SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 45

ランダムスペクトル

福島　正俊・中尾慎太郎・小谷　眞一

1977
セミナー

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

52
10/13

まえがき

このレポートは係数がランダムであるような2階差分作用素及び2階微分作用素のスペクトルに関する数学的理論を扱かう。自然な要請として我々は係数のrandomnessが空間的に一様であること，即ち係数が空間変数に関し定常過程をなすことを仮定する。扱かわれる作用素のうち典型的なものはSchrödinger作用素 $-\triangle+q(x)$。であり，qは変数xをパラメターとするエルゴード的な定常過程である。

係数がnon−randomでしかも空間変数に関して周期的であるような場合のスペクトル理論はよく知られているのであるが，我々の関心は係数を上のようにランダム化したときそれに伴なってスペクトルの数学的構造にどのような変化が起るかを見極めることにある。このように我々の問題設定も興味の持ち方も専ら数学解析的なものである。

しかし周期的係数からランダム係数への移行の背景には，結晶からガラスへ，規則系の統計力学から不規則系の統計力学へと移行する物理学上の強い動機がある。実際ランダム係数の作用素のスペクトル理論はごく最近まで主に物理学者達によって研究されてきたのであった。

このレポートは4部に別かれ，各部の執筆者は以下の通りである。

第Ⅰ部	福島正俊
第Ⅱ部	小谷眞一
第Ⅲ部	中尾慎太郎
第Ⅳ部	小谷眞一

記述の重複を厭わず執筆したが，各部は大体独立に読めるようになっている。このレポートが日本に於けるランダムスペクトルの研究を刺激する一助にでもなれば幸いである。

1977年4月

福島正俊
中尾慎太郎
小谷眞一

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

第1章　ランダム係数の2階差分作用素のスペクトル

§1.1　不規則格子振動模型

物理学者達がランダム系もしくは不規則系と呼んでいる力学系の対象は非常に広いものである。最も一般には力学系を数学的に決定する相空間上の関数H（Hamiltonianと呼ばれるもの）が，相空間変数のみでなくそれ以外のあるrandomness を表わすパラメターをも変数として含んでいるとき，その力学系はランダム系と呼ばれ得る（〔3〕,〔19〕,〔20〕）。第1章ではこのうち特に相空間が離散的であって，しかもν次元格子点全体 Z^{ν} と等しいとみなせる場合に相当する数学的理論を考える：

$$Z^{\nu}=\{\, a=(a_1, a_2, \cdots, a_{\nu}) \mid a_1, a_2, \cdots, a_{\nu} \text{ は整数} \}$$

本章で扱う数学的理論の背景にあるランダム系は実は更に限定されたものであって，nearest neighbour interaction の多次元格子振動模型と呼ばれるものである。以下簡単のために1次元格子 Z^1 の場合についてこのモデルを説明しよう。

Z^1 上の関数uに働く次の作用素Hを考える。

$$(1.1.1)\qquad (Hu)(a)=\frac{1}{m(a)}\{K(a)(u(a+1)-u(a)) - K(a-1)(u(a)-u(a-1))-q(a)u(a)\}, \quad a\in Z^1$$

但し，m，K，qは与えられた Z^1 上の関数で

$$m(a)>0, \qquad K(a)>0, \qquad \forall a\in Z^1$$

Z^1 の各格子点a上に質点が配置され，それらは隣同志バネでつながって左右（又は上下）に微小振動をしているものとしよう。aにあった質点の時刻t後に於けるaからの変位を u(t，a)とすると，近似的に運動方程式

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$(1.1.2)\qquad \frac{\partial^2 u(t,a)}{\partial t^2} = (Hu)(a),\quad t>0,\quad a\in Z^1,$$

が成立する。ここにmは格子点の質量，Kはバネ定数，qは系の外から働く力。作用素Hはこの意味で格子振動模型を記述すると考えることができるのである。

さてベクトル場 $X(a)=(m(a), K(a), q(a))$, $a\in Z^1$, が a に関し周期的であるとき，Hは規則系を表わすという。これは完全結晶や周期性高分子等の場合にあたると考えられる。

次にランダム化によって$\{X(a), a\in Z^1\}$ を確率過程（確率場ともいう --- パラメータ a は空間変数であって時間変数でないからこの呼び方のほうがふさわしい）$\{X(a,\omega), a\in Z^1\}$に置きかえたものが不規則格子振動模型である。序に述べたように我々はその定常性を仮定する：即ち確率変数の組

$$\{X(a_1+h), X(a_2+h), \cdots, X(a_k+h)\}$$

の結合分布はhに依存しない。但し $a_1<a_2<\cdots<a_k$。

特にm，K，qのうちのどれかをランダム化し他を定数にとることによって異なった性格をもつ不規則系の模型が得られる。松田〔20〕によれば，

(i) $\left.\begin{array}{l}K\text{とqは定数}\\ \text{mは定常過程}\end{array}\right\}\longleftrightarrow$ 混晶型 ： 合金，非周期性鎖状高分子

(ii) $\left.\begin{array}{l}\text{mとqは定数}\\ K\text{は定常過程}\end{array}\right\}\longleftrightarrow$ ガラス型 ： 無定型固体，ガラス，液体金属

(iii) $\left.\begin{array}{l}\text{mと}K\text{は定数}\\ \text{qは定常過程}\end{array}\right\}\longleftrightarrow$ 強結合電子模型

実際不規則系の数理物理学的研究の草分的論分（〔19〕）に於て Dyson はガラスの統計力学的性質の解析のために(ii)の型の不規則格子振動模型を考察し

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

た。しかし(ii)は(i)と(iii)の型に比して数学的取扱いが難かしく，(ii)についてあまりきれいな結果は得られていない。又(iii)は Schrödinger作用素 $\triangle u - qu$ の離散モデルであり，格子振動の方程式（1.1.2）に対応させるよりもむしろ量子力学の立場から Schrödinger 方程式

$$(1.1.3) \qquad i \frac{\partial u(t,a)}{\partial t} = (Hu)(a)$$

と関連させてその物理学的意味が考えられている（石井〔14〕）。本書では(i)と(iii)又はそれを合わせた型のもののみを考察することにする。

以上の説明で我々の研究対象の大まかなイメージが定まったと思う。それでは一体この対象についての我々の研究課題は何であろうか，一口にいってそれはランダムな作用素 $H = H^{\omega}$ の固有値，固有関数，作用素論的スペクトル及びそれらから定まる諸量の数学的研究だということができる。課題をこのように限定する1つの理由は，このような諸量こそが振動現象や量子的状態の記述に参加するものであり，従って物理学者の関心が集中する点だということにある。しかし我々にとってもっと切実な理由は，作用素をランダム化することによってスペクトルの性質の中にどのような構造上の質的変化を発見できるかという数学解析上の興味が強いからである。

そこで次の節では手はじめとして最も簡単な規則系の場合，即ちmとKが正の定数，$q \equiv 0$ の場合についてHの固有値，固有関数，spectrum の特徴を調べることにしょう。

§1.2 定数係数の2階差分作用素のスペクトル－－－規則系についての考察

この節では正定数σに対して

$$(1.2.1) \qquad (H^0 u)(a) = \frac{\sigma^2}{2}(u(a-1) - 2u(a) + u(a+1)), \qquad a \in Z^1$$

なる差分作用素 H° を考える。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

1°) generalized eigenfunction の漸近的性質

実数λに対し斉次方程式

$$(1.2.2) \quad -H^{\circ}u(a) = \lambda u(a), \quad a \in Z^1$$

の解の $a \to \pm\infty$ での挙動を見よう。$u(a) = a^s$ とおいて得られる特性方程式

$$s^2 - 2\left(1 - \frac{\lambda}{\sigma^2}\right)s + 1 = 0$$

の判別式は $\left(1 - \frac{\lambda}{\sigma^2}\right)^2 - 1 = \frac{\lambda}{\sigma^2}\left(\frac{\lambda}{\sigma^2} - 2\right)$ であるから(1.2.2)の一般解は以下の通りである。

$0 \leqq \lambda \leqq 2\sigma^2$ のとき

$$u(a) = A \sin 2a\theta + B \cos 2a\theta$$

但し $\quad \frac{\lambda}{\sigma^2} = 2\sin^2\theta,$

$\lambda > 2\sigma^2$ のとき

$$u(a) = A e^{\theta a} + B e^{-\theta a}$$

但し $\quad \frac{\lambda}{\sigma^2} - 1 = \cosh\theta, \quad \theta > 0,$

$\lambda < 0$ のとき

$$u(a) = A e^{\theta a} + B e^{-\theta a}$$

但し $\quad 1 - \frac{\lambda}{\sigma^2} = \cosh\theta, \quad \theta > 0$

勿論 $u(0)$ と $u(1)$ の値を指定すれば(1.2.1)の解は unique に定まる。

上の表示から明らかなように

$0 \leqq \lambda \leqq 2\sigma^2$ のとき

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\overline{\lim_{a\to+\infty}} \ |u(a)| < \infty$$

$$\overline{\lim_{a\to-\infty}} \ |u(a)| < \infty$$

$\lambda > 2\sigma^2$ 又は $\lambda < 0$ のとき

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{a} \log|u(a)| = \begin{cases} \theta & \dfrac{u(1)}{u(0)} \neq e^{-\theta} \text{ のとき} \\ -\theta & \dfrac{u(1)}{u(0)} = e^{-\theta} \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\lim_{a\to-\infty} \frac{1}{|a|} \log|u(a)| = \begin{cases} \theta & \dfrac{u(1)}{u(0)} \neq e^{\theta} \text{ のとき} \\ -\theta & \dfrac{u(1)}{u(0)} = e^{\theta} \text{ のとき} \end{cases}$$

このように λ が区間 $[0, 2\sigma^2]$ に属すか否かによって $u(a)$ は遠方で有界にとどまったり指数的に変動したりする。これが規則系の generalized eigenfunction の１つの特徴である。これに反して不規則格子振動の generalized eigenfunction は § 1. 6 で証明するように殆んど全ての λ に対して指数的に変動する。

<u>2°）スペクトル分布関数</u>

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{2}{\pi} \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{2\sigma^2}} & 0 \leqq x \leqq 2\sigma^2 \\ 1 & x > 2\sigma^2 \end{cases}$$

で定義される分布関数 $\mathcal{H}$ を H° の<u>スペクトル分布関数</u>という。このように呼ぶ理由は，以下の等進（ 1. 2. 4 ）が成立するためであり，区間 $[a, b]$ に於ける H° の固有値の数の割合が極限的に $\mathcal{H}(b) - \mathcal{H}(a)$ に等しいと考えられるか

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

らである。又 H° の固有値は H° で支配される系の量子状態を表わすので物理用語では $\mathcal{N}$ の密度 $\mathcal{N}'$（それが存在するとして）を状態密度（density of states）と呼んでいる。

$\ell, \ell' \geqq 0$ に対し境界値問題

$$
(1.2.3) \quad \begin{cases} -H^0 u(a) = \lambda u(a) & a \in (-\ell', \ell) \\ u(-\ell') = u(\ell) = 0 \end{cases}
$$

の固有値（即ち自明でない解 u が存在するような λ）を重複度も込めて

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$$

と並べよう。x を越えない固有値の数を $\mathcal{N}(x, (-\ell', \ell))$ とおく：

$$\mathcal{N}(x, (-\ell', \ell)) = \sum_{\lambda_i \leqq x} 1$$

このとき

$$
(1.2.4) \quad \lim_{\ell + \ell' \to \infty} \frac{1}{\ell + \ell'} \mathcal{N}(x, (-\ell', \ell)) = \mathcal{N}(x)
$$

が成立する。今区間〔$-\ell', \ell$〕の両端での境界条件として固定場の条件 $u(-\ell') = 0$, $u(\ell) = 0$ を考えたが，その代りに例えば自由端の条件 $u(\ell) = u(\ell - 1)$ におきかえても（1.2.4）は成立する。このように $\mathcal{N}$ が境界条件のとり方に依存しない事情は § 1.3 でもっと一般的に明らかにされるであろう。

ここでは固定端の境界条件（1.2.3）の下で簡単のため $\ell' = \ell$ として（1.2.4）を導びこう。（1.2.3）の固有値は $\ell' = \ell$ のとき

$$
(1.2.5) \quad \lambda_n = 2\sigma^2 \sin^2 \frac{n\pi}{4\ell}, \quad 1 \leqq n \leqq 2\ell - 1,
$$

である。実際（1.2.3）が自明でない解 u をもつためには少なくとも

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$u(a) = A \sin 2a\theta + B \cos 2a\theta$$

の場合，即ち $0 \leqq \lambda \leqq 2\sigma^2$ の場合に限られる。条件 $u(\ell) = u(-\ell) = 0$ より

$$\sin 2\ell\theta = 0 \quad 又は \quad \cos 2\ell\theta = 0$$

これを満す θ は $\theta_n = \dfrac{n\pi}{4\ell}$ $\quad 1 \leqq n \leqq 2\ell - 1$， $\dfrac{\lambda}{\sigma^2} = 2\sin^2\theta$ であったから（1.2.5）を得る。

次に $f(x) = 2\sigma^2 \sin^2 \dfrac{x\pi}{4\ell}$ ，$0 \leqq x < 2\ell$，なる関数 f の逆関数を g とすると

$$g(x) = \frac{4\ell}{\pi} \sin^{-1} \frac{x}{2\sigma^2} \qquad 0 \leqq x \leqq 2\sigma^2$$

であるが，$\mathcal{H}(x, (-\ell, \ell)) = [g(x)]$ が成立する。実際 $n - 1 \leqq g(x) < n$ なる条件と $f(n-1) = \lambda_{n-1} \leqq x < \lambda_n = f(n)$ とは同値だからである。従って

$$\frac{\mathcal{H}(x, (-\ell, \ell))}{2\ell} = \frac{1}{2\ell}\left[\frac{4\ell}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{2\sigma^2}}\right]$$

$$\underset{\ell \to \infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{2\sigma^2}} = \mathcal{H}(x) \qquad 0 \leqq x \leqq 2\sigma^2$$

スペクトル分布関数はこのような特別な規則系に対してだけでなく，非常に一般な多次元不規則格子振動に対しても定義することができる。エルゴード理論に基ずいてこれを示すのが次節 § 1.3 の課題である。

3°） H^0 の spectrum の絶対連続性

Z^1 上の複素数値関数 u で和 $\sum_{a \in Z^1} |u(a)|^2$ が有限であるようなものの全体を $L^2(Z^1)$ と書こう。$L^2(Z^1)$ は内積 $(u, v) = \sum_{a \in Z^1} u(a)\overline{v}(a)$ に関する複素ヒルベルト空間である。ところで（1.2.1）で定義される H° は明らかに $L^2(Z^1)$ 上の有界対称線型作用素とみなせるが，その spectrum

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

は〔 0 ，$2\sigma^2$〕であり，しかも絶対連続 spectrum のみからなる。又 H° に対応する単位の分解を $\{E_\lambda\}$ とすると

$$(1.2.6)\qquad (E_\lambda I_0, I_0) = \mathcal{H}(\lambda) \qquad , \qquad \lambda \in R'$$

が成立する。ここで I_0 は原点で1，その他の点で0の値をとる Z^1 上の関数を表わす。即ち H° のスペクトル分解と 2°）で定義したスペクトル分布関数 $\mathcal{H}(\lambda)$ は（1.2.6）の等式で結ばれているのである。

上の事情を説明するためと後の都合のためもあり，先ず一般のヒルベルト空間上の自己共役作用素のスペクトルに関する一般論を準備しょう。内積（，）を持つ可分な複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を考える。Aを $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とすると，単位の分解 $\{E_\lambda,\ \lambda \in R'\}$ が一意的に定まってAは

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda \ ,\quad \mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{H} : \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda u, u) < \infty\},$$

と表示される（自己共役作用素のスペクトル分解）。このとき 1次元集合

$$(1.2.7)\qquad \begin{aligned} \Sigma &= \{\lambda \in R^1 : E_{\lambda+\varepsilon} \neq E_{\lambda-\varepsilon} \quad {}^\forall \varepsilon > 0\} \\ \Sigma_p &= \{\lambda \in R^1 : E_\lambda \neq E_{\lambda-}\} \end{aligned}$$

を各々 A の <u>spectrum</u> 及び <u>point spectrum</u> と呼び Σ に属す点をAのスペクトル，Σ_p に属す点をAの点スペクトルと呼ぶ。 $\lambda \in \Sigma_p$ は λ が作用素Aの固有値であるということと同等であり，このとき $P_\lambda = E_\lambda - E_{\lambda-}$ は λ の固有空間への射影に他ならない。異なる λ に対する $P_\lambda\mathcal{H}$ は互いに直交するから Σ_p は高々可算集合である。しかし Σ_p は決らずしも孤立点から成るとは限らず Σ_p がいたる所 dense なことも起り得る。

$\{P_\lambda\mathcal{H} ; \lambda \in \Sigma_p\}$ で張られる閉部分空間を $\mathcal{H}_p$，その直交補空間を $\mathcal{H}_c$ とおく。$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}$ 又は $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}$ なる両極端の場合，Aは各々 <u>pure point spectrum</u> 又は <u>pure continuous spectrum</u> をもつといわれる。一般に閉部分空間 $\mathcal{H}_p$ と $\mathcal{H}_c$ は各々作用素Aを reduce するので

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$(1.2.8)\quad \begin{array}{ll} \mathcal{D}(A_p)=\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{H}_p, & A_p u = Au \\ \mathcal{D}(A_c)=\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{H}_c, & A_c u = Au \end{array}$$

によって$\mathcal{H}_p$及び$\mathcal{H}_c$上の線型作用素が定義されるがこれらは各々の空間上の自己共役作用素となる(Riesz －Nagy〔29〕§116, 132)。
しかも Ap (resp. Ac) は pure point spectrum (resp pure continuous spectrum) をもつ。そこで Ac の spectrum を A の <u>continuous spectrum</u>と呼び Σ_c と表わす。次の関係に注意しておこう。

$$(1.2.9)\quad \mathcal{H}_c=\{u\in\mathcal{H}\ ;\ (E_\lambda u, u)\text{は}\lambda\text{に関し連続}\}$$

実際 $u\notin\mathcal{H}_c \Longleftrightarrow {}^\exists\lambda_0,\ P_{\lambda_0}u\neq 0 \Longleftrightarrow {}^\exists\lambda_0,\ (P_{\lambda_0}u, u)\neq 0 \Longleftrightarrow$ $(E_\lambda u, u)$は $\lambda=\lambda_0$ で jumpをもつ。

次に$\mathcal{H}$ の部分空間$\mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_s$ を

$$(1.2.10)\quad \begin{cases} \mathcal{H}_{ac}=\{u\in\mathcal{H}\ ;\ (E_\lambda u, u)\text{は}\lambda\text{に関し絶対連続}\} \\ \mathcal{H}_s=\{u\in\mathcal{H}\ ;\ (E_\lambda u, u)\text{は}\lambda\text{に関し特異}\} \end{cases}$$

によって定義する。$\mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_s$ は互いに直交する$\mathcal{H}$ の閉部分空間でありしかも各々作用素Aを rednce することが知られている(Kato〔16〕ciay 10, Th 1.5)。(1.2.9)と(1.2.10)より$\mathcal{H}_{ac}\subset\mathcal{H}_c$であるから

$$(1.2.11)\quad \mathcal{H}_{sc}=\mathcal{H}_c\ominus\mathcal{H}_{ac}$$

が定義できて$\mathcal{H}_{sc}$も再びAを reduce することがわかる。我々は今次の分解を得たことになる：

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_{ac}\oplus\mathcal{H}_{sc}\oplus\mathcal{H}_p=\mathcal{H}_{ac}\oplus\mathcal{H}_s=\mathcal{H}_c\oplus\mathcal{H}_p$$

さて$\mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_{sc}$及び$\mathcal{H}_s$は A を reduce したから各空間上でのAの部分 Aac , Asc 及び As が(1.2.8)と同様にして定義される。これらは再び各空間上での自己共役作用素となる。そこで Aac, Asc 及び As の spectrum を各々 A の<u>絶対連続 spectrum</u>, <u>特異連続 spectrum</u>及び<u>特異</u>

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

spectrum と呼び，各々 Σ_{ac} ，Σ_{sc} 及び Σ_s で表わす。

上に定義した自己共役作用素の各種の spectrum は次の意味で unitary 不変である。可分な複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 及び $\hat{\mathcal{H}}$ 上の自己共役作用A及び $\hat{A}$ が unitary 同値であるとは $\mathcal{H}$ から $\hat{\mathcal{H}}$ 上への unitary 作用素（isometry onto な線型作用素）Uがあって $A = U^{-1}\hat{A}U$ が成立することである。このとき $\hat{A}$ の各種の spectrum は上に∧をつけて区別することにすれば

$$(1.2.12)\qquad \begin{cases} \Sigma = \hat{\Sigma}\ ,\ \ \Sigma_p = \hat{\Sigma}_p\ ,\ \ \Sigma_c = \hat{\Sigma}_c \\ \Sigma_{ac} = \hat{\Sigma}_{ac}\ ,\ \ \Sigma_{sc} = \hat{\Sigma}_{sc}\ ,\ \ \Sigma_s = \hat{\Sigma}_s \end{cases} .$$

実際A及びAに対応する単位の分解は

$$(1.2.13)\qquad E_\lambda = U^{-1}\hat{E}_\lambda U \qquad ,\qquad \lambda \in R^1\ ,$$

なる関係で結ばれていることが容易にわかるから

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\lambda \in R^1\ ;\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists u \in \mathcal{H}\ ,\ (E_{\lambda+\varepsilon}u, u) \neq (E_{\lambda-\varepsilon}u, u)\} \\ &= \{\lambda \in R^1\ ;\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists u \in \mathcal{H}\ ,(U^{-1}\hat{E}_{\lambda+\varepsilon}Uu, u) \neq (U^{-1}\hat{E}_{\lambda-\varepsilon}Uu, u)\} \\ &= \{\lambda \in R^1\ ;\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists \hat{u} \in \hat{\mathcal{H}}\ ,(\hat{E}_{\lambda+\varepsilon}\hat{u}, \hat{u}) \neq (\hat{E}_{\lambda-\varepsilon}\hat{u}, \hat{u})\} \\ &= \hat{\Sigma}\ . \end{aligned}$$

同様に $\Sigma_p = \hat{\Sigma}_p$ 。又（1.2.9）より $\hat{\mathcal{H}}_c = U\mathcal{H}_c$ がわかり，（1.2.8）で定義される A_c 及び $\hat{A}_c$ は各々 $\mathcal{H}_c$ 及び $\hat{\mathcal{H}}_c$ 上の自己共役作用素として unitary 同値である：$A_c = U^{-1}\hat{A}_c U$ 。
従って上に証明したことによりそれらの spectrum Σ_c と $\hat{\Sigma}_c$ は一致する。他の spectrum についても同様である。

一般論はこの辺で終え，再び（1.2.1）で定義される $L^2(Z^1)$ 上の有界線型作用素 H° の考察に戻ろう。よく知られているように Fourier 級数

$$(1.2.14)\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{a=-\infty}^{\infty} u(a)e^{iax}\ ,\quad -\pi < x < \pi\ ,$$

は $u \in L^2(Z^1)$ を $f \in L^2(-\pi, \pi)$ に送る unitary 作用素（これをU

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

と書く）を定義する。その逆写像 U^{-1} は Fourier 係数をとる操作

(1.2.15) $u(a)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-iax}\,dx$, $a \in Z'$,

によって与えられる。このUを通じて $-H^0$ は $L^2(-\pi,\pi)$ 上の掛算作用素

(1.2.16) $\begin{cases} \hat{H}_0\, f(x)=w(x)f(x) \\ w(x)=\sigma^2(1-\cos x), \quad -\pi<x<\pi, \end{cases}$

と unitary 同値となる。実際 $U(-H_0 u)(x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{2} (2u(a)-u(a-1)-u(a+1))\; e^{iax}$$
$$= \sigma^2 \left(1-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{a=-\infty}^{\infty} u(a)e^{iax}$$
$$= \hat{H}_0\,(Uu)(a), \quad u\in L^2(Z^1)\ 。$$

ところで掛算作用素（1.2.16）は $L^2(-\pi,\pi)$ 上の有界線型作用素で対応する単位の分解 $\hat{E}_\lambda$ は容易に確かめられるように $\hat{E}_\lambda f(x)=I_{\{w\leqq\lambda\}}(x)f(x)$ によって与えられる。従って任意の $f\in L^2(-\pi,\pi)$ に対して

(1.2.17) $(\hat{E}_\lambda f, f)=\displaystyle\int_{\{-\pi<x<\pi\,;\,\sigma^2(1-\cos x)\leqq\lambda\}} f(x)^2\,dx$ 。

これはλに関し絶対連続であり $\lambda\leqq 0$ で恒等的に0に等しく $\lambda\geqq 2\sigma^2$ で恒等的に (f,f) に等しい。即ち掛算作用素 $\hat{H}_0$ についてはその spectrum は $\hat{\Sigma}=\hat{\Sigma}_{ac}=[0,2\sigma^2]$, $\hat{\Sigma}_s=\phi$。従ってそれと unitary 同値な $L^2(Z^1)$ 上の作用素 $-H^0$ の spectrum も同じ性質をもつ。特に $-H^0$ に対応する単位の分解を $\{E_\lambda\}$ とすると，関係（1.2.13）と $U I_0(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ により

$$(E_\lambda I_0, I_0)=(\hat{E}_\lambda U I_0, U I_0)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\{x\in(-\pi,\pi)\,;\,\sigma^2(1-\cos x)\leqq\lambda\}\right| = \mathcal{H}(\lambda)\ 。$$

但し $|\quad|$ は Lebesgue 測度を表わす。これでこの小節 3°)の冒頭に述べた

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

主張が全て証明できた。

ところでこれら規則系に対する主張は不規則格子振動についても成立するのであろうか。後者の場合 H^0 はランダムパラメターに依存し，従って対応する単位の分解，$\{E_\lambda, \lambda\in R^1\}$も確率変数となる。§ 1.4で証明されるように，（1.2.6）の左辺の平均値が右辺に等しいという意味に於て，等式（1.2.6）は不規則系に対して拡張される。ところが個々のサンプル毎にきまるspectrumは確率1で絶対連続部分 Σ_{ac} をもたない。これは特別な1次元不規則格子振動に対して§ 1.6で示されることであるが，このようなランダムスペクトルの特異性は規則系と不規則系の著るしい差異を表わしている。

§ 1.3. 固有値分布に関するエルゴード定理－－－Ⅰ

本節では ν 次元格子点の空間 Z^ν 上の関数に働く次のような作用素 H^ω を考察する。

$$(1.3.1)\quad (H^\omega u)(a) = -\frac{1}{m^\omega(a)}\{(H^0u)(a) - q^\omega(a)u(a)\},\quad a\in Z^\nu,$$

ここでuは Z^ν 上の実数値関数であり

$$(1.3.2)\quad (H^0u)(a) = \sum_{i=1}^{\nu} K_i\{u(a_1,\cdots,a_i-1,\cdots,a_\nu) - 2u(a) + u(a_1,\cdots,a_i+1,\cdots,a_\nu)\},\quad a\in Z^\nu,$$

で与えられる定数係数2階差分作用素である。$K_1, K_2, \cdots, K_\nu$ は正の定数。

$(m^\omega(a), q^\omega(a))$は$(0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ の値をとる Z^ν をパラメター集合とする定常過程であるとする。即ちある確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$があって，各 $a\in Z^\nu$ 毎にベクトル $X^\omega(a)=(m^\omega(a), q^\omega(a))$は $\omega\in\Omega$ を変数とする$(0,\infty)\times(-\infty,\infty)$値の可測関数（確率変数）であり

$$(1.3.3)\quad P(\{\omega\in\Omega: X^\omega(a^{(1)})\in E_1, X^\omega(a^{(2)})\in E_2, \cdots, X^\omega(a^{(n)})\in E_n\})$$
$$= P(\{\omega\in\Omega: X^\omega(S_i a^{(1)})\in E_1, X^\omega(S_i a^{(2)})\in E_2, \cdots, X^\omega(S_i a^{(n)})\in E\}),\quad 1\leqq i\leqq\nu,$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

が任意の有限個の点 $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(n)} \in Z^\nu$ と任意の2次元 Borel 集合 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ に対して成立する。但し S_i は Z^ν 上の i 座標の shift を表わす：$S_i a=(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i+1, a_{i+1}, \cdots, a_\nu)$, $a \in Z^\nu$

よく知られているように定常性（1.3.3）は次のようにいいかえることができる。次の性質を満す（Ω, $\mathcal{B}$）上の互いに可換な1対1両可測変換 $T_1, T_2, \cdots, T_\nu$ があってこれらは確率測度Pを保存する：

$$
(1.3.4)\quad \begin{cases} m^{T_i\omega}(a)=m^{\omega}(S_i a),\ q^{T_i\omega}(a)=q^{\omega}(S_i a) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leqq i \leqq \nu,\quad a \in Z^\nu \\ P(B)=P(T_i B),\quad B \in \mathcal{B},\quad 1 \leqq i \leqq \nu。 \end{cases}
$$

実際，確率変数Xの induce する直積空間上の確率測度を考えることにより，最初から Ω は直積空間 $\{(0,\infty)\times(-\infty,\infty)\}^{Z^\nu}$，$\mathcal{B}$ はその筒集合から生成される σ－field，$X^\omega(a)$ は ω の a 座標，に各々等しいとして一般性を失なわない。そこで $(T_i\omega)(a)=\omega(S_i a)$, $a \in Z^\nu$, $1 \leqq i \leqq \nu$，によって T_i なる Ω 上の変換を定義すれば，（1.3.3）よりこれらの保測性が従う。

我々は定常過程（$m^\omega(a)$, $q^\omega(a)$）が更にエルゴード的（ergodic 又は metrically transitive という）であると仮定する。即ち T_i に関して不変な Ω 集合は自明なものに限る：$\mathcal{J}=\{B \in \mathcal{B}: P(T_i B \ominus B)=0,\ i=1,2,\cdots,\nu\}$ とおくとき $B \in \mathcal{J}$ なら $P(B)=0$ 又は 1.

もしも $X(a)=(m(a), q(a))$, $a \in Z^\nu$ が独立同分布な確率ベクトルの系ならば，我々は上に述べた意味でこれをエルゴード的な定常過程とみなすことができることに注意しておこう。実際このとき定常性（1.3.3）は明らかであるが，エルゴード性も次のようにして見ることができる。任意の $B \in \mathcal{B}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，有限集合 $\Lambda \subset Z^\nu$ と Λ によって決定される筒集合 B_ε を適当に選んで $P(B \ominus B_\varepsilon) < \varepsilon$ とすることができる。特に $B \in \mathcal{J}$ ならば任意の n に対して $P(T_1^n B_\varepsilon \ominus B_\varepsilon) \leqq P(T_1^n B_\varepsilon \ominus T_1^n B) + P(T_1^n B \ominus B) + P(B \ominus B_\varepsilon) = 2P(B \ominus B_\varepsilon) < 2\varepsilon$。n を充分大きくとって $S^n \Lambda \cap \Lambda = \phi$ とすれば $T_1^n B_\varepsilon$ と B_ε は独立事象となり $P(B_\varepsilon)-P(B_\varepsilon)^2=$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$P(B_\varepsilon)-P(T_1^n B_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \leqq P(T_1^n B_\varepsilon \ominus B_\varepsilon) < 2\varepsilon$。 $\varepsilon \to 0$として
$P(B)-P(B)^2 \leqq 0$。 即ち $P(B)=0$ 又は 1。

直観的には1次元格子 Z^1 について§1.1で説明したように，H^ω は多次元格子におかれた質点の不規則振動を表わす作用素であるということができる。H^ω は質量 $m(a)$ と外力ポテンシャル $q(a)$ の randomness を表わすパラメター $\omega \in \Omega$ に依存していることに注意しておこう。本節の目的は1次元規則系について§1.2, 2°)で示したのと同じ手順で H^ω のスペクトル分布関数 $\mathcal{H}(\gamma)$ が定義できることを示すことにある。

即ち

(1.3.5) $\mathcal{L}=\{\Lambda \subset Z^\nu : \Lambda$ は原点を含み辺が座標軸に平行な長方形集合$\}$

とおき，各 $\Lambda \in \mathcal{L}$ に対して Λ 上での適当な境界条件の下での H^ω の固有値のうち γ を越えないものの総個数（重複度も数える）を $\mathcal{H}(\gamma;\Lambda)(\omega)$ とするとき，

$$(1.3.6)\qquad \lim_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L},\ L^{(i)}(\Lambda)\to\infty \\ i=1,2,\cdots,\nu}} \frac{\mathcal{H}(\gamma;\Lambda)(\omega)}{|\Lambda|}=\mathcal{H}(\gamma)$$

が成立することを示したい。ここに $|\Lambda|$ は集合 Λ に属す格子点の数，$L^{(i)}(\Lambda)$ は $\Lambda \in \mathcal{L}$ の i 番目の辺の長さ，$\mathcal{H}(\gamma)$ は $\gamma \in R$ に関する確率分布関数であって $\omega \in \Omega$ に依存しない。極限(1.3.6)は殆んど全ての $\omega \in \Omega$ に対して，$\mathcal{H}$ の全ての連続点 γ に於て成立する。

この目的のためには先ず Λ に於ける H^ω の固有値を定める境界条件を指定しなければならない。ところで離散集合 Λ の場合，連続空間 R^ν の領域の場合のように Dirichlet 型や Neuman 型の境界条件を直接書き下すことは困難である。しかしそれらの条件に対応する2次形式と全く類似のものを以下のように導入することは可能である。

有限集合 Λ に対し

$\partial\Lambda=\{a \in \Lambda : \ a' \in Z^\nu-\Lambda,\ |a-a'|=1\}$， $\Lambda_0=\Lambda-\partial\Lambda$ とおく。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$|a-a'|$ は Euclid の距離を表わす。$\partial\Lambda$ 及び $\partial\Lambda\times\partial\Lambda$ 上の関数 δ と π が次の条件を満すとき，組（δ，π）を許容される境界要素と呼ぶことにしよう：

$$(1.3.7)\quad \begin{cases} 0\leqq\delta(a)\leqq\infty, & a\in\partial\Lambda \\ 0\leqq\pi(a,a')<\infty, & \pi(a,a')=\pi(a',a),\ a,a'\in\partial\Lambda \end{cases}$$

次に

$$(1.3.8)\quad \varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{|a-a'|=1\\ a,a'\in\Lambda}}(u(a)-u(a'))(v(a)-v(a'))K(a,a')$$

$$+\sum_{a\in\Lambda}u(a)v(a)q^{\omega}(a)+\sum_{a\in\partial\Lambda}u(a)v(a)\delta(a)$$

$$+\sum_{a,a'\in\partial\Lambda}(u(a)-u(a'))(v(a)-v(a'))\pi(a,a')$$

とおく。但し $K(a,a')$ は $a-a'=(0,\cdots,\pm1,\cdots,0)$ のとき K_i に等しくその他のとき 0 に等しいものとする。Λ 上の実数値関数 u の全体のなすベクトル空間で特に内積 $(u,v)_{\Lambda,m^{\omega}}=\sum_{a\in\Lambda}u(a)v(a)m^{\omega}(a)$ を付したものを $L^2(\Lambda;m^{\omega})$ と書く。そして（1.3.8）の双一次形式の定義域を

$$(1.3.9)\quad \mathcal{D}[\varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}]=\{u\in L^2(\Lambda;m^{\omega}):\ u(a)=0\ \text{if}\ a\in\partial\Lambda\ \text{and}\ \delta_{\partial\Lambda}(a)=\infty\}$$

と定義する。 $\infty\times0=0$ と規約しておけば $u,v\in\mathcal{D}[\varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}]$ に対しては $\varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}(u,v)$ は有限な値をとる。しかも容易にわかるように

$$(1.3.10)\quad \begin{cases} \varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}(u,v)=\varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}(v,u), & u,v\in\mathcal{D}[\varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}] \\ \varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}(u,v)=(H^{\omega}u,v)_{\Lambda,m^{\omega}}, & \partial\Lambda\ \text{上で}\ u=v\equiv0\ \text{のとき} \end{cases}$$

この関係は明らかに次のことを意味する：

$$(1.3.11)\quad \varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}(u,v)=(A_{\Lambda}^{\delta,\pi}u,v)_{\Lambda,m^{\omega}},\quad u,v\in\mathcal{D}[\varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}]$$

によって作用素 $A_{\Lambda}^{\delta,\pi}$ は $L^2(\Lambda;m^{\omega})$ の部分空間 $\mathcal{D}[\varepsilon_{\Lambda}^{\delta,\pi}]$ 上の対称作用

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

素となり，$\partial\Lambda$ 上で0となる関数uに対しては $A_{\Lambda}^{\delta,\pi}u(a)=H^{\omega}u(a)$，$a\in\Lambda_0$ 。このようにしてΛの内部では与えられた H^{ω} と同じ働きをし，境界 $\partial\Lambda$ では境界要素 δ,π に支配されるような対称作用素が対称形式 $\mathcal{E}_{\Lambda}^{\delta,\pi}$ から定まったわけである。

そこで固有値問題

$$(1.3.12)\quad A_{\Lambda}^{\delta,\pi}u=\lambda u\quad,\quad u\in\mathcal{D}[\mathcal{E}_{\Lambda}^{\delta,\pi}]$$

の解，つまり(1.3.12)が自明でない解uを持つようなλを $A_{\Lambda}^{\delta,\pi}$ の固有値と呼び，それらを重複度も込めて $\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_N$ と記す。固有値は全て実数であり，その個数 N は $|\Lambda_0|\leqq N\leqq|\Lambda|$ を満す。

$$(1.3.13)\quad \mathcal{H}^{\delta,\pi}(\gamma:\Lambda)(\omega)=\sum_{\lambda_i\leqq\gamma}\quad,\quad \gamma\in R^1$$

とおき，これを H^{ω} の Λ に於ける境界要素 δ，π に依存した固有値分布関数と呼ぶ。

以上の準備の下に我々の定理を正確に述べることができる。その前に対称形式 $\mathcal{E}_{\Lambda}^{\delta,\pi}$ の直観的ないしは物理的意味を説明しておこう。 $\mathcal{E}_{\Lambda}^{\delta,\pi}$は Λ の内部 Λ_0 では作用素 H^{ω} に支配され，境界では境界要素δとπに支配されるΛ上の質点系のポテンシャルエネルギーを与えるものと考れることができる。特に $\delta(a)$は境界点 $a\in\partial\Lambda$ を固定する割合を，又$\pi(a,a')$は境界点aとa'の間の相互作用を表わす。 このように考えれば作用素 H^{ω} のΛ上への制限を先ず与えようと試みるよりも，対称形式 $\mathcal{E}_{\Lambda}^{\delta,\pi}$ から出発しようとする方が物理的にもより自然なやり方であることが理解されるであろう。

定理 1.3.1. R^1上の確率分布関数 $\mathcal{H}(\gamma)$，$\gamma\in R^1$ が存在し次の性質を満す：$P(\Omega_0)=1$ なる Ω の部分集合 $\Omega_0\in\mathcal{B}$ があって任意の $\omega\in\Omega_0$と任意の許容される境界要素 $\{\delta_{\partial\Lambda},\pi_{\partial\Lambda}\}$ のとり方に対して，

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\lim_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L},\ L^{(i)}(\Lambda) \to \infty \\ i=1,2,\cdots,\nu}} \frac{\mathcal{H}^{\delta,\pi}(\gamma ; \Lambda)(\omega)}{|\Lambda|} = \mathcal{H}(\gamma)$$

が $\mathcal{H}(\gamma)$ の全ての連続点 γ で成立する。

定義 **1.3.1.** 上の定理に於ける $\mathcal{H}(\gamma)$ をランダム作用素 $\{H^{\omega}, \omega \in \Omega\}$ のスペクトル分布関数（ spectral distribution function ）と呼ぶ。

この定理の証明は異なる境界要素 δ，π に対応する固有値分布関数 $\mathcal{H}^{\delta,\pi}$ の比較定理と保測変換の系に関するエルゴード定理に基ずいて行なわれる。次のように特殊な境界要素に対応する固有値分布関数 $\mathcal{H}^{(\infty)}$ と $\mathcal{H}^{(0)}$ を考えよう。

$$\left.\begin{array}{l} \delta \equiv \infty \\ \pi \equiv 0 \end{array}\right\} \quad \text{（固定端境界条件）------} \mathcal{H}^{(\infty)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta \equiv 0 \\ \pi \equiv 0 \end{array}\right\} \quad \text{（自由端境界条件）------} \mathcal{H}^{(0)}$$

補題 **1.3.1.** $\omega \in \Omega$ を固定する。

(i) $\mathcal{H}^{(\infty)}(\lambda ; \Lambda) \leqq \mathcal{H}^{\delta,\pi}(\lambda ; \Lambda) \leqq \mathcal{H}^{(0)}(\lambda ; \Lambda)$ が任意の許容される境界条件 δ，π に対して成立する。

(ii) $\mathcal{H}^{(\infty)}(\lambda ; \Lambda_1) + \mathcal{H}^{(\infty)}(\lambda ; \Lambda_2) \leqq \mathcal{H}^{(\infty)}(\lambda ; \Lambda_1 + \Lambda_2) \quad \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \phi$

(iii) $\mathcal{H}^{(0)}(\lambda ; \Lambda_1 + \Lambda_2) \leqq \mathcal{H}^{(0)}(\lambda ; \Lambda_1) + \mathcal{H}^{(0)}(\lambda ; \Lambda_2) \quad \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \phi$

(iv) $0 \leqq \mathcal{H}^{(0)}(\lambda ; \Lambda(d)) - \mathcal{H}^{(\infty)}(\lambda ; \Lambda(d)) \leqq 2\nu d^{\nu-1}$

但し $\Lambda(d) = \{ a \in Z^{\nu} : 0 \leqq a_i < d,\ i = 1, 2, \cdots, \nu \}$。

証 明　$A_{\Lambda}^{\delta,\pi}$ の固有値 $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_N$ が次の maximin principle によって計算できることを使えばよい（ T. Kato〔16 ; pp 60〕参照）:

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\lambda_n = \sup_{\substack{\varphi_i \in L^2(\Lambda; m) \\ 1 \leqq i \leqq n-1}} \lambda(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}), \quad 1 \leqq n \leqq N$$

但し

$$\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}_\Lambda^{\delta,\pi}] \\ (u, \varphi_i)_{\Lambda,m}=0 \\ 1 \leqq i \leqq n-1}} \frac{\mathcal{E}_\Lambda^{\delta,\pi}(u,u)}{(u,u)_{\Lambda,m}}$$

(i) $\mathcal{D}[\mathcal{E}^{(0)}] \supset \mathcal{D}[\mathcal{E}^{\delta,\pi}]$ 且つ $\mathcal{E}^{(0)}(u,u) \leqq \mathcal{E}^{\delta,\pi}(u,u)$, $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}^{\delta,\pi}]$, であるから

$$\lambda^0(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}) \leqq \lambda^{\varphi,\pi}(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$$

従って $\lambda_n^{(0)} \leqq \lambda_n^{\delta,\pi}$ ，つまり $\mathcal{H}^{\delta,\pi}(\lambda;\Lambda) \leqq \mathcal{H}^{(0)}(\lambda;\Lambda)$ 。
もう一方の不等式は $\mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\infty)}] \subset \mathcal{D}[\mathcal{E}^{\delta,\pi}]$, $\mathcal{E}^{\delta,\pi}(u,u) = \mathcal{E}^{(\infty)}(u,u)$ $u \in \mathcal{D}[\mathcal{E}^{(\infty)}]$ より出る。

(ii) $L_0^2(\Lambda_1, \Lambda_2; m) = \{u \in L^2(\Lambda_1 + \Lambda_2; m); u(a) = 0, a \in \partial\Lambda_1 \cup \partial\Lambda_2\}$, $\tilde{\mathcal{E}}(u,v) = \mathcal{E}_{\Lambda_1}^{(\infty)}(u,v) + \mathcal{E}_{\Lambda_2}^{(\infty)}(u,v)$, $u, v \in L_0^2(\Lambda_1, \Lambda_2; m)$, とおく。 $\tilde{\mathcal{E}}$の定める $L_0^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$ 上の対称作用素の固有値 $\tilde{\lambda}_n$ の全体は $A_{\Lambda_1}^{(\infty)}$と $A_{\Lambda_2}^{(\infty)}$の固有値全体を合わせたものと一致する。ところで $L_0^2(\Lambda_1, \Lambda_2) \subset \mathcal{D}[\mathcal{E}_{\Lambda_1+\Lambda_2}^{(\infty)}]$, $\tilde{\mathcal{E}}(u,u) = \mathcal{E}_{\Lambda_1+\Lambda_2}^{(\infty)}(u,u)$, $u \in L_0^2(\Lambda_1, \Lambda_2)$ が成立するから $\tilde{\lambda}_n \geqq \lambda_n^{(\infty)}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$。これは(ii)を意味する。

(iii) $\mathcal{E}_{\Lambda_1+\Lambda_2}^{(0)}(u,u) \geqq \mathcal{E}_{\Lambda_1}^{(0)}(u,u) + \mathcal{E}_{\Lambda_2}^{(0)}(u,u)$, $u \in L^2(\Lambda_1 + \Lambda_2; m)$ より $\lambda_n^{(0)}(\Lambda_1 + \Lambda_2) \geqq \hat{\lambda}_n$が従う。
ここに $\{\hat{\lambda}_n\}$は $\{\lambda_n^{(0)}(\Lambda_1)\}$と $\{\lambda_n^{(0)}(\Lambda_2)\}$の合併を小さい方から並べたものである。

(iv) $\gamma = d^\nu - (d-2)^\nu \; (< 2\nu d^{\nu-1})$ とおき, γ次元空間 $L^2(\Lambda(d); m) \ominus \mathcal{D}[\mathcal{E}_{\Lambda(d)}^{(\infty)}]$の直交系を $\{\psi^{(k)}, 1 \leqq k \leqq \gamma\}$ とする。このとき

$$\lambda^{(0)}(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1},\psi^{(1)},\cdots,\psi^{(\gamma)})=\lambda^{(\infty)}(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$$

が任意の $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}\in L^2(\Lambda(d);m)$ に対して成立するから $\lambda_{n+\gamma}^{(0)}\geqq\lambda_n^{(\infty)}(\geqq\lambda_n^{(0)})$，つまり $\mathcal{H}^{(0)}(\lambda;\Lambda(d))\leqq\mathcal{H}^{(\infty)}(\lambda;\Lambda(d))+\gamma$ がわかる。　　QED

補題 1.3.2. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},P)$ 上に互いに可換な 1 対 1 onto な保測変換の族 $S_1,S_2,\cdots,S_\nu$ が与えられているとする。このとき $p>1$，$f\in L^p(\Omega)$，に対し

$$\lim_{\substack{\ell_i+m_i\to\infty\\ \ell_i,m_i\geqq 0\\ i=1,2,\cdots,\nu}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{\nu}(\ell_i+m_i+1)}\sum_{\substack{-\ell_i\leqq n_i\leqq m_i\\ 1\leqq i\leqq\nu}} f(S_1^{n_1}S_2^{n_2}\cdots S_\nu^{n_\nu}\omega)$$

$$=E(f\mid\mathcal{J})(\omega)\quad\text{a.e.}$$

但し $\mathcal{J}=\{B\in\mathcal{B};P(S_iB\ominus B)=0,\ i=1,2,\cdots,\nu\}$，$E(f\mid\mathcal{J})$ は条件付平均。

証明 L^p－norm を $\|\ \|_p$ で表わす。$p>1$，$U_if(\omega)=f(S_i\omega)$，$\omega\in\Omega$，$Q_if=E(f\mid\mathcal{J}_i)$，$1\leqq i\leqq\nu$，$Qf=E(f\mid\mathcal{J})$ によって L^p 上の作用素を定義しょう。但し $\mathcal{J}_i$ は S_i に関し不変な Ω 集合の全体。そして maximal functions

$$M_if(\omega)=\sup_{\ell_i\geqq 0,m_i\geqq 0}\frac{1}{\ell_i+m_i+1}\sum_{-\ell_i\leqq n\leqq m_i}U_i^nf(\omega)$$

$$Mf(\omega)=\sup_{\substack{\ell_i\geqq 0,m_i\geqq 0\\ 1\leqq i\leqq\nu}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{\nu}(\ell_i+m_i+1)}\sum_{\substack{-\ell_i\leqq n_i\leqq m_i\\ 1\leqq i\leqq n}}U_1^{n_1}U_2^{n_2}\cdots U_\nu^{n_\nu}f(\omega)$$

を考えよう。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

ところで補題 1.3.2の主張は次の2つの主張(最大不等式と L^p 収束)から簡単に導びかれることが知られている(Garsia〔11, pp28〕参照):

$$(1.3.14)\qquad \| Mf \|_p \leqq \left(\frac{2p}{p-1}\right)^{\nu} \| f \|_p$$

$$(1.3.15)\qquad \lim_{\substack{\ell_i+m_i\to\infty \\ \ell_i\geqq 0,\, m_i\geqq 0 \\ 1\leqq i\leqq\nu}} \left\| \frac{1}{\prod_{i=1}^{\nu}(\ell_i+m_i+1)} \sum_{\substack{-\ell_i\leqq n_i\leqq m_i \\ 1\leqq i\leqq\nu}} U_1^{n_1} U_2^{n_2}\cdots U_\nu^{n_\nu} f - Qf \right\|_p = 0$$

これらの主張は $\nu=1$ のときはよく知られている(Doob〔6;pp469〕参照)。一般の ν に対しては帰納法を使えばよい。

例えば $\nu=2$ に対しては

$$\| Mf \|_p \leqq \| M_1 M_2 f \|_p \leqq \left(\frac{2p}{p-1}\right)^2 \| f \|_p, \quad f \geqq 0,$$

$$\left\| \frac{1}{\ell_1+m_1} \frac{1}{\ell_2+m_2} \sum_{\substack{-\ell_i\leqq n_i\leqq m_i \\ i=1,2}} U_1^{n_1} U_2^{n_2} f - Q_1 Q_2 f \right\|_p$$
$$\leqq \left\| \frac{1}{\ell_2+m_2} \sum_{n_2=-\ell_2}^{m_2} U_2^{n_2} f - Q_2 f \right\|$$
$$+ \left\| \frac{1}{\ell_1+m_1} \sum_{n_1=-\ell_1}^{m_1} U_1^{n_1}(Q_2 f) - Q_1(Q_2 f) \right\|_p \to 0,$$

$$\ell_i + m_i \to \infty, \quad \ell_i,\, m_i \geqq 0, \quad i=1,2$$

U_1 と U_2 は commute するから $Q_1 Q_2 f = Q_2 Q_1 f = Qf$。 このようにして $\nu=2$ に対する(1.3.14)と(1.3.15)を得る。 Q.E.D

定理 1.3.1.の証明 自然数dを固定し $\Lambda(d)$ のずらしの全体 $\{\Lambda_n\}$ を考えよう:

$\Lambda_n = \Lambda(d) + dn,\ n \in Z^\nu$。 $\Lambda \in \mathcal{L}$ に対し $N_d^-(\Lambda) = \{ n : \Lambda_n \subset \Lambda \}$, $N_d^+(\Lambda) = \{ n : \Lambda_n \cap \Lambda \neq \phi \}$ とおく,そして $N_d^-(\Lambda) = (\text{resp } N_d^+(\Lambda))$ に属す点nの個数を $\bar{N}_d^-(\Lambda)$ (resp $\bar{N}_d^+(\Lambda)$)で表わすことにしよう。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

明らかに

$$(1.3.16)\qquad \lim_{\substack{L^{(i)}(\Lambda)\to\infty \\ 1\leqq i\leqq\nu}} \frac{N_d^{+}(\Lambda)}{N_d^{-}(\Lambda)} = 1$$

$\gamma\in R^1$を固定する。補題 1.3.1 より各 $\omega\in\Omega$ と任意の許容される境界要素 $\delta_{\partial\Lambda}$, $\pi_{\partial\Lambda}$ に対して

$$\sum_{n\in N_d^-(\Lambda)} \mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma;\Lambda_n) \leqq \mathcal{H}^{\delta,\pi}(\gamma;\Lambda)$$

$$\leqq \sum_{n\in N_d^-(\Lambda)} \mathcal{H}^{(0)}(\gamma;\Lambda_n) + \mathcal{H}^{(0)}(\gamma;\Lambda')$$

が成立する。ここに $\Lambda'=\Lambda-\sum_{n\in N_d^-(\Lambda)}\Lambda_n$, 一方 $\mathcal{H}^{(0)}(\gamma;\Lambda')$ $\leqq|\Lambda'|$, $N_d^-(\Lambda)d^{\nu}\leqq|\Lambda|\leqq N_d^+(\Lambda)d^{\nu}$ が成立するから，次の不等式が導かれる。

$$(1.3.17)\qquad \frac{1}{d^{\nu}}\frac{N_d^-(\Lambda)}{N_d^+(\Lambda)}\frac{1}{N_d^-(\Lambda)}\sum_{n\in N_d^-(\Lambda)}\mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma;\Lambda_n)$$

$$\leqq \frac{1}{|\Lambda|}\mathcal{H}^{\delta,\pi}(\gamma;\Lambda)$$

$$\leqq \frac{1}{d^{\nu}}\frac{1}{N_d^-(\Lambda)}\sum_{n\in N_d^-(\Lambda)}\mathcal{H}^{(0)}(\gamma;\Lambda_n)+\frac{N_d^+(\Lambda)-N_d^-(\Lambda)}{N_d^-(\Lambda)}$$

さてここで $f(\omega)=\mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma;\Lambda(d))(\omega)$, $\omega\in\Omega$, $S_i=T_i^d$, $i=1,2,\cdots,\nu$, とおき補題 1.3.2 を使用することを考えよう。先ず f は有界であり

$$(1.3.18)\qquad f(S_1^{n_1}S_2^{n_2}\cdots S_\nu^{n_\nu}\omega)=\mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma;\Lambda_{(n_1,n_2,\cdots,n_\nu)})(\omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

が成立することに注意する。又 $n \in Nd^{-}(\Lambda)$ なる条件は，ある自然数の組 ℓ_i，m_i に対して不等式 $-\ell_i \leqq n_i \leqq m_i$ $(1 \leqq i \leqq \nu)$ が成立するという条件に書きかえることができる。このとき $L^{(i)}(\Lambda) \to \infty$ は $\ell_i + m_i \to \infty$ なる条件に置きかわる。従って補題 1.3.2 と (1.3.16) によって，(1.3.17) の第1項は $L^{(i)}(\Lambda) \to \infty$，$1 \leqq i \leqq \nu$，のとき確率1で

$$\frac{1}{d^{\nu}} E(\mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma ; \Lambda(d)) | \mathcal{J}_d)(\omega)$$

に収束することがわかった。但し $\mathcal{J}_d$ は T_i^d，$1 \leqq i \leqq \nu$，に関し不変な Ω 集合の全体，(1.3.17) の第3項も同様にして確率1で

$$\frac{1}{d^{\nu}} E(\mathcal{H}^{(0)}(\gamma ; \Lambda(d)) | \mathcal{J}_d)(\omega)$$

に収束する。

ところで補題 1.3.1 (iv) によれば，上記の2つの条件付平均の差は確率1で $2\nu d^{\nu-1} / d^{\nu} = \frac{2\nu}{d}$ を越えない。結局 (1.3.17) から次の結論が導びかれることとなる：δ，π に依存しない $P(\Omega_{\gamma,d}) = 1$ なる Ω 集合 $\Omega_{\gamma,d} \in \mathcal{B}$ があって任意の $\omega \in \Omega_{\gamma,d}$ に対し

$$\overline{\lim_{L^{(i)} \to \infty}} \frac{1}{|\Lambda|} \mathcal{H}^{\delta,\pi}(\gamma ; \Lambda)(\omega) - \underline{\lim_{L^{(i)} \to \infty}} \frac{1}{|\Lambda|} \mathcal{H}^{\delta,\pi}(\gamma ; \Lambda)(\omega) \leqq \frac{2\nu}{d}$$

故に $\Omega_{\gamma} = \bigcap_{d=1}^{\infty} \Omega_{\gamma,d}$ とおけば任意の $\omega \in \Omega_{\gamma}$ に対し極限

$$\lim_{\substack{L^{(i)} \to \infty \\ 1 \leqq i \leqq \nu}} \frac{1}{|\Lambda|} \mathcal{H}^{\delta,\pi}(\gamma ; \Lambda)(\omega) = g(\gamma, \omega) \tag{1.3.19}$$

が存在し $g(\gamma, \omega)$ は許容される境界要素 δ，π の取り分に全く依存しない。

実は極限関数 $g(\gamma, \omega)$ は ω に関し T_i 不変である：

$$g(\gamma, \omega) = g(\gamma, T_i \omega) \qquad \text{a.e.} \qquad 1 \leqq i \leqq \nu。 \tag{1.3.20}$$

実際 $e_i = (\overbrace{0, \cdots, 1}^{i}, \cdots 0)$，$\Lambda_i = \Lambda + e_i$，に対し等式

$$\frac{1}{|\Lambda|} \mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma ; \Lambda)(\omega) = \frac{1}{|\Lambda_i|} \mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma ; \Lambda_i)(T_i \omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

が成立するから原点及び e_i を $\Lambda \in \mathcal{L}$ が含むようにしながら $L^{(k)}(\Lambda) \to \infty$ とすれば，これと(1.3.19)から $\omega \in \Omega_\gamma \cap T_i^{-1}\Omega_\gamma$ に対する等式(1.3.20)が得られる。

従って我々の仮定であるエルゴード性を思い起せば $g(\gamma, \omega)$ は a.e. で定数でなければならない。即ち $P(\Omega'_\gamma)=1$ なる可測な Ω 集合 $\Omega'_\gamma \subset \Omega_\gamma$ があって $g(\gamma, \omega)=g(\gamma)$, ${}^\forall\omega \in \Omega_\gamma{}'$。そこで

$$(1.3.21)\quad \mathcal{H}(\gamma)=\lim_{\substack{\gamma'\downarrow\gamma \\ \gamma'\text{は有理数}}} g(\gamma'),\quad \Omega_0=\bigcap_{\gamma\text{は有理数}} \Omega'_\gamma$$

とおけば(1.3.19)にかんがみて，定理1.3.1の主張が全て，この $\mathcal{H}(\gamma)$ と Ω_0 に対して成立することがわかるわけである。

但し $\mathcal{H}(\gamma)$ が確率分布関数であること

$$(1.3.22)\qquad (\infty)=1$$

だけは証明を要する。このためには既に証明された定理1.3.1の極限式に於て以下のように δ，π，Λ を特別なものにとり，更に ω に関する平均値をとって

$$(1.3.23)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\Lambda(2^n)|}E(\mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma, \Lambda(2^n)))=\mathcal{H}(\gamma)$$

が $\mathcal{H}(\gamma)$ の連続点で成立することに注意すればよい。実際平均値 $E(\mathcal{H}^{\infty}(\gamma, \Lambda))$ が Λ に関して優加法性をもち(補題1.3.1(ii)より従う)，Λ の平行移動に関して不変なこと((1.3.20)の直後のものと同様な不等式から従う)から，(1.3.23)の左辺は単調増大極限である。従って

$$1-\mathcal{H}(\gamma) \leqq 1-\frac{1}{|\Lambda(2^n)|}E(\mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma, \Lambda(2^n)))$$

$$\leqq \frac{1}{2^{n\nu}}\{E(\mathcal{H}^{(\infty)}(\infty, \Lambda(2^n))-\mathcal{H}^{(\infty)}(\gamma; \Lambda(2^n)))+\frac{2\nu}{2^n}\text{。}$$

n に続いて γ を充分大きくとればこれはいくらでも小となる。　　　Q.E.D

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

§ 1.4 固有値分布に関するエルゴード定理－－－II

前節では（1.3.1）で定義されるランダムな作用素 H^{ω} のスペクトル分布関数 $\mathcal{N}(\lambda)$ が，強大数の法則と類似な極限式（1.3.6）によって定義可能であることを見た。ちなみにこの式は non－randomな作用素 H^0 に対して§1.2で具体的に計算した式（1.2.4）の一般化とみなすことができる。（1.3.6）の型の極限は統計力学で熱力学的極限と呼ばれているものであるが，前節で本質的に用いた2つの補題からわかるように数学的にはランダムな集合関数でほぼ有限加法的に近いとみなせるものに対するエルゴード定理以外の何ものでもない。

ところでエルゴード定理のもう1つの側面は，極限として確定した量の identification，即ちその量をある確率変数の平均値として表わすことである。本節はこの問題を扱かう。そして実際 H^{ω} を Z^{ν} 上の L^2 空間上の自己共役作用素とみなし対応する単位の分解を $\{E_{\lambda}^{\omega}\}$ とするとき

$$(1.4.1)\qquad \mathcal{N}(\lambda)=E((E_{\lambda}^{\omega}I_0,\ I_0)),\qquad \lambda\in R^1,$$

なる等式が成立することを証明する。但しEは ω についてのP測度による平均値を表わす。特に H^{ω} が non－random な作用素 H^0 の場合にはこの関係は既に§1.2，3°)に於て計算済みであることに注意しておこう。

本質的でない複雑さを避けるために（1.3.1）の作用素 H^{ω} に対して次の仮定をおく：

$$(1.4.2)\qquad K_i=\frac{\sigma^2}{2},\qquad 1\leqq i\leqq\nu,\qquad \sigma>0\cdot$$

$$(1.4.3)\qquad m^{\omega}(a)\equiv 1,\qquad \omega\in\Omega,\qquad a\in Z^{\nu}$$

つまり本節が扱かう作用素は $H^{\omega}u=-H^0u+q^{\omega}u$ なる型のもので，$\{q^{\omega}(a),\ a\in Z^{\nu}\}$ は前節と同じく一般のエルゴード的な定常過程としておく。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

空間 $L^2(Z^\nu)=\{u \mid \sum_{a\in Z^\nu} u(a)^2<\infty\}$ の内積を $(u,v)=\sum_{a\in Z^\nu} u(a)v(a)$ によって定義する。有限個の点を除いて0となるような Z^ν 上の関数の全体を $C_0(Z^\nu)$ とおく。このとき

補題 1.4.1 q を Z^ν 上の任意の実数値関数とし $Hu(a)=-H^0u(a)+q(a)u(a)$, $a\in Z^\nu$, とおく。

$$
(1.4.4)\quad \begin{cases} \mathcal{D}(A)=\{u\in L^2(Z^\nu) \mid Hu\in L^2(Z^\nu)\} \\ Au(a)=Hu(a), \quad u\in\mathcal{D}(A) \end{cases}
$$

によって定義される作用素Aは $L^2(Z^\nu)$ 上の自己共役作用素である。又 $C_0(Z^\nu)$ はAの core である，即ち，Aはその $C_0(Z^\nu)$ 上への制限の最小閉拡大。

証明 H^0 は容易にわかるように $L^2(Z^\nu)$ 上の有界対称作用素である。従って $\mathcal{D}(A)$ は掛算作用素 $q\cdot$ の定義域に等しい，このことに注意すれば補題の主張は自明である。 Q.E.D

さて各 ω 毎に H^ω は $L^2(Z^\nu)$ 上の自己共役作用素 A^ω を定めるから対応する単位の分解 $\{E^\omega_\lambda \;;\lambda\in R^1\}$ を考えることができる。本節の目的は次の定理を証明することである。

定理 1.4.1 $(E^\omega_\lambda I_0, I_0)$ は ω の可測関数であり，$\mathcal{N}(\lambda)=E((E^\omega_\lambda I_0, I_0))$, $\lambda\in R^1$, が成立する。但し $\mathcal{N}(\lambda)$ は $\{H^\omega, \omega\in\Omega\}$ のスペクトル分布関数(定義 1.3.1)。Eは測度Pに関する平均。I_0 は Z^ν の原点で1，他で0なる値をとる関数。

先ず次の近似から始めよう。

補題 1.4.2 $q^\omega_N(a)=(-N)\vee q^\omega(a)$ とおき，$-H^0+q^\omega_N$ の定める

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$L^2(Z^\nu)$上の自己共役作用素を A_N^ω，対応する単位の分解を$\{{}^N E_\lambda^\omega,\ \lambda\in R^1\}$とする$E((E_\lambda^\omega I_0, I_0))$の各連続点$\lambda$で

$$(1.4.5)\quad \lim_{N\to\infty} E(({}^N E_\lambda^\omega I_0, I_0)) = E((E_\lambda^\omega I_0, I_0))。$$

又$\{-H^0+q_N^\omega\ ;\ \omega\in\Omega\}$のスペクトル分布関数を$\mathcal{N}_N(\lambda)$とすると$\mathcal{N}(\lambda)$の各連続点$\lambda$で

$$(1.4.6)\quad \lim_{N\to\infty} \mathcal{N}_N(\lambda) = \mathcal{N}(\lambda)\ 。$$

<u>証明</u>　補題1.4.1より A_N^ω，A^ω 共に core $C_0(Z^\nu)$をもち，任意の$u\in C_0(Z^\nu)$に対してL^2収束の意味で $A_N^\omega u\to A^\omega u$ 。
T. Kato [16；Chap Ⅷ, Cor. 1.6, Th. 1.15]によるとこのことからL^2収束の意味で ${}^N E_\lambda^\omega u \to E_\lambda^\omega u$ が従う。但しuは$L^2(Z^\nu)$の任意の要素，λは E_λ^ω の任意の連続的。容易にわかるようにこれは(1.4.5)を意味する。

既に前節の定理1.3.1の証明の最後の部分で見たように$\Lambda_k=\Lambda(2^k d)$，$d>0$，とおけば$\mathcal{N}(\lambda)$の連続点λに対して$\frac{1}{|\Lambda_k|}E(\mathcal{N}^{(\infty)}(\lambda,\Lambda_k))$は$k$と共に単調増大して $\mathcal{N}(\lambda)$に近ずく。同様の収束は$\mathcal{N}_N(\lambda)$に対しても成立する。従って $n\geqq N$ ならば

$$0\leqq \mathcal{N}(\lambda)-\mathcal{N}_n(\lambda)\leqq \mathcal{N}(\lambda)-\mathcal{N}_N(\lambda)$$

$$\leqq \mathcal{N}(\lambda)-\frac{1}{|\Lambda_k|}E(\mathcal{N}_N^{(\infty)}(\lambda,\Lambda_k))$$

$$=\mathcal{N}(\lambda)-\frac{1}{|\Lambda_k|}E(\mathcal{N}^{(\infty)}(\lambda,\Lambda_k))$$

$$+\frac{1}{|\Lambda_k|}\left(E(\mathcal{N}^{(\infty)}(\lambda,\Lambda_k))-E(\mathcal{N}_N^{(\infty)}(\lambda,\Lambda_k))\right)。$$

$\varepsilon>0$を任意にとり，kを充分大きくとって，最後の式の第1項をε以下ならしめる。そのようなkを固定し，Nを充分大きくとって第2項もε以下ならしめることができる。実際各ω毎に$\mathcal{N}_N^{(\infty)}(\lambda,\Lambda_k)(\omega)$は$N$と共に単調に

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

増大しあるN以後は $\mathcal{H}^{(\infty)}(\lambda, \Lambda_k)(\omega)$ に一致してしまうからである。これで(1.4.6)が示せた　　　　　　　　　　　　　　　　Q.E.D

定理の証明のために補題をもう2つ準備する。H^0 を生成作用素に持つようなZ^ν上の時間連続なマルコフ過程 $\dot{M}=(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{B}}, \dot{X}_t, \dot{P}_a)_{a\in Z^\nu}$ を考えよう。即ち $\mathring{M}$ はその推移関数

$$p_t(a, b) = \dot{P}_a(\dot{X}_t = b), \quad t>0, \quad a, b \in Z^\nu,$$

が $t>0$ と $a\in Z^\nu$ の関数として kolmogorov の backward differential equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t, a)}{\partial t} = (H^0 u)(t, a) \\ u(a, a) = \delta_{ab} \end{cases}$$

を満すようなマルコフ過程であり，その標本路 $\dot{X}_t(\dot{\omega})$ は t に関し右連続である。上の方程式の解の一意性からわかるように，このマルコフ過程は空間的一様性

(1.4.7)　$\dot{P}_a(\dot{X}_t=b) = \mathring{P}_o(\dot{X}_t = b-a)$

をもつ。以後測度 $\dot{P}a$ に関する平均を $\dot{E}a$ で表わそう。

<u>補題 1.4.3</u>　q を Z^ν 上の関数で下に一様に有界なものとする。$-H^0+q$ の定める $L^2(Z^\nu)$ 上の自己共役作用素に対応する単位の分解を $\{E_\lambda, \lambda\in R^1\}$ とすると

(1.4.8)　$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} d(E_\lambda I_a, I_b) = \mathring{E}_a(\exp(-\int_o^t q(\dot{X}_s)ds)\cdot I_b(\dot{X}_t))$

但し I_a は $I_a(a') = \delta_{aa'}$, $a'\in Z^\nu$, なる関数

<u>証明</u>　(1.4.8)の両辺が共に $t>0$ と $a\in Z^\nu$ の関数として Kolmo-gorov 方程式

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial t} = (H^0 u)(t,a) - q(a)u(t,a) \\ u(0+,a) = \delta_{ab} \end{cases}$$

の一意的な有界解であることに注意すればよい（ M. Fukushima 〔7〕参照 ）

Q.E.D

補題 1.4.4　有限集合 $\Lambda \subset Z^{\nu}$ と作用素 $H = -H^0 + q$ に対し，前節で定めた $\mathcal{D}[\mathcal{E}_{\Lambda}^{(\infty)}] = \{u \in L^2(\Lambda) \mid u = 0 \text{ on } \partial\Lambda\}$ 上の対称作用素 $A_{\Lambda}^{(\infty)}$ を考えると，$a, b \in \Lambda_0$ に対し

(1.4.9)　$(e^{-tA_{\Lambda}^{(\infty)}} I_a, I_b)_{\Lambda} = \dot{E}_a(e^{-\int_0^t q(\dot{X}s)ds} I_b(\dot{X}_t) ; t < \mathring{\tau}_{\Lambda_0})$

但し $\dot{\tau}_{\Lambda_0}$ は $\dot{M}$ の Λ_0 からの流出時刻：

$$\dot{\tau}_{\Lambda_0}(\omega) = \inf\{t \mid \dot{X}_t \in \Lambda_0\}$$

証明　$a \in \partial\Lambda$ のとき（1.4.9）の左辺は 0 であると規約する。すると（1.4.9）の両辺共 $t > 0$，$a \in \Lambda$ の関数として

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,a)}{\partial t} = (H^0 u)(t,a) - q(a)u(t,a), & a \in \Lambda_0 \\ u(t,a) = 0, & a \in \partial\Lambda, \\ u(0+,a) = \delta_{ab} \end{cases}$$

の一意解となる。　　　　Q.E.D

定理 1.4.1 の証明　定理 1.4.1 は q が下に一様有界な場合，即ち

(1.4.11)　$M > -\infty$，$q^{\omega}(a) \geqq M$，$\omega \in \Omega$，$a \in Z^{\nu}$，

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

が成立する場合に示されれば充分である。実際一般の q に対しては $q_N^{\omega}(a)=(-N)\vee q^{\omega}(a)$ に定理を適用し，補題 1.4.2 に従って $N\to\infty$ とすればよいからである。以後（1.4.11）を仮定し，$(E_\lambda^{\omega} I_0, I_0)$ の ω に関する可測性及び等式

$$(1.4.12)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}\,\mathcal{M}(d\lambda)=E\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}d(E_\lambda^{\omega} I_0, I_0)\right),\ t>0,$$

を示そう。

$t>0$，$\omega\in\Omega$ に対し

$$(1.4.13)\qquad f(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}\,d(E_\lambda^{\omega} I_0, I_0)$$

とおくと，補題 1.4.3 より

$$(1.4.14)\qquad f(t,\omega)=\dot{E}_0\left(e^{-\int_0^t q^{\omega}(\dot{X}s)\,ds}\ I_0(\dot{X}_t)\right)$$

この表示からわかるように $f(t,\omega)$ は (t,ω) に関し可測である。一方条件（1.4.11）により Laplace−Stieltjes 変換（1.4.13）に於ける積分範囲は実は下に有界である。従って Laplace inversion formula により $f(t,\omega)$ の t に関する導関数，定積分，極限操作を行なうことによって $(E_\lambda^{\omega} I_0, I_0)$ が得られることがわかる。
（D. V. Widder [32] ch. VII Th. 7a 参照）。
結局，各 λ に対し $(E_\lambda^{\omega} I_0, I_0)$ が $\omega\in\Omega$ に関し可測であることがわかった。

（1.4.12）を示すために以後 $t>0$ を固定し，（1.4.13）の $f(t,\omega)$ を単に $f(\omega)$ と書く。
補題 1.3.2 を有界関数 f に適用して

$$\lim_{\substack{\Lambda\in \\ L^{(i)}(\Lambda)\to\infty \\ 1\leq i\leq\nu}} \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{a\in\Lambda} f(T^a\omega)=E(f)\qquad \text{a.e.}$$

ここに $T^a=T_1^{a_1}\cdots T_\nu^{a_\nu}$　ところが（1.3.4）より $q^{T^a\omega}(b)=$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$q^{\omega}(b+a)$ が成立するから，(1.4.7)と(1.4.14)より

$$f(T^a\omega)=\dot{E}_0\left(e^{-\int_0^t q^{\omega}(\dot{X}_s+a)ds}\ I_0(\dot{X}_t)\right)$$

$$=\dot{E}_a\left(e^{-\int_0^t q^{\omega}(\dot{X}_s)ds}\ I_a(\dot{X}_t)\right)$$ 。結局次の等式が成立することになる。

$$(1.4.15)\quad \lim_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ L^{(i)}(\Lambda)\to\infty}}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{a\in\Lambda}\dot{E}_a\left(e^{-\int_0^t q^{\omega}(\dot{X}_s)ds}\ I_a(\dot{X}_t)\right)$$

$$=E\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\lambda}\ d(E_{\lambda}^{\omega}I_0,\ I_0)\right)\qquad \text{a.e.}$$

一方，定理1.3.1によれば

$$\lim_{\substack{A\in\mathcal{L}\\ L^{(i)}(\Lambda)\to\infty}}\frac{1}{|\Lambda|}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\lambda}\ \mathcal{N}_{\Lambda}^{(\infty)}(d\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\lambda}\ \mathcal{N}(d\lambda)$$

今 $A_{\Lambda}^{(\infty)}$ の固有値を $\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_N$ とすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda t}\ \mathcal{N}_{\Lambda}^{(\infty)}(d\lambda)=\sum_{n=1}^{N}e^{-\lambda_n t}$$

$$=t_r\left(e^{-tA_{\Lambda}^{(\infty)}}\right)=\sum_{a\in\Lambda_0}\left(I_a,\ e^{-tA_{\Lambda}^{(\infty)}}I_a\right)$$

ここで補題1.4.4を使えば我々は次の式に導びかれる。

$$(1.4.16)\quad \lim_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ L^{(i)}(\Lambda)\to\infty}}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{a\in\Lambda}\dot{E}_a\left(e^{-\int_0^t q^{\omega}(\dot{X}_s)ds}\ I_a(\dot{X}_t)\,;\ \tau_{\Lambda_0}>t\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\lambda}\ \mathcal{N}(d\lambda)$$

上に導びいた(1.4.15)，(1.4.16)にかんがみて我々の目的の等式(1.4.12)のためには，次の関係さえ証明すればよいことがわかった。

$$(1.4.17)\quad \lim_{\Lambda\in\mathcal{L},\ L^{(i)}(\Lambda)\to\infty}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{a\in\Lambda}\dot{P}_a(\dot{\tau}_{\Lambda}<t)=0$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

これを示すために $\Lambda_\ell=\{a\in Z^\nu \mid -\ell<a_i<\ell,\ 1\leqq i\leqq\nu\}$, $v(a)=\lim_{\ell\to\infty}\mathring{E}_a(e^{-\tau_{\Lambda_\ell}})$ とおこう。容易にわかるように v は $(1-H^0)v=0$ の有界な解であり $v\equiv 0$ でなければならない。そこで任意の $\varepsilon>0$ に対し ℓ を充分大きくとって $\dot{P}_0(\tau_{\Lambda_\ell}<t)<\varepsilon$ ならしめ得る。

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{a\in\Lambda}\dot{P}_a(\tau_\Lambda<t)$$
$$\leqq\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{dis(a,\partial\Lambda)>\ell}\mathring{P}_a(\tau_\Lambda<t)+\frac{\#\{a\in\Lambda;\ dis(a,\partial\Lambda)\leqq\ell\}}{|\Lambda|}$$

右辺の第1項の和の各項は $P_0(\tau_{\Lambda_\ell}<t)$ を越えず，従って第1項$<\varepsilon$。次に Λ を充分に大きくとれば右辺の第2項も ε 以下ならしめ得る。(1.4.17)がわかった。 Q.E.D

注意 1.4.1　以上の証明の中で，次の公式が示された。

$$t\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\lambda}\mathcal{N}(\lambda)\,d\lambda=E\times\dot{E}_0\left(e^{-\int_0^t q^\omega(\dot{X}_s)\,ds}\ I_0(\dot{X}_t)\right)$$
$$=\dot{E}_0\left(E\left(e^{-\int_0^t q^\omega(\dot{X}_s)\,ds}\right)I_0(\dot{X}_t)\right)$$

我々は q が下に一様有界な場合にこれを示したのであるが，一般の q に対しても補題 1.4.2 と単調収束定理によってやはり正しいことがわかる。これは Feynman－Kac の公式と呼ばれているものの一種である。

§ 1.5 スペクトル分布関数の±∞での漸近挙動

§1.3 で証明されたスペクトル分布関数 $\mathcal{N}(\lambda)$ に関するエルゴード定理の簡単な応用として，本節では $\mathcal{N}(\lambda)$ の $\lambda\to\pm\infty$ のときの漸近的挙動を導く，ランダム作用素は $H^\omega u=-H^0u+q^\omega u$ の型をしているものとする。$\{q^\omega(a),\ a\in Z^\nu\}$ はエルゴード的な定常過程である。

(1.5.1)　$F(\lambda)=P(q(0)\leqq\lambda)$　,　$\lambda\in R^1$,

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

とおく。即ち $F(\lambda)$ は $q(0)$ の分布関数である。定常性によりこれは任意の $a \in Z^{\nu}$ に対する $q(a)$ の分布と同じである。

定理 1.5.1

$$F(\lambda - \| H^0 \|) \leqq \mathcal{N}(\lambda) \leqq F(\lambda) \quad , \qquad \lambda \in R^1$$

但し $\| H^0 \|$ は H^0 の L^2 −ノルム。

証明 掛算作用素

$$(1.5.2) \qquad H_{q^{\omega}} u(a) = q^{\omega}(a) u(a) \quad , \qquad a \in Z^{\nu} ,$$

を考える。有限集合 Λ 上での固有値問題

$$\begin{cases} H_{q^{\omega}} u(a) = \lambda u(a) & , \quad a \in \Lambda_0 \\ u(a) = 0 & , \quad a \in \partial \Lambda \end{cases}$$

の固有値は $q^{\omega}(a)$, $a \in \Lambda_0$, であり，固有値 $q^{\omega}(a)$ に対する固有関数は I_a である。

自明な不等式

$$(H_q u, u)_{\Lambda} \leqq \mathcal{E}_{\Lambda}^{(\infty)}(u, u) \leqq (H_q + \| H^0 \| u, u)_{\Lambda}$$

と maximin principle（補題 1.3.1 の証明参照）より

$$\sum_{a \in \Lambda_0} I_{(-\infty, \lambda]}(q^{\omega}(a) + \| H^0 \|) \leqq \mathcal{N}^{(\infty)}(\lambda ; \Lambda)$$
$$\leqq \sum_{a \in \Lambda_0} I_{(-\infty, \lambda]}(q^{\omega}(a))$$

一方エルゴード定理（補題 1.3.2）より

$$\lim_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ L^{(i)}(\Lambda) \to \infty \\ 1 \leqq i \leqq \nu}} \frac{\sum_{a \in \Lambda_0} I_{(-\infty, \lambda]}(q^{\omega}(a))}{|\Lambda|} = E(I_{(-\infty, \lambda]}(q(0)))$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

が a.e.で成立するから, $\mathcal{H}(\lambda)$ に関するエルゴード定理(定理 1.3.1)と合わせて定理 1.5.1 を得る。 Q.E.D

この定理から直ちに次の系を得る。

系　次の同値性が成立する。但し α, C は正定数。

$$\lim_{\lambda\to-\infty} |\lambda|^{\alpha}\,\mathcal{H}(\lambda) = C \iff \lim_{\lambda\to-\infty} |\lambda|^{\alpha} F(\lambda) = C$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty} |\lambda|^{-\alpha} \log \mathcal{H}(\lambda) = -C \iff \lim_{\lambda\to-\infty} |\lambda|^{-\alpha} \log F(\lambda) = -C$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha}(1-\mathcal{H}(\lambda)) = C \iff \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{\alpha}(1-F(\lambda)) = C$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-\alpha} \log(1-\mathcal{H}(\lambda)) = -C \iff \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-\alpha} \log(1-F(\lambda)) = -C$$

§ 1.6 絶対連続スペクトルの不在

本節では1次元 Z^1 上のランダム作用素

$$H^{\omega}u(a) = -\frac{\sigma^2}{2}(u(a+1)-2u(a)+u(a-1)) + q^{\omega}(a)u(a), \qquad a \in Z^1,$$

を考える。さしあたっては $\{q(a);\ a\in Z^1\}$ はある確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$上の確率変数の集合とだけしておこう。

規則系, 即ち $q^{\omega}(a)\equiv 0$ のときに § 1.2.1°) で考えたのと同様に H^{ω} の generalized eigenfunction u を

$$(1.6.1)\qquad \begin{cases} H^{\omega}u(a) = \lambda u(a), & a \in Z^1 \\ u(-1)=0, & u(0)=1 \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

の解として定義する。

今任意の$\lambda \in R^1$を固定したとき(1.6.1)の解uについて a.e. の意味での極限

$$(1.6.2)\quad \lim_{a\to\pm\infty} \frac{1}{|a|} \log(u(a)^2+u(a-1)^2) = \tau_\pm(\lambda)$$

の少なくとも一方が存在し，極限は$\omega \in \Omega$に依存しない正定数であるとする。このときH^ωの generalized eigenfunction は確率1で指数的に増大するということにしよう。

一方補題1.4.1により，各$\omega \in \Omega$に対してH^ωは$L^2(Z^1)$上の自己共役作用素と考えることができるから，§1.2，3°)の一般論に従って，H^ωの各種の spectrum Σ^ω, Σ^ω_{ac}, Σ^ω_s が定義できる。(1.2.10)により，$\Sigma^\omega=\Sigma^\omega_s$, $\Sigma^\omega_{ac}=\phi$ なることと，任意の$u \in L^2(Z^1)$に対し$(E^\omega_\lambda u, u)$が$\lambda \in R^1$について特異であることとが同値であることに注意しておこう。ここに$\{E^\omega_\lambda, \lambda\in R^1\}$は$H^\omega$に対応する単位の分解。

定理1.6.1 H^ωの generalized eigenfunction が確率1で指数的に増大するとすると，殆んど全てのωに対してH^ωの絶対連続 spectrum は空である：$\Sigma^\omega= \Sigma^\omega_s$, $\Sigma^\omega_{ac}=\phi$。

補題1.6.1 $\omega \in \Omega$を固定する。H^ωに対して次の性質を満すλの非減少関数 $\rho(\lambda)=\rho^\omega(\lambda)$ が存在する。

(a) 任意の$u \in L^2(Z^1)$に対し$d_\lambda(E^\omega_\lambda u, u)$は$\rho(d\lambda)$に関し絶対連続。

(b) ρに関し殆んど全てのλに対し

$$(1.6.3)\quad |u(a)| \leqq C(\lambda, \varepsilon)|a|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \qquad a \in Z^1$$

但しuは(1.6.1)の解。$C(\lambda, \varepsilon)$はλと$\varepsilon>0$に依存する正定数。

この補題の証明は Berezanskii〔2〕にある。ここでは$H=H^\omega$を$L^2(Z^1)$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

上の作用素でなく−1を固定端として$L^2(Z^1_+)$上の自己共役作用素とみなしたときは，$\rho(\lambda)=(E_\lambda I_0, I_0)_{Z^1_+}$とおけばよいことだけに注意しておこう。実際この$\rho$に対しては(1.6.1)の解$u^\lambda(a)$，$a\in Z^1_+$,は直交多項式となる([15])：$C\int_{-\infty}^{\infty}u^\lambda(a)u^\lambda(b)\rho(d\lambda)=\delta_{ab}$。

従って

$$C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{a=0}^{\infty}u^\lambda(a)^2\,a^{-1-2\varepsilon}\right)\rho(d\lambda)=\sum_{a=0}^{\infty}a^{-1-2\varepsilon}<\infty\quad。$$

即ちρに関して殆んど全てのλに対して

$\sum_{a=0}^{\infty}u^\lambda(a)^2\,a^{-1-2\varepsilon}<\infty$。　この一般項は0に収束し補題の条件(b)が成立する。

定理1.6.1の証明　(1.6.2)の左辺の極限が存在するときそれ等を$\tau_\pm^{\lambda,\omega}$と書くことにし

$$\Gamma=\{(\lambda,\omega)\in R^1\times\Omega \mid \tau_+^{\lambda,\omega}\text{ 又は }\tau_-^{\lambda,\omega}\text{ が存在し正}\}$$

とおく。Γは可測集合であり，又定理の仮定によりΓの各λ−section のP測度は1であるから，Fubiniの定理によって$\widetilde{P}((R^1\times\Omega)-\Gamma)=0$。
但し$\widetilde{P}$はルベーグ測度とP測度の直積測度。そこで再び Fubini の定理を使えば，殆んど全ての$\omega\in\Omega$に対し1次元集合

$$\Gamma(\omega)=\{\lambda\in R^1 \mid \tau_+^{\lambda,\omega}\text{ 又は }\tau_-^{\lambda,\omega}\text{ が存在し正}\}$$

は full Lebesgue measure をもつ：$|R^1-\Gamma(\omega)|=0$。

ここで補題1.6.1を使う。(1.6.1)の解uに対し

$$\triangle(\omega)=\{\lambda\in R^1 \mid u\text{ は不等式(1.6.3)を満す}\}$$

とおけば　$\Gamma(\omega)\cap\triangle(\omega)=\phi$であるから，殆んど全ての$\omega\in\Omega$に対し，$|\triangle(\omega)|=0$。補題1.6.1の測度$\rho^\omega$はこの1次元集合$\triangle(\omega)$に集中して

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

いるから，ρ^{ω} は特異な測度である。従って補題 1. 6. 1 (a)により，任意の $u \in L^2(Z^1)$ に対し $d(E^{\omega}_{\lambda} u, u)$ は特異，即ち H^{ω} は絶対連続 spectrum をもたないことがわかった。 Q.E.D

次の問題は定理 1. 6. 1 の仮定が満される場合が実際にあり得るかということである。規則系，即ち $q^{\omega}(a) \equiv 0$ のときには § 1. 2, 1°) で見たように，ある範囲に属す λ に対しては (1. 6. 2)が成立せず，従って generalized eigenfunction は指数的に増大しない。又この場合，§ 1. 2, 3°)で見たように H^0 の spectrum は絶対連続 spectrum のみよりなり，定理 1. 6. 1 の結論とは対称的である：$\Sigma = \Sigma_{ac}$，$\Sigma_s = \phi$ 。これに反し 1 次元不規則系の典型的な場合に generalized eigenfunction の指数的増大が起る。

<u>**定理 1.6.2**</u> $\{ q^{\omega}(a),\ a \in Z^1 \}$ が独立同分布であるとし，$E(|q(0)|) < +\infty$ 且つ $q(0)$ の分布は 1 点に集中していないとする。このとき H^{ω} の generalized eigenfunction は確率 1 で指数的に増大する。

<u>系</u> $\{ q^{\omega}(a),\ a \in Z^1 \}$ が定理 1. 6. 2 の条件を満すとき，殆んど全ての $\omega \in \Omega$ に対して H^{ω} の絶対連続 spectrum は空である。

定理 1. 6. 2 を証明するために generalized eigenfunction u の定義式 (1. 6. 1)を以下のように書きかえてみよう。

$$\begin{pmatrix} u(a+1) \\ u(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{\sigma^2}(q^{\omega}(a) - \lambda), & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(a) \\ u(a-1) \end{pmatrix}$$

この式の右辺に現われる 2 行 2 列の行列を T^{ω}_a と書くことにすると $\{ T^{\omega}_a,\ a \in Z^1 \}$ は $SL(2, R)$ の値をとる独立同分布な確率変数系である。但し $SL(2, R)$ は行列式が 1 に等しいような 2 × 2 実行列の全体，しかも

$$(1.6.4)\quad \begin{pmatrix} u(a+1) \\ u(a) \end{pmatrix} = T_a^{\omega} \cdot T_{a-1}^{\omega} \cdots T_0^{\omega} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a > 0$$

そこで次の Furstenberg の定理〔10；Th. 8. 6〕に訴えて定理1.6.2の証明を実行しよう。

<u>**Furstenbergの定理**</u>　$X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ を $SL(m, R)$ 値の独立同分布な確率変数列としその共通な分布を $\widetilde{\varphi}$ とする。$\widetilde{\varphi}$ の台を含む最小の閉部分群をGとする。更に

(i)　Gは non－compact

(ii)　Gの finite index の部分群は全て既数。

(iii)　$\int_{SL(m,R)} |||g||| \, d\widetilde{\varphi}(g) < \infty$

なる条件が満されるとする。このときある正定数 α が存在し

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| X_n \cdots X_0 x \| = \alpha\right) = 1$$

が任意の $x \in R^m - \{0\}$ に対して成立する。

上の定理に現われた記号や概念を説明しておく。$x \in R^m$ に対しそのユークリッドのノルムを $\|x\|$ で表わす：$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$ 。

$$|||g||| = \sup_{\|x\|=1} \|gx\|, \quad g \in SL(m, R)。$$

$SL(m, R)$ の部分群 $\widetilde{G}$ が finite index であるとは $\widetilde{G}$ を法とする coset の数が有限個であること。又 $\widetilde{G}$ 不変な R^m の部分空間が $\{0\}$ か R^m に限るとき，Gを既約という。

今 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を共通な1次元分布 φ をもつ独立な実確率変数列とし

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $SL(2, R)$ 値の独立同分布な確率変数列であり，

その分布$\tilde{\varphi}$はφから導びかれるものである。

補題 1.6.2 $\int_{-\infty}^{\infty} |c|\, d\varphi(c) < \infty$ 且つ supp[φ]は2点以上を含むとする。このとき $\{X_0, X_1, \cdots, X_n \cdots\}$ は Furstenberg の定理の条件(i)(ii)(iii)を満す。

証明 **(iii)の証**

$$|||X_n||| = \sup_{a_1^2+a_2^2=1} \sqrt{(x_n a_1 - a_2)^2 + a_1^2}$$

$$\leqq \sup_{a_1^2+a_2^2=1} (|x_n a_1 - a_2| + |a_1|) \leqq |x_n| + 2 \text{。}$$

故に $\int |||g|||\, \tilde{\varphi}(dg) = E(|||X_n|||)$

$$\leqq E(|x_n|) + 2 = \int_{-\infty}^{\infty} |c|\, d\varphi(c) + 2 < +\infty \text{。}$$

(i)の証 supp[$\tilde{\varphi}$]を含む最小の閉部分群をGとする。仮定より相異なる e, $e' \in$ supp[φ]が存在するから

$$\begin{pmatrix} e & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e' & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G \qquad \text{これより}$$

$$\begin{pmatrix} e & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & e \end{pmatrix} \in G \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e' & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e-e' & 1 \end{pmatrix} \in G \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e-e' & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n(e-e') & 1 \end{pmatrix}$$

$\in G$ 　　n は任意だから G は non－compact 。

(ii)の証 G_0 を G の finite index な任意の subgroup とする。このとき

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

容易にわかるように任意の $g \in G$ に対して，その適当なべきは G_0 に入る。特にある n とある m が存在して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e-e' & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n(e-e') & 1 \end{pmatrix} \in G_0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & e'-e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & m(e'-e) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_0$$

即ち 0 に等しくない f と f′があって

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f' & 1 \end{pmatrix} \in G_0$$

今 R^2 の部分空間 A が G_0 不変，即ち $G_0 A = A$ を満すとする。M_2を 2×2 実行列の全体とし

$$R = \{ g \in M_2 \mid gA \subset A \}$$

とおく。$R = M_2$ であることを示そう。これが示されれば A は $\{0\}$ か R^2 のいずれかでしかあり得ないことになる。

R は G_0 を含む algebra であるから，

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

故に $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ 　　同様に $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in R$

又 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$$

故に $R = M_2$ 　　Q.E.D

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

定理1.6.2の証明　補題1.6.2のx_nとして $2+\frac{1}{\sigma^2}(q^{\omega}(n)-\lambda)$ を取ればよい。　G.E.D

第I部 あとがき

§1.1　Lieb−Mattis〔19〕にはDysonをはじめ1965年頃までのランダム系に関する物理学者達の研究論文の主なものが収められている。

Burke−Lebowitz〔3〕，松田〔20〕は物理学者達がランダム系をどう考えているかを知る上でよい参考になろう。1969年の数理解析研究所での短期共同研究〝random matrices〟で，筆者が行なったFurstenbergの論文紹介と，松田氏が行なった作用素論的スペクトルと状態密度（スペクトル分布関数）の関係についての問題提起は，その後の日本での研究の進展によい刺戟を与えた。

§1.3，§1.4　この2節の結果は未発表のものであり内容的には上記松田氏の問題提起に答えるものである。証明のideaはしかし連続系を扱ったBenderskii−Pastur〔1〕及びPastur〔27〕の考え方に各々負う所が大きい。作用素H^0はLaplacian $\triangle$の離散類似であるが，大きな違いはH^0が$L^2(Z^\nu)$上の有界作用素であることである。そのためにランダムな係数mやqの有界性に関する何らの制限なしで，この2節の諸定理が成立していることに注意しておく。

ポテンシャルqが定常過程であるようなR^ν上のSchrödinger作用素$-\triangle+q$の固有値に関するエルゴード定理は上記〔1〕，〔27〕の他に，1次元についてはFukushima−Nakao〔9〕，Kotani〔17〕，多次元についてはNakao〔24〕の結果がある。これらについては第II部以下で解説される筈であるが，有界領域での境界条件としては主に固定端のもの（Dirichlet型）が採用されている。定理1.3.1と同様に連続系の場合にもスペクトル分布関数は境界条件のとり方に依存しないことが証明できるであろう。

これについては規則系，即ち $q \equiv 0$ の場合を扱かった Robinson〔30〕，Molchanov−Nobikov〔22〕が参考になる。Schrödinger 作用素に対応する量子系の平衡状態に関する諸量，free energy，pressure，等はその作用素のスペクトル分布関数によって完全に記述される。スペクトル分布関数はこの意味で量子系に対する基本量であり，上記〔30〕，〔22〕も $-\triangle$ のスペクトル分布関数が境界条件の取り方に無関係に定義されることを示した論文であるとみなし得るのである。

§ 1.5 この節の結果（定理 1.5.1 の系）は Fukushima−Nagai−Nakao〔8〕の別証である。§ 1.3 のエルゴード定理に基ずいたこのような簡単な証明法は筆者が Pastur から個人的に suggest されたものである。H^0 が有界であるために，スペクトル分布関数の $\pm\infty$ での挙動は H^0 に影響されず q に完全に支配されるわけである。

これに反し q が非負値をとる場合のスペクトル分布関数の 0 の右近傍での挙動（左近傍では恒等的に 0 に等しい）は H^0 に強く支配され，しかも規則系の場合（§ 1.2，1°）参照）とは著るしく異なった挙動をすることが知られている。もう少し詳しく述べるとそれは H^0 を生成作用素とする Z^ν 上のマルコフ過程の path の値域が時刻と共にどのような割合で増加するかということに密接に関係する。これは Fukushima〔7〕，Nagai〔23〕で部分的に確認されたが，後で解説されるであろう Donsker−Varadahn，Nakao の $-\triangle+q$ に対する最近の研究の水準にまで徹底することが期待される。尚 1 次元連続系に対する 0 の近傍での挙動についてはこれも以下で解説されるであろう Kotani〔17〕の詳しい研究がある。$-\infty$ で漸近挙動については更に Fukushima−Nakao〔9〕，Nakao〔24〕参照。

§ 1.6 Furstenberg の定理に訴えて，ランダム系の generalized eigenfunction が指数的に増大することを最初に示したのは Matsuda−

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

Ishii〔21〕である。ここでは Yoshioka〔31〕の証明を採録した(定理1.6.2とその証明)。 eigenfunction の指数的増大が絶対連続 spectrum の不在を意味することを，間接的にではあるが最初に発見したのは Casher－Lebowitz〔4〕である。ここに述べたように除外集合について Fubini の定理を使った厳密な証明は Ishii〔14〕, Pastur〔28〕による(定理1.6.1とその証明)。

両端が熱槽につながれた規則系に於ける heat flow は両端の温度差のみに関係するのに対して，不規則系に於けるそれは両端の距離の増大に応じて0に減少する。このような物性論的性質が不規則系に於ける eigenfunction の指数的増大(定理1.6.2)に基ずいて導びかれている(〔4〕,〔14〕)。もっと詳しく heat flow が距離に反比例して0に減少することを主張するのが Fourier law であるが，これはまだ確認されていない(〔21〕,〔25〕)。不規則格子振動模型が現象の realistic model かどうかの目安とも考えられる問題ではある。

§1.6の結果は以下に解説されるように，ランダムなポテンシャルを持つ1次元 Schrödinger 作用素に対しても拡張されている(Kotani〔18〕)。ごく最近 Goldseid－Molchanov〔13〕が同じ対象に対して，確率1が点スペクトルが存在し，それは spectrum 内いたる所 dense であること，又確率1で特異連続スペクトルも存在することを主張している。極めて注目すべき結果である。

多次元の場合はランダムスペクトルの構造がどうなっているのか，まだ予測しにくい状態である。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

第 I 部 文献

〔1〕 M.M.Benderskii and L.A.Pastur, On the spectrum of the one-dimensional Schrödinger equation with a random potential, Mat.Sb. 82(1970), 273-284。

〔2〕 Ju.M.Berezanskii, Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators, Translations of Math. Mono。17, AMS, 1968.

〔3〕 T.Burke and J.L.Lebowitz, Note on statistical mechanics of random systems, J.Math. Phys., 9(1968), 1526-1534.

〔4〕 R.J.Casher and J.L.Lebowitz, Heat flow in regular and disordered harmonic chains, J.Math. Phys., 12(1971), 1701-

〔5〕 R.Courant and D Hilbert, Methods of mathematical physics I, Interscience, New York, 1953.

〔6〕 J.L.Doob, Stochastic processes, Wiley, New York, 1953.

〔7〕 M.Fukushima, On the spectral distribution of a disordered system and the range of a random walk, Osaka J.Math., 11(1974), 73-85.

〔8〕 M.Fukushima; H.Nagai and S.Nakao, On an asymptotic property of spectra of a random difference operator, Proc. Japan Acad., 51(1975), 100-102.

〔9〕 M.Fukushima and S.Nakao, On spectra of the Schrödinger operator with a white Gaussian noise potential, Z.Wahrscheinlichkeitstheorie, 37(1977), 267-274.

〔10〕 H.Furstenberg, Noncommuting random products, Trans。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

Amer. Math. Soc., 108(1963), 377−428.

〔11〕 A.Garsia, Topics in almost everywhere convergence, Markham, Chicago, 1970.

〔12〕 I. J. Goldseid, Asymptotics of the product of random matrices depending on a parameter, DAH, 224(1975), 1248−1251.

〔13〕 I. J. Goldseid and S. A. Molchanov, On Mott problem, DAH, 230(1976), 761−764.

〔14〕 K. Ishii, Localization of eigenstates and transport phenomena in the one−dimensional disordered system, Prog, Theo Phys Suppl 53(1973), 77−138.

〔15〕 S. Karlin and J. McGregor, Random walks, Illinois J. Math., 3(1959), 66−81.

〔16〕 T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer, Berlin, 1966.

〔17〕 S. Kotani, On asymptotic behaviour of the spectra of a one−dimensional Hamiltonian with a certain random coefficcent, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 12(1976), 447−492.

〔18〕 S. Kotani, On a growth of solutions of second order linear differential equations with random coefficients, Proc International symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto, 1976.

〔19〕 E.H.Lieb and D.C.Mattis, Mathematical physics in one dimension, Academic press, New York, 1966.

〔20〕 松田博嗣，ランダム系の統計物理学，日本物理学会誌，第26巻，4号(1971)，263−271.

〔21〕 H.Matsuda and K.Ishii, Localization of normal modes and energy transport in the disordered harmonic chain, Prog Theor. Phys. Suppl., 45(1970), 56−86.

〔22〕 S.A.Molchanov and I.D.Nobikov, On Gibbs free energy in quantum system, Trud Moscow Math.Soc., 35(1976), 77−102.

〔23〕 H.Nagai, On an exponential character of the spectral distribution function of a random difference operator, to appear in Osaka J.Math.

〔24〕 S.Nakao, On the spectral distribution of the Schrödinger operator with random potential, to appear in Japanese J.Math., 3(1977)

〔25〕 A.J.O'Connor and J.L.Lebowitz, Heat conduction and sound transmission in isotopically disordered harmonic crystals, J.Math.Phys., 15(1974), 692−703.

〔26〕 V.I.Oseledec, A multiplicatioe ergodic theorem. Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems, Trans.Moscow Math.Soc. 19(1968), 197−231.

〔27〕 L.A.Pastur, Spectra of random self−adjoint aperator, Russian Mathematical Surveys, 28(1973), 1−67.

〔28〕 L.A.Pastur, On spectra of random Jacobi matrices and Schrödinger equations with random potentials, Preprint, Physico−Technical Inst Low Temperatures, Kharkov, 1974.

〔29〕 F.Riesz and B.Sz.Nagy, Functional analysis, Unger, New York, 1955.

〔30〕 D.W.Robinson, The thermodynamic pressure in quantum statistical mechanics, Lecture Notes in Physics, 9(1971),

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

Springer, Berlin

[31] Y. Yoshioka, On the singularity of the spectral measures of a semi-infinite random system, Proc. Japan Acad, 49(1973), 665-668.

[32] D. V. Widder, The Laplace transform, Princeton Univ. Press, 1946.

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

第II部　ランダム係数の1次元2階微分作用素

第2章　ランダム係数1次元2階微分作用素のスペクトル

この章で扱うランダムな作用素は，1次元の主に Schrödinger 型の作用素である。しかもポテンシャルについて各点独立性の条件を仮定する。これによって，固有関数が，ある線型連立確率微分方程式の解になり，従来の方法が適用できる。しかし筆者の知る限りではポテンシャルに対するこのような仮定が，物理的に自然なものであるか否か，明確にはされていないと思う。例えば，ガラスとか，半導体といったランダムな要素が入った物質を数学的に厳密に定式化して，それの一つの理想化された model を記述する方程式が，ランダムポテンシャルをもった Schrödinger方程式になることが証明できれば，一つの体系になるが，今のところそこまでは到達していない。そこで我々は一つの近似を行う。それは多量の粒子が互いに相互作用をしながら存在するのであるが，複雑な系を記述する場合よく行なわれるように，一粒子が独立に random な衝撃を受けながら存在し，全体の系は，それらの独立な粒子の集まりと見なす。従って我々の出発点は例えばランダムなポテンシャルをもった Schrödinger 方程式になる。

そのような model が考えられたもう一つの理由は恐らく，具体的に計算可能であるからであろう。実際我々はこの章で2つの量を計算する。それはスペクトル分布関数（状態分布関数）と基本解の増大度である。前者は定常状態での後者は非定常状態での物質の性質についていくらかの情報を提供してくれる。

第4部では最近著しい進展のあった，点スペクトルの存在に関する，Goldseid－Molchanov－Pastur の研究について述べる。

このようにランダム作用素についての数学的成果が蓄積され不規則性をもつ物質の性質の究明に役立てば幸いである。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

§ 2.1. 振動定理

この節では，一般化された微分作用素 $\frac{d\varphi^+ - \varphi dQ}{dM}$ についてこの固有関数と零点の数に関する振動定理を述べを。完全な証明は Kotani〔1〕にあるが，M，Q が滑らかな場合にはよく知られた定理でもあり，定義と結果のみを述べるに止める。

〔a，b〕を有限な閉区間とする。$f \in V[a,b]$ を〔a，b〕上の有界変動関数 $f(x)$ と，2つの複素数 $\{f(a-0), f(b+0)\}$ の組と定義し，f に対して〔a，b〕上の複素測度 df を

$$\begin{cases} df & = \text{通常の}(a,b)\text{上の測度} \\ df(a) = f(a+0) - f(a-0), \\ df(b) = f(b+0) - f(b-0)。\end{cases}$$

と定義する。このとき任意の $f \in L^1(|dQ|, [a,b])$ と $Q \in V[a,b]$ に対して

$$g(x) = \int_{[a,x]} f(y)\,dQ(y) \quad \in V[a,b]$$

を，$g(a-0) = 0$，$g(b+0) = \int_{[a,b]} f(y)\,dQ(y)$ とおくことにより定義できることを注意しておく。

点 x における右（左）微分をそれぞれ $f^+(x)$（$f^-(x)$）で表わす。

以下〔a,b〕上の非負測度 dM と，実測度 dQ が与えられているとする。

$D[a,b] = \{f \in C[a,b]\,;\ f^+ \in V[a,b]$ かつ $df^+ - f\,dQ$ は dM に関して絶対連続でその density は $L^2(dM, [a,b])$ に属す。$\}$

$$D_{\alpha,\beta}[a,b] = \left\{ \begin{array}{l} f \in D[a,b]\,;\ f(a)\cos\alpha + f^+(a-0)\sin\alpha = 0, \\ f(b)\cos\beta + f^+(b+0)\sin\beta = 0 \end{array} \right\}$$

とおく。そして $f \in D[a,b]$ に対して作用素 L を

$$Lf = -\frac{df^+ - f\,dQ}{dM}$$

と定義する。M，Q が全く一般では，L が $D_{\alpha,\beta}[a,b]$ を定義域とする $L^2(dM,[a,b])$ の中での自己共役作用素となることは保証されない。そこで関数 $\varphi_\alpha(x\ \lambda)$ を次の方程式の解として定義する。

$$\varphi_\alpha(x,\lambda)=-\sin\alpha+(x-a)\cos\alpha+\int_{[a,x]}(x-y)\varphi_\alpha(y,\lambda)\,dQ(y)$$
$$-\lambda\int_{[a,x]}(x-y)\varphi_\alpha(y,\lambda)\,dM(y)$$

このとき次のことは容易に分る。

$$\begin{cases}\varphi_\alpha(\cdot,\lambda)\in V[a,b] & \text{for}\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}\,, \\ L\varphi=\lambda\varphi\quad,\quad\varphi_\alpha(a)=-\sin\alpha, & \varphi_\alpha^+(a-0)=\cos\alpha\end{cases}$$

そこで，dMの$[a,b]$内での台を F_M とし，整関数 $\triangle_{\alpha,\beta}$を

$$\triangle_{\alpha,\beta}(\lambda)=\varphi_\alpha(b,\lambda)\cos\beta+\varphi_\alpha^+(b+0,\lambda)\sin\beta$$

と定義する。もし，$(L,D_{\alpha,\beta})$が，自己共役作用素になっているならば$\triangle_{\alpha,\beta}$の零点と固有値が一対一に対応するはずである。しかし，$\triangle_{\alpha,\beta}$は恒等的に零になることもあり，また零点をもたないこともあり得る。このことに関して次の定理がある。

定理(**2.1.1**)(Kotani[1]) $\triangle_{\alpha,\beta}\equiv 0$

$\Longleftrightarrow$ F_M は有限集合であり，次の条件を同時にみたす nontrivial な解 $\varphi(x)$ が存在する。

$$(2.1.1)\qquad\begin{cases}d\varphi^+=\varphi\,dQ & \text{in}\quad[a,b] \\ \varphi(a)\cos\alpha+\varphi^+(a-0)\sin\alpha=0 & \\ \varphi(b)\cos\beta+\varphi^+(b+0)\sin\beta=0 & \\ \varphi(x)=0 & \text{for}\quad\forall x\in F_M\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

<u>定理（2.1.2）</u>（Kotani〔1〕）　$\triangle_{\alpha,\beta}$ が零点をもたない。

$\Longleftrightarrow$ F_M は有限集合であり，次の条件と同時にみたす解 $\varphi(x)$ が存在する。

$$(2.1.2)\quad \begin{cases} d\varphi^{+}=\varphi\, dQ \quad \text{in } [a,b] \\ \varphi(a)\cos\alpha+\varphi^{+}(a-0)\sin\alpha \text{ と } \varphi(b)\cos\beta+\varphi^{+}(b+o)\sin\beta \\ \text{のどちらかは零で，どちらかは零でない。} \\ \varphi(x)=0 \quad \text{for} \quad {}^{\forall}x\in F_M \end{cases}$$

興味があるのは，$\triangle_{\alpha,\beta}$ が少くとも一個以上の zero 点をもつ nontrivial な整関数の場合であるが，このとき，$(L, D_{\alpha,\beta})$ は $L^2(dM,[a,b])$ で自己共役作用素となり，$\triangle_{\alpha,\beta}$ の zero 点と，固有値とは一致する。そこで $\triangle_{\alpha,\beta}$ の zero 点全体を $\{\lambda_n\}$ とする。$\{\lambda_n\}$ が重複しないことは通常の場合と同様である。この時次の定理が成立する。

<u>定理（2.1.3）</u>（Kotani〔1〕）　$\triangle_{\alpha,\beta}$ が少くとも一個の zero 点をもつ，nontrivial な整関数とする。$\{\lambda_n\}$ をその零点全体で大きさの順に並べたものである。N_n を固有関数 $\varphi_\alpha(x,\lambda_n)$ の zero点の数とするとき

(1)　$\{\lambda_n\}$ の最小値 λ_0 が存在する。

(2)　$N_n = n + \#\{x\in[a,b] ; \varphi_\alpha(x,\lambda_0)=0\}$

この定理の系として

<u>系（2.1.1）</u>　定理（2.2.3）と同じ条件の下で，

$$\#\{n ; \lambda_n \leqq \lambda\} = \varepsilon(\lambda) + \#\{x\in[a,b] ; \varphi_\alpha(x,\lambda)=0\} - \#\{x\in[a,b] ; \varphi_\alpha(x,\lambda_0)=0\}$$

となる。但し ε は $|\varepsilon(\lambda)| \leqq 2$ となる整数である。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

一般に $\varphi_\alpha(x, \lambda_0)$ の zero 点の数は分らないが，$dM(x)=dx$ 又は $dQ(x)\geqq 0$ のとき，その数は $(\inf F_M, \sup F_M)$ の中では zero である。以後扱うのはすべてこの場合であるから問題はない。

§2.2 ある Ricatti 方程式の解のエルゴート性

$\{Q(x)_{x\geqq 0}\}$ を時間的に一様な Lévy 過程でその特性関数 $\psi(\xi)$ が Lévy 測度 $n(du)$ により

$$\psi(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\xi u}-1)\,n(du)$$

と表現されるとする。但し n は

$$(2.2.1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\{1\wedge|u|\}\,n(du)<\infty$$

をみたすとする。条件(2.2.1)と，process $\{Q(x)\}$ が確率 1 で有限区間で有界変動であることは同値である。§2.1 で定義したように $dM=dx$，として，微分作用素 L を

$$L\varphi(x)=-\frac{d\varphi^+(x)-\varphi(x)dQ(x)}{dx}$$

と定義する。$\varphi(x)$ を次の方程式の解とする。

$$L\varphi=\lambda\varphi,\qquad \varphi(0)=-\sin\alpha,\qquad \varphi^-(0)=\cos\alpha$$

ここで $\xi(x)=\varphi(x)$，$\eta(x)=\varphi^+(x)$，$\zeta(x)=(\xi(x), \eta(x))$ とおくと，$\zeta(x)$ は次の確率微分方程式をみたす。

$$(2.2.2)\qquad \begin{cases} d\xi(x)=\eta(x)\,dx \\ d\eta(x)=-\lambda\xi(x)\,dx+\xi(x)\,dQ(x) \end{cases}$$

一般性を失うことなく，$Q(x)$ は原点で連続としてよい。

従って $\zeta(x)$ の初期値は $\zeta(0)=(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ である。ζ を一

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

次元化するため次の変換を導入する。

$$G : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$$

$$G(\zeta) = -\frac{\eta}{\xi}, \quad \zeta = (\xi, \eta)$$

(2.2.4)の初期条件ζ_i($i=1,2$)に対応する解を$\zeta(x, \zeta_i)$とすると解の一意性と線型性より，$G(\zeta_1)=G(\zeta_2)$ならば$G(\zeta(x,\zeta_1)) = G(\zeta(x,\zeta_2))$がすべての$x \geqq 0$について成立する。そこで(2.2.4)で定義されるprocess $\zeta(x)$により，process$\{Z(x)\}$を$Z(x)=G(\zeta(x))$で定義すると$\{Z(x)\}$は強マルコフ過程となる。マルコフ時刻τ_1，τ_nを

$$\tau_1 = \inf\{x > 0 ; Z(x) = \infty\}$$

$$\tau_n = \inf\{x > \tau_{n-1} ; Z(x) = \infty\}$$

と定義する。$C_b(\mathbb{R}^1)$を$\mathbb{R}^1$上で有界連続な関数全体とする。微分積分作用素Aを　$f, f' \in C_b(\mathbb{R}^1)$に対して

$$(2.2.3) \qquad Af(z) = (z^2+\lambda)\frac{df}{dz} + \int_{-\infty}^{\infty}\{f(z-u)-f(z)\}n(du)\}$$

と定義すると，$\{Z(x)\}$に対するDynkinの公式より

$$(2.2.4) \qquad E_z\{f(z(\tau_1 \wedge n))\} - f(z) = E_z\{\int_0^{\tau_1 \wedge n}(Af)(z(x))dx\}$$

$$\text{for} \quad {}^\forall n > 0, \quad {}^\forall z \in \mathbb{R}^1, \quad {}^\forall f, f^1 \in C_b(\mathbb{R}^1),$$

を得る。これは$\{Z(x)\}$が$x < \tau_1$までは，$dQ(x)$を係数とするRicatti方程式

$$dz(x) = (z(x)^2 + \lambda)dx - dQ(x)$$

をみたすことより分る。この節では$\{Z(x)\}$のエルゴート性を証明する。
証明の技術的な理由から以後$\lambda > 0$と仮定する。$\lambda < 0$の場合もLévy 測度$n(du)$が

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$n([0,\infty))=0 \quad \text{かつ} \quad \int_{-\infty}^{0} n(du)<\infty$$

をみたせば以下の議論で形式的に $\lambda<0$ とした公式がそのまま成立するが，それには触れない。

補題（2.2.1）　$n(du)$ を $\int_{-\infty}^{\infty}\{1\wedge|u|\}\,n(du)<\infty$ をみたす測度とする。このとき各固定された $\lambda>0$ に対して評価

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(du)\left|\int_{z}^{z-u}\frac{dy}{y^2+\lambda}\right| = O\Big(|z|^{-\frac{3}{2}}+\int_{|u|>\sqrt{|z|}} n(du)\Big)$$

$$\text{as} \quad |z|\to\infty,$$

が成立する。

証明　まず $z\to+\infty$ の場合を考える。

$$\int_{-\infty}^{0} n(du)\int_{z}^{z-u}\frac{dy}{y^2+\lambda} = \int_{-\infty}^{-\sqrt{z}} n(du)\int_{z}^{z-u}\frac{dy}{y^2+\lambda} + \int_{-\sqrt{z}}^{-1} n(du)\int_{z}^{z-u}\frac{dy}{y^2+\lambda}$$

$$+\int_{-1}^{0} n(du)\int_{z}^{z-u}\frac{dy}{y^2+\lambda}$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{-\sqrt{z}} n(du)\int_{z}^{\infty}\frac{dy}{y^2+\lambda} + \int_{-\infty}^{-1} n(du)\int_{z}^{z+\sqrt{z}}\frac{dy}{y^2+\lambda} + \frac{1}{z^2+\lambda}\int_{-1}^{0}|u|\,n(du)$$

$$= O\Big(z^{-\frac{3}{2}}+\int_{-\infty}^{-\sqrt{z}} n(du)\Big)$$

また

$$\int_{0}^{\infty} n(du)\int_{z-u}^{z}\frac{dy}{y^2+\lambda} = \int_{0}^{1} n(du)\int_{z-u}^{z}\frac{dy}{y^2+\lambda} + \int_{1}^{z} n(du)\int_{z-u}^{z}\frac{dy}{y^2+\lambda}$$

$$+\int_{\sqrt{z}}^{\infty} n(du)\int_{z-u}^{z}\frac{dy}{y^2+\lambda}$$

$$= O\Big(z^{-\frac{3}{2}}+\int_{\sqrt{z}}^{\infty} n(du)\Big)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

となり，$z\to+\infty$のときは上の評価は正しい。$z\to-\infty$のときは $\overset{\vee}{n}(du)=(-du)$ とおくことにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(du)\int_{-z}^{-z-u}\frac{dy}{y^2+\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty}\overset{\vee}{n}(du)\int_{z}^{z-u}\frac{dy}{y^2+\lambda}$$

となるから，上の議論が使えてやはり目的の評価を得る。　　　　Q.E.D

補題（2.2.2）　nは前の補題と同じ条件をみたすとする。$C_b(\mathbb{R}^1)$に sup ノルムを入れて Banach 空間とみなす。このとき $C_b(\mathbb{R}^1)$ 上の積分作用素Nを

$$Ng(z)=\int_{-\infty}^{\infty} n(du)\int_{z}^{z-u}\frac{g(y)dy}{y^2+\lambda}$$

で定義すると，方程式

$$(2.2.5)\qquad g(z)+Ng(z)=h(z)$$

は $h\in C_b(\mathbb{R}^1)$に対して$C_b(\mathbb{R}^1)$ の中で唯一の解をもつ。

証明

1°）　Nは $C_b(\mathbb{R}^1)$ の中で完全連続である。

これを示すため，Bを $C_b(\mathbb{R}^1)$の中の単位球とする。補題（2.2.1）により，$g\in B$に対して一様に評価。

$$|Ng(z)|\leqq\int_{-\infty}^{\infty} n(du)\left|\int_{z}^{z-u}\frac{dy}{y^2+\lambda}\right|=O\left\{|z|^{-\frac{3}{2}}+\int_{|u|\geqq\sqrt{|z|}} n(du)\right\}$$

を得，従って N(B)は $|z|\to\infty$ で一様に zero に近づく。故に N(B)の相対 compact 性を言うためには Ascoli−Arzela の定理により，同程度連続性を言えばよい。そのために

$$\delta(z,z_0;u)=\sup_{g\in B}\left|\int_{z}^{z-u}\frac{g(y)}{y^2+\lambda}dy-\int_{z_0}^{z_0-u}\frac{g(y)}{y^2+\lambda}dy\right|$$

とおくと，次の評価は容易に得ることができる。

$$\begin{cases} \delta(z, z_0 ; u) \leqq 2\min\left\{\dfrac{|u|}{\lambda},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dy}{y^2+\lambda}\right\}, \\ \delta(z, z_0 ; u) \leqq \dfrac{2}{\lambda}\,|z-z_0| \end{cases}$$

従って Lebesgue の収束定理により

$$\sup_{g\in B} |Ng(z)-Ng(z_0)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z, z_0; u)\, n(du) \to 0$$

$$\text{as} \quad z \to z_0,$$

を得る。従ってNは完全連続である。

2°) $n((-\infty, 0]) = 0$ の場合の可解性。

$$\begin{cases} g_0(z) = h(z) \\ g_n(z) = -Ng_{n-1}(z) \end{cases}$$

と逐次定義してゆくと，

$$-Ng(z) = -\int_0^{\infty} n(du) \int_z^{z-u} \frac{g(y)}{y^2+\lambda}\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} n(du) \int_{z-u}^{z} \frac{g(y)}{y^2+\lambda}\, dy$$

であるから逐次近似法が適用できて，$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ が収束して方程式 (2.2.5) は unique に可解である。

3°) n が一般のときにも unique に可解である。

これを示すためにまず "$E_z(\tau_1) < \infty$ for $^\forall z \in \mathbb{R}^1$" を言う。

$$n_+(du) = \begin{cases} n(du) & du \subset (0, \infty) \\ 0 & du \subset (-\infty, 0] \end{cases}$$

として n_+ に対応する Lévy process を $\{Z_+(x)\}$ とすると比較定理により，　$x<\tau_1$ である限り

$$z_+(x) \leqq z(x) \qquad \text{a.s.}$$

である。従って，$\tau_1^+ = \inf\{x>0\ ;\ z_+(x)=\infty\}$ とおくと，

$$\tau_1 \leqq \tau_1^+ \qquad \text{a.s.}$$

従って，$E_z(\tau_1^+)<\infty$ を示せばよい。

そこで，$h(z)\equiv -1$ に対応する N_+（$n=n_+$ のときの作用素）の方程式

$$g + N_+ g = h$$

の解を $g(z)\in C_b(\mathcal{R}^1)$ とし

$$f(z) = -\int_z^{\infty} \frac{g(y)}{y^2+\lambda}\,dy \tag{2.2.6}$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned}(z^2+\lambda)\frac{df}{dz} &+ \int_{-\infty}^{\infty}\{f(z-u)-f(z)\}\,n(du)\\ &= g(z) + \int_{-\infty}^{\infty} n(du)\int_z^{z-u}\frac{gy}{y^2+\lambda}\,dy\\ &= Ng(z) = -1\end{aligned}$$

となるが，Dynkin の公式（2.2.4）より

$$\begin{aligned}E_z\{f(z(\tau_1^+\wedge n))\} - f(z) &= E_z\left\{\int_0^{\tau_1^+\wedge n} Af(z(x))\,dx\right\}\\ &= -E_z(\tau_1^+\wedge n)\end{aligned}$$

となる。f は有界関数であるから，$n\to\infty$ として

$$E_z(\tau_1^+)<\infty$$

が従う。従って $E_z(\tau_1)<\infty$ である。

一般のnのときの可解性は 1°)よりNが完全連続作用素であるから

$Ker(I+N)=\{0\}$と同値である。そこで $g\in Ker(I+N)$とする。(2.2.6)で f(z)を定義すると前と同様に

$$E_z\{f(z(\tau_1\wedge n))\}-f(z)=E_z\{\int_0^{\tau_1\wedge n}Af(z(x))dx\}$$
$$=0 \quad (\because\ g\in Ker(I+N))$$
$$\therefore \qquad f(z)=E_z\{f(z(\tau_1\wedge n))\}$$

$n\to\infty$とすれば，$\tau_1<\infty$ a.s.であるから，$z(\tau_1-0)=+\infty$より

$$f(z)=E_z(f(+\infty))=0$$

を得る。従って，$Ker(I+N)=\{0\}$ である。 Q.E.D.

補題(**2.2.3**) 任意の $z\in\mathbb{R}^1\cup\{\infty\}$ と $\lambda>0$ に対して $E_z(\tau_1)<\infty$ であり，$f(z)=E_z(\tau_1)$は次の方程式の一意的な解である。

$$(2.2.7)\quad \begin{cases} (z^2+\lambda)\dfrac{df}{dz}+\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\{f(z-u)-f(z)\}n(du)=-1 \\ f(+\infty)=0 \quad , \qquad |f(-\infty)|<\infty \end{cases}$$

証明 (2.2.7)が一意的に解けることは補題(2.2.2)で分っている。その解を f(z)としたとき $f(z)=E_z(\tau_1)$となることは，既にその補題の議論で終っている。$z(0)=z$のときのτ_1を$\tau_1(z)$と書くと，$z\downarrow-\infty$のとき$\tau_1(z)$は単調増大であるから

$$E_\infty(\tau_1)=\lim_{z\downarrow-\infty}E_z(\tau_1)=f(-\infty)<\infty,$$

となることも分る。 Q.E.D.

さて，目標の定理を述べる。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

定理（2.2.1） 任意の固定された $\lambda>0$ に対して，$\{Z(x)\}$ はエルゴート性をもつ。即ち，任意の $\varphi\in C_b(\mathbb{R}^1)$ に対して

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(Z(x))\,dx=\frac{1}{E_\infty(\tau_1)}E_\infty\left\{\int_0^{\tau_1}\varphi(Z(x))\,dx\right\} \tag{2.2.8}$$

がすべての P_z に関して確率1で成立する。更にその不変測度 $T(z)\,dz$ は次の方程式の解として一意的に決まる。

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dz}\left\{(z^2+\lambda)T(z)\right\}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left\{T(z+u)-T(z)\right\}n(du)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}T(z)\,dz=1\end{cases} \tag{2.2.9}$$

証明　§2での一般的な考察より $Z(x)$ は各 τ_n で連続で $Z(\tau_n)=\infty$ であるから強マルコフ性より

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}\varphi(Z(x))\,dx\ ,\qquad n=1,2,\cdots$$

すべての P_z に関して独立で同じ分布

$$P_\infty\left\{\int_0^{\tau_1}\varphi(Z(x))\,dx<a\right\}$$

をもつ。また平均が有限であることは $E_\infty(\tau_1)<\infty$ より従う。故に強大数の法則により

$$\begin{aligned}\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(Z(x))\,dx&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n}\varphi(Z(x))\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tau_n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\varphi(Z(x))\,dx\\&=\frac{1}{E_\infty(\tau_1)}E_\infty\left\{\int_0^{\tau_1}\varphi(Z(x))\,dx\right\}\end{aligned}$$

となる。即ち（2.2.8）が示された。そこで g を補題（2.2.2）で保証された φ に対するuniqueな解としよう。即ち

$$g(z)+\int_{-\infty}^{\infty}n(du)\int_z^{z-u}\frac{g(y)}{y^2+\lambda}\,dy=-\varphi(z)$$

$h(z)=-\int_z^\infty \frac{g(y)}{y^2+\lambda}dy$ とおくと，補題（2.2.2）と同様にして

$$h(z)=E_z\left\{\int_0^{\tau_1}\varphi(Z(x))dx\right\}$$

を得る。そこで，$S(-z)=-\frac{d}{dz}E_z(\tau_1)$ とおくと（2.2.7）により

$$(z^2+\lambda)S(z)+\int_{-\infty}^{\infty}n(du)\int_z^{z+u}S(y)dy=1$$

となる。次の計算を正当化するのは容易である。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)S(z)dz &= -\int_{-\infty}^{\infty}(z^2+\lambda)\frac{dh}{dz}S(z)dz\\ &\quad -\int_{-\infty}^{\infty}S(z)dz\int_{-\infty}^{\infty}\{h(z-u)-h(z)\}n(du)\\ &= h(-\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}h(z)dz\left\{\frac{d}{dz}(z^2+\lambda)S(z)\right.\\ &\quad \left.-\int_{-\infty}^{\infty}(S(z+u)-S(z))n(du)\right\}\\ &= h(-\infty)=E_\infty\left\{\int_0^{\tau_1}\varphi(z(x))dx\right\}\end{aligned}$$

従って $T(z)=\frac{S(z)}{E_\infty(\tau_1)}$ となり（2.2.9）を満す。　Q.E.D.

$N(\lambda, I)$ は，作用素 L を区間 I で適当な境界条件付きで考えたときの λ を超えない固有値の数としよう。このとき次のことが成立する。

系（2.2.1）　（Rice formula）任意の $\lambda>0$ に対して

（2.2.10）　$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\ell}N(\lambda,[0,\ell])=\lim_{|z|\to\infty}z^2T(z)$

a.s　P_z。（注　右辺は〔0，ℓ〕での境界条件に依存しない。）

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

証明　系（2.1.1）より

$$\begin{cases} N(\lambda,[0,\ell])=\#\{n;\tau_n\leqq\ell\}+\varepsilon(\lambda) \\ |\varepsilon(\lambda)|\leqq 2 \end{cases}$$

である。従って強大数の法則により

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\ell}N(\lambda,[0,\ell])=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tau_n}=\frac{1}{E_\infty(\tau_1)}\quad \text{a.s. } P_z.$$

$T(z)=\dfrac{S(z)}{E_\infty(\tau_1)}$ と，　$z^2S(z)\to 1$ as $|z|\to\infty$ に注意すれば容易に（2.2.10）を得る。

定義（2.2.1）　$\lim\limits_{\ell\to\infty}\dfrac{1}{\ell}N(\lambda,[0,\ell])$ を L のスペクトル分布関数と呼び $\mathcal{H}(\lambda)$ と表わす。

系（2.2.2）　（Frisch－Lloyd［2］）

$$\int_{|u|>1}\log|u|\,n(du)<\infty$$

と仮定する。このとき

$$\varphi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-isz}\,T(z)\,dz$$

は次の方程式の unique な解である。

$$(2.2.11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi(s)}{ds^2}=\left\{\lambda-\dfrac{\psi(s)}{is}\right\}\varphi(s) \qquad \text{in}\quad \mathbb{R}^1\setminus\{0\} \\ \varphi(\pm\infty)=0\quad,\quad \varphi(0)=1 \end{cases}$$

しかも

$$(2.2.12)\qquad \mathcal{H}(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\,\frac{d\varphi}{ds}(0+)$$

である。但し　$\psi(s)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{isu}-1)\,n(du)$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

証明　T(z) は可積分であるから(2.2.9)で超関数の意味で Fourier 変換すると

$$is\left(-\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\lambda\varphi(s)\right)=\psi(s)\varphi(s)$$

を得る。$\varphi(\pm\infty)=0$ は Riemann−Lebesgue の定理により，$\varphi(0)=1$ は T(z) の定義による。他方 n(du) に対する仮定より

$$\int_{|z|\geq 1}\frac{dz}{|z|}\int_{|u|\geq\sqrt{|z|}}n(du)<\infty$$

となるから $|T(z)|\leq\dfrac{C}{z^2+\lambda}$ に注意すると

$$(2.2.13)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|z|}{z^2+\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}n(du)\left|\int_z^{z+u}T(x)dx\right|<\infty$$

となる。ところが $\mathcal{H}(\lambda)$ の定義により，T(z) は

$$T(z)=\frac{\mathcal{H}(\lambda)}{z^2+\lambda}+\frac{1}{z^2+\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}n(du)\int_z^{z+u}T(x)dx$$

をみたす。両辺を Fourier 変換すると

$$\varphi(s)=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\mathcal{H}(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}|s|}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isz}}{z^2+\lambda}dz\int_{-\infty}^{\infty}n(du)\int_z^{z+u}T(x)dx$$

を得る。(2.2.13)に注意して両辺を微分すれば $s>0$ のとき

$$\frac{d\varphi}{ds}=-\pi\mathcal{H}(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}s}-i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{-isz}}{z^2+\lambda}dz\int_{-\infty}^{\infty}n(du)\int_z^{z+u}T(x)dx$$

となる。ここで T(x) は実数値であることに注意すれば

$$\mathrm{Re}\frac{d\varphi}{ds}(0+)=-\pi\mathcal{H}(\lambda)$$

Q.E.D.

§ 2.3　$n((-\infty,0])=0$ のとき，解 $\varphi(s)$ を上半平面に解析接続する

前節で $\{Z(x)\}$ の invariant measure $T(z)dz$ の Fourier 変換 $\varphi(s)$

は，なじみ深い方程式

$$(2.3.1)\qquad \varphi''(s)=\lambda\varphi(s)-V(s)\varphi(s)$$

但し $V(s)=\frac{1}{is}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{ius}-1)n(du)$，をみたすことが分り，更に目的の $\mathcal{H}(\lambda)$ は

$$\mathcal{H}(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\;\varphi'(0+)$$

で求められることが分った。第I部と同様に我々もポテンシャルが非負（i.e $dQ\geqq 0$）のときの $\mathcal{H}(\lambda)$ の $\lambda\downarrow 0$ での漸近的挙動に興味を持っている。従って以下，$n((-\infty,0])=0$ を仮定する。このとき上の $V(s)$ は

$$(2.3.2)\qquad V(s)=\frac{1}{is}\int_{0}^{\infty}(e^{ius}-1)n(du),$$

となる。方程式（2.3.1）の扱いにくい点は $V(s)$ が複素数値であることである。ところが（2.3.2）のような場合には $V(s)$ は上半平面で正則となり，かつ虚数軸では正の実数値をとり，$s\to\infty$ では0に減少する。このことに注目して我々は（2.3.1）の解 $\varphi(s)$ を虚数軸まで解析接続して，$V(s)$ をポンシャルと見ることにより散乱理論でよく使われる turning point 付近での解の挙動の既知の事実を応用することにする。

まず解 $\varphi(s)$ を解析接続する際用いる補題として

<u>補題（**2.3.1**）</u> $V(z)$ を上半平面 $\mathbb{C}_+$ で正則で次の条件をみたすとする。

(1) $\int_{1}^{\infty}\left|\frac{dV}{dz}(re^{i\theta})\right|dr<\infty \quad \text{for}\quad {}^{\forall}0<\theta<\pi$

(2) $V(iy)\in\mathbb{R}\quad \text{for}\quad y>0$

(3) $\sup\left\{|V(z)|\;;\;|z|\geqq M,\ \theta\leqq\arg z\leqq\pi-\theta\right\}\to 0$
as $M\to\infty$ for ${}^{\forall}0<\theta<\pi/2$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

このとき $^\forall\lambda>0$ に対して，次の微分方程式

$$g''(z)=\{\lambda-V(z)\}g(z)$$

は，次の条件をみたす unique な一次独立解 $g_\pm(z)$ を持つ。

$$(2.3.3)\quad \begin{array}{ll} g_\pm(z)\sim\exp\left\{\pm\int_{z_0}^{z}(\lambda-V(s))^{\frac{1}{2}}ds\right\} & \text{as } z\to\infty \\ g_\pm'(z)\sim\pm\sqrt{\lambda}\exp\left\{\pm\int_{z_0}^{z}(\lambda-V(s))^{\frac{1}{2}}ds\right\} & \text{in } \mathbb{C} \end{array}$$

但し，$(\lambda-V(s))^{\frac{1}{2}}$ の分枝としては，$s\to\infty$ のとき $\sqrt{\lambda}$ に収束するものを選び，z_0 は $\mathbb{C}_+$ の元で $|z_0|$ は $^\forall|z|\geqq|z_0|$

$$\lambda-V(z)\neq 0$$

となるほど十分大きいとする。

証明は，R.Bellman〔3〕(Th.8, p50) を参照せよ。

$V(z)=\int_0^\infty e^{iuz}du\int_u^\infty n(dt)$ であるから

$$\int_1^\infty\left|\frac{dV}{dz}(re^{i\theta})\right|dr\leqq\frac{1}{\sin\theta}\int_0^\infty\exp(-u\sin\theta)du\int_u^\infty n(dt)<\infty$$

となる。なぜなら $\int_0^1 du\int_u^\infty n(dt)<\infty$ であるからである。
従って $V(z)$ は補題(2.3.1)の条件(1),(2),(3)をすべてみたす。
そこで

$$U(x)=V(ix)=\frac{1}{x}\int_0^\infty(1-e^{-ux})n(du)$$

とおくと

<u>定理(**2.3.1**)</u> $\int_1^\infty\log u\,n(du)<\infty$ と仮定する。このとき

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

(2.3.4) $$\mathcal{H}(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi |f(0, \lambda)|^2}$$

となる。但し，f_-は次の方程式の unique な解である。

(2.3.5) $$\begin{cases} f_-''(x) = \{-\lambda + U(x)\} f_-(x) \\ f_-(x) \sim \exp\left\{-i\int_{x_0}^{x} (\lambda - U(y))^{\frac{1}{2}} dy\right\} \quad \text{as} \quad x \to \infty \end{cases}$$

但し，　x_0 は $\lambda - U(x) > 0$ となる正の数。

<u>証明</u>　$g_\pm$は一次独立であるから，a, b が存在して

$$\varphi(z) = a\, g_+(z) + b g_-(z)$$

と表わされる。評価(2.3.3)より，$g_\pm$は虚数軸で有界である。
従ってφもその上で有界である。一方φは(2.2.11)より実軸上でも有界である。ところが $g_\pm$ は $\mathbb{C}_+$で指数型の正則関数であるから，φもそうである。したがって Phragmén − Lindelöf の定理によりφは $\mathbb{C}_+$で有界である。一方 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を任意に固定すると，g_+ は指数的に増大し，g_- は指数的に減少する。従って $a = 0$ でなければならない。

$$\therefore \quad \varphi(z) = b g_-(z)$$

U(x)は原点で正則でないから，$\varphi(z)$は原点で irregular となるかもしれない。しかしながら条件 $\int_1^\infty \log u\, n(du) < \infty$ により

$$\int_{0+} |U(re^{i\theta})| dr < \infty \qquad \text{for} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

となるからこの可能性はなくなる。即ち，

(2.3.6) $$\varphi'(0+) = \varphi'(i0+)$$

となる。そこで $f_-(x) = g_-(ix)$とおく。$\varphi(0) = 1$ より

$$(2.3.7)\qquad \varphi(z)=\frac{f_-(-iz)}{f_-(0)},\qquad \varphi'(z)=-i\,\frac{f_-'(-iz)}{f_-(0)}$$

となる。定義により f_- は次の方程式の解である。

$$(2.3.8)\quad \begin{cases} f_-''(x)=\{-\lambda+U(x)\}\,f_-(x) \\ f_-(x)\sim\exp\left\{-i\int_{x_0}^{x}(\lambda-U(y))^{\frac{1}{2}}\,dy\right\} & \text{a.s}\quad x\to\infty \\ f_-'(x)\sim -i\sqrt{\lambda}\,\exp\left\{-i\int_{x_0}^{x}(\lambda-U(y))^{\frac{1}{2}}\,dy\right\} \end{cases}$$

$U(x)$ は実数値であるから $\overline{f_-}$ も(2.3.8)で共役な漸近的性質をもった解になる。従って Wronskian の不変性により

(2.3.9)

$$f_-'(0+)\,\overline{f_-(0)}-f_-(0)\,\overline{f_-'(0+)}=f_-'(x)\,\overline{f_-(x)}-f_-(x)\,\overline{f_-'(x)}$$

$$=-2i\sqrt{\lambda}$$

を得る。(2.3.6),(2.3.7),(2.3.9)を合わせると

$$\mathcal{n}(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\,\varphi'(0+)=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\,\varphi'(i0+)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\frac{f_-'(0+)}{f_-(0)}$$

$$=-\frac{f_-'(0+)\,\overline{f_-(0)}-\overline{f_-'(0+)}\,f_-(0)}{2i\pi\,|f_-(0)|^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\,|f(0)|^2}$$

<u>Q.E.D.</u>

§ 2.4 スペクトル分布関数の0での漸近的挙動

前節で Lévy 測度 $n(du)$ の台が $[0,\infty)$ に含まれている場合には問題は

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

Schrödinger型の方程式

$$(2.4.1) \qquad f''(x)=\{-\lambda+U(x)\}f(x) \quad ,$$

$$U(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty (1-e^{-xu})n(du)$$

に帰着された。この節での目標は $\mathcal{H}(\lambda)$ の $\lambda\downarrow 0$ での漸近的挙動を明らかにすることである。我々の出発点は定理(2.3.1)の公式(2.3.4)である。$f_-(x,\lambda)$は(2.4.1)の解であるが，$x\to+\infty$での漸近的挙動により一意的な解として決まっている。しかし，$\mathcal{H}(\lambda)$ は $f_-(0,\lambda)$ で表現されている。従って $\lambda\downarrow 0$ のときを見るためには f_-の $x\to\infty$ での増大度を保ちながら，うまく変換してλの原点での特異性を顕在化させなければならない。このようなことは一般の $U(x)$に対しては無理であるが，我々の $U(x)$は幸いにも巾型の関数 $x^{-\alpha}$と非常に良く似たふるまいをするので既に R.E.Langerによって開発されている手法を適用することができる。それを E.C.Titchmash [4] p.356～ に従って述べる。

$U(+\infty)=0$ で $U(x)$ は狭義単調減少関数であるから $U(x)$ の逆関数 $x(\lambda)$ で $0<\lambda<U(0+)$ で定義されたものが存在する。そこで新しい独立変数 $\zeta(x)$を次の関係式で定義する。

$$\zeta(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{x(\lambda)}^{x}(\lambda-U(y))^{\frac{1}{2}}\,dy & \text{for} \quad x\geqq x(\lambda)\\[2ex] \displaystyle e^{-\frac{3}{2}\pi i}\int_{x}^{x(\lambda)}(U(y)-\lambda)^{\frac{1}{2}}\,dy & \text{for} \quad 0<x<x(\lambda)\end{cases}$$

そして

$$p(x)=-\frac{1}{4}\frac{U''(x)}{(\lambda-U(x))^2}-\frac{5}{16}\frac{U'(x)^2}{(\lambda-U(x))^3}+\frac{5}{36}\frac{1}{\zeta(x)^2}$$

$$\eta_0(\zeta)=\sqrt{\pi\zeta}\,H_\nu^{(2)}(\zeta)\ , \qquad \eta_1(\zeta)=\sqrt{\pi\zeta}\,H_\nu^{(1)}(\zeta)$$

とおく。但し $\nu=\frac{1}{3}$ で，$H_{\nu}^{(i)}$ は Hankel 関数である。グリーン関数Gを

$$G(\zeta,\theta)=\frac{1}{4i}\left\{\eta_1(\zeta)\,\eta_0(\theta)-\eta_1(\theta)\,\eta_0(\zeta)\right\}$$

で定義する。このとき方程式（2.4.1）を変数 $\zeta(x)$ で Liouville 変換すると次の積分方程式になる。

$$(2.4.2)\qquad g(x)=\eta_0(\zeta(x))-\int_x^{\infty}G(\zeta(x),\zeta(y))\,g(y)p(y)(\lambda-U(y))^{\frac{1}{2}}dy$$

即ち（2.4.2）で定義される $g(x)=g(x,\lambda)$ により

$$f(x,\lambda)=(\lambda-U(x))^{-\frac{1}{4}}g(x,\lambda)$$

とおくと，$U(x)$ に対するかなり一般的な仮定の下で，$f(x,\lambda)$ の定数倍は方程式（2.3.4）の解であることが分り，しかも同時に $f(0,\lambda)$ は $\lambda\downarrow 0$ のとき有限で nonzero の値を持つことが分る。従って我々は $\mathcal{n}(\lambda)$ の $\lambda\downarrow 0$ での漸近的挙動を知ることができるわけである。この辺の議論の正当化はかなりめんどうではあるが，orthodox な方法ばかりであるので荒筋のみ示すことにし，詳細は Kotani〔1〕に譲ることにする。

まず，$U(x)$ の挙動に関する次の補題は有用である。

補題（2.4.1）

(1) $\lim_{x\to\infty} x\,U(x)=-\lim_{x\to\infty} x^2U'(x)=\int_0^{\infty} n(du)$

(2) $\frac{U'(x)}{U(x)}\geqq\frac{U''(x)}{U'(x)}\geqq\cdots$，であり各々は負で単調増大。

(3) $-\frac{U^{(k+1)}(x)}{U^{(k)}(x)}\leqq\frac{k+1}{x}\qquad \text{for}\qquad k=0,1,2,\cdots$

これにより，$U(x)$ は $x^{-\alpha}$ と良く似ていることが分るが，以下の議論を進めるためには（3）で下からの評価

$$(2.4.3)\qquad -\frac{xU'(x)}{U(x)}\geqq C>0\qquad \text{for}\qquad {}^{\forall}x\geqq{}^{\exists}x_0>0$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

を仮定する必要がある。この仮定の下で次の一連の補題を得る。

補題（2.4.2）（$x \geqq x(\lambda)$ での評価）$g(x)$ を（2.4.2）の解とする。

(1) $|g(x)| \leqq c e^{cA(x)}$

(2) $|g(x) - \eta_0(\zeta(x))| \leqq c\,(e^{cA(x)} - 1)$

但し $A(x) = \int_x^{\infty} |p(y)(\lambda - U(y))^{\frac{1}{2}}|\,dy$ で C は $0 < \lambda < 1$，x に依存しない定数である。

そこで，$h(x)$ を次の方程式の一意的な解とする。

$$h(x) = h_0(x) - \int_x^{\infty} G_0(x, y) p_0(y) h(y)(-U(y))^{\frac{1}{2}}\,dy \tag{2.4.4}$$

但し
$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{2}\,\exp\left(\dfrac{2\nu+1}{4}\pi i - \displaystyle\int_0^x \sqrt{U(y)}\,dy\right) \\ G_0(x, y) = \dfrac{1}{2i}\left\{\exp\left(-\displaystyle\int_x^y \sqrt{U(u)}\,du\right) - \exp\left(\displaystyle\int_x^y \sqrt{U(u)}\,du\right)\right\} \\ P_0(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{U''(x)}{U(x)^2} + \dfrac{5}{16}\dfrac{U'(x)^2}{U(x)^3} \end{cases}$$

補題（2.4.3） $g(x) = g(x, \lambda)$ を（2.4.2）の解とする。
$h(x, \lambda) = g(x, \lambda)\,e^{-|\zeta(0)|}$ とおくと，

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} h(x, \lambda) = h(x)$$

そこで $f(x, \lambda) = \dfrac{g(x, \lambda)}{\sqrt{2}\,(\lambda - U(x))^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\dfrac{2\nu+1}{4}\pi i - |\zeta(0)|\right)$

とおくと，$f(x, \lambda)$ は（2.4.1）の解であるが更に

補題（2.4.4） $f(0, 0+)$ も存在して $f(0, 0+) \neq 0$ となり，かつ関数 $f(x, 0+)$ は次の方程式の unique な解である。

$$\begin{cases} f''(x) = U(x)f(x) \\ f(x) \sim U(x)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\dfrac{\pi i}{8} - \int_0^x \sqrt{U(y)}\,dy\right) \quad \text{as } x\to\infty \end{cases}$$

以上をまとめると次のようになる。まず $\overline{f(x,\lambda)}$ の $x\to\infty$（λ : f : x）での様子をみると

$$\begin{cases} A(x) = o(1) \\ \eta_0(\zeta) \sim \sqrt{2}\ \exp\left(i\zeta - \dfrac{2\nu+1}{4}\pi i\right) \end{cases}$$

と補題（2.4.1）より

$$\overline{f(x,\lambda)} \sim \frac{\overline{\eta_0(\zeta(x))}}{\sqrt{2}\ (\lambda - U(x))^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{2\nu+1}{4}\pi i - |\zeta(0)|\right)$$

$$-\lambda^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-i\zeta(x) - |\zeta(0)|\right)$$

となる。従って $f_-(x,\lambda)$ の定義より $x_0 = x(\lambda)$ とすることにより，

$$f_-(x,\lambda) = \lambda^{\frac{1}{4}}\ e^{|\zeta(0)|}\ \overline{f(x,\lambda)}$$

となる。故に定理（2.3.1）により

$$\mathcal{H}(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\,|f_-(0,\lambda)|^2} = \frac{e^{-2|\zeta(0)|}}{\pi\,|f(0,\lambda)|^2}$$

$$\sim \frac{1}{\pi|f(0,0+)|^2} \exp\left(-2\int_0^{x(\lambda)} (U(y)-\lambda)^{\frac{1}{2}}\,dy\right)$$

$$\text{as}\quad \lambda\downarrow 0\ ,$$

が結論される。

<u>定理（**2.4.1**）</u>　$U(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^\infty (1-e^{-ux})\,n(du)$ が条件

$$\int_{0+} U(x)\,dx < +\infty\ ,\quad \frac{-xU'(x)}{U(x)} \geqq c > 0 \ \text{（十分大なる x に対して）}$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

をみたすとき，

$$\mathcal{H}(\lambda) \sim \frac{1}{\pi\,|\,f(0)|^2} \exp\left(-2\int_0^{x(\lambda)} (U(y)-\lambda)^{\frac{1}{2}}\,dy\right)$$

as $\lambda\to 0$

但し $f(x)$ は次の方程式の unique な解である。

$$\begin{cases} f''(x) = U(x)\,f(x) \\ f(x) \sim U(x)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\int_0^x \sqrt{U(y)}\,dy\right) \qquad \text{as } x\to\infty \end{cases}$$

<u>系（2.4.1）</u> Qが index α の（片側）stable 過程のとき

即ち

$$U(x) = n\,x^{-(1-\alpha)} \qquad (0<\alpha<1)$$

のとき

$$\mathcal{H}(\lambda) \sim B_\alpha\, n^{\frac{1}{1+\alpha}} \exp\left(-C_\alpha\, n^{\frac{1}{1+\alpha}}\, \lambda^{-\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{2}}\right)$$

as $\lambda\downarrow 0$

ここで

$$B_\alpha = (1+\alpha)^{-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\ \Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{-2}$$

$$C_\alpha = \sqrt{\pi}\ \ \Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{-1}$$

<u>系（2.4.2）</u> Qが複合 poisson 過程でかつ $\int_{0+} U(x)\,dx<\infty$ のとき

即ち

$$\int_0^\infty n(du) + \int^{+\infty} \log u\; n(du) < \infty$$

のとき

$$\mathcal{H}(\lambda) \sim \frac{1}{\pi\,|\,f(0)|^2} \exp\left(-2\int_0^{x} (U(y)-\lambda)^{\frac{1}{2}}\,dy\right)$$

$\infty\lambda\downarrow 0$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

系（2.4.3） Qが poisson 過程のとき即ち

$$U(x) = \frac{n(1-e^{-ax})}{x}$$

のとき

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{1}{\pi\,|\,f(0)|^2}\, e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda}}} \qquad \text{as} \quad \lambda \downarrow 0$$

但し， f は次の方程式の unique な解。

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{n(1-e^{-ax})}{x} f(x) \\ f(x) \sim \left(\dfrac{x}{n}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\int_0^x \sqrt{U(y)}\,dy} \qquad \text{as} \quad x \to \infty \end{cases}$$

Fukushima〔5〕は discrete 作用素でポテンシャルが，安定分布に従う独立同分布の確率変数のとき，の評価を得ているが，最終的な結果ではない。系（2.4.1）はそれの continuous analogue であるから discrete な場合の結果を多少暗示していると思われる。

T. P. Eggarter〔6〕は Q が poisson 過程のとき

$$\mathcal{N}(\lambda) \asymp e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda}}} \qquad \text{as} \quad \lambda \downarrow 0$$

となることを dQ が Dirac 測度の和であることを利用して巧みに導いている。従って系（2.4.3）はこの方面の最終的なものとみれる。

§ 2.5 2，3の注意

この節では以上の議論に関して3つの注意をしたい。まず今までは作用素 L を片側〔0，∞）のみで考えてきたが，（−∞，∞）全体で考えることも可能である。

そこで $\quad L = -\dfrac{d\dfrac{d}{dx} - dQ}{dx}$ 又は $-\dfrac{d}{dM}\dfrac{d}{dx}$

について

$$\mathcal{N}_+(\lambda) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} N(\lambda, [0, \ell])$$

$$\mathcal{N}_-(\lambda) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} N(\lambda, [-\ell, 0])$$

$$\mathcal{N}(\lambda) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{2\ell} N(\lambda, [-\ell, \ell])$$

とおく。勿論右辺が存在するとしての話しである。

<u>定理(2.5.1)</u> もし $\mathcal{N}_\pm(\lambda)$ が存在するならば $\mathcal{N}(\lambda)$ も存在し

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}_+(\lambda) + \mathcal{N}_-(\lambda)\right)$$

となる。

<u>証明</u> $N_0(\lambda, [a, b])$, $N_\infty(\lambda, [a, b])$をそれぞれ境界条件

$$f(a) = f(b) = 0 \quad , \qquad f'(a) = f'(b) = 0$$

で考えたときの固有値の分布関数とする。

このとき §2.1 の考察により

$$\begin{cases} 0 \leqq N_\infty(\lambda, [a, b]) - N_0(\lambda, [a, b]) \leqq 2 \\ N_0(\lambda, [a, b]) \leqq N(\lambda, [a, b]) \leqq N_\infty(\lambda, [a, b]) \end{cases}$$

となる。更に mini − max 原理により不等式

$$N_\infty(\lambda, [a, b]) \leqq N_\infty(\lambda, [a, c]) + N_\infty(\lambda, [c, b])$$

$$N_0(\lambda, [a, b]) \geqq N_0(\lambda, [a, c]) + N_0(\lambda, [c, b])$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

がすべての $a < c < b$ について成り立つ。従って定理(2.5.1)は容易に証明される。 Q.E.D

次にMを確率1で単調増大な Lévy 過程とするとき作用素

$$L = -\frac{d}{dM}\frac{d}{dx}$$

のスペクトル分布関数を考察する。$\psi(\xi)$をMの特性関数

即ち

$$E(e^{-\xi M(x)}) = e^{-x\psi(\xi)}$$

とする。$\psi(\xi)$は Lévy 測度 $n(du)$で

$$\psi(\xi) = a\xi + \int_0^\infty (1-e^{-\xi u})n(du) \qquad a \geqq 0$$

と書ける。そこで M_0を $M(x) = ax + M_0(x)$ で定義する。

$(\xi(x), \eta(x))$を次の方程式

$$\begin{cases} d\xi(x) = \eta(x)dx \\ d\eta(x) = -\lambda a\xi(x)dx - \lambda\xi(x)dM_0(x) \end{cases}$$

の解とすると，系(2.1.1)により

$$\begin{cases} N(\lambda, [0, \ell]) = \#\{x \in [0, \ell]\ ;\ \xi(x) = 0\} + \varepsilon(\lambda) \\ |\varepsilon(\lambda)| \leqq 2 \end{cases}$$

となる。したがって§2.2の(2.2.2)で λをλa，Qを $-\lambda M_0$ とみたすことにより，Lのスペクトル分布関数は前節と同様に取り扱える。但し，$\varphi(s)$の解析接続は，下半平面にする。

結局，$\mathcal{N}(\lambda)$ は次のように表わされる。

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\,|f(0, \frac{1}{\lambda})|^2}$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

但し， $f(x,\lambda)$ は次の方程式の unique な解である。

$$(2.5.1)\quad \begin{cases} f''(x,\lambda)=-\lambda U(x)f(x,\lambda) \\ f(x,\lambda)\sim U(x)^{-\frac{1}{4}}\exp\left(i\lambda\int_0^x\sqrt{U(y)}\,dy\right) \quad \text{as } x\to\infty \end{cases}$$

$$U(x)=a+\frac{1}{x}\int_0^\infty(1-e^{-ux})\,n(du)$$

この議論では $a>0$ はかなり本質的である。しかしながら方程式（2.5.1）の解 $f(x,\lambda)$ は $a\downarrow 0$ のときにも対応する方程式の解に収束することが分るから， $\mathcal{H}(\lambda)$ も $a\downarrow 0$ のとき有限（nonzero）な値いに収束する。一方§2.2でみたように $\mathcal{H}(\lambda)$ は hitting time τ_1 の平均 $E_\infty(\tau_1)$ の逆数である。$a\downarrow 0$ のとき τ_1 は単調に $a=0$ の場合の hitting time に収束することに注意すれば極限の τ_1 も平均有限なることが分る。従って§2.2の主義論を繰り返すことができて，$a=0$ の場合も $\mathcal{H}(\lambda)$ は上の形で表わすことができる。まとめると

<u>定理（2.5.2）</u> $U(x)=a+\frac{1}{x}\int_0^\infty(1-e^{-ux})n(du)\quad(a\geqq 0)$
が $\int_{0+}U(x)\,dx<+\infty$ をみたすとき

$$\mathcal{H}(\lambda)=\frac{\lambda}{\pi\,|f(0,\frac{1}{\lambda})|^2}$$

となる。但し $f(x,\lambda)$ は（2.5.1）の unique な解である。

<u>例 1</u> $a=0,\quad U(x)=n\,x^{-(1-\alpha)}\quad(0<\alpha<1)$

$$\mathcal{H}(\lambda)=n^{\frac{1}{1+\alpha}}\,\Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{-2}(1+\alpha)^{-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\lambda^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

<u>例 2</u> $a=0,\quad U(x)=\frac{n}{x+c}\quad(n(dx)=cne^{-cx}\,dx)$

$$\mathcal{H}(\lambda)=\frac{\lambda}{c\pi^2}\left|H_1^{(1)}\left(2\sqrt{\frac{nc}{\lambda}}\right)\right|^{-2}$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

このMは増大する Lévy 過程であるから，複合 poisson の場合のような場合でも mass が乗っている点は poisson 的に分布していて一定でない。 dM の mass が格子点に乗っている場合の $\mathcal{H}(\lambda)$ を計算できる例をあげておく。

まず一般に$[0, \infty)$上に右連続な単調増大関数 $M(x)$ が与えられたとき，その dual $M_d(s)$ とは

$$M_d(s) = \inf\{x \geqq 0 \ ; \ M(x) \geqq s\}$$

のことである。さて，$\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$を方程式

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dM}\dfrac{d\varphi}{dx} = \lambda\varphi , \\ \varphi(0, \lambda) = 1 \\ \varphi^{-}(0, \lambda) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{d}{dM}\dfrac{d\psi}{dx} = -\lambda\psi \\ \psi(0, \lambda) = 0 \\ \psi^{-}(0, \lambda) = 1 \end{cases}$$

の解とするとき，M_dによる解 $\varphi_d(s, \lambda)$, $\psi_d(s, \lambda)$は

$$\begin{cases} \psi_d(s, \lambda) = -\dfrac{1}{\lambda}\varphi^{+}(x, \lambda), & \psi_d^{+}(s, \lambda) = \varphi(s, \lambda) \\ \varphi_d(s, \lambda) = \psi^{+}(x, \lambda) & -\dfrac{1}{\lambda}\varphi_d^{+}(s, \lambda) = \psi(x, \lambda) \end{cases}$$
$$S = M(x)$$

となる。(cf. I.S.Kac & M.G.Krein [7]) 従って M_dによるスペクトルル分布 $N_d(\lambda, [0, \ell])$は

$$\begin{aligned} N_d(\lambda, [0, \ell]) &= \#\{\mu \leqq \lambda \ ; \ \varphi_d(\ell, \mu) = 0\} \\ &= \#\{\mu \leqq \lambda \ ; \ \varphi^{+}(M^{-1}(\ell), \mu) = 0\} \\ &= \#\{\mu \leqq \lambda \ ; \ \varphi(M^{-1}(\ell), \mu) = 0\} + \varepsilon(\lambda) \\ &= N(\lambda, [0, M^{-1}(\ell)]) + \varepsilon(\lambda) \end{aligned}$$

但し $|\varepsilon(\lambda)| \leqq 2$ 　従ってスペクトル分布関数 $\mathcal{H}_d(\lambda)$は

$$\mathcal{H}_d(\lambda) = \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{\ell} N_d(\lambda, [0, \ell])$$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \frac{M^{-1}(\ell)}{\ell} \frac{1}{M^{-1}(\ell)} \quad N(\lambda, [0, M^{-1}(\ell)])$$

$$(2.5.2) \qquad \mathcal{H}_d(\lambda) = \frac{1}{\overline{M}} \mathcal{H}(\lambda)$$

但し $\qquad \overline{M} = \lim_{\ell\to\infty} \frac{M(\ell)}{\ell} = \lim_{\ell\to\infty} \frac{\ell}{M^{-1}(\ell)}$

関係式(2.5.2)を利用して次の例を得る。

__例 3__ $\quad dM_d(x) = \sum_{j=0}^{\infty} m_j\,\delta(x-aj)$ で m_j が独立ですべて指数分布 $p(m_j > y) = e^{-ny}$ に従うとき

$$\mathcal{H}_d(\lambda) = \frac{1}{an}\mathcal{H}(\lambda) = \frac{\lambda}{an\pi\,|f(0, \frac{1}{\lambda})|^2}$$

となる。但し，$f(x, \lambda)$ は方程式

$$\begin{cases} f''(x) = -\lambda \dfrac{n(1-e^{-ax})}{x} f(x) \\ f(x) \sim \left(\dfrac{x}{n}\right)^{\frac{1}{4}} e^{2i\sqrt{n\lambda x}} \qquad \text{as } x \to \infty \end{cases}$$

の unique な解である。

最後に $\mathcal{H}(\lambda)$ についての興味ある研究対象をあげておく。

(1) $\mathcal{H}(\lambda)$ の内部での様子。

$\{Q(x)\}$ が平均 $\overline{Q} = \frac{1}{x}E(x)$ をもつとき，L を平均した作用素は，

$$\overline{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + \overline{Q}$$

である。従って $\mathcal{H}(\lambda)$ は，$\lambda = \overline{Q}$ の近傍で特異な挙動を示すに違いない。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

例えば，$\mathcal{H}'(\lambda)$ は $\overline{Q}$ で最大値をとるだろうか。

又 $\mathcal{H}(\lambda)$ の導関数 $\mathcal{H}'(\lambda)$ の極小値はどのように分布するだろうか。$\{Q(\lambda)\}$ が周期関数であるときは $\mathcal{H}(\lambda)$ には平らな部分があることが分っている。我々の $\{Q(x)\}$ はそのような性質をどの程度持っているか興味がある。

(2) 我々の $\{Q(x)\}$ は例えば poisson 過程の場合に

$$\begin{cases} dQ(x) = \sum_j \delta(x - x_j) \\ 0 \leqq x_0 < x_1 < \cdots\cdots \\ \{x_j - x_{j-1}\}_{j=1}^{\infty} \quad \text{独立同指数分布} \end{cases}$$

であった。しかし $\{x_j - x_{j-1}\}$ の分布が指数分布でない時は少くても我々の stochastic calculus を用いる方法は適用できない。このとき $\mathcal{H}(\lambda)$ の $\lambda \downarrow 0$ での様子はどのようになるだろうか。

又，x_j が格子点 j の付近に分布している場合，即ち

$$|x_j - j| \leqq \varepsilon \qquad (0 < \varepsilon < 1) \quad j = 1, 2, \cdots$$

のとき，$\{Q(x)\}$ が周期的の場合と同じく，$\mathcal{H}'(\lambda)$ に gap が現われるだろうか。

これらの問題はそれ程手の届かない所にある訳ではないと思われる。

§ 2.6 white Gaussian noise potential のときの考察

この節では次の形の作用素のスペクトルを考察する。

$$L\varphi(x) = -\frac{d\varphi'(x) - \varphi(x)\,dB(x)}{dx}$$

但し，$\{B(x)\}$ は，Wiener 過程（Brown 運動）である。この作用素はこれ

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

まで考察して来たものの一種の理想化である。従ってこれに関する種々の量は exact に計算できる場合が多く，以前の問題のある種の量は少くとも定性的にはこの作用素の場合に典型的に現われているものと思われ，その周辺の研究は重要である。

最初にこの作用素を扱ったのは多くの示唆的な内容を含んでいる Halperin〔8〕の論文であるが，数学的に厳密に定式化したのは Fukushima－Nakao〔9〕である。ここでは，Fukushima－Nakao の方法（Dirichlet 形式をを用いる。）と，後の第4部での必要から従来の固有関数展開定理の方法と2通り紹介する。

1°） Dirichlet 形式による方法

ここでは概略を述べるに止め詳細は〔9〕を参照されたい。

〔一段〕 〔a，b〕$\subset \mathbb{R}^1$に対し，B〔a，b〕を〔a，b〕上で定義された有界 Borel 関数全体（実数値）とする。$h \in B[a, b]$ に対して Dirichlet 形式を次のように定義する。

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}_h) = H_0^1(a, b) = \{ u \in L^2(a, b) ; u \text{ 絶対連続}$$

$$\& \quad u' \in L^2(a, b) \quad \& \quad u(a+) = u(b-) = 0 \}$$

$$\mathcal{E}_h(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx - \int_a^b \{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\} h(x)dx$$

$$\text{for} \quad u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_h)$$

このとき，次のことが示される。

(1) $\exists \gamma \in \mathbb{R}^1 \quad \text{s, t} \quad \mathcal{E}_h(u, u) + \gamma(u, u) \geqq 0 \quad \text{for } \forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}_h)$

但し $(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx \quad \text{for} \quad u, v \in L^2(a, b)$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

(2) $\gamma' > \gamma$ に対して，norm

$$\|u\|_h = \{\mathcal{E}_h(u, u) + \gamma(u, u)\}^{\frac{1}{2}}$$

により，$\mathcal{D}(\mathcal{E}_h)$ は充備となり，しかも injection ; $\mathcal{D}(\mathcal{E}_h) \to L^2(a, b)$ は完全連続である。

(1)，(2)により，$\mathcal{E}_h$ から誘導される自己共役作用素は mini−max 原理により決定される discrete な固有値をもつことが分る。

(3) $h_n \in B[a, b] \to h \in B[a, b]$ uniformly convegent なら，λ_k^n，λ_k をそれぞれ $\mathcal{E}_{h_n}$，$\mathcal{E}_h$ の k 番目の固有値とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = \lambda_k \quad ,$$

したがって $\{\lambda_k^n\}$，$\{\lambda_k\}$ の分布関数を $\mathcal{H}_n(\lambda, [a, b])$，$\mathcal{H}(\lambda, [a, b])$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}_n(\lambda, [a, b]) = \mathcal{H}(\lambda, [a, b]) \quad (\lambda ; \mathcal{H} \text{ の連続点})$$

h が C^1−class ならば $\mathcal{E}_h$ の固有値は微分作用素

$$Lu = -u'' + h'u$$

の境界条件 $u(a+) = u(b-) = 0$ の下での固有値問題と一致する。一方よく知られているように Wiener 過程の各 sample は微分不可能な連続関数である。従って作用素 $Lu = -u'' + B'u$ の定義は上の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}_B$ による必要がある。

〔二段〕 h が滑らかな場合一段の $\mathcal{H}$ は Sturm−Liouville の oscillation theorem により次の様に計算される。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\begin{cases} dY_\lambda(x) = -\sin^2(Y_\lambda(x))\,dh(x) + (\cos^2 Y_\lambda(x) + \lambda \sin^2 Y_\lambda(x))dx \\ Y_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(\lambda, [0, \ell]) = \left[\frac{Y_\lambda(\ell)}{\pi}\right]$$

そこで Wiener 過程 $B(x)$ を近似する関数列 $B_n(x)$ を

$$B_n(x) = B\left(\frac{[2^n x]}{2^n}\right) + 2^n\left(x - \frac{[2^n x]}{2^n}\right)\left\{B\left(\frac{[2^n x]+1}{2^n}\right) - B\left(\frac{[2^n x]}{2^n}\right)\right\}$$

で定義する。$\{y_\lambda^n(x)\}$, $\{y_\lambda(x)\}$ をそれぞれ次の方程式の解とする。

$$(2.6.1)\quad \begin{cases} dy_\lambda^n(x) = -\sin^2(y_\lambda^n(x))\,dB_n(x) + (\cos^2 y_\lambda^n(x) + \lambda \sin^2 y_\lambda^n(x))dx \\ y_\lambda^n(0) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} dy_\lambda(x) = -\sin^2(y_\lambda(x)) \circ dB(x) + (\cos^2 y_\lambda(x) + \lambda \sin^2 y_\lambda(x))dx \\ y_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

(但し $\circ$ は対称積分を表わす。)

Kunita により, $\{y_\lambda^n\}$ の適当な部分列が $\{y_\lambda\}$ に一様収束することが示されている。従って, $Lu = -u'' + B'u$ を $[0, \ell]$ 上で考えたときの固有値分布関数を $\mathcal{H}(\lambda, [0, \ell])$ とするとき,

$$(2.6.2)\qquad \mathcal{H}(\lambda, [0, \ell]) = \left[\frac{y_\lambda(\ell)}{\pi}\right]$$

が分る。

〔三段〕 $\tau_n^\lambda = \inf\{x > 0 ;\ y_\lambda(x) = n\pi\}$ とおくと, $\{y_\lambda\}$ は一次元 diffusion であるから

$$E(\tau_1^\lambda) = \sqrt{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{1}{6}u^3 - 2\lambda u\right)du$$

となることが分る。しかも $(n-1)\pi$, $(n\pi)$ は区間 $((n-1)\pi, n\pi)$ の

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

entrance (exit) 境界になっている。従って

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} \mathcal{H}(\lambda, [0, \ell]) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{y_\lambda(\ell)}{\pi \ell}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\tau_n^\lambda}$$

である。ところが,

$$\tau_n^\lambda = \tau_1^\lambda + (\tau_2^\lambda - \tau_1^\lambda) + \cdots\cdots + (\tau_n^\lambda - \tau_{n-1}^\lambda)$$

であるが，それぞれは独立同分布な確率変数であるから，強大数の法則により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n^\lambda}{n} = E(\tau_1^\lambda)$$

結局まとめると次の定理になる。

定理 (2.6.1) $\mathcal{H}(\lambda) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} \mathcal{H}(\lambda, [0, \ell])$

$$= \frac{1}{E(\tau_1^\lambda)} = \left\{ \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{1}{6}u^3 - 2\lambda u\right) du \right\}^{-1} \qquad (2.6.3)$$

2°) 固有関数展開による方法

これも概略を述べるに止める。証明は従来の方式に乗っとってやればよい。この方法の利点は，無限区間〔 0 , ∞) でも我々の作用素が定義できる点にある。$\{B(x)\}$ が Wiener 過程であることは使わなく，それが連続関数であることだけが以下の議論で必要である。

$Q(x)$ は〔 0 , ℓ) ($\ell \leqq +\infty$) で定義された実数値連続関数で $Q(0) = 0$ をみたすものとする。我々は以下作用素

$$Lu = -u'' + Q'u$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

の固有関数展開を与える。開単のため左端0では反射壁の境界条件を考える。

(2.6.4) $\quad L\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda \quad , \quad \varphi_\lambda(0)=1 \quad , \quad \varphi_\lambda'(0) = 1$

の解を次の積分方程式で定義する。

(2.6.5) $\quad \varphi_\lambda(x) = 1 - \lambda\int_0^x (x-y)\varphi_\lambda(y)\,dy + \int_0^x (x-y)\varphi_\lambda(y)Q'(y)\,dy$

しかし，右辺の第3項はこのままでは意味がないから次のように変形する。

$$\varphi_\lambda'(x) = f_\lambda(x)$$

とおくと，

(2.6.6) $\quad \varphi_\lambda(x) = 1 + \int_0^x f_\lambda(y)\,dy$

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= -\lambda\int_0^x \varphi_\lambda(y)\,dy + \int_0^x \varphi_\lambda(y)Q'(y)\,dy \\ &= -\lambda y\varphi_\lambda(y)\Big|_0^x + \lambda\int_0^x y\, f_\lambda(y)\,dy + \varphi_\lambda(y)Q(y)\Big|_0^x \\ &\qquad - \int_0^x f_\lambda(y)Q(y)\,dy \\ &= -\lambda x + Q(x) - \int_0^x \left\{\lambda(x-y) - Q(x) + Q(y)\right\} \\ &\qquad f_\lambda(y)\,dy \end{aligned}$$

となる。従って(2.6.5)の代りに方程式

(2.6.7) $\quad f_\lambda(x) = -\lambda x + Q(x) - \int_0^x \left\{\lambda(x-y) - Q(x) + Q(y)\right\} f_\lambda(y)\,dy$

を考え，φ_λ は(2.6.6)で定義する。(2.6.7)はQが連続関数であるから容易に解けて，各xについてλの整関数となる。一度(2.6.4)の解が定義されると，後の議論はQが滑らかな場合と全く同様である。即ち，φ_λ と同様に

$$L\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda \quad , \quad \psi_\lambda(0) = 0 \; , \quad \psi_\lambda'(0) = 1$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

で ψ_λ を定義する。簡単のため $\ell=\infty$ のときを考える。

$$R(\lambda)=\lim_{x\to\infty}\frac{\psi_\lambda(x)}{\varphi_\lambda(x)} \qquad (\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$$

が存在して

$$G_\lambda(x,y)=\varphi_\lambda(x)\left\{\varphi_\lambda(y)R(\lambda)-\psi_\lambda(y)\right\}$$

$$=G_\lambda(y,x) \qquad (\text{ for } \quad 0\leqq x\leqq y)$$

とおくと，$G_\lambda(x,y)$ が，L の（global な）Green 関数となる。しかも L の固有関数展開を与えるスペクトル測度 $\sigma(t)$ は

$$\sigma(t')-\sigma(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_t^{t'} I_m R(s+i\varepsilon)ds$$

で与えられる。

φ_λ に関する oscillation theorem も§2.1 と類似に示すことができるから，$\mathcal{H}(\lambda)$ の計算方法は§2.1と同様 $\varphi_\lambda(x)$ の zero 点の個数で計算できる。

さて我々の Wiener 過程 $\{B(x)\}$ の場合は，上で定義した意味での（2.6.4）の解 φ_λ は

$$\varphi_\lambda(x)=1-\lambda\int_0^x(x-y)\varphi_\lambda(y)dy+\int_0^x(x-y)\varphi_\lambda(y)\circ dB(y)$$

$$=1-\lambda\int_0^x(x-y)\varphi_\lambda(y)dy+\int_0^x(x-y)\varphi_\lambda(y)dB(y)$$

の解であることが容易に分る。従って，§2.2～2.4での議論と同じことを Ricatti 方程式

$$dz(x)=(z(x)^2+\lambda)\,dx-dB \qquad \left(\begin{array}{l}\text{これは}(2.6.1)\\ z=-\cot y\text{と変換したもの}\end{array}\right)$$

について行なえば結局この節の 1°）と同じ結論を得る。又，Rice formula が成立することも明らかである。

§ 2.7 基本解の指数的増大と絶対連続スペクトルの不在

第1部の§1.6では discrete な作用素の場合，Furstenberg の定理を応用して基本解の指数的増大を示し，その系として絶対連続スペクトルの不在を証明した。この節では基本解の指数的増大を，従来，研究されている確率微分方程式の解の安定性の問題と見なし，stochastic calculus の枠内で証明し，絶対連続スペクトルの不在をいう。このような idea は基本的には Frisch−Lloyd〔2〕にあり，筆者のは少しばかりの一般化と議論の精密化である。細かい証明は〔10〕に任せ，荒筋のみ述べる。

以下の記号は§2.2と同じものを表わすものとする。$\{Q(x)\}$ は Lévy 測度が n(du)の Lévy 過程であるから，特性測度 dx n(du)をもった定常な Poisson point process $N_p(dx, du)$により

$$Q(x) = \int_0^{x+}\int_{-\infty}^{\infty} u N_p(dx, du)$$

と表現できる。従って，方程式(2.2.2)は

$$(2.7.1)\quad \begin{cases} d\xi(x) = \eta(x)\,dx \\ d\eta(x) = -\lambda\xi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} u\,\xi(x)\,N_p(dx, du) \end{cases}$$

と同値である。ここでは $\{\xi(x)\}$ のことを基本解と呼んでいる。

定理(2.7.1) $\lambda > 0$ 固定する。n(du)については

$$(2.7.2)\quad \int_{|u|>1} (\log u)^2\, n(du) < \infty$$

と仮定する。このとき，

$$(2.7.3)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log(\xi(x)^2+\eta(x)^2) = 2\int_0^{\infty}|\varphi(s)|^2 ds \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos us}{s}\, n(du) > 0$$

但し，$\varphi(s)$は $z(x) = -\dfrac{\eta(x)}{\xi(x)}$ の invariant 測度の Fourier 変換とする。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

証明　$f(\xi,\eta)$を滑らかな関数とするとき一般化された Ito の公式〔cf. Watanabe〔11〕)により

$$f(\xi(x),\eta(x))-f(\xi(0),\eta(0))=\int_0^x f_\xi(\xi(y),\eta(y))\eta(y)dy$$

$$-\lambda\int_0^x f_\eta(\xi(y),\eta(y))\xi(y)dy+\int_0^{x+}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(\xi(y),\eta(y-)+u\xi(y))$$

$$-f(\xi(y),\eta(y-))\}N_p(dy,du)\quad,$$

となる。$(\xi(0),\eta(0))\neq(0,0)$である限り$(\xi(x),\eta(x))\neq(0,0)$であるから上式で$f(\xi,\eta)=\log(\xi^2+\eta^2)$と置くことにより

$$f(\xi(x),\eta(x))-f(\xi(0))=2(\lambda-1)\int_0^x\frac{z(y)}{1+z(y)^2}dy$$

$$+\int_0^{x+}\int_{-\infty}^{\infty}\log\frac{1+(z(y)-u)^2}{1+z(y)^2}N_p(dy,du),$$

を得る。ここで簡単のため

$$f(z)=\frac{2(\lambda-1)z}{1+z^2}\quad,\quad g(z,u)=\log\frac{1+(z-u)^2}{1+z^2}$$

とおくと，

$$|g(z,u)|\leqq c\ \log(1+|u|)$$

であるから仮定(2.7.2)より

$$\int_0^{x+}dy\int_{-\infty}^{\infty}E|g(z(y),u)|^2\ n(du)\ \leqq kx$$

となる。従って，

$$\begin{cases}M(x)=\int_0^{x+}\int_{-\infty}^{\infty}g(z(y),u)\widetilde{N}_p(dy,du)\\ A(x)=\int_0^x f(z(y))dy+\int_0^x dy\int_{-\infty}^{\infty}g(z(y),u)n(du)\end{cases}$$

$$\widetilde{N}_p(dy,du)=N_p(dy,du)-dy\ n(du)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

が定義でき特に M(x) は2乗可積分な Martingale となる。

Martingale 不等式により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=0 \qquad (a.s)$$

は容易に示せる。一方関数

$$p(z)=\int_{-\infty}^{\infty} g(z,u)\,n(du)+f(z)$$

は $\mathcal{R}^1$ で有界連続であるから $\{z(x)\}$ のエルゴート性(定理2.2.1)により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}=\int_{-\infty}^{\infty} p(z)T(z)\,dz \qquad (a.s)$$

となる。従って

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(\xi(x),\ \eta(x))}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} p(z)T(z)\,dz \qquad (a.s)$$

となる。これが,(2.7.3)の右辺になることを示すのはそれほど困難ではない。 **Q.E.D.**

次に絶対連続スペクトル不在の問題を考える。方針は§1.6と同様であるが連続系故の困難さも生じる。

補題(2.7.1) φを次の方程式の任意の解とする。

$$d\varphi^{+}=\varphi\,dQ$$

但し dQ はある正の数 Q_0 があって

$$dQ\geqq -Q_0\,dx$$

をみたす（singed）測度とする。このとき φ^+ に対する次の評価をうる。

$$(2.7.4)\qquad \int_0^r \varphi^+(x)^2\,dx \leqq -\varphi(0)\varphi^+(0) + \left\{\frac{\pi^2}{4(R-r)^2} + Q_0\right\}\int_0^R \varphi(x)^2 dx$$

for $\quad {}^\forall r < R$

<u>証明</u>　証明は I.M.Glazman〔12〕等を参照して次のように行う。連続関数 $\theta(x)$ を次のように定義する。

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < r \\ \dfrac{1}{2}\left\{1+\cos\pi\dfrac{x-r}{R-r}\right\} & r \leqq x < R \\ 0 & R \leqq x \end{cases}$$

このとき部分積分により次の等式が証明できる。

$$\int_0^R \theta(x)\varphi^+(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^R \theta''(x)\varphi(x)^2 dx - \int_{0+}^R \theta(x)\varphi(x)^2 dQ(x) - \varphi(0)\varphi^+(0)$$

これから（2.7.4）は容易に示せる。　　　　　　　　　　<u>Q.E.D</u>

<u>定理（2.7.2）</u>　$\{Q(x)\}$ は増大する Lévy 過程で

$$\int_{u>1} (\log u)^2 n(du) < \infty$$

をみたすとする。このとき確率1で作用素Lの絶対連続スペクトルは存在しない。

<u>証明</u>　簡単のため，Lの左端0での境界条件は，反射壁とする。$\varphi_\lambda(x)$ を次の方程式の解とする。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$L\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda \quad , \quad \varphi_\lambda(0)=1, \qquad \varphi_\lambda^-(0)=0$$

そして，Lのスペクトル関数を $\sigma(\lambda)$ とするとよく知られているように作用素 $\dfrac{\partial}{\partial t}-L$ の基本解（遷移確率密度）pは

$$p(t, x, y)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\ \varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)\ d\sigma(\lambda)$$

と表現できる。ところが，ポテンシャル dQは nonnegative であるから $dQ\equiv 0$ の場合と比較することにより

$$p(t, x, x) \leqq C \qquad\qquad (\text{xに無関係})$$

となる。従って

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\ \varphi_\lambda(x)^2\, d\sigma(\lambda)$$

$$= \int_0^\infty \frac{p(t, x, x)}{1+x^\alpha}\, dx < \infty \qquad \text{for} \qquad \begin{matrix}\alpha > 1, \\ t > 0\end{matrix}$$

となる。これより

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)^2}{1+x^\alpha}\, dx < \infty$$

が $d\sigma(\lambda)$ に関する殆んどすべてのλで成立することが分る。このとき，補題（2.7.1）で $R=2r$ とすることにより，

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda^+(x)^2}{1+x^\alpha}\, dx < \infty$$

も同時に分る。しかし，定理（2.7.1）により，各 $\lambda > 0$ に対して，$\varphi_\lambda(x)^2 + \varphi_\lambda^+(x)^2$ は確率1で指数的に増大する。Fubini の定理より，このことと，上のことは，$d\sigma(\lambda)$ が確率1で絶対連続部分が無い時のみ矛盾なく両立する。 Q. E. D.

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

最後に§2.6と関連してポテンシャルが Gaussian white noise のとき基本解の exponential growth について述べておく。

$\varphi_\lambda(x)$ を次の方程式

$$\varphi_\lambda(x) = 1 - \lambda\int_0^x (x-y)\varphi_\lambda(y)\,dy + \int_0^x (x-y)\varphi_\lambda(y)\,dB(y)$$

の解とする。$\xi(x)=\varphi_\lambda(x)$, $\eta(x)=\varphi_\lambda'(x)$ とおくと, (ξ, η) は

$$\begin{cases} d\xi(x) = \eta(x)\,dx \\ d\eta(x) = -\lambda\xi(x)\,dx + \xi(x)\,dB(x) \end{cases}$$

をみたす。$\xi^2+\eta^2$ の exponential growth については定理(2.7.1)と同様に示せるから結果のみを書いておく。

<u>定理(**2.7.3**)</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log\left\{\varphi_\lambda(x)^2 + \varphi_\lambda'(x)^2\right\} = -2\int_0^\infty z\left\{T(z)-T(-z)\right\}dz$$

$$= \int_0^\infty s\,|\varphi(s)|^2 ds \quad > 0$$

但し, $\varphi(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-isz}\,T(z)\,dz$ で $T(z)$ は方程式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}T''(z) - \left\{(z^2+\lambda)\,T(z)\right\}' = 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^\infty T(z)\,dz = 1 \end{cases}$$

の解である。

このことが, 作用素

$$Lu(x) = -\frac{du' - u\,dB}{dx}$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

の絶対連続スペクトルの不在を示唆するかどうかは分らないが，これは殆んど疑いなく事実であると思われる。尚§6.2の注意書きを信じればLは確率1で点スペスルしか持たないことになる。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

第Ⅱ部文献

〔1〕 S.Kotani, On asymptotic behaviour of the spectra of a one-dimensional Hamiltonian with a certain random coefficient, Publ. of RIMS. Kyoto Univ., vol 12, No.2 (1976), 447-492.

〔2〕 H.L.Frisch-S.P.Lloyd, Electron levels in one-dimensional lattice, Phys.Rev., 120 (1960), 1175-1189.

〔3〕 R.Bellman, Stability theory of differential equations, Dover Publications, Inc. New york, (1953)

〔4〕 E.C.Titchmarsh, Eigenfunction expansions, part Ⅱ, Oxford, (1962)

〔5〕 M.Fukushima, On the spectral distnibution of a disordered system and the range of a random walk, Osaka J.Math., 11(1974), 73-85.

〔6〕 T.P.Eggarter, Some exact results on electron energy levels in certain one-dimensional random potentials, Phys. Rev., B, 5(1972), 3863-3865.

〔7〕 I.S.Kac-M.G.Krein, On spectral functions of a string, Amer.Math.Soc.Transl.(2), 103 (1974), 19-102.

〔8〕 B.I.Halperin, Green's functions for a particle in a one-dimensional random potential, Phys.Rev.139A, (1965) 104-117.

〔9〕 M.Fukushima-S.Nakao, On spectra of the Schrödinger operafor with a white Gaussian noise potential, Z.Wahrscheinlichkeitstheorie, 37, (1977)267-274.

〔10〕 S.Kotani, On a growth of solutions of second order

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

linear differential equations with random coefficients, Proc. International symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto, (1976).

〔11〕 S.Watanabe, Wentzell の境界条件をみたす多次元拡散過程の Poisson point process による構成, マルコフ過程の研究, Seminar on Prob. 41 (1975), 23−54

〔12〕 I.M.Glazman, Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1965).

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

第Ⅲ部　ランダム係数の多次元 Schrödinger 作用素

第3章　ランダム係数の多次元 Schrödinger 作用素のスペクトル

この章ではポテンシャルとして定常確率場を持つ R^d 上の Schrödinger 作用素のスペクトルに関する二つの話題を取り扱う。一つはスペクトル分布関数（状態分布関数）の存在であり，他方はスペクトル分布関数の漸近的挙動である。この問題へのアプローチとして，Pastur〔10〕による Feynman－Kac formula を用いてラプラス交換の範囲で扱う方法がある。この方法に沿って議論する。

スペクトル分布関数の存在については，ある可積分条件をみたす連続な道を持つ定常確率場をポテンシャルとして持つ Schrödinger 作用素について一般的に § 3.2 で述べる。スペクトル分布関数 $\rho(\lambda)$ の $\lambda\to\infty$ の漸近的挙動については一般的に求めることが出来る（ § 3.4 後半）が，しかし零からの立ち上がりの増大度は一般的に調べることは難かしい。これについてはポテンシャルが Poisson random measure による moving average（即ち $\int_{R^d}\varphi(x-y)\hat{\omega}(dy)$）の場合（ § 3.3 ）とガウス型定常確率場の場合（ § 3.4 前半）を議論する。最初の場合スペクトル分布関数のラプラス変換はある確率変数の pinned Brownian motion に関する平均量という形をなし，それは Wiener sausage と密接に関連しているので，Donsker－Varadhan〔1〕〔2〕の結果を用いて漸近的性質を決定する。この章は〔9〕によっている。

§ 3.1　直方体領域で Dirichlet 境界条件をみたす Schrödinger 作用素のスペクトル

この節では直方体領域で Dirichlet 境界条件をみたす Schrödinger 作用素（non－random case）のスペクトル分布のラプラス変換を，pinned

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

Brownian motion を用いて表わす(Feynman－Kac formula)ことです。

Vはd次元直方体，k(x)はVで定義された有界な実数値 Borel 可測関数とする。Schrödinger 作用素

$$H = -\frac{1}{2}\triangle + k(x) \qquad (x \in V)$$

を考える。係数に$\frac{1}{2}$をつけたのはブラウン運動とあわすためです。$L^2(V)$ はVで2乗可積分実数値関数全体からなる内積 $(u, v)_V = \int_V u(x)v(x)dx$ を持つ Hilbert 空間，$C_0^\infty(V)$はVで定義された台がコンパクトな無限回連続的微分可能な実数値関数全体とする。作用素Hの定義域を$C_0^\infty(V)$とすれば，Hは $L^2(V)$上の対称作用素となり，その Friedrichs 拡張$\overline{H}$は次のものである。

$$\overline{H}u = -\frac{1}{2}\triangle u + k(x)u$$

$$\mathcal{D}(\overline{H}) = \{u \in H_0^1(V) : \text{弱導関数}\triangle u\text{が存在して} \in L^2(V)\}$$

$\mathcal{D}(\overline{H})$は作用素$\overline{H}$の定義域である。ここで，$H^1(V) = \{u \in L^2(V) :$ 弱導関数 $\frac{\partial u}{\partial x^i} \in L^2(V)\ (i=1,\cdots,d)\}$ は内積 $(u, v)_{1,V} = (u, v)_V + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial v}{\partial x^i}\right)_V$ をそなえた Hilbert 空間，$H_0^1(V)$は $C_0^\infty(V)$の$H^1(V)$での閉包である。H の Dirichlet 境界条件の下での固有値問題は自己共役作用素$\overline{H}$を考えることです。

$\overline{H}$のスペクトルは有限の点には集積しない可算個の固有値からなり，各固有値の重複度は有限である。したがって固有値は重複度をこめて

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots\cdots$$

と並べることが可能である。$\overline{H}$のスペクトル$\{\lambda_i\}$ の分布関数を

$$N(\lambda) = \frac{1}{|V|}\sum_{\lambda_i \leqq \lambda} 1 \qquad (\lambda \in R^1)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

でもって定義する。但し $|V|$ は直方体Vの体積である。$N(\lambda)$ のラプラス変換を確率論的量であらわすために次の確率過程を考える。Wは $[0,\infty)$ で定義された R^d－値連続関数全体，$x(t,w)=w(t)$ $(t\in[0,\infty), w\in W)$ とする。$\mathcal{M}_t$ は $x(s,w)$ $(s\in[0,t])$ より生成された σ－algebra $\mathcal{M}$ は $x(s,w)$ $(s\in[0,\infty))$ より生成された σ－algebra とする。$t\in(0,\infty)$，$x, y\in R^d$ に対し，次の条件をみたす $(W,\mathcal{M}_t)$ 上の確率測度 $P^{t,y}_{0,x}$ が一意的に存在する。

$$P^{t,y}_{0,x}(\{x(s_1),\cdots,x(s_n)\in B\}) = \frac{1}{g(t,x,y)}\int_B g(s_1,x,x_1)g(s_2-s_1,x_1,x_2)\cdots g(t-s_n,x_n,y)dx_1\cdots dx_n$$

ここで $s_1<s_2<\cdots<s_n$，Bは R^{dn} のボレル集合，

$$g(s,x,y)=\left(\frac{1}{2\pi s}\right)^{d/2}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2s}\right)\quad(s>0,\ x,y\in R^d)$$

である。$(W,\mathcal{M}_t, P^{t,y}_{0,x})$ をd次元 $(0,x;t,y)$－ pinned Brownian motion と呼ぶことにする。

定理3.1.1 (Feynman－Kac)

$$(3.1.1)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}dN(\lambda)=\frac{1}{|V|}\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{d/2}\int_V E^{t,x}_{0,x}\left[\exp\left\{-\int_0^t k(x(s))ds\right\};\tau_V>t\right]dx$$

$(t>0)$ である。但し $\tau_V=\inf\{s:x(s)\notin V\}$ であり，$E^{t,y}_{0,x}$ は確率測度 $P^{t,y}_{0,x}$ に関する平均である。

この定理を証明するために2種類の半群を導入する。なお $k(x)$ は非負値であると仮定しても一般性を失わないので，今後この節では $k(x)$ は非負値有界関数とする。$\{T_t;\ t>0\}$ は正の半定符号の自己共役作用素 $-\overline{H}$ に対応する $L^2(V)$ 上の半群とする。次に確率論的に表わされる半群とリゾルベントを定

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

義する。$B_b(V)$ はV上の有界な実数値 Borel 可測関数全体，$C_b(V)$ はV上の有界な実数値連続関数全体とする。$t>0$，$\alpha>0$，$f\in C_b(V)$ に対して，

$$\widetilde{T}_t f(x)=E_x[\exp\{-\int_0^t k(x(s))ds\} f(x(t));\ \tau_V>t] \quad (x\in V)$$

$$\widetilde{G}_\alpha f(x)=E_x[\int_0^{\tau_V}\exp\{-\alpha t-\int_0^t k(x(s))ds\} f(x(t))dt] \quad (x\in V)$$

とする。但し$(W,\mathcal{M},P_x)$は点xから出発するd次元ブラウン運動，E_xはP_xに関する平均を意味する。

補題 3.1.2 $f\in C_b(V)$ に対して，$T_t f=\widetilde{T}_t f$ である。

証明 $f\in C_b(V)$とする。Kac formula（[6]）とK. Itô [6]により

$$(3.1.2)\qquad \widetilde{G}_\alpha f(x)=E_x[\int_0^{\tau_V} e^{-\alpha t} g(x(t))dt]$$

なる $g\in B_b(V)$ が存在し，$(\alpha-\frac{1}{2}\triangle+k)\widetilde{G}_\alpha f=f$ (Schwartz distribution sense) をみたす。また(3.1.2)により $\widetilde{G}_\alpha f\in H_0^1(V)$（[4]）である。したがって $\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t f\,dt=\widetilde{G}_\alpha f$，これより

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}(T_t f,\psi)_V\,dt=\int_0^\infty e^{-\alpha t}(\widetilde{T}_t f,\psi)_V dt \quad \psi\in C_0^\infty(V)$$

である。故にラプラス変換の一意性により $T_t f=\widetilde{T}_t f$ である。

（証明終）

この補題により次の結果が従う。

補題 3.1.3 $f\in L^2(V)$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$T_t f(x)$$

$$= \int_V g(t, x, y) E_{0,x}^{t,y}\left[\exp\left\{-\int_0^t k(x(s))ds\right\};\ \tau_V > t\right] f(y)\,dy$$

であり，$E_{0,x}^{t,y}\left[\exp\left\{-\int_0^t k(x(s))ds\right\};\tau_V > t\right]$は$(x, y)$の連続関数である。

この補題の後半はこの節の最後に述べる pinned Brownian motion に関する drift の変換を用いれば示される。

（定理 3.1.1の証明）

T_tの固有値$\{e^{-\lambda_i t}\}$に対する固有関数系を$\{\psi_i(x)\}$とする。

Mercer 定理により

$$g(t, x, y) E_{0,x}^{t,y}\left[\exp\left\{-\int_0^t k(x(s))ds\right\};\ \tau_V > t\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\,\psi_i(x)\psi_i(y) \qquad (x, y) \in V \times V$$

（一様収束）

これ故

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}\, dN(\lambda) = \frac{1}{|V|}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} = \frac{1}{|V|}\int_V \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\,\psi_i^2(x)\,dx$$

$$= \frac{g(t,0,0)}{|V|}\int_V E_{0,x}^{t,x}\left[\exp\left\{-\int_0^t k(x(s))ds\right\};\ \tau_V > t\right]dx$$

（証明終）

最後に pinned Brownian motion に関する若干の注意を与えてこの節を終る。

__注意 3.1.4__　明らかに$(\{x(s)\}_{s\in[0,t]}, P_{0,x}^{t,y})$と$(\{x(t-s)\}_{s\in[0,t]}, P_{0,y}^{t,x})$は同法則の確率過程である。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$(b(s), \bar{P})$ は原点から出発する d 次元ブラウン運動とする。

$$(3.1.3) \quad y(s) = x + b(s) + \frac{s}{t}(-b(t) - x + y) \qquad (0 \leqq s \leqq t)$$

と，確率微分方程式の解

$$(3.1.4) \quad \begin{cases} dz(s) = db(s) + \dfrac{y - z(s)}{t - s}\, ds & (0 \leqq s \leqq t) \\ z(0) = x, \qquad z(t) = y \end{cases}$$

を考える。この時 $(y(s), \bar{P})$ と $(z(s), \bar{P})$ は共に $(0, x; t, y)$－pinned Brownian motion である。

<u>補題 3.1.5</u>　$(b(s), \mathcal{F}_s, \bar{P})$ は原点から出発する d 次元ブラウン運動 u は $u < t$ なる正定数とする。$\Lambda \in \mathcal{F}_u$ に対して

$$(3.1.5) \quad P'(\Lambda) = \left(\frac{t}{t-u}\right)^{d/2} \int_\Lambda \exp\left\{-\frac{|y-x|^2 u}{2t(t-u)} - \frac{|b(u)|^2}{2(t-u)} + \frac{(y-x, b(u))}{t-u}\right\} d\bar{P}$$

でもって P' を定義する。但し $(\, , \,)$ は R^d の内積である。この時 $(x + b(s), \mathcal{F}_s, P')_{s \in [0, u]}$ は d 次元 $(0, x; t, y)$－pinned Brownian motion である。

<u>証明</u>　伊藤の公式を用いれば

$$\exp\left\{\int_0^u \frac{y - x - b(s)}{t - s}\, db(s) - \frac{1}{2}\int_0^u \left|\frac{y - x - b(s)}{t - s}\right|^2 ds\right\}$$

$$= \left(\frac{t}{t-u}\right)^{d/2} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2 u}{2t(t-u)} - \frac{|b(u)|^2}{2(t-u)} + \frac{(y-x, b(u))}{t-u}\right\}$$

なので，drift の変換により補題が従う。　　　　（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

(3. 1. 5)により次の注意は明らかである。

注意 3.1.6 u は $u < t$ なる正定数とする。この時 $A \in \mathcal{F}_u$ に対して

$$P_{0,x}^{t,x}(A) \leqq \left(\frac{t}{t-u}\right)^{d/2} P_x(A) \qquad (x \in R^d)$$

である。

§ 3.2 スペクトル分布関数

この節では連続な道を持つ定常確率場をポテンシャルとする Schrödinger 作用素のスペクトル分布関数について述べる。Ω は R^d で定義された実数値連続関数全体とする。$q(x, \omega) = \omega(x)$ $(\omega \in \Omega,\ x \in R^d)$ とおき，$q(x, \omega)$ $(x \in R^d)$を可測にする最小の σ−algebra を $\mathcal{B}$ であらわす。

$$H^{\omega} = -\frac{1}{2}\triangle + q(x, \omega) \qquad (\omega \in \Omega)$$

とする。R^d の直方体 $V = \prod_{i=1}^{d}(-x^i, y^i)$ $(x^i, y^i > 0,\ i=1, 2, \cdots, d)$ を考える。

$$\begin{cases} \overline{H}_V^{\omega} u = H^{\omega}|_V u & u \in \mathcal{D}(\overline{H}_V^{\omega}) \\ \mathcal{D}(\overline{H}_V^{\omega}) = \{ u \in H_0^1(V) : \triangle u \in L^2(V) \} \end{cases}$$

でもって作用素 $\overline{H}_V^{\omega}$ を定義する。この時 § 3. 1 で述べたように，$\overline{H}_V^{\omega}$ は $L^2(V)$ 上の自己共役作用素であり，その固有値は重複度をこめて

$$\lambda_{V,1}^{\omega} \leqq \lambda_{V,2}^{\omega} \leqq \cdots\cdots\cdots\cdots$$

と並べることが出来る。各 $\omega \in \Omega$ に対して

$$\rho_V^{\omega}(\lambda) = \frac{1}{|V|} \sum_{\lambda_{V,i}^{\omega} \leqq \lambda} 1 \qquad (\lambda \in R^1)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

とおくと，定理3.1.1により

$$(3.2.1)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}\, d\rho_V^{\omega}(\lambda)$$
$$= \frac{g(t,0,0)}{|V|}\int_V E_{0,x}^{t,x}\left[\exp\left\{-\int_0^t q(x(s),\omega)\,ds\right\};\ \tau_V>t\right]dx \qquad (t>0)$$

である。

<u>**補題3.2.1**</u>　Vを固定する。この時 $\rho_V^{\omega}(\lambda)$ は (λ,ω) について可測である。

<u>証明</u>　(3.2.1)の右辺を $r(t,\omega)$ とおく。明らかに $r(t,\omega)$ は (t,ω) について可測である。$\inf_{x\in V} q(x,\omega)\geqq -n$ $(n\in\mathbb{N})$ なる $\omega\in\Omega$ に対して，$\lambda_{V,1}^{\omega}\geqq -n$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}\, d\rho_V^{\omega}(\lambda)=\int_{-n}^{\infty} e^{-t\lambda} d\rho_V^{\omega}(\lambda)=\int_0^{\infty} e^{-t(-n+\lambda)}\, d\rho_V^{\omega}(-n+\lambda)$$

となる。上式にラプラス変換をほどこすと

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{s+\lambda}\, d\rho_V^{\omega}(-n+\lambda)=\int_0^{\infty} e^{-(s+n)t}\, r(t,\omega)\,dt = f(s,\omega)$$

である。従って Stieltjes inversion formula により

$$\lim_{\eta\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\xi}\{f(-\sigma-i\eta,\omega)-f(-\sigma+i\eta,\omega)\}\,d\sigma$$
$$=\frac{\rho_V^{\omega}((-n+\xi)+)+\rho_V^{\omega}((-n+\xi)-)}{2}$$

なので補題が示された。　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

$(\Omega,\mathcal{B})$ 上に次の確率測度を与える。$x\in R^d$ に対して，$T_x:\Omega\to\Omega$ を

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

shift operator ($T_x\,\omega(y)=\omega(x+y)$ ($y\in R^d$)) とする。

<u>定義 **3.2.2**</u> (Ω, $\mathcal{B}$) 上の確率測度 P が次の条件 (3.2.2) をみたす時，(Ω, $\mathcal{B}$, P, $q(x,\omega)$) を連続な道を持つ定常確率場と呼ぶ。

$$(3.2.2)\qquad P(T_x\Lambda)=P(\Lambda)\qquad\qquad (\Lambda\in\mathcal{B},\ x\in R^d)$$

この時次の定理が成立する。

<u>定理 **3.2.3**</u> (Ω, $\mathcal{B}$, P, $q(x,\omega)$) は連続な道を持つ定常確率場とする。$\exp\left\{\int_0^t q^-(x(s),\omega)\,ds\right\}\in L^r(P\times P_0)$ ($t>0$) なる定数 $r>2$ が存在すると仮定する。この時 R^1 上の右連続非減少関数 $\rho(\lambda)$ が一意的に存在して

$$\lim_{v\to\infty} E[\rho_v^\omega(\lambda)]=\rho(\lambda)\qquad\qquad (\lambda : \rho(\lambda)\text{の連続点})$$

である。更に

$$(3.2.3)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}\,d\rho(\lambda)$$

$$=g(t,0,0)\,E\times E_{0,0}^{t,0}\left[\exp\left\{-\int_0^t q(x(s),\omega)\,ds\right\}\right]\qquad (t>0)$$

である。但し $q^-=\max(-q,0)$ であり，" $V\to\infty$ " は x^i, $y^i\to\infty$ ($i=1,2,\cdots,d$) を意味する。

<u>定義 **3.2.4**</u> 上の $\rho(\lambda)$ を $\left\{-\frac{1}{2}\triangle+q(x,\omega):\omega\in\Omega\right\}$ のスペクトル分布関数と呼ぶ。

上の定理の証明のために補題を用意する。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\mathcal{J} = \{ I(\lambda) : I(\lambda) \text{は } R^1 \text{ 上の非負値右連続非減少関数} \}$$

$$\mathcal{J}_0 = \{ I(\lambda) \in \mathcal{J} : I(-\infty) = 0 \}$$

とおく。

<u>補題 3.2.5</u>

(i) $I(\lambda) \in \mathcal{J}_0$ ならば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} dI(\lambda) = t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} I(\lambda) d\lambda \quad (t>0)$ である。

(ii) $I(\lambda) \in \mathcal{J}$, t は正定数とする。この時 $t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} I(\lambda) d\lambda \leqq a$ ならば $I(-a) \leqq a e^{-at}$ である。

(iii) $I(\lambda) \in \mathcal{J}$, α, c, t_0 は正定数とする。この時 $t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} I(\lambda) d\lambda \leqq c\ t^{-\alpha}$ $(0 < t \leqq t_0)$ ならば $I(\lambda) \leqq c\, e\, \lambda^{\alpha}$ $(\lambda \geqq \frac{1}{t_0})$ である。

(iv) $h(t)$ $(t > 0)$ は $(0, 1]$ で 正定数 c, α が存在して $h(t) \leqq c\,t^{-\alpha}$ をみたし，$[1, \infty)$ で $h(\infty) = \infty$ なる連続非負値単調増加関数とする。この時 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} f(\lambda) d\lambda$ がすべての $t > 0$ について有限である関数 $f(\lambda)$ $(\lambda \in R^1)$ が存在して，$t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} I(\lambda) d\lambda \leqq h(t)$ $(t>0)$ をみたす任意の $I(\lambda) \in \mathcal{J}$ に対して，$I(\lambda) \in \mathcal{J}_0$ であり更に $I(\lambda) \leqq f(\lambda)$ $(\lambda \in R^1)$ である。

<u>証明</u>　(i)は $\int_{\lambda}^{\infty} t\, e^{-t\mu} d\mu = e^{-t\lambda}$ $(t > 0)$ であることに注意し，Fubini 定理を用いれば明らかである。(ii)は次の不等式より従う。

$$a \geqq t\int_{-a}^{\infty} e^{-t\lambda} I(\lambda) d\lambda \geqq I(-a)\int_{-a}^{\infty} t\ e^{-t\lambda} d\lambda = I(-a) e^{at}$$

(iii)も次の不等式より明らかである。

$$c\ t^{-\alpha} \geqq \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} t\, e^{-t\lambda} I(\lambda) d\lambda \geqq I\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1} \qquad (0 < t \leqq t_0)$$

(iv)を示す。$I(\lambda) \in \mathcal{J}_0$ は明らかである。

$$f(\lambda)=\begin{cases} c\,e\,\lambda^{\alpha} & \lambda \geqq 1 \\ c\,e & 1>\lambda>-h(1) \\ -\lambda\, e^{h^{-1}(-\lambda)\lambda} & -h(1)\geqq\lambda \end{cases}$$

とすると，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} f(\lambda)\,d\lambda$ は $t>0$ について有限である。(iii)より $I(\lambda)\leqq c\,e\,\lambda^{\alpha}$ $(\lambda\geqq 1)$ であり，$I(\lambda)$ は非減少なので $I(\lambda)\leqq c\,e$ $(-h(1)<\lambda<1)$ である。一方(ii)より $I(-h(t))\leqq h(t)\,e^{-h(t)t}$ $(t\geqq 1)$ なので，$I(\lambda)\leqq -\lambda\, e^{h^{-1}(-\lambda)\lambda}$ $(\lambda\leqq -h(1))$ である。従って $I(\lambda)\leqq f(\lambda)$ $(\lambda\in R^1)$ である。　（証明終）

__補題 3. 2. 6__　$f(x)$ $(x\in R^d)$ は実数値 Borel 可測関数とする。この時

$$E^{t,x}_{0,x}\left[\exp\left\{-\int_0^t f(x(s))\,ds\right\}\right]\leqq 2^{d/2} E_x\left[\exp\left\{-\int_0^{t/2} 2f(x(s))\,ds\right\}\right] \qquad (t>0,\ x\in R^d)$$

である。

__証明__　Schwarz 不等式と注意 3. 1. 4 と注意 3. 1. 6 により

$$\begin{aligned} & E^{t,x}_{0,x}\left[\exp\left\{-\int_0^t f(x(s))\,ds\right\}\right] \\ \leqq\ & E^{t,x}_{0,x}\left[\exp\left\{-\int_0^{t/2} 2f(x(s))\,ds\right\}\right]^{1/2} E^{t,x}_{0,x}\left[\exp\left\{-\int_{t/2}^{t} 2f(x(s))\,ds\right\}\right]^{1/2} \\ \leqq\ & E^{t,x}_{0,x}\left[\exp\left\{-\int_0^{t/2} 2f(x(s))\,ds\right\}\right] \\ \leqq\ & 2^{d/2} E_x\left[\exp\left\{-\int_0^{t/2} 2f(x(s))\,ds\right\}\right] \end{aligned}$$

である。　（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

（定理3.2.3の証明）

（3.2.1）と補題3.2.5(i)により

$$E\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}\, d\rho_V^{\omega}(\lambda)\right] = t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} E\left[\rho_V^{\omega}(\lambda)\right] d\lambda$$

$$= \frac{g(t,0,0)}{|V|}\int_V E\times E_{0,x}^{t,x}\left[\exp\left\{-\int_0^t q(x(s),\omega)\,ds\right\};\ \tau_V > t\right] dx$$

$$= g(t,0,0)\, E\times E_{0,0}^{t,0}\left[\exp\left\{-\int_0^t q(x(s),\omega)\,ds\right\}\right]$$

$$- \frac{g(t,0,0)}{|V|}\int_V E\times E_{0,x}^{t,x}\left[\exp\left\{-\int_0^t q(x(s),\omega)\,ds\right\};\ \tau_V \leqq t\right] dx$$

である。Hölder 不等式と補題3.2.6により

$$\frac{1}{|V|}\int_V E\times E_{0,x}^{t,x}\left[\exp\left\{-\int_0^t q(x(s),\omega)\,ds\right\};\ \tau_V \leqq t\right] dx$$

$$\leqq \left\{E\times E_{0,0}^{t,0}\left[\exp\left\{-\int_0^t \frac{r}{2}\, q(x(s),\omega)\,ds\right\}\right]\right\}^{2/r}$$

$$\times \left\{\frac{1}{|V|}\int_V P_{0,x}^{t,x}(\tau_V \leqq t)\, dx\right\}^{r-2/r}$$

$$\leqq 2^{d/r}\left\{E\times E_0\left[\exp\left\{\int_0^{t/2} r\, q^{-}(x(s),\omega)\,ds\right\}\right]\right\}^{2/r}$$

$$\times \left\{\frac{1}{|V|}\int_V P_{0,x}^{t,x}(\tau_V \leqq t)\, dx\right\}^{r-2/r}$$

であり,

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{|V|}\int_V P_{0,x}^{t,x}(\tau_V \leqq t)\, dx = 0 \qquad (t>0)$$

なので

$$(3.2.4)\qquad \lim_{V\to\infty} t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} E\left[\rho_V^{\omega}(\lambda)\right] d\lambda = g(t,0,0)\, E\times E_{0,0}^{t,0}\left[\exp\left\{-\int_0^t q(x(s),\omega)\,ds\right\}\right] \quad (t>0)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

である。

Helly 選出定理により，部分列 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($V_n \to \infty$) と右連続非減少極限関数 $\rho(\lambda)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} E[\rho^{\omega}_{V_n}(\lambda)] = \rho(\lambda) \qquad (\lambda : \rho(\lambda)\text{の連続点})$$

となる。(3.2.1)と補題3.2.6により

$$(3.2.5) \qquad t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} E[\rho^{\omega}_{V}(\lambda)]\,d\lambda \leqq 2^{d/2}\, g(t,0,0)\, E\times E_0 \left[\exp\left\{\int_0^{t/2} 2q^-(x(s),\omega)\,ds\right\}\right]$$

なので，補題3.2.5(iv)とルベーグ収束定理を用いれば

$$\lim_{n\to\infty} t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} E[\rho^{\omega}_{V_n}(\lambda)]\,d\lambda = t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}\rho(\lambda)\,d\lambda \qquad (t>0)$$

を得る。従って $\rho(-\infty)=0$ に注意して(3.2.4)により

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda}\,d\rho(\lambda) = g(t,0,0)\,E\times E^{t,0}_{0,0}\left[\exp\left\{-\int_0^t q(x(s),\omega)\,ds\right\}\right] \qquad (t>0)$$

である。ラプラス変換の一意性により極限関数 $\rho(\lambda)$ は部分列の取り方によらない。故に定理が示された。 (証明終)

次に(Ω, $\mathcal{B}$, P, $q(x,\omega)$)が metrically transitive の場合を考察する。

定理3.2.7 (Ω, $\mathcal{B}$, P, $q(x,\omega)$)は metrically transitive な定理3.2.3の仮定をみたす連続な道を持つ定常確率場とする。この時 $P(\Omega_1)=1$ なる $\Omega_1\subset\Omega$ が存在して，任意の $\omega\in\Omega_1$ に対して

$$\lim_{V\to\infty} \rho^{\omega}_{V}(\lambda) = \rho(\lambda) \qquad (\lambda : \rho(\lambda)\text{の連続点})$$

である。ここで $\rho(\lambda)$ は定理3.2.3の $\left\{-\frac{1}{2}\triangle + q(x,\omega) : \omega\in\Omega\right\}$ のスペ

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

クトル分布関数である。

証明　補題3.2.6により

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} d\rho_V^{\omega}(\lambda) \leqq \frac{2^{d/2} g(t,0,0)}{|V|} \int_V E_x[\exp\{\int_0^{t/2} 2q^-(x(s),\omega)ds\}]dx$$

である。エルゴード定理により，任意の $t>0$ に対して

$$\sup_V \frac{1}{|V|}\int_V E_x[\exp\{\int_0^{t/2} 2q^-(x(s),\omega)ds\}]dx < \infty \qquad \text{a.s.}(P)$$

である。故に補題3.2.5(iv)により，$P(\Omega_2)=1$ なる $\Omega_2 \subset \Omega$ と，各 $\omega \in \Omega_2$ について，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} f^{\omega}(\lambda)d\lambda < \infty$ （$\forall t>0$）なる $f^{\omega}(\lambda)$ が存在して

$$(3.2.6) \qquad \sup_V \rho_V^{\omega}(\lambda) \leqq f^{\omega}(\lambda) \qquad (\lambda \in R^1)$$

となる。一方 $\lim_{V\to\infty} \frac{1}{|V|}\int_V P_{0,x}^{t,x}(\tau_V \leqq t)dx = 0$ なので，エルゴード定理を用いれば，各 $t>0$ に対して

$$(3.2.7) \qquad \lim_{V\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} d\rho_V^{\omega}(\lambda) = g(t,0,0) E \times E_{0,0}^{t,0}[\exp\{-\int_0^t q(x(s),\omega)ds\}] \qquad \text{a.s.}(P)$$

である。（3.2.6）と（3.2.7）に注意すれば，$P(\Omega_1)=1$ なる $\Omega_1 \subset \Omega_2$ が存在して

$$\lim_{V\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} d\rho_V^{\omega}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} d\rho(\lambda) \qquad (t>0,\ \omega \in \Omega_1)$$

である。従って定理3.2.3の証明と同様に，Helly 選出定理とラプラス変換の一意性により，$\omega \in \Omega_1$ に対し

$$\lim_{V\to\infty} \rho_V^{\omega}(\lambda) = \rho(\lambda) \qquad (\lambda : \rho(\lambda) \text{の連続点})$$

である。　　（証明終）

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

§3.3 Poisson random measure から決まる potential を持つ Schrödinger 作用素

mはd次元ルベーグ測度，$\mathcal{B}(R^d)$ は R^d の位相的ボレル集合体とする。最初に Poisson random measure with characteristic measure m について述べる。$\hat{\Omega}$ は R^d 上の $\hat{\omega}=\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{x_i}$（$\delta_{x_i}$ は点 $x_i\in R^d$ の δ−measure）なる形の Radon 測度全体とする。$\hat{\mathcal{B}}$ は $\{\hat{\omega}(B)=j\}$（$B\in\mathcal{B}(R^d)$，j は非負整数）なる集合族より生成された σ−algebra とする。確率空間（$\hat{\Omega}$, $\hat{\mathcal{B}}$, $\hat{P}$）が Poisson random measure with characteristic measure m であるとは次の二つの条件をみたす時呼ぶ。

(3.3.1) $\hat{P}(\{\hat{\omega}(B)=j\})=\dfrac{e^{-m(B)}\,m(B)^j}{j!}$ （$B\in\mathcal{B}(R^d)$，j は非負整数）

(3.3.2) 有限な互いに素な集合族 $\{B_i;\ i=1,\cdots,n\}\subset\mathcal{B}(R^d)$ に対し，$\{\hat{\omega}(B_i)\}$ は独立である。

<u>定理 3.3.1</u> β は $\beta>d$ なる定数とする。$\varphi(x)$ が R^d 上の非負値連続関数で $\varphi(x)=O(|x|^{-\beta})$ （$|x|\to\infty$） ならば，この時 $\{-\frac{1}{2}\triangle+\int_{R^d}\varphi(x-y)\hat{\omega}(dy):\hat{\omega}\in\hat{\Omega}\}$ のスペクトル分布関数 $\rho(\lambda)$ が存在し，

$$(3.3.3)\quad \int_0^\infty e^{-t\lambda}d\rho(\lambda)=g(t,0,0)E_{0,0}^{t,0}\Big[\exp\Big\{-\int_{R^d}\Big(1-e^{-\int_0^t\varphi(x(s)-x)ds}\Big)dx\Big\}\Big]\quad(t>0)$$

をみたす。

<u>証明</u> $z(x)=\int_{R^d}\varphi(x-y)\hat{\omega}(dy)$ は非負値連続関数を道とする metrically transitive な定常確率場なので，定理 3.2.3 によりスペクトル分布関数が存在する。（3.2.3）に於て $\hat{P}$ に関する平均を計算すれば（3.3.3）を得る。 （証明終）

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

次に Donsker－Varadhan の結果を用いてスペクトル分布関数 $\rho(\lambda)$ の $\lambda\to 0$ の漸近的性質を求める。

補題 3.3.2 $\varphi(x)$ は $\int_{R^d}\varphi(x)dx>0$ なる非負値 Borel 可測関数で，$\varphi(x)=o(|x|^{-(d+2)})$ $(|x|\to\infty)$ とする。この時

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{d/d+2}}\log E^{t,0}_{0,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^t\varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$=-\left(\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{d/d+2}$$

である。ここで γ_d は単位球で Dirichlet 境界条件を持つ $-\frac{1}{2}\triangle$ の最小固有値である。

証明 Donsker－Varadhan 〔2〕と同様の方法で

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t^{d/d+2}}\log E^{t,0}_{0,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^t\varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$\geqq-\left(\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{d/d+2}$$

を得る。又一方 Donsker－Varadhan〔2〕の Theorem 2 と注意 3.1.6 により，自然数 n について

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t^{d/d+2}}\log E^{t,0}_{0,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^t\varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$\leqq\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t^{d/d+2}}\log E^{t,0}_{0,0}\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^{\frac{n-1}{n}t}\varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$\leqq\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t^{d/d+2}}\log n^{d/2}E_0\left[\exp\left\{-\int_{R^d}\left(1-e^{-\int_0^{\frac{n-1}{n}t}\varphi(x(s)-x)ds}\right)dx\right\}\right]$$

$$\leqq-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{d/d+2}\left(\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{d/d+2}$$

なので，$n\to\infty$にすれば上の補題が示される。　　　　　　　　　(証明終)

定理 3.3.3　$\varphi(x)$はR^d上の恒等的には零でない非負値連続関数で$\varphi(x) = o(|x|^{-(d+2)})$ $(|x|\to\infty)$とする。この時 $\{-\frac{1}{2}+\triangle\int_{R^d}\varphi(x-y)\hat{\omega}(dy):\hat{\omega}\in\hat{\Omega}\}$のスペクトル分布関数$\rho(\lambda)$は

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{d/2}\log\rho(\lambda) = -(\gamma_d)^{d/2}$$

をみたす。

証明　定理 3.3.1 と補題 3.3.2 により

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{d/d+2}}\log\int_0^\infty e^{-t\lambda}\,d\rho(\lambda) = -\left(\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2\gamma_d}{d}\right)^{d/d+2}$$

である。従って Minlos − Povzner の Tauberian theorem (M. Fukushima〔3〕)を用いれば上の等式が得られる。　　　　(証明終)

I.M.Lifshitz〔7〕〔8〕はこの問題を物理的に議論し漸近的性質を求めている。$\varphi(x)$が$|x|\to\infty$で定理 3.3.3 よりゆるやかならば，スペクトル分布関数の$\lambda\to 0$の漸近的性質は一般的には Wiener sausage だけから決まらなく$\varphi(x)$にも依存する。

§ 3.4　スペクトル分布関数の $\lambda\to\pm\infty$ の漸近的挙動

この節ではポテンシャルが連続な道を持つガウス型定常確率場であるときの Schrödinger 作用素のスペクトル分布関数の$\lambda\to-\infty$の漸近的性質と，ポテンシャルが定理 3.2.3 の条件をみたす定常確率場であるときのスペクトル分布関数の$\lambda\to\infty$の漸近的挙動を求める。

定理 3.4.1.　$(\Omega, \mathcal{B}, P, q(x,\omega))$は連続な道を持つガウス型定常確

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

率場とする。この時 $\{-\frac{1}{2}\triangle + q(x, \omega) : \omega \in \Omega\}$ のスペクトル分布関数 $\rho(\lambda)$ が存在し

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \lambda^{-2} \log \rho(\lambda) = -\frac{1}{2E[(q(o)-E[q(o)])^2]}$$

をみたす。

<u>証明</u> $(\Omega, \mathcal{B}, P, q(x, \omega))$ はガウス型なので Jensen 不等式を用いれば定理 3.2.3 の可積分条件をみたすことが容易にわかる。従ってスペクトル分布関数が存在する。

$q(x, \omega)$ の平均値を m，共分散関数を $\gamma(x)$ とする。$|\gamma(x)| \leqq \gamma(o)$ $(x \in R^d)$ なので

$$E \times E_{0,0}^{t,0}[\exp\{-\int_0^t q(x(s), \omega)\, ds\}]$$

$$= E_{0,0}^{t,0}[\exp\{-mt + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t \gamma(x(s)-x(u))\, ds\, du\}]$$

$$\leqq \exp\{-mt + \frac{1}{2}\gamma(o)\, t^2\}$$

である。他方 $\varepsilon > 0$ に対して

$$E_{0,0}^{t,0}[\exp\{-mt + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t \gamma(x(s)-x(u))\, ds\, du\}]$$

$$\geqq E_{0,0}^{t,0}[\exp\{-mt + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t \gamma(x(s)-x(u))\, ds\, du\};$$

$$\sup_{o \leqq s \leqq t} |x^{(i)}(s)| < \varepsilon \quad i = 1, \cdots, d]$$

$$\geqq \exp\{-mt + \frac{1}{2}\inf_{x \in U_\varepsilon} \gamma(x)\, t^2\} P_{0,0}^{t,0}(\sup_{o \leqq s \leqq t} |x^{(i)}(s)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, d)$$

である。但し $U_\varepsilon = \{x \in R^d ; |x^{(i)}| < 2\varepsilon, i = 1, \cdots, d\}$ である。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$P^{t,0}_{0,0}\left(\sup_{0\leqq s\leqq t}|x^{(i)}(s)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots,d\right)$$
$$\geqq(2\pi t)^{d/2}\varepsilon^{-d}\exp\left\{-\frac{\pi^2 d t}{8\varepsilon^2}\right\}$$

以上により

$$\lim_{t\to\infty} t^{-2}\log\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t\lambda}d\rho(\lambda)=\frac{1}{2}\gamma(0)$$

が従う。$\rho(-\infty)=0$ なので，Fukushima－Nagai－Nakao〔5〕のLemma 2により上の等式が示される。 （証明終）

最後にスペクトル分布関数の $\lambda\to\infty$ の性質を述べる。

定理 3.4.2 $(\Omega,\mathcal{B},P,q(x,\omega))$ は定理 3.2.3 の条件をみたすと仮定する。この時 $\{-\frac{1}{2}\triangle+q(x,\omega):\omega\in\Omega\}$ のスペクトル分布関数 $\rho(\lambda)$ は

$$\rho(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{d/2}+o(\lambda^{d/2}) \qquad (\lambda\to\infty)$$

である。

証明 注意 3.1.4 と補題 3.1.5 と Schwarz 不等式を用いれば次の不等式を得る。

$$E\times E^{t,0}_{0,0}\left[\exp\left\{-\int_0^t q(x(s),\omega)ds\right\}\right]$$
$$\leqq E\times E_0\left[\exp\left\{\int_0^{t/2}2q^-(x(s),\omega)ds+\int_0^{t/2}\frac{-x(s)}{t-s}dx(s)-\frac{1}{2}\int_0^{t/2}\left|\frac{x(s)}{t-s}\right|^2 ds\right\}\right]$$
$$=E\times E_0[h(t)]=f_1(t)$$

$\{t_n\}$ は $t_n\downarrow 0$ なる任意の数列とする。

$\lim_{n\to\infty}\int_0^{t_n/2}q^-(x(s),\omega)ds=0$ なので，エゴロフの定理により，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\Lambda\in\mathcal{B}\times\mathcal{M}$ が存在して，$P\times P_0(\Lambda^c)<\varepsilon$ で

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$\int_0^{t_n/2} q^-(x(s),\omega)ds$ は Λ 上で一様収束する。

$$f_1(t) = E\times E_0[h(t);\Lambda] + E\times E_0[h(t);\Lambda^c]$$
$$= g_1(t) + g_2(t)$$

とおく，自然数Nが存在して

$$\int_0^{t_n/2} 2q^-(x(s),\omega)ds < \varepsilon \qquad (n \geqq N,\ (\omega, w)\in\Lambda)$$

となる。それ故 $g_1(t_n) < e^{\varepsilon}$ $(n\geqq N)$ である。一方注意 3.1.6 と Hölder 不等式により

$$g_2(t) \leqq 2^{d/2}\ E\times E_0[\exp\{\int_0^{t/2} 2q^-(x(s),\omega)ds\ ;\Lambda^c]$$
$$\leqq 2^{d/2}\ E\times E_0[\exp\{\int_0^{t/2} rq^-(x(s),\omega)ds]^{2/r}\ \varepsilon^{r-2/r}$$

である。以上により $\lim_{t\downarrow 0} f_1(t) = 1$ である。
他方(3.1.3)により

$$E\times E_{0,0}^{t,0}[\exp\{-\int_0^t q(x(s),\omega)ds\}]$$
$$\geqq E\times E_0\ [\exp\{-\int_0^t q^+(x(s)-\frac{s}{t}x(t),\omega)ds\}]$$
$$= f_2(t)$$

を得る。ここで $q^+ = \max(q,0)$ である。従って $\lim_{t\downarrow 0} f_2(t) = 1$。故に

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda}d\rho(\lambda) = g(t,0,0) + o(t^{-d/2}) \qquad (t\downarrow 0)$$

が従う。Hardy-Littlewood の Tauberian theorem により上の定理を得る。 (証明終)

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

第Ⅲ部 文献

〔1〕 M.D.Donsker and S.R.S.Varadhan：Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, II, Comm. Pure and Appl. Math. 28(1975), 279－301.

〔2〕 M.D.Donsker and S.R.S.Varadhan：Asymptotics for the Wiener sausage, Comm. Pure and Appl. Math. 28(1975), 525－565.

〔3〕 M.Fukushima：On the spectral distribution of a disordered system and the range of a random walk, Osaka J. Math. 11(1974), 73－85.

〔4〕 福島正俊：ディリクレ形式とマルコフ過程，1975，紀伊国屋書店

〔5〕 M.Fukushima, H.Nagai and S.Nakao：On an asymptotic property of a spectra of a random difference operator, Proc. Japan Acad. 51(1975), 100－102.

〔6〕 K.Itô：Lectures on stochastic processes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961.

〔7〕 I.M.Lifshitz：Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems, Soviet Physics Uspekhi 7(1965) 549－573.

〔8〕 I.M.Lifshtz：Theory of fluctuation levels in disordered systems, Soviet Physics Jetp 26(1968) 462－469.

〔9〕 S.Nakao：On the spectral distribution of the Schrödinger operator with random potential, (to appear)

〔10〕 L.A.Pastur：Spectra of random self－adjoint operator, Russian Math. Surveys 28(1973), 1－67.

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

第Ⅳ部 ランダムポテンシャルをもった1次元 Schrodinger作用素のスペクトルの存在について

第4章 スペクトルに関する0−1法則(一般論)

この章ではランダム自己共役作用素のスペクトルに関する0−1法則をPastur〔1〕の結果を一般化した形で述べる。

§4.1. 自己共役作用素のスペクトル

$\mathcal{H}$ を複素ヒルベルト空間で特に可分とする。Aを $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $\{E_\lambda ; \lambda \in \mathbb{R}^1\}$ をその単位の分解とするとき，Aの点スペクトル，特異連続スペクトル，絶対連続スペクトルを第1部§1.2に従い次のように定義する。

$$(4.1.1) \qquad \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{R}^1 ; E_{\lambda+\varepsilon} \neq E_{\lambda-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

をAのスペクトル(spectrum)という。更に $\mathcal{H}$ のclosed subspacesを

$$(4.1.2) \qquad \mathcal{H}_p = \{u \in \mathcal{H} ; (E_\lambda u, u) \text{が}\lambda\text{について純粋不連続}\}$$

$$\mathcal{H}_{sc} = \{u \in \mathcal{H} ; (E_\lambda u, u) \text{が}\lambda\text{について特異連続}\}$$

$$\mathcal{H}_{ac} = \{u \in \mathcal{H} ; (E_\lambda u, u) \text{が}\lambda\text{について絶対連続}\}$$

とおくと，

$$(4.1.3) \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{ac}$$

が容易に分る。そこでそれぞれの空間での作用素を

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$(4.1.4)\quad \mathscr{D}(A_p) = \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{H}_p \qquad A_p u = Au$$

$$\mathscr{D}(A_{sc}) = \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{H}_{sc} \qquad A_{sc} u = Au$$

$$\mathscr{D}(A_{ac}) = \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{H}_{ac} \qquad A_{ac} u = Au$$

で定義すると，自己共役作用素となり，単位の分解は，$\mathscr{H}_p$，$\mathscr{H}_{sc}$，$\mathscr{H}_{ac}$ への射影を，P_p，P_{sc}，P_{ac} とすると，

$$(4.1.5)\quad E_\lambda^p = P_p E_\lambda P_p, \quad E_\lambda^{sc} = P_{sc} E_\lambda P_{sc}, \quad E_\lambda^{ac} = P_{ac} E_\lambda P_{ac}$$

となる。A_p，A_{sc}，A_{ac} の spectrum をそれぞれAの点 spectrum，特異連続 spectrum，絶対連続 spectrum と呼ぶ。

補題（4.1.1）　$u, v \in \mathscr{H}$ に対して分解

$$(4.1.6)\quad d(E_\lambda u, v) = d(E_\lambda^p u, v) + d(E_\lambda^{sc} u, v) + d(E_\lambda^{ac} u, v)$$

は測度，$d(E_\lambda u, v)$ のそれぞれ point 測度，singular continuous 測度，absolutely continuous 測度への一意的な分解となっている。

§4.2. ランダム自己共役作用素のスペクトルの可測性

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ をある確率空間とする。$\mathscr{H}$ を可分な複素ヒルベルト空間とし，各 $\omega \in \Omega$ に対して $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 $A(\omega)$ が与えられているとする。

定義（4.2.1）　$\{A(\omega)\} : \omega \in \Omega$ が可測であるとはすべての $u, v \in \mathscr{H}$ と，$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して

$$((A(\omega) - \lambda)^{-1} u, v)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

が$\mathcal{F}$－可測であることである。

$R_\lambda(\omega)=(A(\omega)-\lambda)^{-1}$ とおくと，$R_\lambda(\omega)$ は有界作用素であるが，$\{A(\omega)\}$ が可測であれば

$$\| R_\lambda(\omega)u \|^2 = \sup_{\substack{v\in\mathcal{H}\\ \|v\|\leqq 1}} |(R_\lambda(\omega)u, v)|$$

と，$\mathcal{H}$ の可分性より，$\| R_\lambda(\omega)u \|$ はすべての $u\in\mathcal{H}$ について$\mathcal{F}$－可測でありまた

$$\| R_\lambda(\omega) \| = \sup_{\substack{u\in\mathcal{H}\\ \|u\|\leqq 1}} \|(R_\lambda(\omega)u\|$$

も $\mathcal{F}$ － 可測となる。

<u>補題（**4.2.1**）</u>

$\{A(\omega)\}$ が可測とすると $(E_\lambda(\omega)u, v)$，$(E_\lambda^i(\omega)u, v)$ （$i=p$, sc，ac）はすべての $u, v\in\mathcal{H}$ に対して $\mathcal{F}$ －可測となる。

<u>証明</u> Stieltjes 変換の inversion formula より

$$\frac{1}{2}\{(E_{b+0}u, u)+(E_{b-0}u, u)\}-\frac{1}{2}\{E_{a+0}u, u)+(E_{a-0}u, u)\}$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_a^b I_m R(\lambda+i\varepsilon)d\lambda$$

E_λ は右連続であるから $b\downarrow b_0$，$a\downarrow a_0$ とすることにより $(E_\triangle u, u)=((E_{b_0}-E_{a_0})u, u)$ は可測になる。異なる u, v については $u=v$ の場合の線型結合で書けるから明らかに可測である。次に

$$\phi(\lambda, \omega, u)=\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ I_m(R_{\lambda+i\varepsilon}(\omega)u, u) \qquad \lambda\in\mathbb{R}^1$$

とおく。右辺は可測であるから，左辺も(λ, ω)について可測である。Fatou の定理より，各 $\omega\in\Omega$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$(E_{\triangle}^{ac}(\omega)u,\ u) = \int_{\triangle} \phi(\lambda,\ \omega\ ;\ u)\,d\lambda$$

である。従って左辺は $\mathcal{F}$ ー可測である。異なる $u, v \in \mathcal{H}$ についても上と同様である。

次に $E_{\triangle}^{p}(\omega)$ について調べる。$u \in \mathcal{H}$ に対して

$$\psi(\lambda,\ \omega\ ;\ u) = (E_{\lambda}u,\ u) - (E_{\lambda-0}u,\ u) \qquad (E_{\lambda}\ :\text{右連続})$$

とおくと，各 $u \in \mathcal{H}$ に対して，$\psi(\lambda,\ \omega\ ;\ u)$ に $(\lambda,\ \omega)$ について可測である。そこで

$$\triangle_{p}(u,\ \omega) = \{\lambda \in R'\ ;\ \psi(\lambda,\ \omega\ ;\ u) \neq 0\}$$

とおくと，各 $\omega \in \Omega$，$u \in \mathcal{H}$ に対して，$\triangle_{p}(u,\ \omega)$ は $\mathcal{R}^{1}$ の可測集合である。一方

$$(4.2.1)\quad (E_{\triangle}^{p}(\omega)u\ ;\ u) = \int_{\triangle} X_{\triangle_{p}(u,\omega)}(\lambda)\ d(E_{\lambda}(\omega)u,\ u) \qquad \text{for} \quad {}^{\forall}u \in \mathcal{H},\ {}^{\forall}\omega \in \Omega$$

である。ところが，関数 $f(\lambda,\ \omega) = X_{\triangle_{p}(u,\omega)}(\lambda)$ は $(\lambda,\ \omega)$ ー可測である。なぜなら

$$\{(\lambda,\ \omega)\ ;\ f(\lambda,\ \omega) \leqq 1\} = \{(\lambda,\ \omega)\ ;\ \lambda \in \triangle_{p}(u,\ \omega)\}$$
$$= \{(\lambda,\ \omega)\ ;\ \psi(\lambda,\ \omega\ ;\ u) \neq 0\}$$

であるからである。従って (4.2.1) の左辺が $\mathcal{F}$ ー可測であることをいうためには非負の $(\lambda,\ \omega)$ ー可測関数 $f(\lambda,\ \omega)$ に対して積分

$$\int_{\triangle} f(\lambda,\ \omega)\,d(E_{\lambda}(\omega)u,\ u)$$

が $\mathcal{F}$ ー可測であることを言えば十分であるが，それは通常の議論で容易に示せる。　　　　<u>Q.E.D.</u>

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

§ 4.3. ランダムスペクトルに関する 0 − 1 法則

Gを non−compact, locally compact, σ−compact Hausdorff topological group とし，μを左不変 Haar 測度即ち，Gの任意の Borel set B に対して $\mu(gB)=\mu(B)$ for $^{\forall}g\in G$をみたす測度とする。この節ではヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は $L^2(\mu)$とする。

$$U_g \ : \ L^2(\mu) \to L^2(\mu)$$

を $U_g f(x)=f(g^{-1}x)$で定義すると U_gは $L^2(\mu)$の Unitary 作用素で $U_{g_1g_2}=U_{g_1}U_{g_2}$ をみたす。
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$を確率空間とし，各 $g\in G$に対して保測変換 $T_g : \Omega\to\Omega$ が対応して $T_{g_1g_2}=T_{g_1}T_{g_2}$ をみたするとする。

定義(4.3.2) $\{A(\omega); \omega\in\Omega\}$ を可測な $L^2(\mu)$上のランダム自己共役作用素とする。$\{A(\omega)\}$が，$\{T_g ; g\in G\}$ 不変であるとは

$$(4.3.1) \quad \{A(T_g\omega)-\lambda\}^{-1}=U_g\{A(\omega)-\lambda\}^{-1}U_g^{-1} \qquad \text{for} \quad g\in G, \ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

が成立することである。

定義(4.3.2) $\{p(\omega); \omega\in\Omega\}$を $L^2(\mu)$の上の可測な projection とする。$\{p(\omega) : \omega\in\Omega\}$ が $\{T_g : g\in G\}$不変であるとは

$$(4.3.2) \quad p(T_g\omega)=U_g\,p(\omega)U_g^{-1} \qquad \text{for} \quad g\in G$$

が成立することである。

補題(4.3.1) $p(\omega)$を T_g −不変な可測 projection とする。T_gが ergodic, i.e $\{T_g\}$ −不変な可測集合が確率 0 又は 1 に限るならば，

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\dim p(\omega)\mathcal{H} = 0 \qquad \text{w.p. } 1$$
$$\text{or} \qquad = \infty \qquad \text{w.p. } 1$$

となる。

<u>証明</u> $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$を $L^2(\mu)$の完全正規直交系とする。
このとき

$$\dim p(\omega)\mathcal{H} = \mathrm{tr}\, p(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}(p(\omega)e_n, e_n)$$

である。従って

$$\begin{aligned}\dim p(T_g\omega)\mathcal{H} &= \sum_{n=1}^{\infty}(p(T_g\omega)e_n, e_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(U_g p(\omega)U_g^{-1}e_n, e_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(p(\omega)U_g^{-1}e_n, U_g^{-1}e_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(p(\omega)e_n, e_n) = \dim p(\omega)\mathcal{H}\end{aligned}$$

明らかに $\dim p(\omega)\mathcal{H}$ は可測関数であるから $\{T_g\}$ の ergode 性より，
$\dim p(\omega)\mathcal{H}$ は確率１で 定数dとなる。($0 \leqq d \leqq +\infty$)
そこで $e(x)$を non−zero の support compact 連続関数で

$$\int_G |e(x)|^2 \mu(dx) = 1$$

をみたすものとする。$K = \mathrm{supp}\ e$ とおくと，Gは non−compact であるから $\exists\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ s.t

$$g_i^{-1}K \frown g_j^{-1}K = \phi \qquad \text{for } i \neq j$$

となる。そこで $\tilde{e}_n = U_{g_n}^{-1}e$ とおくと，$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上のように選んであるから

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$(\widetilde{e}_n, \widetilde{e}_n) = \delta_{n,m}$$

をみたす。従って

$$d = \sum_{j=1}^{\infty} (p(\omega) e_j, e_j)$$
$$\geqq \sum_{n=1}^{\infty} (p(\omega)\widetilde{e}_n, \widetilde{e}_n)$$

より

$$d \geqq \sum_{n=1}^{\infty} M\{(p(\omega)\widetilde{e}_n, \widetilde{e}_n)\} \quad (\text{M は sample 平均を表わす})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} M\{(p(T_{g_n}\omega) e, e)\} \quad (p(\omega) \text{ は } T_g - \text{不変})$$
$$= \infty \times M\{(p(\omega) e, e)\} \quad (T_g \text{ は保則変換})$$

となる。従って，$d < +\infty$ ならば

$$M\{(p(\omega)e, e)\} = 0 \qquad \text{for} \quad {}^{\forall}e \in C_c(G)$$

$$\therefore \quad (p(\omega)e, e) = 0 \quad \text{a.s.} \quad \text{for} \quad {}^{\forall}e \in C_c(G)$$

$C_c(G)$ は可分であるから

$$(p(\omega)e, e) = 0 \qquad \text{for} \quad {}^{\forall}e \in C_c(G) \qquad \text{a.s.}$$

となる。即ち　$p(\omega) = 0$　a.s.である。　**Q.E.D.**

定理(4.3.1)　$\{A(\omega)\}$ を T_g －不変な可測自己共役作用素となる。$\{T_g\}$ が ergodic ならば $\mathcal{R}^1$ の区間 $\triangle$ に対して次の 0 － 1 法則が成立する。

(1)　$\dim E_{\triangle}(\omega)\mathcal{H} = 0$　　w.p. 1
　or　$= \infty$　　w.p. 1

(2)　$\dim E_{\triangle}^{i}(\omega)\mathcal{H} = 0$　　w.p. 1
　or　$= \infty$　　w.p. 1　　for　$i = $p, sc, ac.

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

証明　分解 $E_\triangle = E_\triangle^p + E_\triangle^{sc} + E_\triangle^{ac}$ の一意性より $E_\triangle^i(\omega)$ ($i = p.sc.ap$) は $\{T_g\}$ −不変な projection である。従って，補題 (5.3.1) よりこの定理が従う。　Q.E.D.

補題 (4.3.2)　$\{p(\omega)\}$ を T_g −不変の可測 projection とする。
T_g が ergodic のとき

$$\dim p(\omega)\mathcal{H} = 0 \quad \text{a.s.}$$

$$\Longleftrightarrow \quad M\{(p(\omega)e, e)\} = 0 \quad \text{for } {}^{\exists}e \in C_c(G)$$
$$\text{s.t. } \{U_g e, g \in G\} \text{ dense in } L^2(\mu)$$

証明　$\dim p(\omega)\mathcal{H} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad M\{(p(\omega)\tilde{e}, \tilde{e})\} = 0 \quad \text{for } {}^{\exists}\{\tilde{e}\} \text{ dense in } L^2(\mu)$$
$$\Longleftrightarrow \quad M\{(p(\omega)U_g^{-1}e, U_g^{-1}e)\} = 0 \quad \text{for } g \in G$$
$$\Longleftrightarrow \quad M\{(p(T_g\omega)e, e)\} = 0 \quad \text{〃}$$
$$\Longleftrightarrow \quad M\{(p(\omega)e, e)\} = 0$$

Q.E.D.

定理 (4.3.2)　△を $\mathbb{R}^1$ の任意の区間とする。

(1)　$E_\triangle(\omega) = 0$ 　w.p.1

$$\Longleftrightarrow \quad M\{(E_\triangle(\omega)e, e)\} = 0 \quad \text{for } {}^{\exists}e \in C_c(G) \text{ s.t.}$$
$$\{U_g e, g \in G\} \text{ dense in } L^2(\mu)$$

(2)　$E_\triangle^i(\omega) = 0$ 　w.p.1　($i = p, sc, ac$)

$$\Longleftrightarrow \quad M\{(E_\triangle^i(\omega)e, e) = 0 \quad \text{for } {}^{\exists}e \in C_c(G) \text{ s.t.}$$
$$\{U_g e, g \in G\} \text{ dense in } L^2(\mu)$$

系 (4.3.1)　$G = \mathbb{Z}^d$ のとき $\{A(\omega)\}$ が定理 (5.3.2) の条件をすべ

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

てみたすとき

(1) $E_\triangle(\omega)=0$ w.p.1 但し，$e=(0,0,\cdots,0)$

$\Longleftrightarrow$ $M\{(E_\triangle(\omega)e_0,\ e_0)\}=0$

(2) $E_\triangle^i(\omega)=0$ w.p.1

$\Longleftrightarrow$ $M\{(E_\triangle^i(\omega)e_0,\ e_0)\}=0$ $i=p,\ sc,\ ac$

となる。

次に $E_\lambda(\omega)$ が $x, y\in G$ について連続な Kernel $E_\lambda(x,y,\omega)$をもつとき即ち，

$$(E_\triangle(\omega)u,\ v)=\int_{G\times G} E_\triangle(x,y,\omega)u(x)\overline{v(y)}\mu(dx)\mu(dy)$$

$$\text{for}\quad {}^\forall u, v\in C_c(G)$$

のとき，

<u>系(**4.3.2**)</u> 上の仮定と，定理(5.3.2)の条件の下で

(1) $E_\triangle(\omega)=0$ w.p.1

$\Longleftrightarrow$ $M(E_\triangle(0,0,\omega))=0$ where 0: identily of G

(2) $E_\triangle^i(\omega)=0$ w.p.1

$\Longleftrightarrow$ $M(E_\triangle^i(0,0,\omega))=0$ where 〃

$(i=p,\ sc,\ ac)$

<u>証明</u> $\mathrm{tr}\,E_\triangle(\omega)=\int_G E_\triangle(x,x,\omega)dx$ より，(1)は明白である。又各 $E_\triangle^i(\omega)$に対する Kernel $E_\triangle^i(x,y,\omega)$が存在することは $E_\triangle^i(\omega)=E_{\triangle\frown\triangle_i(\omega)}(\omega)$ $({}^\exists\triangle_i(\omega)$ Borel sets of $\mathbb{R}^1$ for ${}^\forall\omega\in\Omega$, $i=p, sc, ac)$ となることより分る。従って $E_\triangle(\omega)$と同様に(2)が示される。 <u>**Q.E.D.**</u>

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

§ 4.4. 各スペクトル部分の抽出法

この節では，$\sigma(d\lambda)$ を $\mathcal{R}^1$ 上の Radon 測度とするとき，σ の各スペクトル部分を抽出する方法を述べる。

補題（4.4.1） $\triangle$ を $\mathcal{R}^1$ の有限区間とする。

$$(4.4.1)\qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\left|\int_{\triangle}e^{i\lambda t}\sigma(d\lambda)\right|^2=\sum_{\lambda_j\in\triangle}\sigma(\lambda_j)^2$$

但し $\sigma(d\lambda)$ の jump する点を $\{\lambda j\}$ とする。

証明

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\left|\int_{\triangle}e^{i\lambda t}\sigma(d\lambda)\right|^2=\frac{1}{2T}\int_{\triangle\times\triangle}\sigma(d\lambda)\sigma(d\lambda')\int_{-T}^{T}e^{i(\lambda-\lambda')t}dt$$

$$=\int_{\triangle\times\triangle}\frac{\sin(\lambda-\lambda')T}{T(\lambda-\lambda')}\sigma(d\lambda)\sigma(d\lambda')$$

$$=\int_{\triangle\times\triangle\setminus I}\frac{\sin(\lambda-\lambda')T}{T(\lambda-\lambda')}\sigma(d\lambda)\sigma(d\lambda')$$

$$+\int_{I}\sigma(d\lambda)\sigma(d\lambda')$$

但し $I=\{(\lambda,\lambda)\in\triangle\times\triangle\}$,

であるが，

$$第2項=\sum_{\lambda_j\in\triangle}\sigma(\lambda_j)^2$$

であり，又 Lebesgue の収束定理により

$$第1項\to 0\qquad \text{as}\quad T\to\infty,$$

となり，結局（4.4.1）を得る。 Q.E.D.

次は Green 関数から接近する方法を述べる。そのために次の関数の class

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

を導入する。即ち，上半平面で正則で，その虚数部分が非負になる関数全体の集合を $\mathcal{R}$ で表わす。このとき，

補題（4.4.2） $R(\lambda)\in\mathcal{R}$ のための必要十分条件は

$$(4.4.2)\qquad R(\lambda)=\alpha+\beta\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{t-\lambda}-\frac{t}{1+t^2}\right\}\sigma(dt)$$

ここで　　$\alpha\in\mathcal{R}$，$\beta\geqq 0$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(dt)}{1+t^2}<+\infty$

証明　Kac−Krein〔2〕を参照せよ。

自己共役作用素の Green 作用素を G_λ（$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{R}$）とすると，$(G_\lambda u, u)$ は任意の $u\in\mathcal{H}$ に対して $\mathcal{R}$ に入る。但しこのときは

$$(G_\lambda u,u)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(dt)}{t-\lambda}\qquad\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(dt)<\infty\right)$$

となる。又，G_λ が連続な Kernel $G_\lambda(x,y)$ をもつとき，$G_\lambda(x,x)$ は各 x に対して $\mathcal{R}$ の関数となる。

次の補題は，$R\in\mathcal{R}$ が与えられたとき対応する $\sigma(dt)$ から jump 部分をとり出す方法を考える。

補題（4.4.3） $R\in\mathcal{R}$ とし $\sigma(dt)$ を（4.4.2）が R から決まる $\mathcal{R}^1$ 上の Radon 測度とする。このとき $\mathcal{R}^1$ の任意の有限区間△に対して次の公式が成立する。

$$(4.4.3)\qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\triangle}|R(\lambda+i\varepsilon)|^2\,d\lambda=\sum_{\lambda_j\in\mathring{\triangle}}\sigma(\lambda_j)^2+\frac{1}{2}\{\sigma(a)^2+\sigma(b)^2\}$$

但し $\{\lambda_j\}$ は $\sigma(d\lambda)$ の jump points 全体で，$\mathring{\triangle}$ は△の内部，a，b は△の端点とする。

証明　$R(\lambda)$ は次のように表わされているとする。

$$R(\lambda)=\alpha+\beta\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{t-\lambda}-\frac{t}{1+t^2}\right\}\sigma(dt)$$

但し，$\alpha\in R$，　$\beta\geqq 0$　　$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(dt)}{1+t^2}<+\infty$

そこで，Rを△内で近似するものとして

(4.4.4)　$R_{\triangle}(\lambda)=\int_{\overline{\triangle}}\frac{\sigma(dt)}{t-\lambda}$

とおく。まず

(4.4.5)　$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\int_{\triangle}|R(\lambda+i\varepsilon)-R_{\triangle}(\lambda+i\varepsilon)|^2\,d\lambda=0$

を示す。

$$R(\lambda+i\varepsilon)-R_{\triangle}(\lambda+i\varepsilon)=\alpha+\beta(\lambda+i\varepsilon)+\int_{\overline{\triangle}}\frac{t}{1+t^2}\sigma(dt)$$

$$+\int_{(\overline{\triangle})^c}\left\{\frac{1}{t-\lambda-i\varepsilon}-\frac{t}{1+t^2}\right\}\sigma(dt)$$

であるが第3項までは $\varepsilon\downarrow 0$ のとき有限値に有界収束するから，問題は第4項のみである。そこで

$$\delta(\lambda+i\varepsilon)=\int_{(\overline{\triangle})^c}\left\{\frac{1}{t-\lambda-i\varepsilon}-\frac{t}{1+t^2}\right\}\sigma(dt)$$

とおくと，

(4.4.6)　$\overline{\lim_{\varepsilon\ 0}}\ \varepsilon\int_{\triangle}|R(\lambda+i\varepsilon)-R_{\triangle}(\lambda+i\varepsilon)|^2\,d\lambda$

$$=\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon\int_{\triangle}|\delta(\lambda+i\varepsilon)|^2\,d\lambda$$

となる。ここで $(\overline{\triangle})^c$ を△から距離a以内にある部分 $\triangle_1(a)$ とa以外にある部分 $\triangle_2(a)$ とに分ける。このとき

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\delta(\lambda+i\varepsilon)=\int_{\triangle_1(a)}+\int_{\triangle_2(a)}=I_1(\lambda+i\varepsilon)+I_2(\lambda+i\varepsilon)$$

であるが，$\varepsilon\downarrow 0$ のとき $I_2(\lambda+i\varepsilon)$ は $\lambda\in\triangle$ に関して一様に $I_2(\lambda)$ に収束するから，任意の a に対して

$$(4.4.6)\text{の左辺}=\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon\int_{\triangle}|I_1(\lambda+i\varepsilon)|^2\,d\lambda$$

である。そこで $\triangle_1(a)\downarrow\phi$ as $a\downarrow 0$ に注意すると任意の $\varepsilon_0>0$ に対して $a>0$ が存在して

$$\sigma(\triangle_1(a))<\varepsilon_0$$

となる。この a に対して Schwarz の不等式より

$$\varepsilon\int_{\triangle}|I_1(\lambda+i\varepsilon)|^2 d\lambda\leqq\varepsilon\int_{\triangle}d\lambda\int_{\triangle_1}\sigma(dt)\int_{\triangle_1}\left|\frac{1}{t-\lambda-i\varepsilon}-\frac{t}{1+t^2}\right|^2\sigma(dt)$$

$$\leqq\varepsilon_0\left\{2|\triangle|\int_{\triangle_1}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2\sigma(dt)+2\int_{\triangle_1}\sigma(dt)\int_{R^1}\frac{\varepsilon\,d\lambda}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2}\right\}$$

$$\leqq c\ \varepsilon_0 \qquad (\text{但し } c \text{ は定数})$$

$$\therefore\quad \overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon\int_{\triangle}|R(\lambda+i\varepsilon)-R_{\triangle}(\lambda+i\varepsilon)|^2\,d\lambda\leqq c\ \varepsilon_0$$

ε_0 は任意であるから(4.4.5)を得る。従って問題は $R_\triangle$ に帰着された。

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\triangle}|R_{\triangle}(\lambda+i\varepsilon)|^2\,d\lambda=\frac{\varepsilon}{\pi}\int\int_{\triangle\times\triangle}\sigma(dt)\sigma(ds)\int_{\triangle}\frac{d\lambda}{(t-\lambda-i\varepsilon)(s-\lambda+i\varepsilon)}$$

であるが，

$$h_\varepsilon(t,s)=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\triangle}\frac{d\lambda}{(t-\lambda-i\varepsilon)(s-\lambda+i\varepsilon)}$$

とおくと，

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\triangle} | R_{\triangle}(\lambda+i\varepsilon)|^2 d\lambda=\iint_{\overline{\triangle}\times\overline{\triangle}} h_{\varepsilon}(t, s)\sigma(dt)\sigma(ds)$$

となる。Schwarz の不等式より

$$| h_{\varepsilon}(t, s)| \leqq \sqrt{h_{\varepsilon}(t, t)}\ \sqrt{h_{\varepsilon}(s, s)}$$

であるが，

$$h_{\varepsilon}(t, t)=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\triangle}\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2}\leqq 1$$

であるから

$$| h_{\varepsilon}(t, s)| \leqq 1$$

である。一方

$$h_{\varepsilon}(t, s)=\frac{1}{s-t+2\varepsilon i}\left\{\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\triangle}\frac{d\lambda}{t-\lambda-i\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\triangle}\frac{d\lambda}{s-\lambda+i\varepsilon}\right\}$$

であるから，

$$t-s\neq 0 \text{ のとき，}\quad h_{\varepsilon}(t, s)\to 0 \quad \text{as}\quad \varepsilon\downarrow 0$$

である。従って，$I=\{(t, t)\in\overline{\triangle}\}$ とすれば Lebesgue の有界収束定理により

$$\iint_{\overline{\triangle}\times\overline{\triangle}\setminus I} h_{\varepsilon}(t, s)\sigma(dt)\sigma(ds)\to 0 \qquad \text{as}\qquad \varepsilon\downarrow 0$$

また

$$\iint_{I} h_{\varepsilon}(t, s)\sigma(dt)\sigma(ds)=\sum_{\lambda_j\in\overline{\triangle}} h_{\varepsilon}(\lambda_j, \lambda_j)\sigma(\lambda_j)^2$$

であるが，

$$h_{\varepsilon}(t, t)=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\triangle}\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2}\longrightarrow\begin{cases}1 & t\in\mathring{\triangle}\\ \dfrac{1}{2} & t\in\partial\triangle\\ 0 & t\in(\overline{\triangle})^c\end{cases}$$

より，全てをまとめて，

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\triangle} |R(\lambda+i\varepsilon)|^2 d\lambda = \frac{1}{2}\left\{\sigma(a)^2+\sigma(b)^2\right\} + \sum_{\lambda_j\in\mathring{\triangle}} \sigma(\lambda_j)^2$$

を得る。 Q.E.D.

補題(**4.4.4**) $R\in\mathcal{R}$, $\tau(\lambda)=\int_{[0,\lambda]}\sigma(dt)$ とおくと

$$(4.4.7)\quad \frac{\tau(b+0)+\tau(b-0)}{2}-\frac{\tau(a+0)+\tau(a-0)}{2} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_a^b \mathrm{I_m}R(\lambda+i\varepsilon)d\lambda$$

補題(**4.4.5**) $R\in\mathcal{R}$, $\tau(\lambda)=\int_{[0,\lambda]}\sigma(dt)$

(1) $$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\tau(\lambda+\varepsilon)-\tau(\lambda-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\mathrm{I_m}R(\lambda+i\varepsilon)$$

これは一方が存在すれば他方が存在するという意味である。

(2) $\sigma(dt)$ の絶対連続部分を $\sigma'(t)$ とすると

$$\sigma'(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\mathrm{I_m}R(t+i\varepsilon) \qquad \text{a.e.}\quad dt$$

補題(4.4.4),(4.4.5)はよく知られているので証明はしない。

我々は,補題(4.4.1)又は(4.4.3)により,Rの点スペクトル部分を又,補題(4.4.5)で絶対連続部分を,補題(4.4.4)でR自身のスペクトルを計算できる。(4.4.1)を計算するには時間に依存した Schrödinger方程式を解く必要がある。しかし一般的には Green 関数の方が計算しやすいので,補題(4.4.3)以後の方が有用であると思われる。

以上で第4章を終わるが,次の目標は,各スペクトル部分が存在するための

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

条件を明確にすることである。これについては次章で，最近の話題を中心に述べる。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

第5章　点スペクトルの存在について

（I. J. Goldseid, S. A. Molchanov and L. A. Pastur の最近の結果の紹介）

最近上記三者は一次元の Schrödinger 作用素でポテンシャルが Markov 型のとき，確率1で点スペクトルのみが至る所稠密に存在することを示した。それでこの章ではそれを紹介し，又，それについての注意を最後に付けることにする。然しながら充分検討する時間がなかったので分らなかった点は，§6.2の最後に書き留めておく。参考にする文献は次の二つであるが，主に後者を参照したい。

I. J. Goldseid and S. A. Molchanov. On Mott problem, DAH, 230(1976), 761－764.

I. J. Goldseid, S. A. Molchanov and L. A. Pastur. one－dimensional random Schrödinger operator with purely point spectrum, Functional Analy. and its appli. vol. 11, no. 1, (1977) 1－10.

§5.1.　一般展開定理

この節では後の節の準備のために1次元2階微分作用素の一般展開定理について述べる。証明等詳しい事は例えば K. Yoshida〔3〕を参照して欲しい。

$q(x)$ を (a, b) で定義された実連続関数とする。但し，$-\infty \leqq a < o < b \leqq +\infty$ とする。$\varphi_\lambda(x)$，$\psi_\lambda(x)$ を次の方程式の解とする。

$$(6.1.1)\begin{cases} -\varphi_\lambda''(x)+q(x)\varphi_\lambda(x)=\lambda\varphi_\lambda(x) \\ \varphi_\lambda(0)=1,\ \varphi_\lambda'(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\psi_\lambda''(x)+q(x)\psi_\lambda(x)=\lambda\psi_\lambda(x) \\ \psi_\lambda(0)=0,\ \psi_\lambda'(0)=1 \end{cases}$$

$\varphi_\lambda(x)$，$\psi_\lambda(x)$ は固定した x に対して λ について正則関数である。境界 b は解 $\varphi_\lambda(x)$，$\psi_\lambda(x)$ がある λ についてどちらも $L^2([0, b))$ に属している

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

時極限円であると言う。このときすべての$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して φ_λ，ψ_λ は $L^2([0,b))$に属していることが分る。逆のとき，即ち，φ_λ，ψ_λ のどちらかが，L に属さない時極限点であるという。境界 a についても同様である。極限円の場合は境界 b に境界条件を付して固有値問題を考えるが，極限点の場合は，境界条件を考える必要はなく，作用素

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

は $L^2([0,b))$への自己共役拡張を一意的に持つ。以下現われるのは極限点の場合のみである。そこで我々は以下 a，b ともに極限点の場合のみ考えることにする。表記の一般展開定理は作用素 L の一般固有関数展開を与える定理である。

$$(5.1.2)\qquad R_1(\lambda) = -\lim_{x\to a}\frac{\psi_\lambda(x)}{\varphi_\lambda(x)},\qquad R_2(\lambda) = \lim_{x\to b}\frac{\psi_\lambda(x)}{\varphi_\lambda(x)}$$

とおくと，a，b ともに極限点の場合上の極限は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ で広義一様に存在して，どちらも，class $\mathcal{R}$ （定義は § 4. 4 を見よ。）に属する。従って

$$m_{11}(\lambda) = \frac{R_1(\lambda)R_2(\lambda)}{R_1(\lambda)+R_2(\lambda)} \in \mathcal{R},\qquad m_{22}(\lambda) = \frac{-1}{R_1(\lambda)+R_2(\lambda)} \in \mathcal{R}$$

である。そこで

$$m_{12}(\lambda) = m_{21}(\lambda) = \frac{R_1(\lambda)}{R_1(\lambda)+R_2(\lambda)}$$

とおくと，

$$\sigma_{ij}(I) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_I \mathrm{Im}\, m_{ij}(\lambda+\varepsilon i)\,d\lambda$$

が存在して，行列

$$\Sigma(I) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(I), & \sigma_{12}(I) \\ \sigma_{21}(I), & \sigma_{22}(I) \end{pmatrix}$$

は実対称正定値行列となる。従って

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$(5.1.3)\qquad \begin{cases} \sigma_{21}(I)=\sigma_{12}(I) \\ |\sigma_{21}(I)\,\sigma_{12}(I)| \leqq \sigma_{11}(I)\,\sigma_{22}(I) \end{cases}$$

となる。自己共役作用素Lの単位の分解 E_λ は行列測度 Σ を使い,

$$(5.1.4)\qquad E_I(x, y)=\int_I \varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)\sigma_{11}(d\lambda)+\int_I \varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)\sigma_{12}(d\lambda) + \int_I \varphi_\lambda(y)\psi_\lambda(x)\sigma_{21}(d\lambda)+\int_I \psi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)\sigma_{22}(d\lambda)$$

とおくと,

$$(5.1.5)\qquad (E_I u, v)=\int_a^b\int_a^b u(x)\overline{v(y)}\,E_I(x, y)\,dx\,dy$$

となる。従って,Lが point spectrum を持つための必要十分条件は

$$(5.1.6)\qquad \sigma(I)=\sigma_{11}(I)+\sigma_{22}(I)$$

とおくとき,測度 $\sigma(d\lambda)$ が,point spectrum を持つことである。

q(t)が確率過程のとき,一般には $\sigma(d\lambda)$ は直接計算できない。然しながら q(t)がマルコフ過程の場合には,まず有限区間 $[-\ell, \ell]$ での $\sigma_\ell(d\lambda)$ を計算し,それの極限として $\sigma(d\lambda)$ を調べることができる。そのため有限区間 $[-\ell, \ell]$ での $\sigma_\ell(d\lambda)$ を出す公式を述べておく。

一般に方程式

$$L\phi=-\phi''+q(t)\phi=\lambda\phi$$

の解 ϕ を次のように極座標表示すると

$$\phi(t)=\gamma(t)\sin\theta(t)\;,\qquad \phi'(t)=\gamma(t)\cos\theta(t)$$

$\{\gamma(t), \theta(t)\}$ は次の方程式をみたす。

$$(5.1.7)\qquad \theta'=\cos^2\theta+(\lambda-q)\sin\theta$$

$$(5.1.8)\qquad \gamma'=\frac{1}{2}\gamma\sin 2\theta\,(1+q-\lambda)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

補助的な関数 $z(t)=\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(t)$ を導入すると，z は方程式

$$(5.1.9)\qquad z'=-z\sin 2\theta\,(1+q-\lambda)+\sin^2\theta$$

をみたす。記号の簡略化のため次のように約束する。即ち，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ に対して

$$f^{+}(s)=f(-\ell+s),\qquad f^{-}(s)=-f(\ell-s)$$

と書く。

<u>補題(**5.1.1**)</u>　(5.1.7)の解 $\theta(t)$ に対し初期条件 $\theta^{+}(0)=\varphi^{+}$ をみたすものを $\theta^{+}(t)$ とし，$\theta^{-}(0)=\varphi^{-}$ をみたすものを $\theta^{-}(t)$ とかく。又(6.1.9)の解 $z(t)$ に対し初期条件 $z^{+}(0)=0$ をみたすものを $z^{+}(t)$，$z^{-}(0)=0$ をみたすものを $z^{-}(t)$ とかく。作用素Lを〔$-\ell$，ℓ〕で境界条件

$$(5.1.10)\qquad \begin{aligned}&\phi(\ell)\cos\varphi^{-}+\phi'(\ell)\sin\varphi^{-}=0,\\ &\phi(-\ell)\cos\varphi^{+}-\phi'(-\ell)\sin\varphi^{+}=0\end{aligned}$$

で考えたとき(6.1.6)の σ を σ_ℓ とし，σ_ℓ の jump points を $\lambda_i(\ell)$ その点での weight を $\alpha_i(\ell)$ とするとき，任意の $\varepsilon\geqq 0$ と，有限閉区間△に対し

$$(5.1.11)\qquad \sum_{\lambda_i\in\triangle}\alpha_i^{1+\varepsilon}(\ell)=\int_{\triangle}d\lambda\,\frac{\delta[(\theta_\lambda^{+}(\ell)+\theta_\lambda^{-}(\ell))\bmod\pi]}{(z^{+}(\ell)+z^{-}(\ell))^{\varepsilon}}$$

が成立する。 但し，

$$\int_{\triangle}d\lambda\,\delta(f(\lambda))\,g(\lambda)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\triangle}d\lambda\,X_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(f(\lambda))\,g(\lambda)$$

とする。

<u>証明</u>　$f(x)$ を△上で定義された滑らかな関数で△内に有限個の zero 点 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ をもつものとする。このとき連続関数 $g(x)$ に対し

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

(5.1.12) $$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \int_{\triangle} dx\, \delta(f(x))\,|f'(x)|\,g(x)$$

となることが容易に分る。

ここで $\sigma_\ell(d\lambda)$ がどのようになっているかみてみよう。(5.1.2)の R_1, R_2 としては

$$R_1(\lambda) = -\frac{\psi_\lambda(-\ell)\cos\varphi^+ - \psi_\lambda'(-\ell)\sin\varphi^+}{\varphi_\lambda(-\ell)\cos\varphi^+ - \varphi_\lambda'(-\ell)\sin\varphi^+},\quad R_2(\lambda) = \frac{\psi_\lambda(\ell)\cos\varphi^- + \psi_\lambda'(\ell)\sin\varphi^-}{\varphi_\lambda(\ell)\cos\varphi^- + \varphi_\lambda'(\ell)\sin\varphi^-}$$

とおく。

$$m(\lambda) = m_{11}(\lambda) + m_{22}(\lambda) = \frac{R_1(\lambda)R_2(\lambda)-1}{R_1(\lambda)+R_2(\lambda)}$$

とすると

$$\sigma_\ell(I) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\pi}\int_I \mathrm{Im}\, m(\lambda+i\varepsilon)\,d\lambda$$

である。ところが，初期条件 $\phi(-\ell)=\sin\varphi^+$, $\phi'(-\ell)=\cos\varphi^+$ をみたす $L\phi=\lambda\phi$ の解を $\phi(t)$ とすると，Wronskian の不変性により

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(-\ell)\cos\varphi^+ - \varphi_\lambda'(-\ell)\sin\varphi^+ &= \varphi_\lambda(-\ell)\phi'(-\ell) - \varphi_\lambda'(-\ell)\phi(-\ell)\\ &= \varphi_\lambda(0)\phi'(0) - \varphi_\lambda'(0)\phi(0)\\ &= \varphi'(0) = (\phi^+)'(\ell)\end{aligned}$$

である。同様に

$$\psi_\lambda(-\ell)\cos\varphi^+ - \psi_\lambda'(-\ell)\sin\varphi^+ = -\phi(0) = -\phi^+(\ell)$$

従って，

$$R_1(\lambda) = \frac{\phi^+(\ell)}{(\phi^+)'(\ell)}$$

を得る。同様に R_2 については

$$R_2(\lambda) = \frac{\phi^-(\ell)}{(\phi^-)'(\ell)}$$

であるから，$m(\lambda)$ は結局

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$m(\lambda)=\frac{\phi^{+}(\ell)\phi^{-}(\ell)-(\phi^{+})'(\ell)(\phi^{-})'(\ell)}{\phi^{+}(\ell)(\phi^{-})'(\ell)+(\phi^{+})'(\ell)\phi^{-}(\ell)}$$

となる。これに

$$\phi^{+}(\ell)=\gamma^{+}\sin\theta^{+}\qquad(\phi^{+})'(\ell)=\gamma^{+}\cos\theta^{+}$$

$$\phi^{-}(\ell)=-\gamma^{-}\sin\theta^{-}\qquad(\phi^{+})'(\ell)=-\gamma^{-}\cos\theta^{-}$$

を代入すると

$$(5.1.13)\qquad m(\lambda)=-\frac{\cos(\theta_\lambda^{+}(\ell)+\theta_\lambda^{-}(\ell))}{\sin(\theta_\lambda^{+}(\ell)+\theta_\lambda^{-}(\ell))}$$

を得る。従って，$\sigma_\ell(\lambda)$の jump points $\lambda_i(\ell)$は $\theta_\lambda^{+}(\ell)+\theta_\lambda^{-}(\ell)\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ \pi)$ となる点と一対一に対応する。そして $\lambda_i(\ell)$での weight $\alpha_i(\ell)$は，留数計算により

$$\alpha_i(\ell)=\left.\frac{\cos\theta_\lambda}{\frac{\sin\theta_\lambda}{\partial\lambda}}\right|_{\lambda=\lambda_i}=\left.\frac{\cos\theta_\lambda}{(\cos\theta_\lambda)\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\lambda}}\right|_{\lambda=\lambda_j}=\frac{1}{\left.\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_j}}$$

となる。但し，$\theta_\lambda=\theta_\lambda(\ell)=\theta_\lambda^{+}(\ell)+\theta_\lambda^{-}(\ell)$とする。従って，(6.1.12)より

$$\sum_{\lambda_i(\ell)\in\triangle}\alpha_i^{1+\varepsilon}(\ell)=\int_\triangle d\lambda\,\delta(\theta_\lambda\ \mathrm{mod}\ \pi)\left|\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\lambda}\right|\left(\frac{1}{\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\lambda}}\right)^{1+\varepsilon}$$

となる。ところが

$$\frac{\partial\theta_\lambda^{+}}{\partial\lambda}=z^{+}(\ell)=\int_0^\ell(\gamma_+\sin\theta^{+})^2ds,\qquad\frac{\partial\theta_\lambda^{-}}{\partial\lambda}=z^{-}(\ell)=\int_0^\ell(\gamma_-\sin\theta^{-})^2ds$$

より，$\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial\lambda}>0$，$z^{+}$，$z^{-}>0$ であるから，結局(5.1.11)を得る。

Q.E.D.

補題(**5.1.2**)　σ_ℓ，σを$\mathcal{R}^1$上の Radon 測度で，σ_ℓ は point 測度で閉有限区間△内での σ_ℓ の atoms を $\alpha_i(\ell)$とし，α_i を△内でのσの atom と

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

する。$\ell\to\infty$でσ_ℓがσに弱収束するとき，

$$\varlimsup_{\ell\to\infty}\sum_{\triangle}\alpha_i^{1+\varepsilon}(\ell)\leqq\sum_{\triangle}\alpha_i^{1+\varepsilon}\qquad\text{for}\quad\varepsilon\geqq 0$$

が成立する。

<u>証明</u>　一般にσ_ℓがσに弱収束するとき，

$$\sigma(\mathring{\triangle})\leqq\varliminf_{\ell\to\infty}\sigma(\triangle)\leqq\varlimsup_{\ell\to\infty}\sigma_\ell(\triangle)\leqq\sigma(\overline{\triangle})$$

が成立する。そこで$\triangle$を任意の有限個の互いに交わらない区間$\{\triangle_i\}_{i=1}^N$に分割すると

$$\sum_{\triangle}\alpha_i^{1+\varepsilon}(\ell)\leqq\sum_{i=1}^N\sigma^{1+\varepsilon}(\triangle_i)$$

であるから

$$\varlimsup_{\ell\to\infty}\sum_{\triangle}\alpha_i^{1+\varepsilon}(\ell)\leqq\sum_{i=1}^N\sigma^{1+\varepsilon}(\overline{\triangle_i})$$

右辺は，Nを大きくすることにより，いくらでも$\sum_{\triangle}\alpha_i^{1+\varepsilon}$に近づくので，結局補題を得る。　<u>**Q.E.D.**</u>

§5.2.　主定理の証明

この節では，potential q(t)がrandomな場合を扱う。ここでは技術的な詳細に明らかにするため対象とするq(t)はかなり制限されたものとする。

さてKをcompactなC^∞－Riemannian manifoldとしdyをRiemannian element，$\triangle$をLaplace－Beltromi作用素hをk上のC^∞－vector fieldとする。このとき作用素

$$\mathcal{H}_Q=\frac{1}{2}\triangle+h$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

はK上に diffusion Q_t を induce し，しかもその遷移確率は dy に関して至るところ正の滑らかな密度 $p(t, x, y)$ をもつ。さらにKは compact であるから $t \to \infty$ で $p(t, x, y) \to \pi(y)$ に収束しその収束の速さはxについて一様に exponential 的である。Q_t は $\pi(y)dy$ を初期分布とするとき，K 上の強定常過程となる。このとき Q_t は $-\infty < t < +\infty$ に対して定義できる。そこで関数

$$F : K \to \mathbb{R}^1$$

を，十分滑らかでかつ，ある $n_0 > 0$ が存在して

$$(5.2.1) \qquad d^k F(x) \neq 0 \quad \text{for} \quad \forall x \in K, \quad \forall k \leqq n_0$$

となるものとする。我々の potential $q(t)$ はこの Q_t, F を使い

$$q(t, \omega) = F(Q_t(\omega))$$

と表わされているものとする。このときもちろん $\{q(t)\}$ は強定常過程となる。しかも対 $\{Q_t, q_t\}$ は $K \times \mathbb{R}^1$ 上の Markov 過程となる。

補題(5.2.1) $Q^+(s) = Q(-\ell + s)$ $Q^-(s) = Q(\ell - s)$ とおくと，確率過程，$(Q_s^+, \theta_s^+, z_s^+)$ は $K \times S^1 \times \mathbb{R}^+$ 上の Markov 過程で連続有界遷移確率密度が存在する。即ち，$\forall s, t > 0$ に対して

$$p^+(s, (Q_0, \theta_0, z_0), (Q, \theta, z))\, dQ\, d\theta\, dz$$

$$= p\{Q^+_{s+t} \in Q + dQ,\ \theta^+_{s+t} \in \theta + d\theta,\ z^+_{s+t} \in z + dz \mid Q^+_t = Q_0,\ \theta^+_t = \theta_0,\ z^+_t = z_0\}$$

確率過程 $(Q_s^-, \theta_s^-, z_s^-)$ についても同様である。但し S^1 は1次元球面

証明 (θ_s^+, z_s^+) のみたす方程式は

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$\begin{cases} d\theta^+(s) = \{\cos^2\theta^+(s) + \lambda\sin^2\theta^+(s)\}ds - F(Q_s^+)ds \\ dz^+(s) = -z^+(s)(1+F(Q_s^+)-\lambda)\sin 2\theta^+(s)ds + \sin^2\theta^+(s)ds \end{cases}$$

であるから(Q^+ , θ^+ , z^+)の generator $\mathcal{U}$ は滑らかな関数 f に対して

$$\mathcal{U} f(Q, \theta, z) = \mathcal{U}_{Q^+} f + (\cos^2\theta + (\lambda - F(Q))\sin^2\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta} + (\sin^2\theta - z(1+F(Q)-\lambda)\sin 2\theta)\frac{\partial f}{\partial z}$$

となる。但し，$\mathcal{U}_{Q^+}$ は $\{Q^+\}$ の generator で

$$\mathcal{U}_{Q^+} = \frac{1}{2}\triangle + h$$

である。補題を示すためには，放物型 方程式

$$(5.2.2) \qquad \frac{\partial p^+}{\partial s} = \mathcal{U} p^+$$

の基本解が滑らかであることを言う必要がある。それには準楕円型作用素に関する Hörmander の定理を応用する。K の一つの局所座標を $(U; x, \cdots, x_\nu)$ $\nu = \dim K$ とする。manifold $K\times S^1\times \mathbb{R}^+$ 上の vector fields

$$\begin{cases} X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu) \\ Y = [\cos^2\theta + (\lambda - F)\sin^2\theta]\dfrac{\partial}{\partial\theta} + [\sin^2\theta - z\sin 2\theta(1+F-\lambda)]\dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

により生成される Lie algebra $\mathcal{A}$ の次元が $K\times S^1\times\mathbb{R}^+$ の次元 $\nu+2$ に等しいならば(5.2.2)の解 p^+ は滑らかである。$\dim\mathcal{A} = \nu+2$ となることの証明は省くが仮定(5.2.1)を使い直接計算により確かめられる。p^+ の有界性は，z_t^+ の方程式(5.1.9)を実際解いてみれば分るように F が有界であるから z_t^+ は各 t に対して，nonrandom な定数で押えられ，従って p^+ の z^+ について台は有界である。しかしながら初期値 z_0 と s が変化するとき p^+ がどのようになるか筆者には分らなかった。 Q.E.D.

process (Q^- , θ^- , z^-)の generator は

$$\mathcal{U}_{Q^-} f = \pi(Q)\mathcal{U}_{Q^+}\left(\frac{f}{\pi}\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

となる。但し $\pi(Q)$ は Q_t の不変測度密度である。従ってとくに $\pi(Q)\equiv 1$ のときは $\mathcal{U}_{Q^+}=\mathcal{U}_{Q^-}=\frac{1}{2}\triangle$ であり，$p^+=p^-$ である。

$$p^{\pm}(s,(Q_0,\theta_0),(Q,\theta))=\int_0^{\infty}p^{\pm}(s,(Q_0,\theta_0,0),(Q,\theta,z))\,dz$$

とおくと，これは process$(Q^{\pm},\theta^{\pm})$ の遷移確率密度である。$(Q^{\pm},\theta^{\pm})$ は compact manifold $K\times S^1$ 上の process である。以下考えを固定するため

$$\inf_{Q\in K}F(Q)=0 \tag{5.2.3}$$

と仮定する。Q_t のエルゴート性より $F(Q_t)$ はどんなに時間が過ぎても，0 になりうる。このとき Schnol の補題〔4〕により我々の作用素 $L=L(\omega)$ のスペクトル $\Sigma=\Sigma(\omega)$ は確率 1 で〔$0,\infty$）に一致することが分る。$\lambda\in\Sigma$ と $\lambda\in\Sigma^c$ とでは process (Q^+,θ^+) の性質は著しく異なる。$\lambda\in\Sigma^c\setminus\{0\}$ i.e $\lambda<0$ では領域 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ は吸収的である。なぜなら

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{\theta=0}=\cos\theta+(\lambda-F)\sin\theta\Big|_{\theta=0}=1>0\\[2ex]\left.\dfrac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\cos\theta+(\lambda-F)\sin\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\lambda-F<0\end{cases}$$

であるからである。又，$\lambda\in\Sigma\setminus\{0\}$ i.e $\lambda>0$ では (Q^+,θ^+) は $K\times S^1$ の任意の open set を正の確率で hit し，従って

$$p^{\pm}(s,(\cdot,\cdot),(Q,\theta))>0\quad\text{for}\quad {}^{\forall}s>{}^{\exists}s_0(\lambda)$$

となる。

次の補題は容易に示すことができる。（証略）

<u>補題（**5.2.2**）</u> $\lambda>0$ に対して，$(Q^{\pm},\theta^{\pm})$ は unique な不変測度密度 $\pi^{\pm}_{\lambda}(Q,\theta)$ をもち，$s\to\infty$ のとき ${}^{\exists}\delta=\delta(\lambda)>0$ s.t

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$|p_\lambda^{\pm}(s, (\cdot, \cdot), (Q, \theta)) - \pi_\lambda^{\pm}(Q, \theta)| \leqq \exp(-\delta s)$$

となる。

補題(5.2.3) $\theta^+, \theta^-, z^+, z^-$ を補題(5.1.1)のものとすると，$(Q(0), (\theta^+(\ell), \theta^-(\ell)), (z^+(\ell), z^-(\ell)))$ は分布密度

$$p(\ell, (Q, (\theta, \theta_1), (z, z_1)))$$

$$= \frac{1}{\pi(Q)} \iint_{k \times k} dQ_0 \pi(Q_0) p^+(\ell, (Q_0, \varphi^+, 0)) d\widetilde{Q}_0 \pi(\widetilde{Q}_0) p^-(\ell (\widetilde{Q}_0, \varphi^-, 0)(Q, \theta_1, z_1))$$

$$= \frac{1}{\pi(Q)} p^+(\ell, (\pi, \varphi^+, 0), (Q, \theta, z)) p^-(\ell, (\pi, \varphi^-, 0), (Q, \theta_1, z_1))$$

をもつ。但し，$p^{\pm}(\ell, (\pi, \varphi^{\pm}, 0), (Q, \theta, z)) = \int_k dQ_0 \pi(Q_0) p^{\pm}(\ell, (\theta_0, \varphi^{\pm}, 0), (Q, \theta, z))$

証明 $(\theta^+(\ell), z^+(\ell))$ と $(\theta^-(\ell), z^-(\ell))$ は $Q(0)$ で条件をつけたとき Q_t のマルコフ性により独立であることが分るから上の等式は容易に示せる。

Q.E.D.

系(5.2.1) $\triangle \subset (0, \infty) = \Sigma \setminus \{0\}$ となる閉有限区間とする。

$$M \sum_{\lambda_i(\ell) \in \triangle} \alpha_i^{1+\varepsilon}(\ell) = \int_\triangle d\lambda \int_{K \times S^1 \times R^+ \times R^+} dQ d\theta dz_1 dz_2 \frac{p_\lambda^+(\ell, (\pi, \varphi^+, 0), (Q, \theta, z_1)) p_\lambda^-(\ell, (\pi, \varphi^-, 0)(Q, \pi - \theta, z_2))}{\pi(Q)(z_1 + z_2)^{\varepsilon}}$$

$$M \sum_{\lambda_i(\ell) \in \triangle} \alpha_i(\ell) = \int_\triangle d\lambda \int_{K \times S} dQ d\theta \frac{1}{\pi(Q)} p_\lambda^+(\ell, (\pi, \varphi^+), (Q, \theta)) p_\lambda^-(\ell, (\pi, \varphi^-), (Q, \pi - \theta))$$

証明 補題(5.1.1)(5.2.3)より自明である。

系(5.2.2) $\triangle \subset S \setminus \{0\} = (0, \infty)$

$$M\ \sigma(\triangle) = \lim_{\ell \to \infty} M\ \sigma_L(\triangle) = \int_\triangle d\lambda \int_{K \times S^1} dQ d\theta \frac{1}{\pi(Q)} \pi_\lambda^+(Q, \theta) \pi_\lambda^-(Q, \pi - \theta)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

（但し　Mは sample 平均を表わす。）

補題（5.2.4）　$\lambda>0$ に対して確率1で

$$\gamma(\lambda)=\lim_{s\to\infty}\frac{\log r_\lambda^{\pm}(s)}{s}=\frac{1}{2}\int_{K\times S^1}\sin 2\theta\,(1+F(Q)-\lambda)\,\pi_\lambda^{\pm}(Q,\theta)\,dQ\,d\theta$$

となり $\gamma(\lambda)>0$ である。

証明　$r_\lambda(s)$ のみたす方程式により

$$\frac{\log r_\lambda^{\pm}(s)}{s}=\frac{1}{2s}\int_0^s\sin 2\theta_u^{\pm}\,(1+F(Q_u^{\pm})-\lambda)\,du+\frac{\log r_\lambda^{\pm}(0)}{s}$$

を得る。process$(Q^{\pm},\theta^{\pm})$のエルゴート性（補題5.2.2）より補題（5.2.4）の公式は容易に得ることができる。極限 $\gamma(\lambda)>0$ であることは §2.7 と同様の議論で示すことができるであろうが，第1章の random matrix に関する Furstenberg の定理を応用すれば殆んど疑いのない事実であろう。

Q.E.D.

測度，$p^{\pm}(\ell,(\pi,\varphi^{\pm},0),(Q,\theta,z))\,dQ\,d\theta\,dz$ が tight であることをいうために次の補題を準備する。

補題（5.2.5）　$\lambda>0$ に対して $^\exists\delta>0$，　s.t

$$M\{(z_t^{\pm})^{\delta}\mid z_0^{\pm}=0\}\leqq c_1<\infty\qquad\text{for}\quad {}^\forall t>0$$

証明　z_t^+ も z_t^- も議論は平行に進めることができるから，以下 z_t^+ だけに限ることにする。$z_0^+=0$ であるから方程式（5.1.9）により

$$z_t^+=\int_0^t\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_s^t(1+F(Q_u^+)-\lambda)\sin 2\theta_u^+\,du\right\}\sin^2\theta_s^+\,ds$$

となるがFの有界性により，λにのみ依存する定数 C_2 があり

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$z_t^+ \leqq c_2 \sum_{i=0}^{[t]} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_i^{[t]+1} (1+F-\lambda)\sin 2\theta^+ du\right.$$

となる。但し，簡単のため $F=F(Q_u^+)$，$\theta^+=\theta_u^+$ と略記する。自明な不等式

$$(\Sigma a_i)^\delta \leqq \Sigma a_i^\delta \qquad \text{for} \quad a_i>0,\quad 0<\delta<1$$

を使い，t に依存しない定数 C_3 が存在して

$$M\left((z_t^+)^\delta \mid z_0^+=0\right) \leqq c_3 \sum_{i=0}^{[t]} M \exp\left\{-\frac{\delta}{2}\int_i^{[t]+1}(1+F-\lambda)\sin 2\theta^+ du\right\}$$

が分る。そこで，compact manifold $K\times S^1$ 上の連続関数全体をCとするとき，CからCへの有界作用素 T_δ を

$$T_\delta f(Q,\theta)=M\left[\exp\left\{-\frac{\delta}{2}\int_0^1(1+F(Q_u^+)-\lambda)\sin 2\theta_u^+ du\right\} f(Q_1^+, Q_1^+) \mid Q_0^+=Q,\ \theta_0^+=\theta\right]$$

で定義する。T_δ はパラメーターδに解析的に依存している。しかも滑らかな関数を核にもつ積分作用素になるから完全連続でもある。T_δの maximal な固有値を $\lambda_0(\delta)$ とすれば，それは simpleで正で実解析的となることが分る。(Krasenoselskii [5]) その上ある $\delta_0>0$ が存在して，すべての $|\delta|<\delta_0$ に対して

$$T_\delta^n f = C_4(f,\delta)\lambda_0^n(1+\rho^n) \qquad |\rho|\leqslant\rho_0<1$$

但し，$C_4(f,\delta)\to C_4(f,0)$ as $\delta\to 0$

従って

$$M\left[\exp\left\{-\frac{\delta}{2}\int_i^{[t]+1}(1+F-\lambda)\sin 2\theta^+ du\right\} \mid Q_0^+=Q,\ \theta_0^+=\theta\right]$$

$$= T_\delta^{[t]+1-i}1(Q,\theta) \leqq C_4\,\lambda_0^{[t]+1-i}(\delta)$$

但し，$1(Q,\theta)\equiv 1 \qquad \text{for} \quad {}^\forall Q,\theta$

次に十分小さい $\delta>0$に対して $0<\lambda_0(\delta)<1$ となることをいう。

T_δ の λ_δ に対応する固有関数を f_δ とすると，$f_0=1$，と決めることにより f_δ も δ について解析的になる。従って次の形式的な計算は正当化されるであろう。

$$T_\delta f_\delta = \lambda_0(\delta) f_\delta$$

両辺を δ について微分して

$$(\partial T_\delta) f_\delta + T_\delta(\partial f_\delta) = \lambda_0'(\delta) f_\delta + \lambda_0(\delta)\partial f_\delta$$

$\delta=0$ とすれば

$$(\partial T_0) f_0 + T_0(\partial f_0) = \lambda_0'(0) f_0 + \lambda_0(0)\partial f_0$$

$\lambda_0(0)=1$，$f_0=1$ であるから

$$(\partial T_0)1 + T_0(\partial f_0) = \lambda_0'(0) + \partial f_0$$

T_0 の不変測度 π^+ で両辺を積分すると，

$$\lambda_0'(0) = \langle \pi^+, (\partial T_0)\, 1 \rangle = M_{\pi^+}\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 (1+F(Q^+)-\lambda)\sin 2\theta^+ du\right]$$

を得る。π^+ を初期分布にして process (Q^+, θ^+) は定常であるから

$$\lambda_0'(0) = -\frac{1}{2}\int_{K\times S^1} (1+F(Q)-\lambda)\sin 2\theta\, \pi_\lambda^+(Q,\theta)\, dQ\, d\theta$$
$$= -\gamma(\lambda)$$

となるが右辺は補題（5.2.4）より負である。従って補題（6.2.5）を得る。

<u>Q. E. D.</u>

<u>補題（5.2.6）</u>　$\mathcal{L}=\{\ell_i\}$ を任意の無限大に発散する列とする。このとき $\mathcal{L}$ =の部分列 $\widetilde{\mathcal{L}}=\{\ell_{ij}\}$ が存在して

$$p^\pm(\ell_{ij}, (\pi, \varphi^\pm, 0), (Q,\theta,z)) \to \pi^\pm_{\mathcal{L}}(Q,\theta,z) \quad \text{as } \ell_{ij}\to\infty$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

ここで $\pi^{\pm}_{\mathcal{L}}(Q, \theta, z)$は有界で

$$\int_{\mathcal{R}^+} \pi^{\pm}_{\mathcal{L}}(Q, \theta, z)\, d\theta = \pi^{\pm}(Q, \theta)$$

をみたす。

<u>証明</u> $K \times S^1$は compact であり，しかも$\mathcal{R}^+$方向には補題(5.2.5)より$(z^{\pm}_t)^{\delta}$の平均が t に一様に押えられているから，測度の族 $p^{\pm}(\ell, (\pi, \varphi^{\pm}, 0), (Q, \theta, z))\, dQ\, d\theta\, dz$ は $K \times S^1 \times \mathcal{R}^+$ で tight である。従って$\mathcal{L}$の部分列$\widetilde{\mathcal{L}}$が存在して，$p^{\pm}\, dQ\, d\theta\, dz$ は weakly にある測度 $\pi^{\pm}_{\mathcal{L}}$に収束する。しかし，Kolmogorov−Chapman の方程式

$$\begin{aligned} p^{\pm}(\ell_{ij}, (\pi, \varphi^{\pm}, 0), (Q, \theta, z)) &= \int_{K\times S^1\times \mathcal{R}^+} p^{\pm}(\ell_{ij}-1, (\pi, \varphi^{\pm}, 0), (Q_1, \theta_1, z_1)) \\ &\qquad p^{\pm}(1, (Q_1, \theta_1, z_1), (Q, \theta, z))\, dQ_1\, d\theta_1\, dz_1 \end{aligned}$$

となる。右辺の $p^{\pm}(1, (Q_1, \theta_1, z_1), (Q, \theta, z))$ は補題(5.2.1)により有界連続関数である。従って必要ならば$\{\ell_{ij}-1\}$の部分列をとることにより，$p^{\pm}(\ell_{ij}-1, \cdots)\, dQ_1 d\theta_1 dz_1$ は弱収束するとしてよい。従って，$\pi^{\pm}_{\mathcal{L}}$は連続な密度をもつことが分る。$\pi^{\pm}_{\mathcal{L}}$の有界性は同じく補題(5.2.1)により従う。 <u>Q.E.D.</u>

さて，主定理は次の通りである。

<u>定理</u> 作用素 $L(\omega) = -y'' + F(Q_t)$は確率1で pure point spectrum のみをもつ。しかもそれは任意の区間$\subset (0, \infty)$に稠密にある。

<u>証明</u> $\triangle \subset \Sigma \setminus \{0\} = (0, \infty)$を有限な閉区間とする。potential F(Q) が有界であるから，ℓと sample に依存しない定数 C_6 があって $\sigma_{\ell}(\triangle) \leqq C_6$

となる。従って

$$
\begin{aligned}
\sigma^{c}(\triangle) &= \sigma(\triangle) - \sigma^{d}(\triangle) \\
&= \sigma(\triangle) - \sum_{\lambda_i \in \triangle} \alpha_i \\
&\leqq \sigma(\triangle) - \frac{1}{C_6^{\varepsilon}} \sum_{\lambda_i \in \triangle} \alpha_i^{1+\varepsilon} \qquad \text{for} \qquad {}^{\forall}\varepsilon \geqq 0
\end{aligned}
$$

であるが，補題(5.1.2)より

$$
\begin{aligned}
M(\sigma^{c}(\triangle)) &\leqq M(\sigma(\triangle)) - \frac{1}{C_6} M \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \sum_{\lambda_i(\ell)\in\triangle} \alpha_i^{1+\varepsilon}(\ell) \\
&\leqq M(\sigma(\triangle)) - \frac{1}{C_6} \overline{\lim_{\ell\to\infty}} M \sum_{\lambda_i(\ell)\in\triangle} \alpha_i^{1+\varepsilon}(\ell)
\end{aligned}
$$

となる。系(5.2.1)，系(5.2.2)と補題(5.2.6)により

$$
\begin{aligned}
M\sigma(\triangle) &\leqq \int_{\triangle} d\lambda \int_{K\times S^1} \frac{1}{\pi(Q)} \pi_{\lambda}^{+}(Q,\theta)\pi_{\lambda}^{-}(Q,\pi-\theta)\,dQ\,d\theta \\
&\quad - \frac{1}{C_6^{\varepsilon}} \lim_{\ell\to\infty} \int d\lambda \int_{K\times S^1\times\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+}} dQ\,d\theta\,dz_1\,dz_2 \frac{p_{\lambda}^{+}(\ell,(\pi,\varphi^{+},0),(Q,\theta,z_1))\,p_{\lambda}^{-}(\ell,(\pi,\varphi^{-},0),(Q,\pi-\theta,z_2))}{\pi(Q)(z_1+z_2)^{\varepsilon}} \\
&\leqq \int_{\triangle} d\lambda \int_{K\times S^1} dQ\,d\theta \frac{1}{\pi(Q)} \pi_{\lambda}^{+}(Q,\theta)\pi_{\lambda}^{-}(Q,\pi-\theta) \\
&\quad - \frac{1}{C_6^{\varepsilon}} \int_{\triangle} d\lambda \int_{K\times S^1\times\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+}} dQ\,d\theta\,dz\ \ dz \frac{\pi_{\lambda}^{+}(Q,\theta,z_1)\pi_{\lambda}^{-}(Q,\pi-\theta,z_2)}{\pi(Q)(z_1+z_2)^{\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

となる。最後の項の積分で領域を $D_1=\{z_1+z_2\leqq 1\}$ と $D_2=\{z_1+z_2>1\}$ とに分け $\varepsilon\downarrow 0$ とすると，それぞれの領域で単調収束であるから，結局

$$
M(\sigma^{c}(\triangle)) = 0
$$

を得る。即ち，$L(\omega)$ の連続スペクトルは確率1で存在しない。 <u>Q.E.D.</u>

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

〔注意〕 これまでは特別な potential に対して $L(\omega)$ が pure point spectrum のみをもつことを示した。然し potential $q(x,\omega)$ が次のような時にも同じ結論になることが期待される。

(A) $q(x,\omega)$ が，0か1のみをとる場合で，各々定数である区間がすべて独立同分布の指数分布に従う。〔Krönig－Penny の potential〕

(B) $q(x,\omega)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i\,\delta(x-\tau_i)\quad \cdots<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\cdots$

$\{\tau_j-\tau_{j-1},\ k_i\}$ は独立であり，$\{\tau_j-\tau_{j-1}\}$ は同分布の指数分布に従い，$\{k_i\}$ は同分布。

(C) $q(x,\omega)=\dot{w}_x \qquad w_x$ Brown 運動

(D) discrete 作用素の場合

$$(Ly)_n=-y_{n-1}+q_n(\omega)\,y_n-y_{n+1}$$

を $L^2(\mathbb{Z}^1)$ で実現する。ここで $q_n(\omega)=F(X_n(\omega))$ で，X_n は compactな state space K 上に値をとるマルコフ過程でFは滑らかな関数とする。

〔注意〕

(1) 補題(5.2.2)は筆者が確かめたわけではない。

(2) 補題(5.2.1)で $p^{\pm}$ の有界性は本文には易しい事実であるとしてあったが筆者には分らなかった。このところは以下の議論で本質的であった。

(3) 補題(5.2.5)で δ に解析的に依存する positive 作用素 T_δ を扱ったが特に $\lambda_0'(0)$ の計算を筆者が正当化できたわけではない。

(4) 全般的に $p^{\pm}$ 等の λ に関する依存性(例えば連続であるとか)には触れられていないが，厳密には注意すべきである。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

§ 5.3. Goldseid and Molchanov の論文「On Mottproblem」の紹介

考える作用素は

(5.3.1) $Hy = -y'' + q(x, \omega)y \qquad x \in \mathcal{R}^1$

(5.3.2) $(Hy)_n = -y_{n+1} + q_n(\omega)y_n - y_{n-1} \qquad n \in \mathbb{Z}^1$

である。後の記述の便宜のために次の3つの条件を定義する。

〔条件 A〕 $q(x, \omega)$ {又は $q_n(\omega)$} は renewal process に imbedd されている。即ち，random time $\{\tau_i(\omega)\}_{i=-\infty}^{\infty}$

$$\cdots < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \cdots$$

が存在して，$q(x, \omega)$ {or $q_n(\omega)$} は $\tau_i \leqq x < \tau_{i+1}$ のとき $\mathcal{F}_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}$ 可測であり，$\mathcal{F}_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}$ は独立で定常であり，さらに次の条件を仮定する。

$$M(\tau_{i+1} - \tau_i) = a < \infty$$

(5.3.1)の基本行列を $\Phi(t, s)$ $(t \geqq s)$ とするとき $A_i(\lambda, \omega) = \Phi(\tau_{i+1}, \tau_i)$ とおく。具体的には

$$\begin{cases} -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x), & -\psi''(x) + q(x)\psi(x) = \lambda\psi(x) \\ \varphi(\tau_i) = 1, \quad \varphi'(\tau_i) = 0 & \psi(\tau_i) = 0, \quad \psi'(\tau_i) = 1 \end{cases}$$

の解 φ，ψ を使い，

$$A_i(\lambda, \omega) = \begin{pmatrix} \varphi(\tau_{i+1}), & \varphi'(\tau_{i+1}) \\ \psi(\tau_{i+1}), & \psi'(\tau_{i+1}) \end{pmatrix}$$

とする。このとき(5.3.1)の任意の解 $y(t)$ に対して

$$(y(\tau_{i+1}), y'(\tau_{i+1})) = (y(\tau_i), y'(\tau_i))A_i(\lambda, \omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

となる。(5.3.1)についても A_i の定義は同様である。

明らかに $\det A_i=1$ である。$\mathbb{P}^1$ を一次元射影空間とする。$\mathbb{P}^1$ は本質的に一次元右半球面 S_+^1 と同一視でき，$x\in\mathbb{P}^1$ は，　$x=(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ と表わせる。A_i によって引き起こされる $\mathbb{P}^1$ 上の変換を $T(A_i)$ とする。即ち，

$$xT(A_i)=xA_i/\|xA_i\|$$

とする。勿論右辺は $\mathbb{P}^1$ の元としては適当に解釈しなければならない。

そこで

$$T_i^+(\lambda,\omega)=T(A_i(\lambda,\omega))$$

$$T_i^-(\lambda,\omega)=T(A_i^{-1}(\lambda,\omega))$$

とおき，$\mathbb{P}^1$ 上の Markov chain $X^{\pm}(\lambda)$ を

$$X_{n+1}^{\pm}(\lambda)=X_n^{\pm}(\lambda)T_n^{\pm}(\lambda,\omega)$$

で定義する。$p^{\pm}(n,\varphi,d\psi)$ $\varphi,\psi\in\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を $X_n^{\pm}(\lambda)$ の遷移確率とする。

〔条件 B〕 任意の有限区間 $[\lambda_1,\lambda_2]$ に対して，n_0 が存在してすべての $n\geqq n_0$ に対して，(φ,ψ,λ) について連続で n についても有界な遷移確率密度 $p_\lambda^{\pm}(n,\varphi,\psi)$ (Lebesgue 測度 $d\psi$ に関する。)が存在する。

〔条件 C〕 discrete 作用素(5.3.2)の場合，$\{q_n\}$ は独立同分布であり，分布関数は C^1 −級の滑らかな密度をもつ。

<u>**定理 1**</u> 〔条件 A，B〕の下で，(5.3.1)のスペクトルは確率1で Multiplicity が1である。

<u>**定理 2**</u> 〔条件 A，B〕の下で，(5.3.1)又は(5.3.2)は確率1でスペ

クトルの内部で稠密な point spectrum をもつ。

2次元の Markov process $(X_n^{\pm}(\lambda), X_n^{\pm}(\lambda'))$ は条件Bの下で連続な遷移確率密度 $p_{\lambda,\lambda'}^{\pm}(n,(\varphi,\psi),(\varphi_1,\psi_1))$ をもつことが分り，さらに unique な不変測度が存在して，それも density $\pi_{\lambda,\lambda'}^{\pm}(\varphi,\psi)$ をもつ。(これはすべて $\lambda \doteqdot \lambda'$ のとき)又，

$$\int_{P^1} \pi_{\lambda,\lambda'}^{\pm}(\varphi,\psi)\,d\psi = \pi_\lambda^{\pm}(\varphi)$$

であり，$\pi_\lambda^{\pm}(\varphi)$ は process $(X_n^{\pm}(\lambda))$ の不変測度の density である。ここで

$$(5.3.3) \qquad (X_n^{\pm}(\lambda), z_n^{\pm}(\lambda)) = \left(X_n^{\pm}(\lambda), \frac{\sin(X_n^{\pm}(\lambda) - X_n^{\pm}(X))}{\lambda - \lambda'}\right)$$

とすると，$\lambda' \downarrow \lambda$ のとき(5.3.3)の不変測度の density は $P^1 \times R^1$ 上のある Markov process $(X_n^{\pm}(\lambda), \hat{Z}_n^{\pm}(\lambda))$ の不変測度の密度 $\hat{\pi}_\lambda^{\pm}(\varphi, z)$ に収束することが分る。この $\hat{\pi}_n^{\pm}$ は

$$\pi_\lambda^{+}(\varphi, z) \equiv 0 \quad \text{for} \quad z < 0, \qquad \hat{\pi}_\lambda^{-}(\varphi, z) \equiv 0 \quad \text{for} \quad z > 0$$

をみたす。さて $\sigma(d\lambda)$ を(5.1.6)で定義したものとする。$\Lambda_0 = [\lambda_1, \lambda_2]$ に対して

$$M_1(\Lambda_0) = M\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma(d\lambda, \omega) \quad , \quad M_2(\Lambda_0) = M\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma(d\lambda, \omega)\right]^2$$

とおく。

定理 3　〔条件 A，B〕の下で

$$M_1(\Lambda_0) = \int_{\Lambda_0} d\lambda \int_{P^1} \pi_\lambda^{+}(\varphi)\pi_\lambda^{-}(\varphi)\,d\varphi$$

定理 4　discrete 作用素(5.3.2)に対しては更に〔条件 C〕の下で

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$M_2(\Lambda_0)=\int_{\Lambda_0\times\Lambda_0} d\lambda\, d\lambda' \int_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \hat{\pi}^{+}_{\lambda,\lambda'}(\varphi_1, \varphi_2)\hat{\pi}^{-}_{\lambda,\lambda'}(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$+\int_{\Lambda_0} d\lambda \int_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1} \hat{\pi}^{+}_{\lambda}(\varphi, z+t)\hat{\pi}^{-}_{\lambda}(\varphi, z)\, d\varphi\, dz\, dt$$

定理5　$\sigma(d\lambda, \omega)$の jump point $\lambda_i(\omega)$での weight を $\alpha(\lambda_i, \omega)$とするとき，定理4と同じく(5.3.2)に対して〔条件C〕の下で

$$M\left(\sum_{\lambda_i\in\Lambda_0} \alpha^2(\lambda_i, \omega)\right)=\int_{\Lambda_0} d\lambda \int_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1} \hat{\pi}^{+}_{\lambda}(\varphi, z+t)\hat{\pi}^{-}_{\lambda}(\varphi, z)\, d\varphi\, dz\, dt$$

§ 5.4. Discrete spectrumのみをもつ作用素の例

この節では，前節§5.2，§5.3の結果を示唆するような例を挙げる。考えを固定するため以下考える作用素はd次元の Schrödinger 型の

$$L = -\triangle + q(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$
$$|q(x)| \leqq M \qquad (\text{有界})$$

とする。$\mathbb{R}^d$を有界で滑らかな領域 D_j $(j=1, 2, \cdots)$に分割する。

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \qquad \mathring{D}_j \cap \mathring{D}_i = \phi \qquad (i \neq j)$$

Lの定義域，$\mathring{\mathcal{D}}_L$ を次のように定める。

$$\mathring{\mathcal{D}}_L=\{\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d) ; (\mathrm{supp}\,\varphi)\cap D_j \subset \mathring{D}_j \quad \forall j\}$$

$q(x)$が有界であるから，$(L, \mathring{\mathcal{D}}_L)$は各 D_j の境界で吸収壁の境界条件をもつ自己共役作用素に拡張されそれを$(L, \mathcal{D}_L)$とする。

補題(5.4.1)　$(L, \mathcal{D}_L)$は pure point spectrum しかもたない。

証明　$L^2(D_j)$上の作用素 L_j を

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$L_j\varphi = -\triangle\varphi + q(x)\varphi \ , \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathring{D}_j)$$

と定義すると，

$$L = \bigoplus_{j=1}^{\infty} L_j$$

となることは見易い。しかも D_j は有界領域であるから各 L_j は discrete な spectrum しかもたない。一方

$$R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1} = \bigoplus_{j=1}^{\infty} (L_j - \lambda I)^{-1}$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{\infty} R_\lambda^j$$

であるから， $\varphi \in C_0^\infty(\mathring{D}_j)$ に対しては

$$(R_\lambda\varphi, \varphi) = (R_\lambda^j\varphi, \varphi)$$

であり，従って $(R_\lambda\varphi, \varphi)$ のスペクトル測度は discrete な成分しかもたないことが分る。このような φ の線型結合は $L^2(\mathcal{R}^d)$ で密であるから，結局 $(L, \mathcal{D}_L)$ は pure point spectrum しかもたないことになる。

<u>Q.E.D.</u>

さて，我々は次に $q(x)$ が Markov 定常過程とする。即ち，分布が，shift に関して不変で，かつ Markov 性

(5.4.1) $\quad \sigma(q(x); x \in V) \perp\!\!\!\perp \sigma(q(x): x \in V^c)$

$$\sigma(q(x): x \in \partial V)$$

をもつとしよう。以下の議論は精密なものではないので，Markov 性等の定義も概略的なものと思って頂きたい。$V \subset \mathcal{R}^d$ の滑らかな領域に対して，Dirichlet 境界条件付きでLを考えたときのグリーン作用素を R_λ^V とする。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

$$g(x) = R_\lambda f(x) - R_\lambda^V f(x)$$

は，方程式

$$\begin{cases} -\triangle g(x) + q(x)g(x) - \lambda g(x) = 0 & x \in \overset{\circ}{V} \\ g|_{\partial V} = R_\lambda f|_{\partial V} \end{cases}$$

をみたす。従って，$\{R_\lambda f(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ は random process として

$$\sigma\{R_\lambda f(x),\ q(x) : x \in V\} \subset \sigma\begin{Bmatrix} R_\lambda f(x) : x \in \partial V \\ q(x) : x \in V \end{Bmatrix}$$

という関係とみたす。従って process $\{R_\lambda f(x), q(x)\}$ は Markov 性をみたす。即ち，(5.4.1)をみたす。このことは $\{R_\lambda f(x)\}$ が x が離れているとき相互依存性が小さいことを示唆している。そこで近似的に (L，$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$)を (L，$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_L$) で置きかえてもよさそうに思える。一般にスペクトルの絶対連続部分は trace class の作用素の摂動によって不変であるが，特異連続部分，純粋不連続部分は境界条件のちょっとした変更でも変わることが知られているから，上のような議論は非常に rough なものであるが，§ 5.2，§ 5.3 の議論の定性的な説明になっているのではないかと思われる。更に大担に，多次元の場合に少くとも絶対連続部分の不在は上の方針で示せないかと思われるが，将来の問題である。

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

第 IV 部 文献

[1] L.A Pastur, On spectra of random Jacobi matrices and Schrödinger equations with random potentials, Preprint, Physico-Technical Inst. Low Temperatures, Kharkov, (1974).

[2] I. S.Kac - M.G.Krein, R-functions - Analytic functions mapping the upper halfplane into itself, Amer. Math.Soc. Transl. (2) 103 (1974), 1-18.

[3] K.Yoshida, 積分方程式論, 岩波全書

[4] I.M.Glazman, Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operafors, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1965)

[5] M.A.Krasnosel'skiĭ, Positive solutions of operator equations, P.Noordhoff LTO. Groningen, The Netherlands (1964)

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

確率論セミナー出版物案内

〔Ｉ〕 Seminar on Probability（定価のないものは，在庫なし）

Vol.1 渡辺　毅：可附番空間上の Markov 過程から導かれるMartin 境界とその応用

2 白尾恒吉：確率論における強法則の精密化の一般論

3 伊藤　清・渡辺信三・福島正俊：拡散過程

4 丸山儀四郎・十時東生：確率過程の収束に関する位相解析的方法

5 池田信行・上野　正・田中　洋・佐藤健一：多次元拡散過程の境界問題（上）

6 〃 （下）

7 飛田武幸：Gaussian processの表現とその応用

8 渡辺寿夫：Wiener 空間における積分とその応用

9 池田信行・国田　寛・野本久夫・飛田武幸・渡辺　毅：Paul Lévy の業績

10 西尾真喜子：Wiener 積分と強定常過程の表現

11 近藤亮司：Markov 過程と Potential

12 池田信行・飛田武幸・吉沢尚明：Flow の理論（上）

13 竹内順治・山田俊雄・渡辺信三：安定過程 ― Riesz ポテンシャル，Pathの性質

14 国田　寛・野本久夫：Markov過程に関するcompact 化の方法とその応用

15 本尾　実：Markov過程のadditive functionals

16 佐藤健一・長沢正雄・福島正俊：マルコフ過程の変換と境界問題

17 国田　寛：Markov過程とMartin境界

18 渡辺寿夫偏：確率論セミナー第5回シンポジューム討論報告集

19 田中　洋・長谷川　実：確率微分方程式

20 十時東生：Flowとエントロピー

21 神田　護：拡散過程と正則点

22 国田　寛・佐藤健一・福島正俊・本尾　実：拡散過程と境界上のマルコフ過程 （会員 一般 400円 450円）

23(Ⅰ)池田信行・長沢正雄・渡辺信三：分枝マルコフ過程の基礎

〃 (Ⅱ) 〃 （300円 350円）

24 佐藤　坦：Gauss測度の絶対連続性

25(Ⅰ)櫃田倍之・福島正俊・池田信行・河野敬雄・長沢正雄・野本久夫・小倉幸雄・白尾恒吉・山田俊雄・渡辺藤逸：分枝マルコフ過程の諸問題 （300円 350円）

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

Vol. 45 福島正俊・中尾慎太郎・小谷眞一：ランダムスペクトル

〔II〕

Vol. 1 A1 確率論, A2 確率分布, B1 Brown運動(上)

2 B1 Brown運動(下), C1 Prediction

3 B2 加法過程

4 C2 情報理論

5 A3 特性函報, A4 Martingale

〔III〕 定常過程(昭和37年秋 統計数学分科会 Symposium予稿)

〔IV〕 Second Japan－USSR Symposium on Probability Theory

Vol. 1
〃 2
〃 3
1セット 1400円

出版物に対するお問い合わせ, 定期購読申し込み等につきましては確率論セミナー出版局まで連絡して下さい。

昭和52年5月

〒730 広島市東千田町
広島大学理学部数学教室内
確率論セミナー出版局
村田 博

Sem. on Probab.
Vol.45 1977年
P1-153

1977年８月発行　確率論セミナー