varphi_m}\right|$$

$$\leq \frac{2K_{max}}{k_{min}}\left[C_{12}(1+\eta)^{-m+j} + (1+\eta)^{-2m+2j}\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log(k_m-a_m)\right|\right]$$

$$+\frac{K_{max}}{k_{min}}C_6(1+\eta)^{-m+j}$$

ただし $C_6 \equiv \max_r\left|\frac{dk(r)}{dr}\right|$.

$$\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log(k_m+a_m)\right| \leq \frac{|a_m|}{k_m-a_m}\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log(-a_m)\right| + \frac{C_6}{k_m-a_m}$$

と, $\log(-a_m)$ の単調性に注意すれば

$$\frac{\hat{\hat{a}}_j}{\hat{a}_j} \underset{(\geq)}{\leq} \exp^{+}_{(-)}\left[\frac{const}{(1+\eta)^{m-j}}\theta(\tilde{\gamma}_m) + \frac{const}{(1+\eta)^{2m-2j}}\log\frac{K_{max}}{k_{min}}\right]$$

を得る。Lemma 4.3 から

$$\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log(-\tau_j)\right| \leq \left|\frac{d\tilde{u}_{j-1}}{d\varphi_{j-1}}\right|\left|\frac{d\varphi_{j-1}}{d\varphi_m}\right| + \left|\frac{d\tilde{u}_j}{d\varphi_j}\right|\left|\frac{d\varphi_j}{d\varphi_m}\right|$$

$$\leq const\,(1+\eta)^{-m+j} \qquad j \leq m.$$

$$\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log k_j\right| \leq C_6\left|\frac{d\tilde{u}_j}{d\varphi_j}\cdot\frac{d\varphi_j}{d\varphi_m}\right|$$

$$\leq C_6 K_{max}\cdot(1+\eta)^{-m+j}$$

$$\left|\frac{d}{d\varphi_m}\log|\cos\varphi_j|\right| = \left|\frac{\sin\varphi_j}{\cos\varphi_j}\right|\left|\frac{d\varphi_j}{d\varphi_m}\right|$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\leq \begin{cases} \dfrac{1}{\eta}(1+\eta)^{-m+j+1} & j \leq m-1 \\ \dfrac{1}{|\cos\varphi_m|} & j = m \end{cases}$$

なる評価が成立するから，

$$\frac{k(\hat{\hat{r}}_j)}{k(\hat{r}_j)}, \ \frac{\tau(\hat{\hat{r}}_j, \hat{\hat{\varphi}}_j)}{\tau(\hat{r}_j, \hat{\varphi}_j)} \underset{(\geq)}{\leq} \exp_{(-)}^{+} \mathrm{const}\, \theta(\tilde{\gamma}_m), \quad j \leq m$$

$$\frac{\cos\hat{\hat{\varphi}}_j}{\cos\hat{\varphi}_j} \underset{(\geq)}{\leq} \exp_{(-)}^{+} \mathrm{const}\, \theta(\tilde{\gamma}_m), \qquad j \leq m-1$$

$$\frac{\cos\hat{\hat{\varphi}}_m}{\cos\hat{\varphi}_m} \underset{(\geq)}{\leq} \exp_{(-)}^{+} \left[\frac{\theta(\tilde{\gamma}_m)}{\min\cos(G_m)}\right]$$

なる評価を得る．このことから主張は明らかである。

Appendix 6.

・ Remark 6.1の証明。

$$\theta(\gamma_a(G)) \geq \theta(\gamma_b(G))$$

なる G を考えよう．図のように γ_b, γ_d を滑らかに延長し，K-増加であるようにする．それらを $\tilde{\gamma}_b$, $\tilde{\gamma}_d$ と名づけ，その方程式を $r=\tilde{u}_b(\varphi)$, $r=\tilde{u}_d(\varphi)$ としよう。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

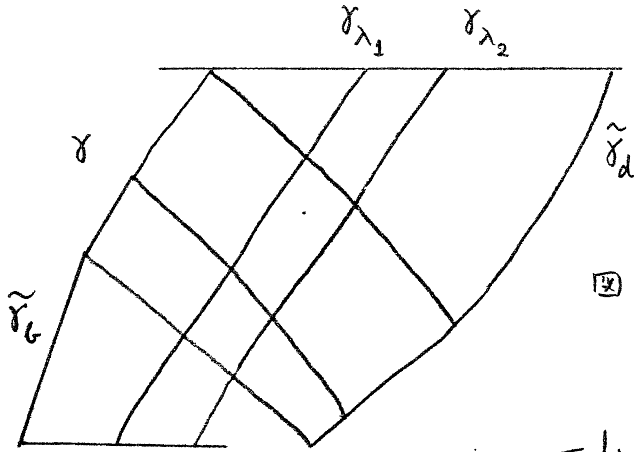


図 A-4

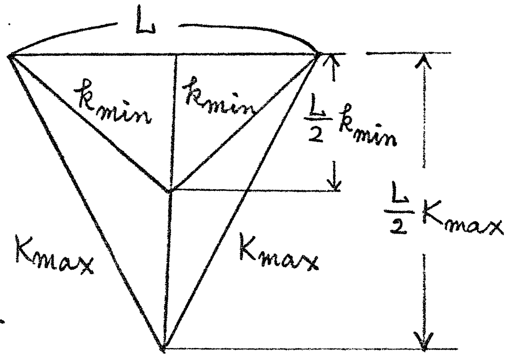


図 A-5

曲線 $\tilde{\gamma}_\lambda$ を，方程式 $r=(1-\lambda)\tilde{u}_b(\varphi)+\lambda\tilde{u}_d(\varphi)$ で与えられる曲線としよう。$\{\tilde{\gamma}_\lambda ; 0\le\lambda\le 1\}$ のG内への制限が求める分割である。何故ならば，G内のK-減少曲線 $\hat{\gamma}$, $\hat{\hat{\gamma}}$ が $\tilde{\gamma}_{\lambda_1}$ と $\tilde{\gamma}_{\lambda_2}$ によって切りとられる切片を $\hat{\gamma}_{\lambda_1,\lambda_2}$，$\hat{\hat{\gamma}}_{\lambda_1,\lambda_2}$ としよう。

$$a \equiv \max_{\varphi}(\tilde{u}_d(\varphi)-\tilde{u}_b(\varphi)), \quad b \equiv \min_{\varphi}(\tilde{u}_d(\varphi))-\tilde{u}_b(\varphi))$$

とおくと，

$$|\lambda_1-\lambda_2|b \le |\tilde{u}_{\lambda_1}(\varphi)-\tilde{u}_{\lambda_2}(\varphi)| \le |\lambda_1-\lambda_2|a$$

である。したがって，$\hat{\gamma}$, $\hat{\hat{\gamma}}$ がK-減少，$\tilde{\gamma}_\lambda$ がK-増加だから図 A-4をみ

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

れば,

$$\frac{|\lambda_1-\lambda_2|b}{2}k_{min} \leq \theta(\hat{\gamma}_{\lambda_1,\lambda_2}),\quad \theta(\hat{\hat{\gamma}}_{\lambda_1,\lambda_2}) \leq \frac{|\lambda_1-\lambda_2|a}{2}K_{max}.$$

また 図 A-6 をみれば

$$\frac{a}{b} \leqq \frac{(1+C_2)^4}{16}$$

であることがわかる. 従って

$$\frac{\theta(\hat{\gamma}_{\lambda_1,\lambda_2})}{\theta(\hat{\hat{\gamma}}_{\lambda_1,\lambda_2})} \leqq \frac{(1+C_2)^4}{16}\cdot C_2.$$

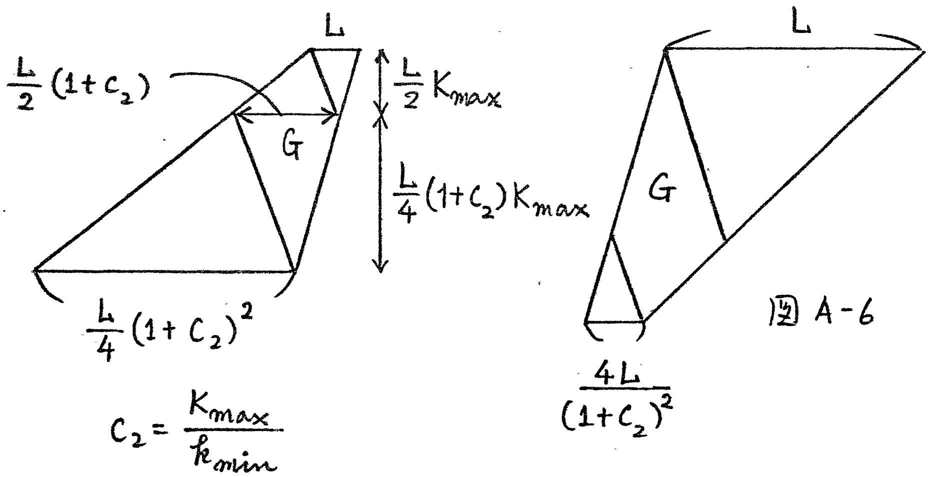


図 A-6

Appendix 7.

§7で使われるK-四辺形のある種の性質を説明する. Gを Lemma 7.1 の如き Gとする.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

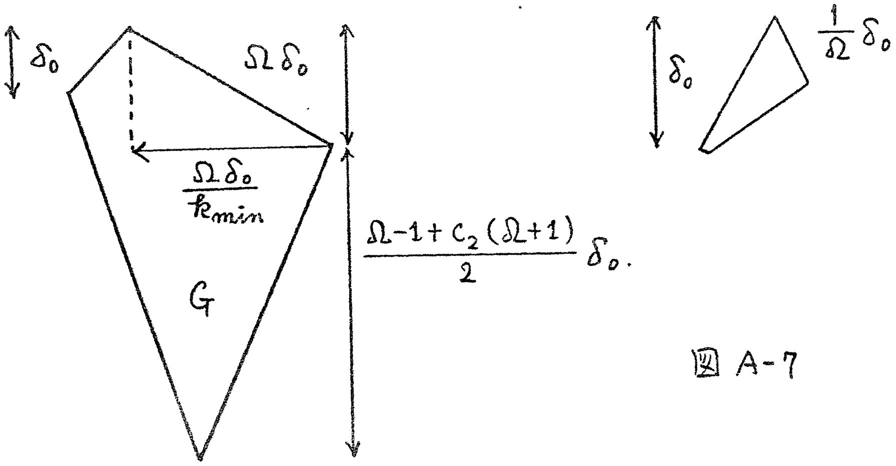


図 A-7

(イ) 図A-6 から $\gamma_b(G)=\delta_0$, $\gamma_a(G)=\Omega\delta_0$ ならば大き目に評価して

$$\gamma_d(G)\le c_2\Omega\delta_0,\quad \gamma_c(G)\le\Omega(1+c_2)\delta_0.$$

(ロ) $\gamma_b(T^{-l_0}G)$ は $T^{-l_0}\gamma_b(G)$ または $T^{-l_0}\gamma_d(G)$ いずれかに一致し、対応して $\gamma_c(T^{-l_0}G)$ は $T^{-l_0}\gamma_c(G)$ または $T^{-l_0}\gamma_d(G)$ に一致するから、

$$\theta(\gamma_b(T^{-l_0}G))\ge\theta(\gamma_d(T^{-l_0}G))-\theta(\gamma_c(T^{-l_0}G))$$

に注意すれば，Lemma 4.4 から

$$\theta(\gamma_b(T^{-l_0}G))=\theta(T^{-l_0}\gamma_b(G))\ge(1+\eta)^{l_0}\delta_0$$

または

$$\theta(\gamma_b(T^{-l_0}G))\ge\theta(T^{-l_0}\gamma_b(G))-\theta(T^{-l_0}\gamma_a(G))$$
$$\ge(1+\eta)^{l_0}\delta_0-(1+\eta)^{-l_0}\Omega\delta_0.$$

(ハ) 図A-7からわかるように

$$\nu(G)\le\nu_0\,\frac{1+c_2}{k_{min}}\,\Omega^2\delta_0^{\,2}$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\nu(G) \geq \nu_0 \frac{\omega}{2K_{max}\Omega^2} \delta_0{}^2 .$$

Appendix 8.

$(X, \mathfrak{F}, \mu)$ を可分な確率空間，$\{T_t\}$ をエルゴード的な力学系とすれば，高々可算ケの t を除いて，各 T_t はエルゴード的である．

証明．$U_t f(x) \equiv f(T_t x)$ で定義されるユニタリ作用素の一径数群 $\{U_t\}$ のスペクトル分解を $\{E(\lambda)\}$ としよう．t を固定すると，

$$U_t = \int e^{i\lambda t} dE(\lambda)$$

$$= \int e^{i\mu} d_\mu E\left(\frac{\mu}{t}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\mu} d_\mu E\left(\frac{\mu+2\pi n}{t}\right)$$

$$F_t(\mu) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[E\left(\frac{\mu+2\pi n}{t}\right) - E\left(\frac{\mu+2\pi(n-1)}{t}\right)\right]$$

は単位の分解であって，

$$U_t{}^n = \int_0^{2\pi} e^{in\mu} dF_t(\mu) .$$

T_t がエルゴード的である必要十分条件は，$(F_t(0+) - F_t(0-))L^2$ の次元が一次元であることである．$(E(0+) - E(0-))L^2$ が一次元だから，$E\left(\frac{2\pi n}{t}+0\right) - E\left(\frac{2\pi n}{t}-0\right) = 0$ $\forall n \neq 0$ が成立すればよい．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$\left(E\left(\frac{2\pi n}{t}+0\right)-E\left(\frac{2\pi n}{t}-0\right)\right)L^2$ の元は，$\{U_s\}$ に関し固有値 $\frac{2\pi n}{t}$ の固有ベクトルであることに注意しよう。$(X,\mathcal{F},\mu)$ の可分性から L^2 が可分なヒルベルト空間となり，固有値は高々可算ケである。それを $\{\lambda_j\}$ としよう。

$$t \notin \left\{t_{n,j} \equiv \frac{2n}{\lambda_j}\pi\ ;\ \lambda_j \neq 0,\ n\right\}$$

ならば，$\frac{2\pi n}{t}$ は $\{U_s\}$ の固有値ではないから，U_t がエルゴード的になる。

Appendix 9.

不規則な壁に囲まれた粒子の運動のエルゴード性について：ここで Sinai の撞球問題のちょっとした拡張について要点だけのべておこう。読者諸賢の中のこれをヒントとしてさらに進んだ，多粒子の case 等調べてみようという方の参考にと思う次第である。モデルとして不規則な壁に囲まれた二次元の円板の運動を考えよう。図 A-8 のように円板の中心の運動は，区分的に凸な壁に囲まれた質点の運動と同じである。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

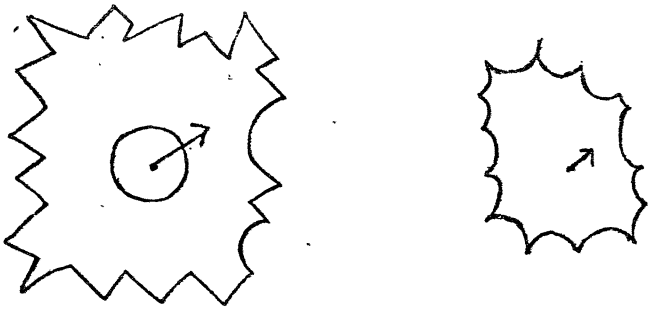


図 A-8

このことを念頭において，次のような系を考える．二次トーラス内に区分的に滑らかで凸な境界 ∂Q で囲まれた連結領域 Q が与えられたとする（図 A-9 参照）．

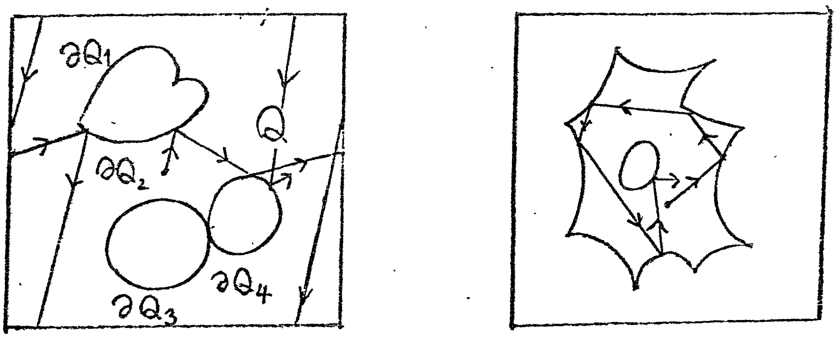


図 A-9

∂Q は各々は滑らかな曲線 $\partial Q_1, \cdots, \partial Q_{s_0}$ にわかれているとし，各 ∂Q_s の曲率は正定数 k_{min} より大きいことを仮定する。Q 内の質点が速さ 1 で，壁で入射角と反射角が等しくなるよう衝突しながら，内部では慣性運動をしているとし，それの定める力学系を $\{S_t\}$ とする．

我々は本文で使った記号をそのまま使うことにしよう。種々の主張

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

もほとんど平行して言えるが，困難さは $|\tau|_{min}=0$ となるところに現われる。しかし，*foliation* の構成までは，何等仮定を必要せず言える。それを簡単にスケッチしてみよう。

∂Q が滑らかでない点を *irregular point* と呼ぶことにしよう。集合 S を $S\equiv\{x\,;\,\cos\varphi(x)=0\}\cup\{\pi^{-1}(\text{irregular point})\}$ で定義する。

$$d(x)\equiv dis\,(x,\ S\cup T^{-1}S)$$

とおくと，Lemma 5.1 に類似に

(1°) $\log d(x)$ が可積

(2°) ある定数 $C_7>0$ が存在して $-\tau(x)k_{min}\geq 4C_7 d^2(x)$

(3°) $D(x)\equiv\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2C_1}{d(x_i)}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{(1+C_7d^2(x_j))}<\infty$ a.e.

なる事実がわかる。

単調な曲線 γ の方程式 $r=u(\varphi)$ が，$\left|\frac{du}{d\varphi}\right|\leq\frac{1}{k_{min}}$ を充たすとき *admissible* と呼ぶことにしよう．

x を $D(x)<\infty$ なる点とする。$\tilde{\gamma}_n^{(n)}$ を $x_n=T^{-n}x$ を通る任意の *admissible* な減少曲線とする．一般に x_i を通る *admissible* な減少曲線 $\tilde{\gamma}_i$ に対して，$\theta(\tilde{\gamma}_i)\leq\frac{1}{2C_1}d(x_i)$ ならば

$$d(y)\geq\frac{1}{2}d(x_i),\quad -\tau(y)k_{min}\geq C_7d^2(x_i)\qquad y\in\tilde{\gamma}_i$$

が成立する．従って，T は $\tilde{\gamma}_i$ 上で滑らかであり，Lemma 4.3 から，

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\theta(T\tilde{\gamma}_i) \geq (1 + C_7 d^2(x_i))\theta(\tilde{\gamma}_i)$$

が成立する。そこで，$T^{n-i}\gamma_n^{(n)}$ の連結な部分曲線の列 $\{\tilde{\gamma}_i^{(n)}\}$ を次のように順次とれる。

$$\theta(\tilde{\gamma}_n^{(n)}) = \frac{1}{2C_1} d(x_n) \qquad x_n \in \tilde{\gamma}_n^{(n)}$$

$$\theta(\tilde{\gamma}_i^{(n)}) = \min\left(\frac{1}{2C_1} d(x_{i-1}), (1 + C_7 d^2(x_i))\theta(\tilde{\gamma}_i^{(n)})\right)$$

$$x_{i-1} \in \tilde{\gamma}_{i-1}^{(n)} \subset T\tilde{\gamma}_i^{(n)}.$$

このとき，$\gamma_0^{(n)}$ 上で T^{-n} が滑らかになっている。さらに，

$$\theta(\tilde{\gamma}_i^{(n)}) \geq \frac{1}{D(x)} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{(1 + C_7 d(x_j))^2} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\theta(\tilde{\gamma}_0^{(n)}) \geq \frac{1}{D(x)}.$$

何故ならば $D(x)$ の定義から

$$\theta(\gamma_n^{(n)}) \geq \frac{1}{D(x)} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + C_7 d^2(x_j)}.$$

$\theta(\gamma_i^{(n)})$ まで評価が正しいとすれば，

$$\begin{aligned}\theta(\gamma_{i-1}^{(n)}) &\geq \min\left(\frac{1}{D(x)} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{1 + C_7 d^2(x_j)}, \frac{1 + C_7 d(x_i)}{D(x)} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{1 + C_7 d^2(x_j)}\right) \\ &= \frac{1}{D(x)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{1 + C_7 d^2(x_j)}.\end{aligned}$$

これで，(5.2) 式で証明したことと同等なことが言えた。$\hat{\gamma}^{(n)}$ を §5 と同じに定義すると，T^{-n} は $\hat{\gamma}^{(n)}$ 上で滑らかで $d(y) \geq \frac{1}{2} d(x_i)$, for $y \in \hat{\gamma}^{(n)}$ を得る。Lemma 4.3 から

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

$$\sum_n \rho(\hat{\gamma}^{(n)}) \leq \sum_n \frac{\cos\varphi_n}{\cos\varphi} \prod_{j=1}^{n} [1+c_7 d^2(x_j)]^{-1} \rho(T^{-n}\hat{\gamma}^{(n)})$$

$$\leq \sum_n \frac{\pi^2}{|\cos\varphi| d(x_n)} \prod_{j=1}^{n} [1+c_7 d^2(x_j)]^{-1}$$

$$\leq \frac{\pi^2 D(x)}{C_1 |\cos\varphi|} < \infty$$

が言え，$\tilde{\gamma}_0^{(n)}$ が一様収束する．その極限を使って $\gamma^{(c)}(x)$ が構成できる。Proposition 5.1 に同じく $\zeta^{(c)}$ を定義すれば，

Proposition A.1.

(i) $\zeta^{(c)} = \bigvee_{k=0}^{\nu} T^k \alpha^{(c)}$

(ii) $T^{-1}\zeta^{(c)} > \zeta^{(c)}$

(iii) $\zeta_{-\infty}^{(c)} \equiv \bigwedge T^k \zeta^{(c)}$ は $\{\Gamma^{(c)}\}$ の可測被覆．

(iv) $\zeta_{-\infty}^{(c)} = \pi(T)$

(v) $h(T) = h(T^{-1}\zeta^{(c)} | \zeta^{(c)})$

までは証明できる。§6 以下に対応することを示すには現在のところ仮定を必要とする。例えば，境界の singular point で境界が接してなければ，ある自然数 l_1 と，実数 $0 < \lambda < 1$ が存在し

$$\prod_{j=1}^{n} [1 - \tau(x_j) k_{min}]^{-1} \leq \lambda^n \quad n \geq l_1$$

が成立する。このことを使って §6 に平行した議論ができる。そのときは，Lemma 6.1，6.2，6.3 の代りに次のような主張になる．

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Lemma A.1.

$$\frac{1}{(a_{i+1}+k_{i+1})^2}\frac{d}{d\varphi_{i+1}}(a_{i+1}+k_{i+1})=\frac{2}{(a_{i+1}+k_{i+1})}\frac{dk_{i+1}}{dr_{i+1}}\frac{dr_{i+1}}{d\varphi_{i+1}}+$$

$$+\frac{\sin\varphi_{i+1}}{\cos\varphi_{i+1}(1+\zeta_{i+1})}\left\{\frac{1+2k_{i+1}\frac{dr_{i+1}}{d\varphi_{i+1}}}{a_{i+1}+k_{i+1}}-\frac{dr_{i+1}}{d\varphi_{i+1}}\right\}$$

$$+\frac{\sin\varphi_i}{\cos\varphi_{i+1}(1+\zeta_{i+1})^2\Lambda_{i+1}}\left\{-\frac{1+2k_i\frac{dr_i}{d\varphi_i}}{a_i+k_i}+\frac{dr_i}{d\varphi_i}\right\}$$

$$+\frac{\cos\varphi_i}{\cos\varphi_{i+1}(1+\zeta_{i+1})^2\Lambda_i}\left\{\frac{1}{(a_i+k_i)^2}\frac{d}{d\varphi_i}(a_i+k_i)\right\}.$$

Lemma A.2.

Case 1. $a_0\geq k_{min}$, γは増加で admissible ならば

$$\left|\frac{d}{d\varphi_m}(a_m+k_m)^{-1}\right|\leq\frac{c_{41}}{|\cos\varphi_m|(1+\zeta_m)}+\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_m}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(1+\zeta_j)^2|\Lambda_j|}\left|\frac{d}{d\varphi_0}(a_0+k_0)^{-1}\right|.$$

Case 2. $a_0\geq k_{min}$, γ: 減少で admissible ならば

$$\left|\frac{d}{d\varphi_0}(a_m+k_m)^{-1}\right|\leq\frac{c_{41}(1+\eta)^{-[m/\ell_1]}}{|\cos\varphi_m|(1+\zeta_m)}+\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_m}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(1+\zeta_j)^2}\left|\frac{d}{d\varphi_0}(a_0+k_0)^{-1}\right|.$$

Lemma A.3.

$$\frac{\nu(\tilde{\tilde{G}}_m)}{\nu(\tilde{G}_m)}\leq\frac{2\max\theta_{in}(\tilde{\tilde{G}}_m)}{\theta(\gamma_b(\tilde{G}_m))-\theta(\gamma_c(\tilde{G}_m))}\times$$

$$\times\exp\left[K+c_{42}\max\theta_{in}(G_m)+\sum_{j=0}^{m}\frac{c_{43}\lambda^j}{\min\cos(G_j)}\right.$$

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Sinaiの撞球問題に対しては，もちろんこのLemmaで充分役立つことを注意しておきたい。唯一の変更は，Main Lemmaで条件を $T^{-j}G\cap V_j(\delta_0)=\phi,\ 0\leq j\leq l_0$ に変えることだけである。しかし我々の系に対してはMain Lemmaの証明の中で $R^*_m(4)$ の評価の際に（に）の事柄が成立せず，irregular pointに対する仮定が必要となる。例えば，irregular points相互間の距離は $2/k_{min}$ 以上で，一直線上には三つのirregular pointsが存在しないならば，§7と類似のことが言え，従ってそれ以下の§の主張が成立するが，ここでは詳しいことはやめ，別の機会にゆずりたい。

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

文献表

[1] Abramov, L. M.: On the entropy of a flow, Dokl. Akad. Nauk, 128 (1959), 873-876.

[2] Ambrose, W. = Kakutani, S.: Structure and continuity of measurable flow, Duke Math. J. 9 (1942), 25-42.

[3] Anosov, D. V. = Sinai, Ya. G.: Some smooth ergodic systems, Russian Math. Surveys 22 No.5 (1967), 103-167.

[4] Birkhoff, C. D.: Proof of the ergodic theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 17 (1931), 656-660.

[5] Hopf, E.: Statistik der geodätischen Linien in der Mannigfaltigkeiten negativen Krünmung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 91 (1939), 261-304.

[6] Kolmogorov, A. N.: General theory of dynamical systems and classical mechanics, Proc. Intern. Congress Math. I, Amsterdam (1953).

[7] Kubo, I.: エルゴード理論の Review, 数理解

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

析研究所講究録 56. 統計力学とエルゴード理論研究会報告集 (1968), 6-29.

[8] Kubo, I.: Quasi-flows; Nagoya Math. J. 35 (1969), 1-30.

[9] Neumann, J. von: Zur operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Ann. of Math. 33 (1932), 587-642.

[10] Rohlin, V. A. = Sinai, Ya. G.: Construction and properties of invariant measurable partitions, Dokl. Akad. Nauk 4, No.5 (1961), 1034-1041.

[11] Sinai, Ya. G.: On some "physical" systems with positive entropy, Vest. Moscow Univ. 5 (1963), 6-12.

[12] Sinai, Ya. G.: On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics, Sov. Mat. Dokl. 4 No.6 (1963), 1818-1822.

[13] Sinai, Ya. G.: Classical dynamical systems with countably multiple Lebesgue spectra II, A.M.S. Transl. (2) 68 (1968), 34-68.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

[14] Sinai, Ya. G.: Dynamical systems with elastic reflections, Russian Math. Surveys 25, No.2 (1970), 137-189.

[15] Totoki, H.: Flow とエントロピー, Seminar on Prob. 20 (1964).

[16] Weyl, H.: Sur une application de la théorie des nombres à la méchanique statistique, Enseignement Math. V 16 (1941), 455-467.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

文献年表

1899年

Poincaré, H.: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris (1899).

1911年 - 1920年

Poincaré, H.: Calcul des probabilités, 2. Aufl. Paris (1912).

Weyl, H.: Sur une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique, Enseignement Math. 16 (1014), 455-467.

Weyl, H.: Über die Gleichvierteiligung von Zahlen mod. 1, Math. Ann. 77 (1916).

Carathéodory, C.: Über den Wiederkehrsatz von Poincaré, Sitzgsber. Press. Akad. Wiss. (1919), 580-

1921年 - 1930年

Birkhoff, G. D.: Dynamical systems, New York (1927).

Birkhoff, G. D. = Smith, P. A.: Structure analysis of surface transformations, J. Math. Pures Appl. 7 (1928), 345-379.

Hopf, E.: Zwei Sätze über den wahrscheinlichen

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Verlauf der Bewegungen dynamischer systeme, Math. Ann. 103 (1930), 710-719.

1931年

Birkhoff, G. D.: Proof of the ergodic theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 17 (1931), 656-660.

Koopman, B. O.: Hamiltonian systems and linear transformations in Hilbert space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 17 (1931), 315-318.

1932年

Birkhoff, G. D.: Probability and physical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), 361-379.

Birkhoff, G. D. = Koopman, B. O.: Recent contributions to the ergodic theory, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 279-282.

Hopf, E.: On the time average theorem in dynamics, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 93-100.

Hopf, E.: Complete transitivity and the ergodic principle, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 204-209.

Hopf, E.: Proof of Gibbs' hypothesis on the tendency toward statistical equilibrium, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 333-340.

Koopman, B. O. = Neumann, J. von: Dynamical systems of continuous spectra, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 255-263.

Neumann, J. von: Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Ann. of Math. 33 (1932), 587-789.

Neumann, J. von: Proof of the quasi-ergodic hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 70-82.

Neumann, J. von: Physical applications of the ergodic hypothesis, Proc. Naat. Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 263-266.

Wintner, A.: Remarks on the ergodic theorem of Birkhoff, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 248-251.

1933 年

Khintchine, A. Ya.: Zu Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems, Math. Ann. 107 (1933), 485-488.

Kolmogorov, A. N.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin (1933).

Seidel, W.: Note on a metrically transitive system, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 19 (1933), 453-456.

1934年

Hedlund, G.: Metric transitivity of the geodesics on closed surfaces of constant negative curvature, Ann. of Math. 35 (1934), 787-808.

Martin, M. H.: Metrically transitive transformations, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934), 606-612.

1935年

Hedlund, G. A.: A metrically transitive group defined by the modular group, Amer. J. Math. Soc. 57 (1935), 668-678.

Seidel, W.: On a metric property of Fuchsian groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 21 (1935), 475-478.

1936年

Fox, R. H. =Kershner, R. B.: Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron, Duke Math. J. 2 (1936), 147-150.

Hopf, E.: Fuchsian groups and ergodic theory, Trnas. Amer. Math. Soc. 39 (1936), 299-314.

Kryloff, N. =Bogoliouboff, N.: Les mesures invariantes et transitives dans la méchanique non linéaire, Rec. Math. Moscou (1936), 707-

Maeda, F.: Transitivities of conservative mechanisms, J. Sci. Hiroshima Univ. A 6 (1936), 1-

1937年

Hopf, E.: Ergodentheorie, Erg. Math. 5, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag.

1938年

Weyl, H.: Mean motion I, Amer. J. Math. 60 (1938), 889-896.

1939年

Hedlund, G. A.: The dynamics of geodesic flows, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), 241-260.

Hedlund, G. A.: Fuchsian groups and mixtures, Ann. of Math. 40 (1939), 370-383.

Hopf, E.: Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 91 (1939), 261-304.

Weyl, H.: Mean motion II, Amer. J. Math. 61 (1939), 143-148.

Wiener, N.: The ergodic theorem, Duke Math. J. 5 (1939), 1-18.

1940年

Hopf, E.: Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus II, Math. Ann. 117 (1940), 590-608.

1941年

Ambrose, W.: Representation of ergodic flows, Ann. of Math. 43 (1941), 723-729.

1942年

Ambrose, W. = Kakutani, S.: Structure and continuity of measurable flow, Duke Math. J. 9 (1942), 25-42.

1943年

Halmos, P. R.: On automorphisms of compact groups, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 619-624.

1948年

Shannon, C.: A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. 27 (1948).

1949年

Halmos, P. R.: Measurable transformations, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1015-1034.

Rokhlin, V. A.: On the fundamental ideas of measure theory, Mat. Sb. 25 (1949), 107-150. = Amer. Math. Soc. Transl. (1) 10 (1962), 1-54.

Rohlin, V. A.: Selected topics from the metric theory of dynamical systems, Uspehi Mat. Nauk 4 (1949), 57-128. = Amer. Math. Soc. Transl. (2) 49 (1966), 171-240.

1951年

Anzai, H.: Ergodic skew product transformations on the torus, Osaka Math. J. 3 (1951), 83-99.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

1952年

Gelfand, I. M. = Fomin, S. V.: Geodesic flow on manifold of constant negative curvature, Uspehi Mat. Nauk 47 (1952), 118-137. = Amer. Math. Soc. Transl. 2 (1955), 49-67.

1953年

Kolmogorov, A. N.: On dynamical systems with an integral invariant on the torus, Dokl. Akad. Nauk SSSR 93 (1953), 763-766.

Parasjuk, O. S.: Flows of horocycles on surfaces of constant negative curvature, Uspehi Mat. Nauk 8 (1953), 125-126.

1954年

Kolmogorov, A. N.: On conservation of conditionally periodic motions under a small change of the Hamiltonian function, Dokl. Akad. Nauk SSSR 98 (1954), 527-535.

Kolmogorov, A. N.: A general theory of dynamic systems and classical mechanics, Proc. Intern. Congr. Math. I (1954), 315-333.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

1956年

Halmos, P. R.: Lectures on ergodic theory, Publ. Math. Soc. Japan, No.3, Math. Soc. Japan, Tokyo (1956).

1958年

Kolmogorov, A. N.: A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 119 (1958), 861-864.

1959年

Abramov, L. M.: On the entropy of a flow, Dokl. Akad. Nauk SSSR 128 (1959), 873-876. = Amer. Math. Soc. Transl. (2) 49 (1966), 167-170.

Kolmogorov, A. N.: On the entropy per time unit as a metric invariant of automorphisms, Dokl. Akad. Nauk SSSR 124 (1959), 754-755, MR 21 #2035b.

Meshalkin, L. D.: A case of isomorphism of Bernoulli schemes, Dokl. Akad. Nauk SSSR 128 (1959), 41-44.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Rohlin, V. A.: On the entropy of a metric automorphism, Dokl. Akad. Nauk SSSR 124 (1959), 980-983, MR 21 #2037.

Sinai, Ya. G.: On the concept of entropy of a dynamical system, Dokl. Akad. Nauk SSSR 124 (1959), 768-771, MR 21 #2036a.

Sinai, Ya. G.: On flows with finite entropy, Dokl. Akad. Nauk SSSR 125 (1959), 1200-1202.

1960年

Pinsker, M. S.: Dynamical systems with completely positive and zero entropy, Dokl. Akad. Nauk SSSR 133 (1960), 1025-1026. = Soviet Math. Dokl. 1 (1960), 983-987.

Rohlin, V. A.: New progress in theory of transformations with invariant measure, Uspehi Mat. Nauk 15 No.4 (1960), 3-26. = Russian Math. Surveys 15 No.4 (1960), 1-22.

Sinai, Ya. G.: Geodesic flows in manifolds with constant negative curvature, Dokl. Akad. Nauk SSSR 131 (1960), 752-756 = Soviet Math. Dokl. 1 (1960), Sinai, Ya. G.: The central limit theorem for geodesic flows on manifolds of constant negative curvature, Dokl. Akad. Nauk SSSR 133 (1960), 1303-1306 = Soviet Math. Dokl. 1 (1960), 983-987.

1961年

Green, L. = Auslander, L. = Hahn, F.: Flows on some three-dimensional homogeneous spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 494-497.

Gurevich, B. M.: The entropy of horocycle flows, Dokl. Akad. Nauk SSSR 136 (1961), 768-770 = Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 124-130.

Halmos, P. R.: Recent progress in ergodic theory, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 70-80.

Rohlin, V. A. = Sinai, Ya. G.: Invariant measurable partitions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 141 (1961), 1038-1041 = Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 124-130.

Rohlin, V. A. = Sinai, Ya. G.: Construction and properties of invariant measurable partitions, Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 1611-1614.

Sinai, Ya. G.: Geodesic flows on compact surfaces of negative curvature, Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 106-109.

Sinai, Ya. G.: Dynamical systems with countably multiple Lebesgue spectrum, Izv. Mat. Nauk SSSR 25 (1961), 899-924. = Amer. Math. Soc. Transl. (2) 39 (1961), 83-110.

1962年

Anosov, D. V.: Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, Dokl. Akad. Nauk 145 (1962), 707-709. = Sov. Math. Dokl. 3 (1962), 1068-1069.

Ikeda, N. = Hida, T. = Yoshizawa, H.: Flowの理論(上), Seminar on Prob. 12 (1962).

Sinai, Ya. G.: Weak isomorphism of transformations with invariant measure, Dokl. Akad. Nauk SSSR 147 (1962), 797-800. = Sov. Math. Dokl. 3 (1962), 1725-1729.

Sinai, Ya. G.: Probabilistic ideas in ergodic theory, Intern. Congress of Math. Stockholm, 1962, 540-559. = AMS Transl. (2) 31 (1963), 62-81.

Smale, S.: Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms, Proc. intern. congress of Math. (1962), 490-496.

1963 年

Anosov, D. V.: Ergodic properties of geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature, Dokl. Akad. Nauk 151 (1963), 1250-1253. = Sov. Math. Dokl. 4 (1963), 1153-1156.

Blum, J. R. = Hanson, D. L.: On the isomorphism problem for Bernoulli schemes, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 221-223.

Gurevich, B. M.: On a class of special automorphisms and special flows, Dokl. Akad. Nauk SSSR 154 (1963), 753-757. = Sov. Math. Dokl. 4 (1963), 1738-1741.

Jacobs, K.: Lecture notes on ergodic theory, Aarhus (1963).

Sinai, Ya. G.: On a "physical" system with positive "entropy", Vestnik Moscov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1963) No.5, 6-12.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Sinai, Ya. G.: On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics, Dokl. Akad. Nauk SSSR 153 (1963), 1261-1264. = Sov. Math. Dokl. 4 (1963), 1818-1822.

1964年

Totoki, H.: Flow とエントロピー, Seminar on Prob. 20 (1964).

1965年

Adler, R. L. = Konheim, A. G. = McAndrew, M. H.: Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), 309-319.

Billingsley, P.: Ergodic theory and theory of Information, Wiley, New York, 1965.

Kushnirenko, A. G.: An upper estimate of the entropy of classical dynamical systems, Dokl. Akad. Nauk SSSR 161 (1965), 37-38. = Sov. Math. Dokl. 6 (1965), 360-362.

1966年

Avez, A.: Ergodic theory of dynamical systems, I and II (1966), Univ. Minnesota Inst.

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Maruyama, G.: Transformations of flows, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 290-302.

Sinai, Ya. G.: Classical dynamical systems with countably multiple Lebesgue spectrum II, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 30 (1966), 15-68.

Totoki, H.: Time change of flows, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 20 (1966), 27-55.

1967 年

Abraham, R.: Foundations of Mechanics, Benjamin, New York, 1967.

Adler, R. L. = Weiss, B.: Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 57 (1967), 1573-1576.

Anosov, D. V.: Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, Trudy Mat. Inst. Steklov 90 (1967).

Anosov, D. V.: On tangent fields of transversal foliations in Y-systems, Mat. Zametki 2 (1967).

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Anosov, D. V. = Sinai, Ya. G.: Some smooth ergodic systems, Uspehi Mat. Nauk 22 No.5 (1967), 107-172. = Russian Math. Surveys 22 No.5 (1967), 103-167.

Arnold, V. J. = Avez, A.: Problèmes ergodiques de la méchanique classique, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

定常過程研究会報告集; 数理解析研究所講究録 20 (1967).

1968 年

Morser, J.: Lectures on Hamiltonian Systems, A.M.S. (1968).

Kubo, I.: エルゴード理論の Review, 数理解析研究所講究録 56 (1968), 6-29.

Sinai, Ya. G.: Markov partitions and C-diffeomorphisms, Funk. Anal. Pril. 2 (1968), 64-89. = Func. Anal. Appl. 2 (1968), 61-84.

1969 年

Kubo, I.: Quasi-flows, Nagoya Math. J. 35 (1969), 1-30.

Niwa, T. = Otsuki, N. = Miyahara, T.: 古典力学のエルゴード問題, Seminar on Prob. 30 (1969).

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

1970 年

Ornstein, D. S.: Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. Advances in Math. 4 (1970), 337-352.

Sinai, Ya. G.: Dynamical systems with elastic reflections, Uspehi Math. Nauk 25 (1970), 141-192. = Russian Math. Surveys 25 (1970), 137-189.

Sem. on Probab.
Vol.37　1972年
P1-157

確率論セミナー出版物

[I]　Seminar on Probability

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Vol. 14 国田寛・野本久夫：Markov過程に関するcompact化の方法とその応用

15 本尾実：Markov過程のadditive functionals (350円)

16 佐藤健一・長沢正雄・福島正俊：マルコフ過程の変換と境界問題 (400円)

17 国田寛：Markov過程とMartin境界 (400円)

18 渡辺寿夫編：

19 田中洋・長谷川実：確率微分方程式 (300円)

20 十時東生：Flowとエントロピー

21 神田護：拡散過程と正則点 (450円)

22 国田寛・佐藤健一・福島正俊・本尾実：拡散過程と境界上のマルコフ過程 (450円)

23(I) 池田信行・長沢正雄・渡辺信三：分枝マルコフ過程の基礎 (400円)

〃(II) 〃 (350円)

24 佐藤坦：Gauss測度の絶対連続性 (250円)

25(I) 榎田倍之・福島正俊・池田信行・河野敬雄・長沢正雄・野本久夫・小倉幸雄・白尾恒吉・山田俊雄・渡辺藤逸：分枝マルコフ過程の諸問題 (350円)

〃(II) 〃 (400円)

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

[II]

Sem. on Probab.
Vol.37 1972年
P1-157

Vol. 4 C2 情報理論 (400円)

5 A3 特性函数 A4 Martingale

[III] 定常過程 (昭和37年秋 統計数学分科会 Symposium 予稿)

[IV] Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory

Vol. 1 (400円)

" 2 (500円)

" 3 (500円)

各出版物には,会員割引 (50円) があります.

昭和47年10月

確率論セミナー事務局