SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 51

Martingaleの理論

風 巻 紀 彦

1 9 8 1

確 率 論 セ ミ ナ ー

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

序文

Martingale に関する本格的な研究は，周知の如く J.L.Doob [27] に始まる。その後 K.Ito([38],[40])，P.A.Meyer([62],[63],[65])，H.Kunita－S.Watanabe [56]，D.L.Burkholder－R.F.Gundy [7]，A.M.Garsia [31] 等の研究を経て極めて一般化された，しかも広い適用範囲を有する理論に成長した。取分け Meyer を核とする Strasbourg 学派の功績は特筆されるべきであろう。その集大成として発刊された C.Dellacherie－P.A.Meyer [15] は，これから martingale を学ぶ者にとって必読の書となることは，まず間違いあるまい。然るに我国においては，残念ながら同学派の理論に対する理解が十分には浸透していないように思われる。或いは martingale を単に応用するという立場からすれば，Meyer の旧版 [64] や上記の Kunita－Watanabe [56] に述べられている事柄だけで十分とする判断があるのかも知れない。併し乍ら，この10年間の進展の著しさを思うとき，応用面だけを考慮しても C.Dellacherie の本 [14] でさえ今日では最早不十分だとするのは筆者の独断であろうか。martingale の理論体系が整備されるに伴なって，今やその理論を積極的に活用する段階を迎えたと私には感ぜられてならない。最近の martingale の理論に対する私なりの解説を，力量不足を痛感しながらも，敢て試みることにした理由は其処にある。具体的に云えば，このノートは3つの章から成っており，大学院修士1年生程度の知識を前提とした。断る迄もなく martingale の概念は，確率測度と単調に増大する σ-fields の族 ($\mathcal{F}_t$) に依存しているが，此処では確率測度との関係を重要視して纏めてみた。特に確率測度の変換によって生じる Girsanov 型の変換と BMO－martingale の関連性を述べた第3章が主眼となる。一昨年の富山大学でのシンポジウム "Markov 過程とマルチンゲール" で話した内容も其処に採録してある。第1章と第2章は martingale の理論に対する解説であるが，同時に

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

第3章に対する準備となるように配慮してある。そのため一般論に徹しなかった。また martingale に関する重複対数の法則や確率微分方程式等の話題には触れていない。確率微分方程式については，渡辺信三氏の良書[93]や M. M. Rao[78]を参照されたい。その他 martingale を基礎として，応用を志向したものに J. Jacod[46]があることを附記しておく。

1981年2月

風巻紀彦

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

目　　次

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

第1章 離散時径数の martingale

Martingaleの理論において基本となるのは離散時径数の場合であり，しかも連続時径数における複雑な結果も離散時径数の立場から眺めるとその本質を思いの外容易く理解できるという事が往往にしてある。その意味で本章は，第2章と第3章に対する導入部である。

§1. Stopping time

完備な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に σ-fields の列 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ が与えられているものとし，簡単のため $\mathcal{F} = \bigvee \mathcal{F}_n$ を仮定しておく。

<u>定義1.1</u> mapping $\tau : \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$ が

(1) $$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad (\forall n \geq 0)$$

をみたすとき，これを stopping time と云う。その全体を $\mathcal{S}$ で表す。

stopping time は数学の他の分野にはない概念で，確率過程を研究する際に実に重宝に働く。只，それが系列 $(\mathcal{F}_n)$ に依存する点は充分に留意しておく必要がある。先ず，stopping time を用いて，一つの不等式を導きおそう。確率過程 $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ に対して，$X^* = \sup_n |X_n|$ とおく。すると一般に

(2) $$\lambda P(X^* > \lambda) \leq \sup_{\tau \in \mathcal{S}} E[|X_\tau| ; \tau < \infty] \quad (\lambda > 0)$$

が成立する。これは，X_n の収束性を調べる場合に基本的な役割を果すことは周知であろう。いま，$\lambda > 0$ に対して stopping time

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$\tau = \mathrm{Min}\{ n\,;\ |X_n| > \lambda \}$$

を定めると，明らかに $\{\tau < \infty\} \subset \{ |X_\tau| > \lambda \}$ である。このとき，

$$\lambda \mathbb{P}(X^* > \lambda) = \lambda \mathbb{P}(|X_\tau| > \lambda,\ \tau < \infty)$$

$$\leqslant E[\,|X_\tau|\,;\ \tau < \infty\,],$$

即ち，(2) が得られた。

<u>定義 1.2</u>　$\tau \in \mathcal{S}$ に対し，$\mathcal{F}_\tau = \{ A \in \mathcal{F}\,;\ A \cap (\tau \leqslant n) \in \mathcal{F}_n, \forall n \}$ とおく。

$\mathcal{F}_\tau$ は σ-field である。また，例えば，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$ となることなども容易に検証できる。特に自明な $\tau = k$ のとき，$\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_k$ である。さらに，$\tau, \nu \in \mathcal{S}$ が，$\tau \leqslant \nu$ ならば，$\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\nu$ が成立する。このノートでは，$\mathcal{H}$ が或る集合族か又は確率変数（r.v と略記）の族であるとき，それによって生成される σ-field を，簡単のため $\sigma(\mathcal{H})$ なる記号を用いて示した。次に，確率過程 $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ に対し

$$x_0 = X_0, \qquad x_n = X_n - X_{n-1} \quad (n \geqslant 1)$$

とおき，これを X の difference sequence と云う。後で

$$S_n(X) = \Big(\sum_{j=0}^{n} x_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad S(X) = S_\infty(X)$$

について考察する。また，$\tau \in \mathcal{S}$ に対して，$X^\tau = (X_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_n)$，$X^*_\tau = \sup_{n \leqslant \tau} |X_n|$ とおく。ただし，$x \wedge y = \mathrm{Min}(x, y)$ である。これに対して，$x \vee y = \mathrm{Max}(x, y)$ とする。勿論，$X^* = X^*_\infty$ である。

X^* と $S(X)$ の大きさを比較検討し，その性質を論ずることは理論的にも応用上からも大切であり，§7及び§8にその基本となる結果を述べておいた。

さて，次に $1 \leqq p \leqq \infty$ に対して，

$$\|X\|_p = \sup_n \|X_n\|_p$$

とし，特に $\|X\|_p < \infty$ のとき，X は L^p-有界であると云う。

一方，$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_n E[|X_n| ; |X_n| > \lambda] = 0$ がなりたつとき，X は一様可積分であると云われる。因に X が或る $p > 1$ に対し L^p-有界とすれば，不等式

$$E[|X_n| ; |X_n| > \lambda] \leqq \lambda^{1-p} \|X\|_p^p$$

によって明らかなように，X は一様可積分となる。一般に，X_n が或る r.v X_∞ に確率収束している場合には，X_n が（X_∞ に）L^1-収束するための必要十分条件は X が一様可積分であることが知られている。

§2. Martingale の定義

公平なゲームに由来する確率モデルを J. Ville [91] は，martingale と呼んだ。その理論の基礎が J. L. Doob によって確立された事は衆目の一致するところである。Doob 以前にも，P. Lévy [59] や S. Bernstein [2] 等の研究があるものの体系的なものとは云い難い。先ず，その定義を与えよう。

<u>定義 1.3</u>　確率過程 $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ が2条件

(i) $X_n \in L^1$ $(n \geqq 0)$　　(ii) $E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$ $(n \geqq 1)$

をみたすとき，martingale と云われる。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

簡単のため，このノートを通じて martingales の全体から成るクラスを $\mathcal{M}$ とし，特に一様可積分な martingales の全体を $\mathcal{M}_u$ で示した。(x_n) を X の difference sequence とするとき，上記の条件(ii)は "$E[x_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \quad (n \geq 1)$" を以って替えることができる。

例 1.1 a_n を $\mathcal{F}_n$-可測で可積分な r.v. として

$$x_0 = a_0 \quad , \quad x_n = a_n - E[a_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \quad (n \geq 1)$$

とおけば，$X_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$ は martingale となる。

なお，martingale の定義中の条件(ii)において，等号を不等号 $\geq$ で置き換えれば，submartingale の定義が得られる。例えば，$X \in \mathcal{M}$ とし，実数 $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が convex で，しかも $C(X_n) \in L^1$ $(n \geq 0)$ ならば，Jensen の定理によって，$\{C(X_n), \mathcal{F}_n\}$ は当然 submartingale となる。特別な場合として，$|X_n|$ や $X_n^+ = Max(X_n, 0)$ がある。これに対して，$-X_n$ が submartingale をなすとき，X_n を supermartingale と云う。

定理 1.1 (J.L. Doob [26]) 任意の supermartingale $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n)$ は適当な $X = (X_n, \mathcal{F}_n) \in \mathcal{M}$ と増加過程 $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})$ により一意に，

(3) $$Y_n = X_n - A_n \quad (n \geq 0)$$

と分解される。ただし，$A_0 = 0$, $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$ とする。

(証明) Y の difference sequence を (y_n) とし

$$A_0 = 0, \qquad A_n = -\sum_{j=1}^{n} E[y_j \mid \mathcal{F}_{j-1}] \quad (n \geq 1)$$

とおけば，A_n は $\mathcal{F}_{n-1}$－可測であり，しかも $E[y_j \mid \mathcal{F}_{j-1}] \leq 0$ だから，$0 \leq A_n \leq A_{n+1}$ がでる。次に $X_n = Y_n + A_n$ とおく。すると，その difference sequence (x_n) は

$$x_0 = y_0 , \qquad x_n = y_n - E[y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \quad (n \geq 1)$$

となる。依って，$X \in \mathcal{M}$ である。また，このような分解の一意性を示すには，$X \in \mathcal{M}$ に対して，各 X_n の $\mathcal{F}_{n-1}$－可測性と $X_0 = 0$ を仮定し，$X_n = 0$ $(n \geq 0)$ を導きだせばよいのであって，これは難なく検証し得る。□

(3)を Doob 分解と云う。いま B_n を可積分な r.v. で $0 \leq B_n \leq B_{n+1}$ $(n \geq 0)$ とするとき，$E[B_n \mid \mathcal{F}_n]$ は submartingale である。従って上の定理を適用すれば，増加過程 $A = (A_n, \mathcal{F}_{n-1})$ $(A_0 = 0)$ が一意に存在して，$(E[B_n - A_n \mid \mathcal{F}_n], \mathcal{F}_n) \in \mathcal{M}$ となる。特に，B_n が $\mathcal{F}_n$－可測のときは，$(B_n - A_n, \mathcal{F}_n) \in \mathcal{M}$ が云える。これを定理 2.16 と対比されたい。

<u>定理 1.2</u>　X を (super) martingale とするとき，任意の $\tau \in \mathcal{S}$ に対し，X^τ も (super) martingale である。

（証明）$X \in \mathcal{M}$ の場合のみを考察しよう。明らかに $X_{n \wedge \tau}$ は $\mathcal{F}_n$－可測である。しかも $|X_{n \wedge \tau}| \leq \sum_{j=0}^{n} |x_j|$ だから，$X_{n \wedge \tau} \in L^1$ がでる。次に $A \in \mathcal{F}_{n-1}$ のとき，$A \cap \{\tau > n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ なること及び $\{\tau > n-1\} \subset \{X_{n \wedge \tau} = X_n\}$ に注意すれば，

$$\begin{aligned} E[X_{n \wedge \tau} ; A] &= E[X_n ; A \cap \{\tau > n-1\}] + E[X_\tau ; A \cap \{\tau \leq n-1\}] \\ &= E[X_{n-1} ; A \cap \{\tau > n-1\}] + E[X_\tau ; A \cap \{\tau \leq n-1\}] \\ &= E[X_{(n-1) \wedge \tau} ; A] , \end{aligned}$$

即ち、$X^\tau \in \mathfrak{M}$ となる。 □

この結果を任意停止定理と云う。

§3. Doob の収束定理

一般に、martingale は概収束するだろうか？ 答えは否である。其処か、たとえ確率収束性が仮定されていても、概収束するとは限らない。これに関して、G. Simons の反例（W. F. Stout [85] p.103 参照）を紹介しよう。

例 1.2 $\{y_1, y_2, \ldots\}$ を独立な確率変数列で、

$$\mathbb{P}(y_n = 1) = \mathbb{P}(y_n = -1) = \frac{1}{2n}, \quad \mathbb{P}(y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \qquad (n \geqq 1)$$

とし、$\mathfrak{F}_n = \mathfrak{S}(y_1, \cdots, y_n)$, $X_0 = 0$

$$X_n = y_n I_{\{X_{n-1}=0\}} + n X_{n-1} |y_n| I_{\{X_{n-1} \neq 0\}} \qquad (n \geqq 1)$$

とおく。各 X_n は整数値で、当然 $\mathfrak{F}_n$-可測かつ可積分であり、しかも独立性に注意すれば

$$\begin{aligned} E[X_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] &= E[y_{n+1}] I_{\{X_n=0\}} + (n+1) X_n \| y_{n+1} \|_1 I_{\{X_n \neq 0\}} \\ &= X_n I_{\{X_n \neq 0\}} \\ &= X_n , \end{aligned}$$

即ち、$X \in \mathfrak{M}$ となる。さらに、その定義より、$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$ となるため、X_n は 0 に確率収束していることが分る。然るに $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|y_n| = 1) = \infty$ だから、Borel-Cantelli の定理によって、$\mathbb{P}(\limsup [X_n \neq 0]) = 1$ となり、従って X_n が整数値であること

を考慮すれば，X_n の非概収束性が示される。

martingale が概収束するか否かを調べるには，通常 Doob が与えた判定条件を利用している。この Doob の収束定理は，最も martingale 的な性格を備えており，筆者の知る限り7通りの証明方法がある（H. Dinges [17]，J. L. Doob [26],[27]，A. Garsia [32]，R. Isaac [37]，C. W. Lamb [57]，P. A. Meyer [67] 等参照されたい）。此処では，R. Isaac が考案した方法を採用しよう。その足場となるのは，次に述べる Krickeberg の分解定理（[54]）である。

<u>定理1.3</u>　$X \in \mathfrak{M}$ に対し，適当な非負 martingales Y, Z によって，

$$X = Y - Z, \quad \|X\|_1 = E[Y_0 + Z_0]$$

と分解できるための必要十分条件は，$\|X\|_1 < \infty$ なることである。さらにこのとき上の分解は一意である。

（証明）先ず必要性の証明から始めよう。各 n に対して非負な martingales $Y^{(n)}$, $Z^{(n)}$ を

$$Y_j^{(n)} = E[X_{n+j}^{+} \mid \mathfrak{F}_j], \quad Z_j^{(n)} = E[X_{n+j}^{-} \mid \mathfrak{F}_j] \quad (j \geq 0)$$

によって定義すると，明らかに $Y_j^{(n)} - Z_j^{(n)} = X_j$ をみたしている。しかも $\mathrm{Max}\{E[Y_j^{(n)}], E[Z_j^{(n)}]\} \leq \|X\|_1$ で，各 j に対して，

$$Y_j^{(n)} \leq E[\, E[X_{n+j+1}^{+} \mid \mathfrak{F}_{n+j}] \mid \mathfrak{F}_j] = Y_j^{(n+1)}$$

となる。そこで $Y_j = \lim_{n\to\infty} Y_j^{(n)}$ をおくと，これは当然 $\mathfrak{F}_j$－可測で可積分となり，単調収束定理を用いれば

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$E[Y_{j+1} \mid \mathcal{F}_j] = \lim_{n\to\infty} E[Y_{j+1}^{(n)} \mid \mathcal{F}_j] = \lim_{n\to\infty} E[X_{n+j+1}^+ \mid \mathcal{F}_j] = \lim_{n\to\infty} Y_j^{(n+1)} = Y_j$$

が得られる。従って Y は非負 martingale である。同様にして，$Z_j = \lim_{n\to\infty} Z_j^{(n)}$ も非負 martingale となる。しかも $X = Y - Z$，

$$E[Y_0 + Z_0] = \lim_{n\to\infty} E[Y_0^{(n)} + Z_0^{(n)}] = \lim_{n\to\infty} \|X_n\|_1 = \|X\|_1$$

である。逆に，これが十分条件なることは明らかであろう。

最後に分解の一意性を示そう。非負 martingales Y'，Z' が定理の条件をみたしていれば，

$$X_{n+j}^+ \leq Y'_{n+j}, \quad X_{n+j}^- \leq Z'_{n+j}$$

がなりたつので，$Y_j^{(n)} \leq Y'_j$，$Z_j^{(n)} \leq Z'_j$，即ち，$Y_j \leq Y'_j$，$Z_j \leq Z'_j$ がでる。仮定により，$E[Y_j + Z_j] = E[Y'_j + Z'_j]$ だから，結局 $Y_j = Y'_j$ $Z_j = Z'_j$ $(j \geq 1)$ となる。 □

云うまでもなく Krickeberg の分解は，完全加法的集合関数に対する Jordan 分解に対応している。

さて，§1 で述べた不等式 (2) を $X \in \mathcal{M}$ に適用して

(4) $$\lambda P(X^* > \lambda) \leq \sup_n E[|X_n| ; X^* > \lambda] \quad (\lambda > 0)$$

が得られるが，一般に submartingale に対しては次の形の不等式が知られている。

<u>定理 1.4</u> 任意の submartingale Y に対して

(5) $$\lambda P(Y^* > \lambda) \leq 3\|Y\|_1 \quad (\lambda > 0)$$

が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(証明) $\tau = \min\{n ; Y_n > \lambda\}$ とおく。すると $\tau \in \mathcal{S}$, $\{\sup_n Y_n > \lambda\} = \{\tau < \infty\}$ である。しかも

$$\lambda P(\tau \leq n) = \sum_{j=0}^{n} \lambda P(\tau = j) \leq \sum_{j=0}^{n} E[Y_j^+ ; \tau = j]$$

$$\leq E[Y_n^+ ; \tau \leq n]$$

が成立する。ここで $n \to \infty$ とすれば

$$\lambda P(\sup_n Y_n > \lambda) \leq \|Y\|_1$$

が求まる。同様に, $\nu = \min\{n ; -Y_n > \lambda\}$ を考えると, 定理1.2 によって $Y_{n\wedge\nu}$ も submartingale だから

$$E[Y_0] \leq E[Y_{n\wedge\nu}] = E[Y_\nu ; \nu \leq n] + E[Y_n ; n < \nu]$$

$$\leq -\lambda P(\nu \leq n) + \|Y_n\|_1 ,$$

従って, $\lambda P(\nu \leq n) \leq 2\|Y\|_1$ がでる。ここで, $n \to \infty$ とすれば

$$\lambda P(\inf_n Y_n < -\lambda) \leq 2\|Y\|_1$$

が求まる。ゆえに, $\lambda P(Y^* > \lambda) \leq 3\|Y\|_1$ である。 □

(4) 及び (5) は, 独立な確率変数列に対する Kolmogorov の不等式の一般化である。

<u>定理1.5 (J. L. Doob [27])</u> martingale X が L^1-有界ならば, 概収束する。

(証明) $\|X\|_1 < \infty$ のとき, Krickeberg の分解定理により, X は非

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

負と仮定できる。すると Jensen の定理によって，$Y_n \equiv e^{-X_n}$ は，submartingale をなし，$m<n$ のとき

$$E[(Y_n - Y_m)^2] \leqq E[Y_n^2] - E[Y_m^2] \leqq 1$$

がなりたつ。依って，$n \longrightarrow \infty$ のとき，Y_n は L^2-収束である。しかも (5) により任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P\left(\max_{m<j\leqq n} |Y_j - Y_m| > \varepsilon \right) \leqq \frac{3}{\varepsilon} \| Y_n - Y_m \|_1$$

がでるので，当然 Y_n は概収束する。従って，$X_n = -\log Y_n$ も概収束し，X の L^1－有界性から，$X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ は可積分となる。 □

この判定条件は，一般の supermartingale（或いは submartingale）Y に対しても通用する。実際に，定理1.1 によって，$Y_n = X_n - A_n$ $X \in \mathfrak{M}$，$A_n \leqq A_{n+1}$ と分解しておき，$\|Y\|_1 < \infty$ を仮定すると，

$$E[A_n] \leqq E[X_0] + \|Y\|_1$$

となるため，$A_\infty \equiv \lim_{n\to\infty} A_n \in L^1$ である。すると，X の L^1－有界性がでる。これによって，Y_n の概収束性が示される。

ここで定理1.5 の逆が成立しないことを例証しておく。

例 1.3　$\Omega =]0, 1]$ とし，P を Ω 上の Lebesgue 測度とする。$\mathcal{F}_n$ は $]1/n, 1]$ 上の可測集合と $]0, 1/n]$ により生成される σ-field とし $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$，$\mathcal{F} = \vee \mathcal{F}_n$ とおく。さらに，$X_0 = 0$，

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} & \left(\dfrac{1}{n} < \omega \leqq 1\right) \\ -n \log n & \left(0 < \omega \leqq \dfrac{1}{n}\right) \end{cases} \qquad (n \geqq 1)$$

と定めると，X_n は当然 $\mathcal{F}_n$-可測で，概収束している。しかも，$]0, 1/n]$ が $\mathcal{F}_n$ に関する atom になっている点に注意すれば

$$E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_\infty I_{]\frac{1}{n},1]} + n\, E[X_{n+1} \,;\,]0,\tfrac{1}{n}]]\, I_{]0,\frac{1}{n}]}$$

$$= X_\infty I_{]\frac{1}{n},1]} - n \log n \cdot I_{]0,\frac{1}{n}]}$$

$$= X_n \;,$$

即ち，$X \in \mathcal{M}$ である。然るに，$\|X_n\| = 2 \log n$ $(n \geq 1)$ だから，X は L^1-有界ではない。

このように Doob の収束定理は改良の余地を残しているものの，思いの外難かしい問題であって，この 40 年間，本質的には一歩も前進していない。

ところで，L^1-有界な martingales の中で特に重要なものとして，一様可積分 martingale がある。前述のように，そのクラスを $\mathcal{M}_u$ で示す。$\mathcal{M}_u$ と L^1 とは，次に述べる意味で同一視し得る。この関係は，実解析における結果を確率論の設定の下で考察しようとする場合などに利用される。

<u>定理 1.6</u>　X が $\mathcal{M}_u$ に属するための必要十分条件は，$X_n = E[U \mid \mathcal{F}_n]$ $(n \geq 0)$ をみたす $U \in L^1$ が（一意に）存在することである。

（証明）<u>必要性</u>：$X \in \mathcal{M}_u$ のとき，当然 L^1-有界だから，Doob の収束定理により，$X_n \xrightarrow{a.s} X_\infty \in L^1$ である。すると，Vitali の定理から，$X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$ となる。依って，任意の n と $A \in \mathcal{F}_n$ に対し

$$E[X_\infty \,;\, A] = \lim_{j \to \infty} E[X_j \,;\, A]$$

$$= E[X_n \,;\, A] \;,$$

即ち，$X_n = E[X_\infty \mid \mathcal{F}_n]$ である。

<u>十分性</u>： $X_n = E[U \mid \mathcal{F}_n]$ $(U \in L^1)$ のとき，任意の $\lambda > 0$ に対し

$$E[|X_n| ; |X_n| > \lambda] \leq E[|U| ; |X_n| > \lambda], \quad \sup_n P(|X_n| > \lambda) \leq \frac{\|U\|_1}{\lambda}$$

が成立する。依って，X は一様可積分である。 □

<u>例1.4</u> martingaleの手法を用いて，有名な"賭博師の破産問題"を解いてみよう。A，B両者の持金をそれぞれa，bとしてゲームを行う。毎回1ドルを賭けAが勝ってBから1ドル獲得する確率をpとする。このとき，Aが破産する確率rを求めよ，という問題である。これに対し既にA. DeMoivre (1711) が次のような結論を与えている：

$$r = \begin{cases} \dfrac{b}{a+b} & \left(p = \dfrac{1}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b} - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{a}}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} & \left(p \neq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

ただし，$q = 1 - p$ とする。

さて，X_n を n 回目までの trial で A の獲得した金額とすれば，勿論 $-a \leq X_n \leq b$ である。$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ とし，(x_n) を X の difference sequence とすると，x_n は $\mathcal{F}_{n-1}$ と独立なので

$$E[x_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = E[x_n] = p - q. \quad (n \geq 1)$$

となる。先ず $p = 1/2$ としよう。すると $E[x_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ がなりたつので，$X \in \mathcal{M}_u$ である。そこで，stopping time $\tau = \mathrm{Min}\{n ; X_n = -a$ 又は $X_n = b\}$ を定めると，定理1.2によって，$E[X_\tau] = 0$ がなり

たち，$E[X_\tau]=b(1-r)-ar$ に注意すれば，$r=b/(a+b)$ が得られる。次に $p\neq 1/2$ の場合を処理しよう。今度は，$X\notin\mathcal{M}$ であるがその代りに，$Y_n\equiv(q/p)^{X_n}$ を考えると，これは一様有界で，しかも

$$E[Y_n\mid\mathcal{F}_{n-1}]=Y_{n-1}E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{x_n}\right]=Y_{n-1}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)p+\left(\frac{q}{p}\right)^{-1}q\right\}=Y_{n-1}$$

となり $Y\in\mathcal{M}_u$ である。ここで τ を前のように定め，定理1.2を用いると

$$1=E[Y_\tau]=\left(\frac{q}{p}\right)^{-a}r+\left(\frac{q}{p}\right)^{b}(1-r)$$

がでる。これを整頓すれば結論が得られる。

martingale が確率収束しても概収束とは限らないことは前に述べてあるが，さらに法則収束から確率収束がでない（Tsuchikura [88]）。こうした事実は，やはり留意しておくべきであろう。

§4. Local Martingale

或る $X\in\mathcal{M}$ と確率過程 $v=(v_n,\mathcal{F}_{n-1})$ によって，$Y_n=\sum_{j=0}^{n}v_jx_j$ と表せる確率過程 $Y=(Y_n,\mathcal{F}_n)$ は，"X の v による martingale 変換" と云われている。ここに (x_n) は X の difference sequence である。これは丁度離散時径数における確率積分に相当する概念であって，D. L. Burkholder [4] により導入された。特に，$|v_n|\leq C$ のときは $Y\in\mathcal{M}$ であるが，一般には次に述べる local martingale になっている。

<u>定義 1.4</u>　X を確率過程とする。$\tau_n\in\mathcal{S}$ を

$$\tau_n\uparrow\infty\quad a.s.\qquad X^{\tau_n}I_{\{\tau_n>0\}}\in\mathcal{M}_u\quad(n=1,2,\dots)$$

となるように選ぶことができるとき，X を local martingale と云う。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

martingale の自然な拡張であるこの概念は，K. Ito－S. Watanabe [41] によって連続時径数の場合に導入された。$\mathcal{L}$ を local martingales の全体としよう。$\mathcal{L}$ は明らかに線形空間である。なお，改めて stopping times τ_n を選び直せばよいから，$X^{\tau_n} I_{\{\tau_n>0\}} \in \mathfrak{M}$ なる条件に置き換えることができる。

定理 1.7　確率過程 X に対して，次の 3 性質は同値である。

(i)　$X \in \mathcal{L}$

(ii)　$E[\,|X_{n+1}|\,|\,\mathfrak{F}_n] < \infty$，　$E[X_{n+1}\,|\,\mathfrak{F}_n] = X_n$　a.s　$(n \geq 0)$

(iii)　或る $Y \in \mathfrak{M}$ の martingale 変換

(証明)　最初に (i) ならば (ii) を示そう。$\mathcal{S} \ni \tau_j \uparrow \infty$ a.s，$X^{\tau_j} I_{\{\tau_j>0\}} \in \mathfrak{M}_u$ とすれば，$|X_{n+1}|\, I_{\{\tau_j>n\}} \leq |X_{(n+1)\wedge\tau_j}|\, I_{\{\tau_j>n\}} \in L^1$，従って $\{\tau_j>n\} \subset \{E[\,|X_{n+1}|\,|\,\mathfrak{F}_n] < \infty\}$ となり，しかも $\{\tau_j>n\} \in \mathfrak{F}_n$ だから

$$
\begin{aligned}
E[X_{n+1} I_{\{\tau_j>n\}}\,|\,\mathfrak{F}_n] &= E[X_{(n+1)\wedge\tau_j} I_{\{\tau_j>0\}}\,|\,\mathfrak{F}_n]\, I_{\{\tau_j>n\}} \\
&= X_{n\wedge\tau_j} I_{\{\tau_j>n\}} \\
&= X_n I_{\{\tau_j>n\}}
\end{aligned}
$$

が成立する。ここで $\{\tau_j>n\} \uparrow \Omega$ $(j\to\infty)$ に注目すれば (ii) が得られる。

次に (ii) $\Longrightarrow$ (iii) の証明に移ろう。(x_n) を X の difference sequence とし，$w_0 = |x_0|$，$w_n = E[\,|x_n|\,|\,\mathfrak{F}_{n-1}]$

$$
v_n = \begin{cases} w_n^{-1} & (w_n > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (w_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

とおく。v_nは明らかに$\mathcal{F}_{n-1}$-可測である。そこで，$y_n = v_n x_n$とすると，y_nは$\mathcal{F}_n$-可測で，

$$E[\,|y_n|\,|\,\mathcal{F}_{n-1}] = v_n w_n \leq 1 \ , \quad E[\,y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$$

をみたすため，$Y_n = \sum_{j=0}^{n} y_j$は$\mathcal{M}$に属す。しかも

$$\sum_{j=0}^{n} w_j y_j = \sum_{j=0}^{n} x_j = X_n \ ,$$

即ち，XはYのwによるmartingale変換である。

最後に，(iii) $\Longrightarrow$ (i)を処理する。Xが$Y \in \mathcal{M}$のmartingale変換 i.e. $X_n = \sum_{j=0}^{n} v_j y_j$（$v_j$は$\mathcal{F}_{j-1}$-可測）としよう。各$j$に対しstopping time

$$\tau_j = \mathrm{Min}\{\, n \ ; \ |v_{n+1}| > j \,\}$$

を定めると，$\tau_j \uparrow \infty$ a.s. $\{\tau_j > 0\} \subset \{\, v^*_{\tau_j} \leq j \,\}$がなりたつので

$$X^{\tau_j} I_{\{\tau_j > 0\}} \in \mathcal{M} \qquad (j \geq 1)$$

がでる。従って，$X \in \mathcal{L}$となる。 □

local martingaleは系列$(\mathcal{F}_n)$に依存するだけでなく確率測度Pにも依存している。この点の注意を怠ると，つまらないミスを犯すことがあるため，これについてもう少し触れておく。

一般に，$X = (X_n, \mathcal{F}_n) \in \mathcal{M}$のとき，$\mathcal{G}_n \equiv \sigma(X_j, j \leq n)$に対して，$(X_n, \mathcal{G}_n)$もmartingaleとなる。然るに local martingaleに関しては最早この性質がなりたたない。これに関するC. Stricker [86]の例を紹介しよう。

<u>例 1.5</u>　$\Omega = \{1, 2, \cdots\}$とし，$\mathcal{F}_0 = \sigma(\{2n, 2n+1\}, n = 1, 2, \cdots)$，

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$\mathcal{F}_1$ を Ω の部分集合の全体とする。さらに確率測度 $\mathbb{P}$ を

$$\mathbb{P}(\{2n\}) = \mathbb{P}(\{2n+1\}) = \frac{1}{n^2 a}, \quad ただし, \quad a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

によって定める。いま，$X_0 = 0$,

$$X_1(\omega) = \begin{cases} n & (\omega = 2n) \\ -n & (\omega = 2n+1) \end{cases}$$

とおけば，X_1 は $\mathcal{F}_1$－可測，$|X_1|$ は当然 $\mathcal{F}_0$－可測となる。すると

$$E[\,|X_1|\,|\,\mathcal{F}_0] = |X_1| < \infty, \quad E[X_1 \,|\, \mathcal{F}_0] = 0 = X_0,$$

従って，定理1.7により，X は $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ に関して local martingale となる。然るに，$\mathcal{G}_0 = \{\phi, \Omega\}$ だから

$$E[\,|X_1|\,|\,\mathcal{G}_0] = E[\,|X_1|\,] = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbb{P}(\{2n, 2n+1\}) = \infty,$$

となって，やはり定理1.7により，(X_0, X_1) は $(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ に関する local martingale にはなり得ない。

このような状況は，確率測度 $\mathbb{P}$ との関連においても生じる。いま，$0 < Z \in L^1$, $E[Z] = 1$ とし，$d\hat{\mathbb{P}} = Z\,d\mathbb{P}$ とおけば，$\hat{\mathbb{P}}$ は Ω 上の確率測度である。簡単のため，$\hat{\mathbb{P}}$ に関する local martingales の全体を $\hat{\mathcal{L}}$ で示すと，一般には $X \in \mathcal{L}$ から $X \in \hat{\mathcal{L}}$ がでないことは容易に理解できよう。併し乍ら，今日では連続時径数の場合において $\mathcal{L}$ と $\hat{\mathcal{L}}$ の関係が鮮かに解明されている（第3章の§4）。それを離散時径数の立場から眺め直してみよう。そのために，Z から martingale $Z_n = E[Z \,|\, \mathcal{F}_n]$ を定義し，$Z_0 = 1$ を仮定しておく。さらに，$m_0 = 0$, $m_j = Z_j / Z_{j-1} - 1$ $(j \geq 1)$ とすれば，

$M_n \equiv \sum_{j=0}^{n} m_j$ は martingale である。さて，各 $X \in \mathcal{L}$ に対して

(6) $$\hat{X}_n \equiv \sum_{j=0}^{n} \frac{m_j x_j}{1+m_j} - X_n \qquad (n \geq 0)$$

を考えよう。$\hat{E}[\ ]$ を $\hat{P}$ に関する平均とし，$\hat{x}_0 \equiv \hat{X}_0\ (= -X_0)$ $\hat{x}_j \equiv \hat{X}_j - \hat{X}_{j-1}\ (j \geq 1)$ とすれば，$\hat{x}_j = -x_j/(1+m_j)$ となるので，

$$\hat{E}[\,|\hat{x}_j|\,|\,\mathcal{F}_{j-1}] = E[\frac{Z_j}{Z_{j-1}}|\hat{x}_j|\,|\,\mathcal{F}_{j-1}] = E[\,|x_j|\,|\,\mathcal{F}_{j-1}] < \infty$$

$$\hat{E}[\,\hat{x}_j\,|\,\mathcal{F}_{j-1}] = -E[\,x_j\,|\,\mathcal{F}_{j-1}] = 0\ ,$$

即ち，定理1.7により，$\hat{X} \in \hat{\mathcal{L}}$ がでる。しかも mapping $\Phi: X \to \hat{X}$ は明らかに線形である。さらに，これは bijection にもなっている。実際に，$Z^{-1} d\hat{P} = dP$，$\hat{E}[Z^{-1}\,|\,\mathcal{F}_n] = Z_n^{-1}$，$\hat{m}_j = Z_{j-1}/Z_j - 1$ なることに注意すれば，任意の $X' \in \hat{\mathcal{L}}$ に対して $x_0 \equiv -X'_0$，$x_j \equiv -x'_j/(1+\hat{m}_j)\ (j \geq 1)$ により定まる確率過程 X は $\mathcal{L}$ の要素となる。このとき，$1+\hat{m}_j = (1+m_j)^{-1}$ を考慮すれば

$$\Phi(X)_n = -\sum_{j=0}^{n} \frac{x_j}{1+m_j} = \sum_{j=0}^{n} x'_j = X'_n \qquad \text{i.e., } X' = \Phi(X)$$

が成立する。従って，Φ は surjective である。また $\Phi(X) = 0$ のとき，$\hat{x}^* = 0$ となる。$1+m_j > 0$ に注意すれば $x^* = 0$ がでるため，$X = 0$ が求まる。即ち，Φ は injective でもあるから，結局 bijection となる。このようにして $\hat{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ と同型であることが示された。

ところが X が martingale でも $\Phi(X)$ は必ずしも $\hat{P}$ に関する martingale とはならず，また X が L^p-有界であっても $\Phi(X)$ は $L^p(\hat{P})$-有界と限らない等の新たな問題が生じてくる。その話題は第3章で詳しく論ずる。

§5. Doobの不等式

本節の目的は，Doobにより与えられた古典的な不等式の紹介である。それを導くのに通常は前章の不等式(4)を用いるが，此処ではA. Garsiaの本[31]に述べられている方法を採用する。

<u>補題</u>　関数 $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ が $f(0)=0$，非減少のとき，任意の非負なsubmartingale Y に対して不等式

$$E\left[\int_0^{Y_n^*} t\,df(t)\right] \leq E[Y_n f(Y_n^*)] \qquad (n \geq 0)$$

が成立する。

（証明）$Y_0=0$ を仮定できる。$Y_{j-1}^* < Y_j^*$ のとき，$Y_j^* = Y_j$ だから

$$E\left[\int_0^{Y_n^*} t\,df(t)\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[\int_{Y_{j-1}^*}^{Y_j^*} t\,df(t)\right]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} E[Y_j\{f(Y_j^*) - f(Y_{j-1}^*)\}]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} E[Y_n\{f(Y_j^*) - f(Y_{j-1}^*)\}]$$

$$\leq E[Y_n f(Y_n^*)] \qquad \square$$

<u>定理1.8（J. L. Doob [26]）</u>　$X \in \mathfrak{M}$ に対し次の(i)，(ii)が成立する。

(i)　$\|X^*\|_p \leq q\|X\|_p \qquad (1 < p < \infty,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(ii) $$\|X^*\|_1 \leqslant \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} \sup_n E[\,|X_n| \log^+ |X_n|\,]$$

ただし，$\log^+ x = I_{[1,\infty[}(x) \log x$.

（証明） (i) の証明から始めよう。$X \in \mathfrak{M}$ のとき，$Y_n = |X_n|$ は submartingale をなす。この場合，$Y_0 = 0$ を仮定しても一般性を失わない。関数 $f(t) = t^{p-1}$ （$1 < p < \infty$）に対し補題を用いて

$$E[(X^*)^p] \leqslant q\, E[\,|X_n|\,(X_n^*)^{p-1}\,],$$

これに Hölder の不等式を適用すれば

$$E[(X^*)^p] \leqslant q\, \|X_n\|_p\, E[(X^*)^p]^{\frac{1}{q}} 。$$

式 (i) の右辺は当然有限と仮定できる。すると，$X_n^* \leqslant |X_0| + \cdots + |X_n|$ だから，$X_n^* \in L^p$ となる。このとき上の不等式から

$$\|X_n^*\|_p \leqslant q\, \|X\|_p$$

がでる。ここで $n \to \infty$ とし，Fatou の補題を用いれば (i) が得られる。
次に (ii) を示すために，$f(t) = \log^+ t$ として補題を用いると，

$$E[(X_n^* - 1)^+] \leqslant E[\,|X_n| \log^+ X_n^*\,]$$

である。この式の右辺に不等式 $a \log b \leqslant a \log a + b/e$ （$0 < a \leqslant b$）を適用して

$$E[X_n^*] \leqslant 1 + E[\,|X_n| \log^+ |X_n|\,] + \frac{1}{e} E[X_n^*]$$

が得られる。従って (ii) が成立する。 □

$p=1$ に対しては，一般に (i) の型の不等式がなりたたない。

例 1.6　$\Omega =]0,1]$ とし，そこでの Lebesgue 測度を $\mathbb{P}$，

$$X_n = 2^n I_{]0,2^{-n}]}, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$$

とおくとき，X は L^1－有界な martingale となる。然るに，

$$X^* = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} I_{]1/2^n,\, 1/2^{n-1}]}$$

は可積分ではない。

§6. Garsia－Neveu の不等式

関数 $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ を右連続かつ非減少で $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ とし さらに定数 $a>0$ が存在して不等式

$$f(2t) \leqq a f(t) \qquad (t \geqq 0)$$

をみたしているとする（例えば，$f(t) = pt^{p-1}$ $(1<p<\infty)$）。このような関数 f の不定積分 $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ を "tame" と云う。F は convex で，しかも難なく検証できるように

$$F(2t) \leqq 2a F(t) \qquad (t \geqq 0)$$

をみたす。次に $g(t) = \inf\{s\,;\, f(s) > t\}$ とおくと，その不定積分 $G(t)$ もまた非減少で convex となる。さらに不等式

$$G\left(\frac{f(t)}{c_1}\right) \leqq \frac{1}{c_2} F(t) \qquad (t \geqq 0) \tag{6}$$

をみたす正定数 c_1, c_2 $(c_1 < c_2)$ が存在する。実際に，自然数 n を $a < 2^{n-1}$ をみたすように定め，$c_1 = a^n$，$c_2 = (2a)^{n-1}$ とおくと，

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

当然 $c_1 < c_2$ である。不等式 $G(u) \leq u g(u-)$ に $u = a^{-n} f(t)$ を代入すると

$$G\left(\frac{f(t)}{c_1}\right) \leq a^{-n} f(t)\, g(a^{-n} f(t)-)$$

$$\leq a^{-n} f(t)\, g(f(2^{-n}t)-)$$

$$\leq (2a)^{-n}\, t\, f(t)$$

$$\leq (2a)^{-n+1}\, \frac{t}{2} f\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{c_2} F(t)$$

となり、(6)が得られた。

<u>補題</u>　$0 \leq U, V \in L^1$ が条件

(7)　$$E[\,U - \lambda\,;\,U \geq \lambda\,] \leq E[\,V\,;\,U \geq \lambda\,] \quad (\lambda \geq 0)$$

をみたすとき、任意の tame な関数 F に対し

(8)　$$E[\,F(U)\,] \leq C\,E[\,F(V)\,]$$

が成立する。

（証明）必要なら U の代りに $U \wedge n$ を考慮すればよいから、予め $F(U) \in L^1$ を仮定できる。先ず(7)から

$$E[F(U)] = \int_0^\infty E[\,U - \lambda\,;\,U \geq \lambda\,]\, df(\lambda)$$

$$\leq \int_0^\infty E[\,V\,;\,U \geq \lambda\,]\, df(\lambda) = E[\,V f(U)\,]$$

がでる。他方，Young の不等式と (6) から

$$V\frac{f(U)}{c_1} \leq F(V) + G\left(\frac{f(U)}{c_1}\right) \leq F(V) + \frac{1}{c_2}F(U) \text{。}$$

この両端辺の平均をとって整頓すれば (8) が求まる。 □

A. Garsia [31] 及び J. Neveu [73] が与えた次の結果は，各種の martingale 不等式を考察する際に非常に有効である。

<u>定理 1.9</u> $A = (A_n, \mathcal{F}_n)$ $(A_{-1} \equiv 0)$ を増加過程とし，さらに或る非負可積分な r.v. U が存在して

$$E[A_\infty \mid \mathcal{F}_n] - A_{n-1} \leq E[U \mid \mathcal{F}_n] \qquad (n \geq 1)$$

をみたしているならば，$E[F(A_\infty)] \leq CE[F(U)]$ が成立する。

（証明） $\lambda > 0$ に対して，stopping time $\tau = \mathrm{Min}\{n ; A_n > \lambda\}$ を定めると，$A_{\tau-1} \leq \lambda$ a.s. $\{A_\infty > \lambda\} = \{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$ だから

$$\begin{aligned} E[A_\infty - \lambda ; A_\infty > \lambda] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[A_\infty - \lambda ; \tau = n] \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} E[A_\infty - A_{n-1} ; \tau = n] \\ &\leq E[U ; \tau < \infty] = E[U ; A_\infty > \lambda] \end{aligned}$$

となる。従って，補題から結論が得られる。 □

例えば，不等式 $\|A_\infty\|_p \leq C_p\|U\|_p$ $(1 < p < \infty)$ はその特別な場合である。$p = 1$ のときは，仮定から明らかに成立している。

§7. Davisの不等式

$X\in\mathfrak{M}$とし，(x_n)をそのdifference sequenceとする。暫く$X_0=0$としておく。さて，$\alpha_n=x_n I_{\{|x_n|\leq 2x^*_{n-1}\}}$，$y_0=0$，$y_n=\alpha_n-E[\alpha_n|\mathcal{F}_{n-1}]$ $(n\geq 1)$とおけば，$Y_n\equiv\sum_{j=0}^n y_j$は勿論martingaleをなし，

$$(9)\qquad |y_n|\leq 4x^*_{n-1}\qquad(n\geq 1)$$

がなりたつ。これに対して，$\beta_n=x_n I_{\{|x_n|>2x^*_{n-1}\}}$とし，$z_0=0$ $z_n=\beta_n-E[\beta_n|\mathcal{F}_{n-1}]$ $(n\geq 1)$とおくと，$Z_n\equiv\sum_{j=0}^n z_j$もまたmartingaleとなる。しかも$|x_n|>2x^*_{n-1}$のとき，$|x_n|\leq 2(x^*_n-x^*_{n-1})$だから，

$$(10)\qquad \sum_{n=1}^\infty |z_n|\leq\sum_{n=1}^\infty|\beta_n|+\sum_{n=1}^\infty E[|\beta_n|\,|\,\mathcal{F}_{n-1}],\qquad \sum_{n=1}^\infty|\beta_n|\leq 2x^*$$

が成立する。明らかに$\alpha_n+\beta_n=x_n$なので，$X_n=Y_n+Z_n$となる。これを"Davisの分解"と云う。

<u>補題</u>　特に各nに対し，$|x_n|\leq v_n$をみたす$\mathcal{F}_{n-1}$-可測なr.v. v_nが存在すれば，次の不等式が成立する：

$$(11)\qquad P\{X^*>\beta\lambda,\ S(X)\vee v^*\leq\delta\lambda\}\leq\frac{2\delta^2}{(\beta-\delta-1)^2}P(X^*>\lambda)$$

$$(12)\qquad P\{S(X)>\beta\lambda,\ X^*\vee v^*\leq\delta\lambda\}\leq\frac{9\delta^2}{\beta^2-\delta^2-1}P\{S(X)>\lambda\}$$

ただし，$\lambda\geq 0$，$\beta>1$，$0<\delta<\beta-1$。

（証明）(12)は(11)に対すると同様の論法で証明できるので，(11)のみを示そう。先ずstopping times

$$\tau=\min\{n;\ |X_n|>\lambda\}$$

$$\mu = \mathrm{Min}\{ n \; ; \; |X_n| > \beta\lambda \}$$
$$\sigma = \mathrm{Min}\{ n \; ; \; S_n(X) \vee v_{n+1} > \delta\lambda \}$$

を定める。 $\beta > 1$ だから当然 $\tau \le \mu$ となる。
次に $y_0 = 0$, $y_n = x_n I_{\{\tau < n \le \mu \wedge \sigma\}}$ $(n \ge 1)$ とおけば, $Y_n = \sum_{j=0}^{n} y_j$ は martingale をなし, 仮定により $|x_n| \le v_n$ だから

$$S(Y)^2 \le S_\sigma(X)^2 = \{ S_{\sigma-1}(X)^2 + x_\sigma^2 \} I_{\{\sigma < \infty\}} + S_\sigma(X)^2 I_{\{\sigma = \infty\}}$$

$$\le 2\delta^2\lambda^2 I_{\{\sigma < \infty\}} + \delta^2\lambda^2 I_{\{\sigma = \infty\}} \le 2\delta^2\lambda^2 \text{。}$$

そこで $\{\tau = \infty\} = \{X^* \le \lambda\} \subset \{S(Y) = 0\}$ と (y_n) の直交性に注意すれば

$$\|Y\|_2^2 = E[S(Y)^2 \; ; \; X^* > \lambda] \le 2\delta^2\lambda^2 P(X^* > \lambda)$$

である。他方, $\{\sigma = \infty, \mu < \infty\} \subset \{Y^* \ge (\beta - 1 - \delta)\lambda\}$ により

$$P\{X^* > \beta\lambda, S(X) \vee v^* \le \delta\lambda\} = P(\sigma = \infty, \mu < \infty)$$

$$\le P\{Y^* \ge (\beta - 1 - \delta)\lambda\}$$

$$\le (\beta - 1 - \delta)^{-2}\lambda^{-2}\|Y\|_2^2$$

$$\le 2\delta^2(\beta - 1 - \delta)^{-2} P(X^* > \lambda),$$

従って (11) が得られた。 □

<u>定理 1.10 (B. Davis [13])</u> 不等式

(13) $$c\,E[S(X)] \le E[X^*] \le C\,E[S(X)] \qquad (X \in \mathcal{M})$$

が成立する。ここに $c, C>0$ は X に無関係な定数である。

（証明） 一般性を失うことなく $X_0=0$ を仮定できる。そこで、Davis 分解 $X_n = Y_n + Z_n$ を考えて、先ず (10) から

$$E[Z^* \vee S(Z)] \leq E[\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|] \leq 4E[x^*] \leq 4E[S(X) \wedge (2X^*)]$$

が得られる。一方 Y は (9) をみたすので、$v_n = 4x^*_{n-1}$ として補題を適用できる。これらの事柄を考慮して (13) の右側不等式を示そう。明らかに

$$\|X^*\|_1 \leq \|Y^*\|_1 + \|Z^*\|_1 \leq \|Y^*\|_1 + 4\|S(X)\|_1$$

であるが、右端辺の第一項を処理するために (11) を用いて

$$\begin{aligned} P(Y^* > \beta\lambda) &\leq P\{S(Y) \vee 4x^* > \delta\lambda\} + P\{Y^* > \beta\lambda, S(Y) \vee 4x^* \leq \delta\lambda\} \\ &\leq P\{S(Y) > \delta\lambda\} + P(4x^* > \delta\lambda) + \frac{2\delta^2}{(\beta-\delta-1)^2} P(Y^* > \lambda), \end{aligned}$$

従って、$\beta^{-1}\|Y^*\|_1 \leq \delta^{-1}\|S(Y)\|_1 + 4\delta^{-1}\|x^*\|_1 + 2\delta^2(\beta-\delta-1)^{-2}\|Y^*\|_1$ が得られる。必要なら Y の代りに $(Y_{j\wedge n})_{j=1,2,\cdots}$ を考え、後で $n\to\infty$ とすればよいから、予め $\|Y^*\|_1 < \infty$ を仮定できる。さらに $\delta > 0$ を十分小として $C_{\beta,\delta} \equiv \beta^{-1} - 2\delta^2(\beta-\delta-1)^{-2} > 0$ とすると、上の不等式より

$$\begin{aligned} C_{\beta,\delta}\|Y^*\|_1 &\leq \delta^{-1}\|S(Y)\|_1 + 4\delta^{-1}\|x^*\|_1 \\ &\leq \delta^{-1}\|S(X)\|_1 + \delta^{-1}\|S(Z)\|_1 + 4\delta^{-1}\|S(X)\|_1 \\ &\leq 9\delta^{-1}\|S(X)\|_1 \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

がでる。ゆえに，$\|X^*\|_1 \leq (9\delta^{-1}C_{\beta,\delta}^{-1}+4)\|S(X)\|_1$ である。

次に (13) の左側不等式を証明しよう。(11) の代りに (12) を利用するだけで論理の進め方は同じである。つまり

$$\|S(X)\|_1 \leq \|S(Y)\|_1 + \|S(Z)\|_1 \leq \|S(Y)\|_1 + 8\|X^*\|_1$$

の成立は明らかであり，右端辺の第一項を処理するために (12) を用いて

$$\mathbb{P}\{S(Y)>\beta\lambda\} \leq \mathbb{P}(Y^* \vee 4x^* > \delta\lambda) + \mathbb{P}\{S(Y)>\beta\lambda,\ Y^* \vee 4x^* \leq \delta\lambda\}$$

$$\leq \mathbb{P}(Y^*>\delta\lambda) + \mathbb{P}(4x^*>\delta\lambda) + \frac{9\delta^2}{\beta^2-\delta^2-1}\mathbb{P}\{S(Y)>\lambda\},$$

これより

$$\beta^{-1}\|S(Y)\|_1 \leq \delta^{-1}\|Y^*\|_1 + 4\delta^{-1}\|x^*\|_1 + \frac{9\delta^2}{\beta^2-\delta^2-1}\|S(Y)\|_1$$

がでる。ここで，$S(Y)\in L^1$ を仮定でき，しかも $c_{\beta,\delta} \equiv \beta^{-1} - 9\delta^2(\beta^2-\delta^2-1)^{-1} > 0$ となるように $\delta>0$ を定めれば，

$$c_{\beta,\delta}\|S(Y)\|_1 \leq \delta^{-1}\|X^*\|_1 + \delta^{-1}\|Z^*\|_1 + 8\delta^{-1}\|X^*\|_1 \leq 17\delta^{-1}\|X^*\|_1$$

が求まる。依って，$\|S(X)\|_1 \leq (17\delta^{-1}c_{\beta,\delta}^{-1}+8)\|X^*\|_1$ となる。 □

Davis 自身の証明では，$c=1/130$, $C=130$ としてある。
なお，$|X_n| \leq X^*$ $(n\geq 1)$ だから (13) より当然 $\|X\|_1 \leq C\|S(X)\|_1$ がでる。しかし，$\|S(X)\|_1 \leq c\|X\|_1$ は望むべくもない。念のため，その事を例証しておく。

例1.7　対称な random walk X_n を考え，$\tau = \mathrm{Min}\{n\,;\,X_n=1\}$ とおけば，X^τ は定理1.2 によって，martingale である。簡単な計

算から，$\|X_n^\tau\|_1 \longrightarrow 2 \ (n \to \infty)$ だが $S(X^\tau) = \tau^{1/2} \notin L^1$ となる。

§8. Burkholder－Davis－Gundy の不等式

$X \in \mathcal{M}$ とし，各 n に対して $X'_j = X_{j+n} - X_{n-1}$，$\mathcal{F}'_j = \mathcal{F}_{j+n}$ $(j \geqq 0)$ とおく。さらに $\Lambda \in \mathcal{F}_n$（ただし，$P(\Lambda) > 0$）に対し，$\Omega$ 上の確率測度 $P'(A) \equiv P(A \cap \Lambda)/P(\Lambda)$ $(A \in \mathcal{F})$ を定義する。このとき，X' は $(\mathcal{F}'_j)$ と P' に関する martingale であって，しかも

$$X^* - X^*_{n-1} \leqq (X')^* \leqq 2X^*, \qquad S(X) - S_{n-1}(X) \leqq S(X') \leqq S(X)$$

が成立している。依って (13) の右側不等式から

$$E[\,X^* - X^*_{n-1}\ ;\ \Lambda\,] \leqq C\,E[\,S(X)\ ;\ \Lambda\,],$$

つまり，$E[\,X^* - X^*_{n-1} \mid \mathcal{F}_n\,] \leqq C\,E[\,S(X) \mid \mathcal{F}_n\,]$ が求まる。
同様に (13) の左側不等式から，$E[\,S(X) - S_{n-1}(X) \mid \mathcal{F}_n\,] \leqq C E[\,X^* \mid \mathcal{F}_n\,]$ がでる。すると定理 1.8 によって次の Burkholder－Davis－Gundy の不等式が得られる。

<u>定理 1.11</u>　関数 F が tame のとき

(14) $$c\,E[\,F(S(X))\,] \leqq E[\,F(X^*)\,] \leqq C\,E[\,F(S(X))\,] \qquad (X \in \mathcal{M})$$

が成立する。

従って，これと Davis の定理を考慮すれば，不等式

(15) $$c_p \|S(X)\|_p \leqq \|X^*\|_p \leqq C_p \|S(X)\|_p, \quad X \in \mathcal{M},\ 1 \leqq p < \infty$$

が求まる。特に，$1 < p < \infty$ の場合は，Burkholder の不等式の名で知られている。なお，最近になって L. Chevalier [9] がこれを

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

改良して次の形の不等式を与えた。

$$\| X^* \vee S(X) \|_p \leq C_p \| X^* \wedge S(X) \|_p \qquad (1 \leq p < \infty)$$

此等の不等式が豊富な応用例を持つことは，例えば Random Walk の理論において見ることができよう。

最後に，$0<p<1$ に対しては (15) が最早成立しないことを例証しておく。此処で紹介するのは，本質的には Marcinkiewicz-Zygmund [61] に基づく例であって Burkholder-Gundy [7] にも述べられている。

<u>例 1.8</u>　$x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots)$ を独立な確率変数列で，$\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\}$ も独立とし，さらに

$$\mathbb{P}\{ x_n^{(j)} = 1 \} = 1 - \frac{1}{j+1}, \quad \mathbb{P}\{ x_n^{(j)} = -j \} = \frac{1}{j+1}$$

をみたしているものとする。このような設定の下で

$$X_0^{(j)} = 0, \quad X_n^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{(j)}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(x_k^{(j)}, 1 \leq k \leq n, j = 1, 2, \cdots)$$

を考えれば，各 $X^{(j)}$ が $(\mathcal{F}_n)$ に関して martingale となる。
さて，$x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)}$ の中で ℓ 個が $-j$，$(n-\ell)$ 個が 1 のとき，当然 $X_n^{(j)} = n - \ell - \ell j$ である。依って

$$E[| X_n^{(j)} |^p] = \sum_{\ell=0}^{n} | n - \ell - \ell j |^p {}_nC_\ell \left(1 - \frac{1}{j+1}\right)^{n-\ell} (j+1)^{-\ell}.$$

特に $j+1 \geq 2n$ のとき，$n \leq j+1-n \leq | n - \ell - \ell j |$ $(\ell \geq 1)$ だから

$$E[| X_n^{(j)} |^p] \geq n^p \left(1 - \frac{1}{j+1}\right)^n + n^p \sum_{\ell=1}^{n} {}_nC_\ell \left(1 - \frac{1}{j+1}\right)^{n-\ell} (j+1)^{-\ell}$$

$$\geq n^p .$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

他方，l'Hospitalの定理により，$0<p<1$のとき

$$\lim_{x\to\infty} x^p\left\{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^n\right\} = \frac{n!}{(n-p)(n-p-1)\cdots(2-p)}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1-p}} = 0,$$

依って，$j^p\left\{1-\left(1-\frac{1}{j+1}\right)^n\right\} \longrightarrow 0\ (j\to\infty)$ である。すると

$$E[S_n(X^{(j)})^p] = E\left[\left\{\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(j)})^2\right\}^{p/2}\right]$$

$$= \sum_{l=0}^{n}(n-l+lj^2)^{p/2}\,{}_nC_l\left(1-\frac{1}{j+1}\right)^{n-l}(j+1)^{-l}$$

$$\leq n^{p/2}\left(1-\frac{1}{j+1}\right)^n + (nj^2)^{p/2}\left\{1-\left(1-\frac{1}{j+1}\right)^n\right\} \longrightarrow n^{p/2}\quad (j\to\infty)$$

このとき，

$$\frac{E[(X_n^{(j)})^{*p}]}{E[S_n(X^{(j)})^p]} \geq \frac{E[|X_n^{(j)}|^p]}{E[S_n(X^{(j)})^p]} \longrightarrow n^{p/2}\quad (j\to\infty)$$

となり，(15)の右側不等式は成立し得ない。
これと同一の設定の下で(15)の左側不等式に対する反例を構成できる。実際に，$x_1^{(j)2}+x_2^{(j)2}+\cdots+x_n^{(j)2}=n$ となる確率が $\{1-1/(j+1)\}^n$ だから

$$E[S_n(X^{(j)})^p] \geq n^{p/2}\left(1-\frac{1}{j+1}\right)^n.$$

$Y_n^{(j)} \equiv \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k^{(j)}$ とすると，$Y^{(j)}\in\mathcal{M}$，$S_n(Y^{(j)}) = S_n(X^{(j)})$ となるので

$$E[S_{2n}(Y^{(j)})] \geq (2n)^{p/2}\left(1-\frac{1}{j+1}\right)^{2n}$$

が成立する。次に，$d_k^{(j)} = x_{2k-1}^{(j)} - x_{2k}^{(j)}$ とおけば，$Y_{2l}^{(j)} = \sum_{k=1}^{l} d_k^{(j)}$ で，しかも確率 $\alpha \equiv \left(1-\frac{1}{j+1}\right)^2 + (j+1)^{-2}$ で $d_k^{(j)} = 0$ となることが簡単に

検証できる。すると，$d_1^{(j)} = d_2^{(j)} = \cdots = d_\ell^{(j)} = 0$ となる確率は当然 α^ℓ である。また，$d_k^{(j)} \neq 0$ のときは，$|d_k^{(j)}| = j+1$ だから，$|Y_{2\ell}^{(j)}| \leq \ell(j+1)$ がなりたつ。そこで，$0 < p < 1$ とすると

$$|Y_{2\ell+1}^{(j)}|^p \leq |Y_{2\ell}^{(j)}|^p + |x_{2\ell+1}^{(j)}|^p, \quad E[|x_{2\ell+1}^{(j)}|^p] = (1-\frac{1}{j+1}) + \frac{j^p}{j+1} \leq 2,$$

$1-\alpha^\ell \leq 2\ell/(j+1)$ に注意すれば，$E[\underset{\ell \leq 2n}{\mathrm{Max}} |Y_\ell^{(j)}|^p] \leq n^p (j+1)^p \frac{2n}{j+1} + 2$ 。このとき

$$\frac{E[S_{2n}(Y^{(j)})^p]}{E[\underset{\ell \leq 2n}{\mathrm{Max}} |Y_\ell^{(j)}|^p]} \geq \frac{(2n)^{p/2}\left(1-\frac{1}{j+1}\right)^{2n}}{n^p(j+1)^p\frac{2n}{j+1}+2} \longrightarrow \frac{(2n)^{p/2}}{2} \quad (j \to \infty),$$

従って (15) の左側不等式は成立し得ない。

なお，Martingale 不等式に関する更に詳しい結果に興味をお持ちの方は，Burkholder-Gundy [7]，Garsia [31]，J. Neveu [73] 或いは Y.S. Chow-H. Teicher [10] を参照されたい。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

第2章 連続時径数の martingale

完備な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に, $\mathcal{F}$ の sub σ-fields から成る右連続で単調に増大する族 $(\mathcal{F}_t)_{0\le t<\infty}$ が与えられているものとし, 離散時径数のときと同様に, $\mathcal{F} = \bigvee_{t\ge 0} \mathcal{F}_t$ を仮定しておく。此処では, 実数値確率変数の族 $X = (X_t)_{0\le t<\infty}$ を便宜上"raw な確率過程"と呼ぶ。特に各 X_t が $\mathcal{F}_t$-可測のとき, "raw"を省いて単に確率過程と云うことにした。或いは, これを X が $(\mathcal{F}_t)$ に適合しているとも云う。連続時径数の martingale は, 次の3条件をみたす確率過程 $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ として定義される:

(i) 各 $t \ge 0$ に対し, $M_t \in L^1$.

(ii) 確率1で見本関数 $M_\cdot(\omega) : t \longmapsto M_t(\omega)$ は右連続で, しかも高々第一種の不連続性しか持たない.

(iii) $0 \le s \le t$ のとき, $E[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ a.s.

記号 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_u$ を前章におけると同様の意味で用いた。1次元の Brown 運動 B_t は, 最も基本的な martingale である。その他 $B_t^2 - t$ 及び $\exp(B_t - t/2)$ も martingale になることが知られている。

本章では, 第3章に対する準備を配慮しつつ, 最近の martingale の理論に対する一応の解説を試みてある。しかし, より詳細な一般論を知りたい方は, Dellacherie-Meyer の本 [15] を是非読破されたい。

§1. 確率過程の可測性

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ の部分区間 I 上の位相的 Borel 集合体を $\mathcal{B}(I)$ で表す。一般に, X を raw な確率過程とし, これが可測であるとは, mapping $\mathbb{R}_+ \times \Omega \ni (t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ が, 直積 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ に関して可測なることを云う。このノートでは, 予め X の可測性を仮定して話を進める。しかし, その場合でも X は必ずしも $(\mathcal{F}_t)$ に適合すると

は限らない。誤り易い事柄だけに注意を要する。以後簡単のため有界で可測な raw 確率過程の全体を $\mathcal{X}$ で示そう。

次に各 $t>0$ に対して，$[0,t]\times\Omega\ni(s,\omega)\longmapsto X_s(\omega)$ が $\mathbb{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t$-可測であるときに，$X$ を progressive という。一般に progressive ならば可測であるが，逆は成立しない。

例2.1　$(\Omega,\mathcal{F})\equiv(\mathbb{R}_+,\mathbb{B}(\mathbb{R}_+))$ とし，Ω 上の確率測度 $\mathbb{P}$ に対し $\mathbb{P}(\{\omega\})=0$ $(\forall\omega\in\Omega)$ を仮定しておく。さらに，$\mathcal{F}_t=\mathfrak{S}(\{\omega\},\omega\in\Omega)$,

$$X_t(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega=t)\\ 0 & (\omega\neq t)\end{cases}$$

とおけば，X は当然可測となる。然るに

$$\{(s,\omega)\in[0,t]\times\Omega\ ;\ X_s(\omega)>0\}=\{(\omega,\omega)\ ;\ 0\leqq\omega\leqq t\}$$

は $\mathbb{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t$ に属さないため，X は progressive ではない。

$\mathbb{R}_+\times\Omega$ の部分集合 H が，或る null set N によって，$H\subset\mathbb{R}_+\times N$ となるとき，evanescent と云われる。その全体を $\mathcal{E}$ で示した。$X,Y\in\mathcal{X}$ が，$\{X\neq Y\}=\{(t,\omega)\ ;\ X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}\in\mathcal{E}$ であるとき，$X=Y$ と定義する。一意性は，凡てこの意味に解釈する。第1章におけると同様に，r.v. $T:\Omega\longrightarrow[0,\infty]$ が，$\{T\leqq t\}\in\mathcal{F}_t$ $(\forall t)$ をみたすときに stopping time と云い，その全体を $\mathcal{S}$ とした。各 $T\in\mathcal{S}$ には σ-field $\mathcal{F}_T=\{A\in\mathcal{F}\ ;\ A\cap(T\leqq t)\in\mathcal{F}_t\ (\forall t)\}\subset\mathcal{F}$ が対応している。次に，$A\in\mathcal{F}$ に対して

$$T_A(\omega)=\begin{cases}T & (\omega\in A)\\ \infty & (\omega\notin A)\end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

とおけば，$\mathcal{F}_T$ の定義から 2 条件 (i) $T_A \in \mathcal{S}$ (ii) $A \in \mathcal{F}_T$ が同値となる。

定理 2.1 確率過程 X が progressive ならば，任意の $T \in \mathcal{S}$ に対し，$X_T I_{\{T<\infty\}}$ は $\mathcal{F}_T$-可測となる。

(証明) $T \in \mathcal{S}$ とする。このとき，$\phi_1 : \omega \longmapsto (T(\omega) \wedge t, \omega)$ は，$(\Omega, \mathcal{F}_t)$ から $([0,t] \times \Omega, \mathbb{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t)$ への可測な mapping である。さらに，mapping $\phi_2 : [0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto X_s(\omega) \in \mathbb{R}$ を考えると，$X_{T\wedge t} = \phi_2 \circ \phi_1$ がなりたつ。特に X が progressive のとき，ϕ_2 は $\mathbb{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$-可測だから，$X_{T\wedge t}$ は $\mathcal{F}_t$-可測となる。すると任意の $\Lambda \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ に対し，

$$(\forall t) \quad (X_T I_{\{T<\infty\}} \in \Lambda) \cap \{T \leq t\} = \{X_{T\wedge t} \in \mathcal{F}_t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

従って，結論が得られた。 □

次に Meyer [64] に従い，$S, T \in \mathcal{S}$ $(S \leq T)$ に対し

$$[\![S, T[\![= \{(t,\omega) \ ; \ S(\omega) \leq t < T(\omega)\}$$
$$]\!]S, T]\!] = \{(t,\omega) \ ; \ S(\omega) < t \leq T(\omega) < \infty\}$$

とおく。何れも $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ の部分集合である。同様に，$[\![S,T]\!]$, $]\!]S,T[\![$ が考えられる。これらは確率区間と呼ばれており，確率過程の一般論を展開する際に基本となる概念である。簡単化のために $[\![S,S]\!]$ を $[\![S]\!]$ と略記することが多い。特に S, T が一定値 s, t のとき，通常の $\mathbb{R}_+$ 内の区間 $[s,t[$ に対して，確率区間 $[\![s,t[\![$ は，$[s,t[\times \Omega$ である。

一般に，任意の $T \in \mathcal{S}$ は 3 つの型に分類される。まず，2 条件 (i) $T_n \uparrow T$ a.s (ii) $\{T>0\} \subset \bigcap_n \{T_n < T\}$ をみたす $T_n \in \mathcal{S}$ が存在する場合で，T を "predictable" という。これを "pred." と略

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

記し，その全体を$\mathcal{S}^p$で表す。例えば，任意の$T\in\mathcal{S}$と定数$a>0$に対し，$T+a\in\mathcal{S}^p$である。また，$S,T\in\mathcal{S}^p$から$S\vee T$, $S\wedge T\in\mathcal{S}^p$がでる。さらに$T_n\in\mathcal{S}^p$に対し，$\sup_n T_n\in\mathcal{S}^p$であること，或いは$T_n\downarrow T$で，しかも十分大なる$n$に対し$T_n=T$がなりたつとき，$T\in\mathcal{S}^p$であることなどが比較的容易に検証できる。他方，任意の$S\in\mathcal{S}^p$に対し，$[\![S]\!]\cap[\![T]\!]=\phi$となる$T\in\mathcal{S}$をtotally inaccessibleと云い，これを"t. inac."と略記した。その全体を簡単のため$\mathcal{S}^t$とする。例えば，N_tをPoisson過程とするとき，$T=\inf\{t\,;\,\Delta N_t=1\}$はt. inac.である。また一般に任意の$T\in\mathcal{S}^t$と$A\in\mathcal{F}_T$に対し，$T_A\in\mathcal{S}^t$がなりたつ。第3の型のstopping timeは，適当な$T_n\in\mathcal{S}^p$が存在して，$[\![T]\!]\subset\bigcup_n[\![T_n]\!]$となる場合で，このTをaccessibleという。pred. ならaccessibleであるが，逆は正しくない。

一般に$T\in\mathcal{S}$に対して，$\mathcal{F}_T$とは別のσ-field

$$\mathcal{F}_{T-}=\mathcal{F}_0\vee\mathfrak{S}(A\cap\{T>t\}\ ,\ A\in\mathcal{F}_t\ ,t\geq 0\ )$$

が考えられている。これはK.L. Chung－J.L.Doob [11] が導入したもので，定義から明らかに，$\mathcal{F}_{0-}=\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_{T-}\subset\mathcal{F}_T$をみたしTは$\mathcal{F}_{T-}$-可測となる。特に，恒等的に$T=t$のときは，$\mathcal{F}_{T-}=\bigvee_{s<t}\mathcal{F}_s$が成立している。

<u>定理 2.2</u>　任意の$T\in\mathcal{S}^p$と$A\in\mathcal{F}_{T-}$に対し，$T_A\in\mathcal{S}^p$である。

(証明)　pred. stopping timeの定義により，$T_n\in\mathcal{S}$が存在して，$T_n\uparrow T$ a.s 及び$\{T>0\}\subset\bigcap_n\{T_n<T\}$をみたしている。このとき，$\mathcal{F}_{T-}=\bigvee_n\mathcal{F}_{T_n}$が成立するため，Aは予め或る$\mathcal{F}_{T_m}$に属していると仮定できる。すると，$n\geq m$に対して，$\mathcal{S}\ni n\wedge(T_n)_A\uparrow T_A$であって，しかも$\{T_A>0\}\subset\{n\wedge(T_n)_A<T_A\}$がなりたつ。従って，$T_A\in\mathcal{S}^p$である。 ▯

特に $T \in \mathcal{S}^p$ の場合には、実は $T_A \in \mathcal{S}^p$ から $A \in \mathcal{F}_{T-}$ がでる。

次の結果は，種々の問題を考察する際に出現する stopping time については，pred. か t. inac. の何かに限定して論じ得ることを保証している。

__定理 2.3__ 任意の $T \in \mathcal{S}$ に対し，次の4条件をみたす $A, B \in \mathcal{F}_{T-}$ が一意に存在する：

(a) $\{T < \infty\} = A \cup B$, $A \cap B = \phi$　　(b) $T = T_A \wedge T_B$

(c) T_A は accessible　　(d) $T_B \in \mathcal{S}^t$

(証明) $S_n \in \mathcal{S}^p$ とするとき，$\bigcup_n \{S_n = T < \infty\} \in \mathcal{F}_{T-}$ である。しかも，このような集合の全体 $\mathcal{H}$ は，可附番和に関して閉じている。そこで，$H \equiv \text{ess.sup}\,\mathcal{H}$，$A \equiv H \cap \{T < \infty\}$，$B \equiv H^c \cap \{T < \infty\}$ とすれば，何れも $\mathcal{F}_{T-}$ に属し条件 (a)～(d) は明らかに成立する。$\{T < \infty\}$ の A と B への分解が一意であることも，その定義より明らかであろう。 □

§2. $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の σ-field

$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上に $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ の sub σ-fields

$$\mathcal{O} = \mathfrak{S}(\mathcal{E}, [\![T, \infty[\![, T \in \mathcal{S}), \quad \mathcal{P} = \mathfrak{S}(\mathcal{E}, [\![T, \infty[\![, T \in \mathcal{S}^p)$$

を定め，前者を optional，後者を predictable という。明らかに，$\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$ である。前節で述べたように，$T \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{F}_T$ のとき，$T_A \in \mathcal{S}$ だから，$I_A(\omega)\, I_{[\![T,\infty[\![}(t,\omega) = I_{[\![T_A,\infty[\![}(t,\omega)$ は $\mathcal{O}$-可測となる。従って Monotone Class Theorem (M.C.T と略記) を用いれば，任意の $\mathcal{F}_T$-可測な r.v U に対し，$U I_{[\![T,\infty[\![}$ が $\mathcal{O}$-可測であることが分る。同様にして，任意の $T \in \mathcal{S}^p$ と $\mathcal{F}_{T-}$-可測な r.v U に対し，$U I_{[\![T,\infty[\![}$ は $\mathcal{P}$-可測となる。
ところで，任意の $T \in \mathcal{S}$ と $n \geq 1$ に対し，$T + 1/n \in \mathcal{S}^p$ だから，

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$\rrbracket T,\infty\llbracket = \bigcap_n \llbracket T+1/n,\infty\llbracket \in \mathcal{P}$ が成り立つ。逆に $T\in\mathcal{S}^P$ であれば，$\{T>0\}\subset\bigcap_n\{T_n<T\}$ をみたす $\mathcal{S}\ni T_n\uparrow T$ が存在するので，$\llbracket T,\infty\llbracket = \llbracket 0_{\{T=0\}},\infty\llbracket \cup \bigcup_n \rrbracket (T_n)_{\{T>0\}},\infty\llbracket$ となる。ゆえに

$$\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{E},\ \rrbracket T,\infty\llbracket,\ (T\in\mathcal{S}))$$

が成立する。

次に殆んど凡ての見本関数が右連続で高々第一種の不連続性しか持たない確率過程により生成される $R_+\times\Omega$ 上の σ-field を $\mathcal{O}'$ とし，これに対して，殆んど凡ての見本関数が左連続である確率過程から生成される σ-field を $\mathcal{P}'$ としよう。明らかに，$\mathcal{E}\subset\mathcal{O}'\cap\mathcal{P}'$ である。

<u>定理 2.4</u> (i) $\mathcal{O}=\mathcal{O}'$ (ii) $\mathcal{P}=\mathcal{P}'$

(証明) 最初に (i) を示す。任意の $T\in\mathcal{S}$ に対し，$I_{\llbracket T,\infty\llbracket}$ は，$(\mathfrak{F}_t)$ に適合する確率過程であって，その見本関数は右連続で，しかも各点で左側極限を有する。従って，$\llbracket T,\infty\llbracket\in\mathcal{O}'$ i.e., $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}'$ である。逆に，X を殆んど凡ての見本関数が右連続で高々第一種の不連続性しか持たない確率過程として，$\varepsilon>0$ に対し

$$T_0=0,\quad T_n=\inf\{t>T_{n-1};\ |X_t-X_{T_{n-1}}|\geq\varepsilon\}\quad(n\geq 1)$$

とおけば，$\mathcal{S}\ni T_n\uparrow\infty$ である。定理2.1によって，$X_{T_\nu}I_{\{T_\nu<\infty\}}$ は $\mathfrak{F}_{T_\nu}$-可測だから

$$X^{(\varepsilon)}=\sum_{n=1}^{\infty}X_{T_{n-1}}I_{\llbracket T_{n-1},T_n\llbracket}$$

は $\mathcal{O}$-可測となり，しかも $\varepsilon\longrightarrow 0$ のとき，evanescent set を除き，$X^{(\varepsilon)}$ は X に各点収束する。依って，X も $\mathcal{O}$-可測，即ち $\mathcal{O}'\subset\mathcal{O}$ が得られた。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

次に(ii)の証明に移ろう。任意の $T\in\mathcal{S}$ に対して、確率過程 $I_{]\!]T,\infty[\![}$ を考えると、この見本関数は左連続だから $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}'$ がでる。逆に、確率過程 X の見本関数が確率1で左連続とすれば、

$$X^{(n)} \equiv X_0 I_{[\![0]\!]} + \sum_{j=1}^{\infty} X_{j/n} I_{]\!]j/n,\,(j+1)/n]\!]} \qquad (n\geq 1)$$

は $\mathcal{P}$-可測であり、しかも見本関数の左側連続性により、$n\to\infty$ のとき、$X^{(n)}\longrightarrow X$ だから、X も $\mathcal{P}$-可測となる。 □

特に、任意の $M\in\mathfrak{M}$ は $\mathcal{O}$-可測、$M_0 I_{[\![0]\!]}+M_{t-}$ (ただし、$M_{0-}=0$) は $\mathcal{P}$-可測である。なお、此処では証明しないけれども、実は任意の右連続な確率過程は $\mathcal{O}$-可測となる([14], T27, p81参照)。

<u>系</u> X が $\mathcal{P}$-可測のとき、任意の $T\in\mathcal{S}^p$ に対し $X_T I_{\{T<\infty\}}$ は $\mathcal{F}_{T-}$-可測である。

(証明) 定理2.4(ii)により、X の殆んどすべての見本関数は左連続と仮定できる。さらに $T\in\mathcal{S}^p$ に対し、$\{T>0\}\subset\bigcap_n\{T_n<T\}$ をみたす $\mathcal{S}\ni T_n\uparrow T$ が存在し、各 $X_{T_n}I_{\{0<T<\infty\}}$ は $\mathcal{F}_{T-}$-可測だから

$$X_T I_{\{T<\infty\}} = X_0 I_{\{T=0\}} + \lim_{n\to\infty} X_{T_n} I_{\{0<T<\infty\}}$$

も $\mathcal{F}_{T-}$-可測となる。 □

Dellacherie [14] の与えた次の結果は、σ-field $\mathcal{P}$ の性格を明確に特徴づけており、その簡潔な証明方法と共に誠に興味深い。

<u>定理 2.5</u> 任意の連続な確率過程を可測にする($\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上の)最小の σ-field $\mathcal{P}_c$ は、$\mathcal{P}$ と一致する。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(証明) 定理2.4(ii)から直ちに $\mathcal{P}_c \subset \mathcal{P}$ がでる。逆は，$T \in \mathcal{S}$ に対し $X_t \equiv t - t \wedge T$, $(t \geq 0)$ が連続な確率過程をなすこと及び $\{X > 0\} =]\!]T, \infty[\![$ に注意すれば，$]\!]T, \infty[\![\in \mathcal{P}_c$，つまり，$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_c$ が得られる。□

さて，$H \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ に対し

$$D_H(\omega) = \inf\{ t \,;\, (t, \omega) \in H \}$$

とおく。D_H を " H の debut " と云う。mapping $\pi : (t, \omega) \longmapsto \omega$ を用いると

$$\{ D_H < t \} = \pi(H \cap [\![0, t[\![ ) \qquad (t > 0)$$

がなりたつので，H が progressive ならば，$D_H \in \mathcal{S}$ である。また，この逆も成立する。従って，特に r.v. $0 \leq T \leq \infty$ に対して，" $T \in \mathcal{S} \iff [\![T]\!] \in \mathcal{O}$ " なる関係が成立する。
次に，$H(\omega) = \{ t \,;\, (t, \omega) \in H \}$ とおいて，集合 $[0, t] \cap H(\omega)$ の濃度が n 以上となる t の下限を $D_H^n(\omega)$ とおく。D_H^n を H の n-debut と云う。同様に，$D_H^\infty(\omega)$ を $[0, t] \cap H(\omega)$ が無限集合となる t の下限として定義し，これを H の ∞-debut と云う。勿論，$D_H = D_H^1$，$D_H^{n+1} = D_{H \cap]\!]D_H^n, \infty[\![}$，$D_H^\infty$ は，$H \cap \bigcap_n]\!]D_H^n, \infty[\![$ の debut である。従って，H が progressive ならば，$D_H^n \in \mathcal{S}$ $(n = 1, 2, \cdots, \infty)$ となる。

定理2.6 $\mathcal{O} \ni H \subset \bigcup_n [\![S_n]\!]$ $(S_n \in \mathcal{S}, n \geq 1)$ なるとき，次の2条件をみたす $T_n \in \mathcal{S}$ が存在する：

(i) $H = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ (ii) $i \neq j$ のとき，$[\![T_i]\!] \cap [\![T_j]\!] = \phi$

(証明) $H_n = (H \setminus \bigcup_{j<n} [\![S_j]\!]) \cap [\![S_n]\!]$ とおく。当然 $H = \bigcup_n H_n$，$H_i \cap H_j = \phi$ $(i \neq j)$ である。また，$H_n \in \mathcal{O}$ だから，$T_n \equiv D_{H_n} \in \mathcal{S}$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

がでる。しかも，$H_n = [\![T_n]\!]$ となっているので，必然的に条件(i), (ii) が成立する。 □

特に $H \in \mathcal{P}$ のときには，上の T_n を pred. にとれる。これについては後で触れることにしよう。

定理2.7　確率過程 $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ の殆んどすべての見本関数が右連続で，しかも高々第一種の不連続性しか持たないならば，次の2条件をみたす $T_n \in \mathcal{S}$ が存在する：

$$\text{(i)} \quad \{ X \neq X_- \} = \bigcup_n [\![T_n]\!] \qquad \text{(ii)} \quad [\![T_i]\!] \cap [\![T_j]\!] = \phi \quad (i \neq j)$$

ただし，$X_- \equiv (X_{t-}, \mathcal{F}_t)$，$X_{0-} = 0$ 。

(証明)　$H = \{ X \neq X_- \}$，$H_n = \{ (t,\omega) ; |X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)| > 1/n \}$ とおく。定理2.4によって，X は $\mathcal{O}$-可測，X_- は $\mathcal{P}$-可測だから，$H, H_n \in \mathcal{O}$ である。しかも，各 H_n は集積点を持たないため，$H_n = \bigcup_k [\![D^k_{H_n}]\!]$ となる。このとき，$H = \bigcup_n H_n \subset \bigcup_{k,n} [\![D^k_{H_n}]\!]$ だから，これに定理2.6を適用すればよい。 □

この結果は，Markov過程やMartingaleの不連続部分の解析に有効な役割を果す。以後，簡単のため，$\mathcal{O}$-可測な確率過程の全体を $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$，$\mathcal{P}$-可測な確率過程の全体を $\underline{\underline{\mathcal{P}}}$ で表す。

§3. Sectionの定理.

任意の r.v. $U \geq 0$ に対しても

$$[\![U]\!] = \{ (t,\omega) ; \ t = U(\omega) < \infty \}$$

が考えられる。云うまでもなく，$[\![U]\!]$ は U のグラフを表しており，$[\![U]\!] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ である。前節のように π を $(t,\omega) \longmapsto \omega$ としよう。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

補題 $H\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ のとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し次の2条件をみたす r.v. $U\geq 0$ が存在する：

(i) $[\![U]\!]\subset H$ (ii) $P\{\pi(H)\}-\varepsilon\leq P(U<\infty)$

これはCapacityに関するChoquetの基本定理から直接的に導くことができるので，証明を省略する。

Meyer [64] による次の結果は"Sectionの定理"の名で知られ，確率過程一般を論ずる場合に最も基本となる定理の一つであって，上の補題の精密化とも見做し得る。

定理2.8 $H\in\mathcal{O}$ とする。このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し次の2条件をみたす $T\in\mathcal{S}$ が存在する：

(i) $[\![T]\!]\subset H$ (ii) $P\{\pi(H)\}-\varepsilon\leq P(T<\infty)$

特に，$H\in\mathcal{P}$ のときは，T を pred. にとれる。

(証明) 何れの場合も同様の方法により証明できるので，此処では，$H\in\mathcal{P}$ を仮定して定理の(i),(ii)をみたす $T\in\mathcal{S}^P$ の存在を示そう。そのためにDellacherieの考案による証明方法を採用した。

先ず，$A_0\in\mathcal{F}_0$，$A_k\in\mathcal{F}_{(k-1)/2^n}$ $(k\geq 1)$ とし，$C_n\equiv\bigcup_{k=0}^{\infty}[k/2^n,(k+1)/2^n[\times A_k$ なる集合を考え，これらによって生成される σ-field を $\mathcal{P}_n$ としよう。明らかに，$\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$ である。しかも，$C_n\in\mathcal{P}$ だから $\mathcal{P}'\equiv\bigvee\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}$ となる。$A\in\mathcal{F}_0$ に対しては，$[0,2^{-n}[\times A\in\mathcal{P}_n$ だから，$[\![0_A]\!]=\{0\}\times A\in\mathcal{P}'$。また，$0<a<b$，$A\in\mathcal{F}_a$ とすると，k_n, j_n を，$a\leq(k_n-1)2^{-n}<k_n2^{-n}<(j_n-1)2^{-n}<b\leq j_n2^{-n}$ となるようにとることができ，しかもこのとき，$A\in\mathcal{F}_{(k_n-1)/2^n}$ となる。すると，$]a,b]\times A=\lim_{n\to\infty}[k_n/2^n,j_n/2^n[\times A\in\mathcal{P}'$，即ち $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}'$

が得られる。つまり，$\mathcal{P}=\mathcal{P}'$ である。次に $\varepsilon>0$ を与え，$\varepsilon/2$ に対して r.v $U\geqslant 0$ を補題にあるように選び

$$\mu(X)=\mathrm{E}[X_U\, I_{\{U<\infty\}}]\qquad(X\in\mathcal{X})$$

とおく。μ は $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上の測度をなし，補題の条件 (ii) によって

$$\mu(H)\geqslant \mathrm{P}\{\pi(H)\}-\frac{\varepsilon}{2}$$

をみたしている。一方，測度論における Carathéodory の定理により，$\mathcal{P}_n\ni C_n\downarrow C\subset H$，$\mu(C)\geqslant\mu(H)-\varepsilon/2$ をみたす C_n, C が存在する。そこで，$T_n\equiv D_{C_n}$，$T\equiv D_C$ とすれば，$T_n\in\mathcal{S}^p$，$T_n\uparrow T$ だから $T\in\mathcal{S}^p$ となる。しかも各 C_n が右に閉じているため，$[\![T]\!]\subset C$，従って (i) が成立する。さらに

$$\mathrm{P}(T<\infty)=\mathrm{P}\{\pi(C)\}\geqslant\mu(C)\geqslant\mu(H)-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant\mathrm{P}\{\pi(H)\}-\varepsilon$$

となり，(ii) が求まる。 □

<u>系 1</u> r.v $T\geqslant 0$ について

$$T\in\mathcal{S}^p\Longleftrightarrow[\![T]\!]\in\mathcal{P}$$

がなりたつ。

(証明) $[\![T]\!]\in\mathcal{P}$ のとき，定理 2.8 により

$$\mathrm{P}(T<\infty)-2^{-n}\leqslant\mathrm{P}(T_n<\infty),\qquad[\![T_n]\!]\subset[\![T]\!]$$

をみたす $T_n\in\mathcal{S}^p$ が存在する。このとき，$S_n\equiv T_1\wedge T_2\wedge\cdots\wedge T_n\in\mathcal{S}^p$，$S\equiv\lim_{n\to\infty}S_n\in\mathcal{S}$ である。ところが，その定め方から，$S<\infty$ の

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

とき、$S_n = T\ (= S)$、他方 $S = \infty$ ならば $T_n = \infty\ (\forall n)$ となることに注意すると

$$\mathbb{P}(T < \infty,\ S = \infty) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(T < \infty,\ T_j = \infty) \leq 2^{-n+1},$$

即ち、$\{T < \infty\} \subset \{S < \infty\}$ である。換言すれば、n が十分大のとき $S_n = T$ がなりたつ。従って、実は $T \in \mathcal{S}^p$ となる。逆に、$\mathcal{P}$ の定義によって、$T \in \mathcal{S}^p$ から $[\![T]\!] \in \mathcal{P}$ がでる。 □

<u>系2</u>　$H \in \mathcal{P}$ とし、$[\![D_H]\!] \subset H$ を仮定するとき、$D_H \in \mathcal{S}^p$ となる。

（証明）仮定により、$[\![D_H]\!] = H \setminus]\!]D_H, \infty[\![\in \mathcal{P}$ がなりたつ。すると、系1から、$D_H \in \mathcal{S}^p$ がでる。 □

一般には、$H \in \mathcal{P}$ から $D_H \in \mathcal{S}^p$ がでない。誤解を生じ易い事柄だけに注意を要する。

<u>例2.2</u>　$T \in \mathcal{S}^t$ とする。このとき、$]\!]T, \infty[\![\in \mathcal{P}$ であるが、$D_{]\!]T,\infty[\![} = T \notin \mathcal{S}^p$。なお、この場合、$[\![T]\!] \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{P}$ となる。

<u>定理2.9</u>　$X, Y \in \underline{\underline{\mathcal{O}}}$ とし、任意の有限な $T \in \mathcal{S}$ に対し

(1)　　$\mathbb{P}(X_T \neq Y_T) = 0$

がなりたつとき、$X = Y$ となる。特に、$X, Y \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ のとき、任意の有限な $T \in \mathcal{S}^p$ に対し (1) が成立すれば、$X = Y$ である。

（証明）X, Y が共に $\mathcal{O}$-可測な場合を考察しよう。$H \equiv \{X \neq Y\} \notin \mathcal{E}$ i.e. $\mathbb{P}\{\pi(H)\} > 0$ を仮定するとき、定理2.8 により $T \in \mathcal{S}$ が存在して、$\mathbb{P}(T < \infty) > 0$、$[\![T]\!] \subset H$ となる。すると、十

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

分大なる t に対し，$P(X_{T\wedge t} \neq Y_{T\wedge t}) > 0$ となり (1) に反する。

§4. Projection の定理

Meyer が考案した Projection の概念に関する種々の性質は，Section の定理と共に，所謂 Strasbourg 学派による確率過程論の基礎部分を形成している。

<u>定理 2.10</u>　$X \in \mathcal{X}$ とするとき，任意の $T \in \mathcal{S}$ に対して関係式

(2)
$$ {}^{O}X_T I_{\{T<\infty\}} = E[X_T I_{\{T<\infty\}} \mid \mathcal{F}_T] $$

をみたす ${}^{O}X \in \underline{\underline{O}}$ が一意に存在する。それと同時に，任意の $T \in \mathcal{S}^p$ に対して

(3)
$$ {}^{P}X_T I_{\{T<\infty\}} = E[X_T I_{\{T<\infty\}} \mid \mathcal{F}_{T-}] $$

をみたす ${}^{P}X \in \underline{\underline{P}}$ も一意に存在する。

（証明） 一意性は Section の定理から明らかである。先ず，${}^{O}X$ の存在を示そう。そのためには M.C.T により，特に X が，$X_t = U I_{[a,b[}(t)$ （$U \in L^\infty$, $0 \leq a < b$）の形にかける場合に限定して処理するとよい。そこで $T \in \mathcal{S}$ とすれば，

$$ E[X_T I_{\{T<\infty\}} \mid \mathcal{F}_T] = E[U \mid \mathcal{F}_T] I_{[a,b[}(T) I_{\{T<\infty\}}, $$

即ち，${}^{O}X_t = E[U \mid \mathcal{F}_t] I_{[a,b[}(t)$ となる。
${}^{P}X$ の存在性の証明もこれと同様の考え方で行えばよい。つまり，$T \in \mathcal{S}^p$ のとき，T の $\mathcal{F}_{T-}$-可測性に注意すれば，

$$ E[X_T I_{\{T<\infty\}} \mid \mathcal{F}_{T-}] = E[U \mid \mathcal{F}_{T-}] I_{[a,b[}(T) I_{\{T<\infty\}} $$

が得られる。ゆえに，$^{\mathcal{P}}X_t = E[U \mid \mathcal{F}_{t-}]\, I_{[a,b[}(t)$ である。 □

^{O}X, $^{\mathcal{P}}X$ をそれぞれ X に対する optional projection, predictable projection という。既に，$X \in \underline{\underline{O}}$ のとき，projection の一意性によって，$^{O}X = X$ となる。同様に $X \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ ならば，$^{\mathcal{P}}X = X$ である。また，明らかに $^{\mathcal{P}}(^{O}X) = {}^{\mathcal{P}}X$ である。

定理 2.11　$X, Y \in \mathcal{X}$ とする。このとき，次の3性質が成立する。

(i)　$X \leq Y$ ならば，$^{O}X \leq {}^{O}Y$，$^{\mathcal{P}}X \leq {}^{\mathcal{P}}Y$

(ii)　$^{O}(^{O}X \cdot Y) = {}^{O}X \cdot {}^{O}Y$

(iii)　$^{\mathcal{P}}(^{\mathcal{P}}X \cdot Y) = {}^{\mathcal{P}}X\, {}^{\mathcal{P}}Y$

此等の性質は，(2)と(3)から簡単に導かれるため，証明を省略する。一般に，X が右連続のとき，^{O}X も右連続，また X が左連続のとき $^{\mathcal{P}}X$ が左連続となる。ところが連続性に関しては，そうは移行しない。

例 2.3　$X_t = U$，$t \geq 0$　（ただし，$U \in L^{\infty}$）のとき，

$$^{O}X_t = E[U \mid \mathcal{F}_t], \quad ^{\mathcal{P}}X_t = E[U \mid \mathcal{F}_{t-}]$$

となるため，当然 ^{O}X, $^{\mathcal{P}}X$ は連続とは限らない。

§5. $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の測度

本節で，$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の有限測度と増加過程の関連性を述べる。

定義 2.1　$A = (A_t)$ を raw な確率過程とし，見本関数の右連続性を仮定する。さらに，確率1で見本関数 $A_{\cdot}(\omega)$ が非減少のとき，A を raw な増加過程と云う。また，$\int_{\mathbb{R}_+} |dA_t| \in L^1$ のとき，

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

A を raw IV と云う。

特に，A が $(\mathcal{F}_t)$ に適合している場合には，"raw" を省いて単に増加過程，或いは IV-過程と呼ぶことにした。

さて，A を raw IV-過程とし

$$\mu_A(X) = E\left[\int_{\mathbb{R}_+} X_s \, dA_s\right] \quad (X \in \mathcal{X}) \tag{4}$$

とおく。μ_A は $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の有限測度をなし，任意の $H \in \mathcal{E}$ に対して，$\mu_A(H) = 0$ となる。

<u>定理 2.12</u>　$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の有限測度 μ が，任意の $H \in \mathcal{E}$ に対して $\mu(H) = 0$ であるならば，$\mu = \mu_A$ をみたす raw IV-過程 A が一意に存在する。

(証明) 一意性の証明から始めよう。それには，A を raw IV として，"任意の $X \in \mathcal{X}$ に対し，$\mu_A(X) = 0$ ならば $A = 0$" を示せば十分である。特に，t を固定して raw な確率過程 $X_s = A_t I_{\{|A_t| \leq n\}} I_{[0,t]}(s)$ を考えれば

$$\mu_A(X) = E[A_t^2 \,;\, |A_t| \leq n]$$

である。依って，$\{|A_t| \leq n\}$ 上で $A_t = 0$ となり，$n \to \infty$ とすれば，結局 $A_t = 0$ a.s がでる。すると A の右連続性により，$A = 0$ が得られる。

次に A の存在性を証明しよう。Jordan の分解定理によって $\mu \geq 0$ を仮定できる。このとき，各 $t \geq 0$ に対して Ω 上の測度

$$Q_t(\Lambda) \equiv \mu([0,t] \times \Lambda) \quad (\Lambda \in \mathcal{F})$$

が定まり，仮定 "$\mu(H) = 0 \ (H \in \mathcal{E})$" により，$Q_t$ は P に関

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

して絶対連続となる。依って Radon-Nikodym の定理から

$$\exists^1 A'_t \in L^1 \ ; \quad Q_t(\Lambda) = \mathcal{E}[A'_t \,;\, \Lambda] \qquad (\Lambda \in \mathcal{F}) \ 。$$

さらに、$Q_s(\Lambda) \leq Q_t(\Lambda)$ $(s<t)$ だから $A'_s \leq A'_t$ がでる。また，$t_n \downarrow t$ のとき derivative の一意性により，$A'_{t_n} \xrightarrow{a.s} A'_t$ がなりたつ。そこで，$A_t = \inf_{r>t} A'_r$ (r は有理数) とおけば，$A=(A_t)$ は当然右連続で，しかも

$$Q_t(\Lambda) = \mathcal{E}[A_t \,;\, \Lambda] \qquad (\Lambda \in \mathcal{F}),$$

即ち，$X \equiv I_{[0,t]\times\Lambda}$ に対し，$\mu(X) = \mathcal{E}[\int_{\mathbb{R}_+} X_s\, dA_s]$ である。これが任意の $X \in \mathcal{X}$ に対してなりたつことは，M.C.T によって保証される。従って，$\mu = \mu_A$ である。さらに，$\mu(\mathbb{R}_+ \times \Omega) < \infty$ だから，$A_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} A_t \in L^1$ が得られる。 □

$\Delta A_t = A_t - A_{t-}$ $(t \geq 0)$，$A_{0-} = 0$ とおく。

定理 2.13 任意の raw IV-過程 A に対して，次の2条件は同値である：

(i) $A \in \underline{\underline{O}}$ (ii) $(\forall X \in \mathcal{X})$ $\mu_A(X) = \mu_A({}^0X)$

(証明) 先ず，(i) から (ii) をかそう。定理 2.7 を用いれば，

$$\{\Delta A \neq 0\} = \bigcup_n [\![T_n]\!] \ , \quad [\![T_i]\!] \cap [\![T_j]\!] = \phi \quad (i \neq j)$$

をみたす $T_n \in \mathcal{S}$ が存在する。このとき，通常の方法により

(5) $$A_t = A_t^c + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta A_{T_n} I_{\{T_n \leq t\}} \ , \quad A^c \text{ は連続な IV-過程}$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

と分解できる。本質的には A が非減少である場合を考察すれば十分なので，これを仮定すると A^c も非減少となる。A^c の連続性から

$$\Gamma_t \equiv \{ (s,\omega) ; A_s^c(\omega) \geq t \} \in \mathcal{P} , \quad [\![D_{\Gamma_t}]\!] \subset \Gamma_t$$

がなりたつため，$\theta_t \equiv D_{\Gamma_t} \in \mathcal{S}^p$ である。しかも，$\{ \theta_t < \infty \} \subset \{ A^c_{\theta_t} = t \}$ と ΔA_{T_n} の $\mathcal{F}_{T_n}$-可測性に注意すれば，任意の $X \in \mathcal{X}$ に対して

$$\mu_A(X) = E\Big[\int_{\mathbb{R}_+} X_s \, dA_s^c + \sum_n X_{T_n} \Delta A_{T_n} I_{\{T_n < \infty\}} \Big]$$

$$= E\Big[\int_{\mathbb{R}_+} X_{\theta_s} I_{\{\theta_s < \infty\}} ds \Big] + \sum_n E\big[X_{T_n} \Delta A_{T_n} I_{\{T_n < \infty\}} \big]$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} E\big[E[X_{\theta_s} I_{\{\theta_s < \infty\}} | \mathcal{F}_{\theta_s}] \big] ds + \sum_n E\big[E[X_{T_n} I_{\{T_n < \infty\}} | \mathcal{F}_{T_n}] \Delta A_{T_n} \big]$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} E[{}^oX_{\theta_s} I_{\{\theta_s < \infty\}}] ds + \sum_n E[{}^oX_{T_n} \Delta A_{T_n} I_{\{T_n < \infty\}}]$$

$$= \mu_A({}^oX) ,$$

従って，(ii) が得られた。

次に (ii) を仮定して (i) を導く。$T \in \mathcal{S}$ に対する A_T の $\mathcal{F}_T$-可測性を示すためには，$E[U | \mathcal{F}_T] = 0 \quad (U \in L^\infty)$ から $E[U A_T] = 0$ を示せばよい。そこで，$X \equiv U I_{[\![0,T]\!]}$ を考えよう。明らかに，$\mu_A(X) = E[U A_T]$ である。任意の $S \in \mathcal{S}$ と $D \in \mathcal{F}_S$ に対して $D \cap \{ S < \infty \} \cap \{ S \leq T \} \in \mathcal{F}_T$ だから

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$\epsilon[\,{}^{o}X_S\, I_{\{S<\infty\}}\ ;\ D\,] = \epsilon[\,X_S\, I_{\{S<\infty\}}\ ;\ D\,]$$

$$= \epsilon[\,U\ ;\ D\cap\{S<\infty\}\cap\{S\leq T\}\,]$$

$$= \epsilon[\,\epsilon[U\,|\,\mathcal{F}_T]\ ;\ D\cap\{S<\infty\}\cap\{S\leq T\}\,]$$

$$= 0\ , \quad \text{i.e.,}\ \ {}^{o}X = 0\ .$$

仮定により、$\mu_A(X) = \mu_A({}^{o}X)$ だから、$\mu_A(X) = 0$。 □

pred. の場合は、C. Doléans-Dade [18] によって考察され、上と同様の結果が得られている。

<u>定理 2.14</u> 任意の IV-過程 A に対し、次の (i), (ii) は同値である：

(i) $A \in \underline{\mathcal{P}}$ (ii) $(\forall X \in \mathcal{X})\ \ \mu_A(X) = \mu_A({}^{p}X)$.

(証明) 先ず、(i) $\Longrightarrow$ (ii) について触れよう。$A \in \underline{\mathcal{P}}$ であれば (5) の分解における T_n は pred. と仮定できる。すると、定理 2.5 の系により、ΔA_{T_n} は $\mathcal{F}_{T_n-}$-可測である。さらに、$0 \leq A_t \uparrow$ を仮定しても一般性を失わない。定理 2.13 の証明にあるように Θ_t を定義すれば、$\Theta_t \in \mathcal{S}^p$ である。此等の事柄に注意して、前と同様の論法で結論が得られる。

逆に (ii) を仮定して (i) を示そう。そのために、$T \in \mathcal{S}^p$ とし $X \equiv U I_{[\![0,T]\!]}$ $(U \in L^\infty)$ を考える。任意の $S \in \mathcal{S}^p$ と $D \in \mathcal{F}_{S-}$ に対して、$D \cap \{S<\infty, S\leq T\} \in \mathcal{F}_{T-}$ だから

$$\epsilon[\,{}^{p}X_S\, I_{\{S<\infty\}}\ ;\ D\,] = \epsilon[\,X_S\, I_{\{S<\infty\}}\ ;\ D\,]$$

$$= \epsilon[\,U\ ;\ D\cap\{S<\infty, S\leq T\}\,]$$

$$= E[\,E[U \mid \mathcal{F}_{T-}]\ ;\ D \cap \{S < \infty,\ S \leq T\}\,].$$

従って，$E[U \mid \mathcal{F}_{T-}] = 0$ のとき，${}^{p}X = 0$ である。$\mu_A(X) = E[UA_T]$ だから，$\mu_A(X) = \mu_A({}^{p}X)$ を仮定すれば，$E[UA_T] = 0$ がでる。これは A_T の $\mathcal{F}_{T-}$－可測性を示唆している。このとき，任意の $T \in \mathcal{S}^p$ に対し ΔA_T は $\mathcal{F}_{T-}$－可測となる。ところで，$T \in \mathcal{S}^t$ のとき，任意の $D \in \mathcal{F}_T$ に対し $T_D \in \mathcal{S}^t$ なることは既に述べてある。そこで，$X = I_{[\![T_D]\!]}$ とおけば，当然 ${}^{p}X = 0$ だから

$$E[\,\Delta A_T\ ;\ D \cap \{T < \infty\}\,] = \mu_A(X) = \mu_A({}^{p}X) = 0,$$

即ち，任意の $T \in \mathcal{S}^t$ に対し $\Delta A_T = 0$ である。このとき

$$A_t = A_t^c + \sum_n \Delta A_{T_n} I_{\{T_n \leq t\}} \qquad (T_n \in \mathcal{S}^p,\ n \geq 1)$$

と表現でき，しかも A^c, $\{\Delta A_{T_n} I_{\{T_n \leq t\}}, \mathcal{F}_t\} \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ であるから，$A \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ となる。 □

Meyer ([62], [63]) は，連続時径数における Doob 分解の可能性を論じた際に，"natural" という名の増加過程を導入した。それは次の条件を有する増加過程 $A = (A_t, \mathcal{F}_t)$ として定義されている：

(i) $A_0 = 0$, $A_t \in L^1$ $(t > 0)$

(ii) 任意の有界な martingale M に対して

$$E\left[\int_0^t M_s\, dA_s\right] = E\left[\int_0^t M_{s-}\, dA_s\right] \qquad (\forall t \geq 0)$$

が成立する。

ところが，(i) をみたす増加過程 A に対し，"natural" と "$\mathcal{P}$-

可測性"という見掛上は異なる2性質が実際は同値であるという興味深い事実をC. Doléans-Dade [18] が指摘している。そのことを最後に証明しておく。いま，$t>0$ を固定し，M を有界な martingale として，$X_s = M_s I_{[0,t]}(s)$ とおくと，前述したように，${}^{\mathcal{P}}X_s = M_0 I_{\{0\}}(s) + M_{s-} I_{]0,t]}(s)$ である。従って，$A \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ ならば定理2.14によって，

$$E[\int_0^t M_s \, dA_s] = \mu_A(X) = \mu_A({}^{\mathcal{P}}X) = E[\int_0^t M_{s-} \, dA_s]$$

が成立し，A は natural となる。逆に A を natural とする。定義により $A \in \underline{\underline{\mathcal{O}}}$ だから，$\mu_A(X) = \mu_A({}^{O}X)$ $(X \in \mathcal{X})$ がなりたつ。そこで，$t>0$，$U \in L^\infty$ とし，raw な確率過程 $X \equiv U I_{[\![0,t]\!]}$ を考えよう。$M_s = E[U \mid \mathcal{F}_s]$ とおけば，${}^{O}X_s = M_s I_{[0,t]}(s)$，${}^{\mathcal{P}}X_s = M_0 I_{\{0\}}(s) + M_{s-} I_{]0,t]}(s)$。すると natural の定義により

$$\mu_A(X) = E[\int_0^t M_s \, dA_s] = E[\int_0^t M_{s-} \, dA_s] = \mu_A({}^{\mathcal{P}}X)$$

となる。従って M.C.T により，任意の $X \in \mathcal{X}$ に対し $\mu_A(X) = \mu_A({}^{\mathcal{P}}X)$ が成立する。つまり $A \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ である。

§6. Projection に関する双役性

任意の raw IV-過程 A に対し，2種類の（$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上の）有限測度

$$\mu_1(X) = \mu_A({}^{O}X), \quad \mu_2(X) = \mu_A({}^{\mathcal{P}}X) \qquad (X \in \mathcal{X})$$

が定義できる。明らかに $\mu_1(X) = \mu_1({}^{O}X)$，$\mu_2(X) = \mu_2({}^{\mathcal{P}}X)$ だから，此等には定理2.13及び定理2.14によってIV-過程 $A^{(1)} \in \underline{\underline{\mathcal{O}}}$，$A^{(2)} \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ が一意に対応し，$\mu_1 = \mu_{A^{(1)}}$，$\mu_2 = \mu_{A^{(2)}}$ となる。このとき，Dellacherie [14] に従って，$A^{(1)}$ を A の dual optional projection，$A^{(2)}$ を A の dual predictable projection と云い，それぞれ A^{O}，$A^{\mathcal{P}}$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

で示すことにした。既に A が $\mathcal{O}$－可測又は $\mathcal{P}$－可測のときはその一意性から $A^{\mathcal{O}}=A$ 又は $A^{\mathcal{P}}=A$ がなりたつ。併し乍ら dual projection が §4 で述べた一般の $X\in\mathcal{X}$ に対して定義される projection の概念とは異なるものであることを明確に理解しておく必要がある。端的に云えば，前者は IV だが後者は必ずしも IV とはならない。

例 2.4　$0\leq U\in L^{\infty}$ に対して，$M_t=E[U\mid\mathcal{F}_t]$ とおく。$A_t\equiv(t\wedge 1)U$ は有界で raw な増加過程である。このとき $\mathcal{O}$－projection の定義から

$$
{}^{O}A_t=(t\wedge 1)M_t
$$

となる。他方，任意の $X\in\mathcal{X}$ に対し

$$
\begin{aligned}
E\Big[\int_{\mathbb{R}_+}{}^{O}X_s\,dA_s\Big] &= E\Big[\int_{\mathbb{R}_+}{}^{O}X_s\,U\,I_{[0,1]}(s)\,ds\Big] \\
&= E\Big[\int_{\mathbb{R}_+}{}^{O}X_s\,M_s\,I_{[0,1]}(s)\,ds\Big] \\
&= E\Big[\int_{\mathbb{R}_+}{}^{O}X_s\,d\Big(\int_0^{s\wedge 1}M_u\,du\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

しかも $\int_0^{t\wedge 1}M_s\,ds$ は $\mathcal{P}$－可測な IV だから

$$
A_t^{\mathcal{O}}=\int_0^{t\wedge 1}M_s\,ds\quad(=A_t^{\mathcal{P}})
$$

である。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

<u>定理 2.16</u> 任意の IV-過程 A に対して，

$$A - A^{\mathcal{P}} \in \mathfrak{M}_u$$

がなりたつ。

（証明） A が IV のとき $A^{\mathcal{P}}$ も IV だから当然 $A^{\mathcal{P}}_{\infty} \in L^1$。さらに任意の $T \in \mathcal{S}$ と $D \in \mathcal{F}_T$ に対し $]\!] T_D, \infty [\![\in \mathcal{P}$ であるから，

$$\begin{aligned} E[A_{\infty} - A_T ; D] &= E[A_{\infty} - A_{T_D}] \\ &= E[A^{\mathcal{P}}_{\infty} - A^{\mathcal{P}}_{T_D}] \\ &= E[A^{\mathcal{P}}_{\infty} - A^{\mathcal{P}}_{T} ; D] \ 。\end{aligned}$$

従って，$E[A_{\infty} - A^{\mathcal{P}}_{\infty} \mid \mathcal{F}_T] = A_T - A^{\mathcal{P}}_T$ が成立する。 □

<u>系</u> $A, \bar{A}$ を IV とし $A_0 = \bar{A}_0$ を仮定すれば

$$A^{\mathcal{P}} = \bar{A}^{\mathcal{P}} \iff A - \bar{A} \in \mathfrak{M}_u$$

が成立する。

（証明） 定理 2.16 から，$A - A^{\mathcal{P}},\ \bar{A} - \bar{A}^{\mathcal{P}} \in \mathfrak{M}_u$。従って，$A^{\mathcal{P}} = \bar{A}^{\mathcal{P}}$ ならば，$A - \bar{A} = (A - A^{\mathcal{P}}) - (\bar{A} - \bar{A}^{\mathcal{P}}) \in \mathfrak{M}_u$ である。逆に，$A - \bar{A} \in \mathfrak{M}_u$ のとき，任意の $T \in \mathcal{S}$ に対して $\mu_{A-\bar{A}}(]\!] T, \infty [\![) = 0$ となる。しかも $A_0 - \bar{A}_0 = 0$ だから $\mu_{A-\bar{A}}([\![0]\!]) = 0$ がでる。依って任意の $X \in \mathcal{X}$ に対し，

$$\mu_{A^{\mathcal{P}} - \bar{A}^{\mathcal{P}}}(X) = \mu_{A-\bar{A}}({}^{\mathcal{P}}X) = 0 \qquad \text{i.e., } A^{\mathcal{P}} = \bar{A}^{\mathcal{P}}. \qquad □$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

例えば Poisson 過程 N_t に対して，$N_t - t$ が martingale をなすから，$N_t^{\mathcal{P}} = t$ である。

<u>定理 2.17</u> A を増加過程とし，$A^{\mathcal{P}}$ は連続とする。このとき，$\{T<\infty\} \subset \{\Delta A_T > 0\}$ をみたす $T \in \mathcal{S}$ は t. inac. である。

（証明） $A_\infty \in L^1$ を仮定しても一般性を失わない。$A^{\mathcal{P}}$ は連続だから任意の $S \in \mathcal{S}$ に対して，$\mu_{A^{\mathcal{P}}}([\![S]\!]) = 0$ となる。特に $S \in \mathcal{S}^p$ ならば $[\![S]\!] \in \mathcal{P}$ だから

$$E[\Delta A_S ; S<\infty] = \mu_A([\![S]\!]) = \mu_{A^{\mathcal{P}}}([\![S]\!]) = 0 ,$$

つまり $[\![T]\!] \cap [\![S]\!] = \phi$ 。従って $T \in \mathcal{S}^t$ である。 □

Poisson 過程 N_t については $N_t^{\mathcal{P}} = t$ だから，$T = \inf\{t ; \Delta N_t = 1\}$ は t. inac. である。

<u>定理 2.18</u> raw IV-過程 A が連続のとき，$A^{\mathcal{O}}$ も連続となる。

（証明） 任意の $T \in \mathcal{S}$ と $D \in \mathcal{F}_T$ に対し $[\![T_D]\!] \in \mathcal{O}$ であるから，

$$E[\Delta A_T^{\mathcal{O}} ; D] = \mu_{A^{\mathcal{O}}}([\![T_D]\!]) = \mu_A([\![T_D]\!]) = 0 .$$

従って，$A^{\mathcal{O}}$ も連続である。 □

projection がこの性質を有しないことは，§4 で注意してある。

§7. Doob-Meyer 分解

離散時径数における Doob 分解を連続時径数の場合に拡張するという問題は暫くの間未解決であったが，Meyer（[62]，[63]）

によって最終的な結着を得るに至った。それ故に定理2.20の分解を"Doob-Meyer分解"と呼ぶ。本節は，その内容の紹介を目的とする。

定義2.2　$X=(X_t, \mathcal{F}_t)$ がクラス(D)に属すとは，$\{X_T I_{\{T<\infty\}}\}_{T\in\mathcal{S}}$ が一様可積分なことである。

クラス(D)の概念は，確率論の立場でDirichlet問題を論じたDoobの論文[28]の中で導入されている。Meyerの慧眼は，この概念が上記の問題に対して決定的な役割を果し得ることを看破した。

定義2.3　非負なsupermartingale Y が $\lim_{t\to\infty} E[Y_t]=0$ をみたすとき，potentialと云われる。

例えば A をrawな増加過程とし，$A_\infty \in L^1$ を仮定すると

$$Y_t = E[A_\infty - A_t \mid \mathcal{F}_t] \quad (t \geq 0)$$

はクラス(D)に属すpotentialである。

一般に，supermartingale Y が一様可積分のとき

$$Y_t' = Y_t - E[Y_\infty \mid \mathcal{F}_t] \quad (t \geq 0)$$

はpotentialとなる。つまり，任意の一様可積分なsupermartingaleは，martingaleとpotentialの和に分解されるわけで，これをRiesz分解という。この事実は，supermartingaleを特徴づけるのがpotentialであることを示唆している。

定理2.19　Y をpotentialとし，$R_n = \inf\{t\,;\,Y_t \geq n\}$ $(n\geq 1)$ とおくとき，次の(i),(ii)は同値である：

Sem. on Probab.
Vol.51　1981年
P1-169

(i)　$Y \in (D)$　　　(ii)　$\lim_{n\to\infty} E[Y_{R_n} ;\ R_n < \infty] = 0$.

（証明）明らかに $\mathcal{S} \ni R_n \uparrow$ であるが，Doobの収束定理により $Y_t \longrightarrow 0$ a.s $(t \to \infty)$ がなりたつため実際は十分大なる n に対して $R_n = \infty$ となる。すると当然 $Y_{R_n} I_{\{R_n<\infty\}} \longrightarrow 0$ a.s である。従って $Y \in (D)$ を仮定すれば (ii) が得られる。

次に，この逆を証明しよう。$T \in \mathcal{S}$ に対し $D \equiv \{Y_T \geq n\}$ とおけば $T_D \in \mathcal{S}$ である。しかも R_n の定義から，$R_n \leq T_D$ がなりたつため

$$\sup_{T\in\mathcal{S}} E[Y_T ;\ Y_T \geq n] = \sup_{T\in\mathcal{S}} E[Y_{T_D}] \leq E[Y_{R_n}] = E[Y_{R_n} ; R_n < \infty].$$

仮定によって，右端辺は $n \longrightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。　□

さて，Doob分解に関してMeyerが得た結果を述べよう。その証明は彼自身によるものの他に，M. Rao [77] 及び C. Doléans-Dade [18] の方法が知られている。特に Rao は離散時径数における議論を更に無理なく連続時径数の場合に移行させることに成功している。それについては，国田氏の本 [55] の中で要領良く解説されているので，此処では C. Doléans-Dade の証明方法を採用した。

<u>定理 2.20（Doob-Meyer分解）</u>　potential Y が，適当な増加過程 $A \in \underline{\mathcal{P}}$ によって

$$(6)\qquad Y_t = E[A_\infty \mid \mathcal{F}_t] - A_t \quad ,\ ただし\ A_0 = 0$$

と表現されるための必要十分条件は，$Y \in (D)$ である。しかも，この分解は一意である。

（証明）最初に一意性の問題を処理しよう。A，A' が共に (6)

をみたす$\mathcal{P}$-可測な増加過程とするとき，$A = A^{\mathcal{P}}$，$A' = (A')^{\mathcal{P}}$，$A_0 - A_0' = 0$ 及び $A - A' \in \mathfrak{M}_u$ がなりたち，従って定理2.16の系により $A^{\mathcal{P}} = (A')^{\mathcal{P}}$ i.e., $A = A'$ である。

十分性については既に言及してあるので，必要性を証明しよう。$S_i, T_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は，$S_i < \infty$ のとき $S_i < T_i$，さらに $T_i < \infty$ のとき $T_i < S_{i+1}$ なる性質をみたすとし

$$(7) \qquad H = [\![0_D]\!] \cup \bigcup_{i=1}^{n}]\!] S_i, T_i]\!] \quad (D \in \mathcal{F}_0)$$

とおく。明らかに $H \in \mathcal{P}$ である。このような集合の全体を $\mathcal{G}$ とすると，$\mathcal{G}$ は Bool 代数で，しかも $\mathfrak{S}(\mathcal{G}) = \mathcal{P}$ をみたしている。次に (7) の集合 H に対し

$$(8) \qquad \mu(H) = \sum_{i=1}^{n} E[Y_{S_i} - Y_{T_i}]$$

とおく。μ は $\mathcal{G}$ 上の非負な有限加法的集合関数である。これが $\mathcal{G}$ 上で完全加法的となるためには

$$(9) \qquad \mathcal{G} \ni H_n \downarrow \phi \implies \lim_{n\to\infty} \mu(H_n) = 0$$

がなりたてばよい。そこでまず，任意の $H \in \mathcal{G}$ と $\varepsilon > 0$ に対し，次の性質をみたす $K \in \mathcal{G}$ の存在を示そう：

$$(10) \qquad \overline{K} \subset H, \quad \mu(H) \leq \mu(K) + \varepsilon$$

ここに $\overline{K} \equiv \{ (t, \omega) ; t \in \overline{K(\omega)} \}$。例えば (7) の集合 H に対しては，$\overline{H} = [\![0_D]\!] \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} [\![S_i, T_i]\!]$ となる。ところで $\mathcal{G}$ の定義を考慮すれば，特に $H =]\!] S, T]\!]$ $(S, T \in \mathcal{S},\ S < \infty$ のとき $S < T)$ なる場合に限定して (10) を検証しておけば十分である。いま，$S_n = (S + 1/n)_{\{S + 1/n < T\}}$，$T_n = T_{\{S + 1/n < T\}}$ とおくと，$S_n, T_n \in \mathcal{S}$ で $[\![S_n, T_n]\!] \subset H$ がなりたち，しかも $n \to \infty$ のとき $S_n \downarrow S$，

$T_n \uparrow T$ a.s.，各 n に対して $\{S_n < \infty\} \subset \{T_n = T\}$ だから Y_{S_n} は Y_S に，Y_{T_n} は Y_T にそれぞれ概収束する。従って $Y \in (D)$ のとき

$$\mu(H) = \lim_{n\to\infty} E[Y_{S_n} - Y_{T_n}] = \lim_{n\to\infty} \mu(]\!]S_n, T_n]\!])$$

が成立するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し n を十分大にとって $K \equiv]\!]S_n, T_n]\!]$ が (10) をみたすようにできる。

さて，$\mathcal{G} \ni H_n \downarrow \phi$ として (9) を証明しよう。(10) によって各 H_n に対し

$$\overline{K_n} \subset H_n, \quad \mu(H_n) \leq \mu(K_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

をみたす $K_n \in \mathcal{G}$ が存在している。このとき $L_n = \bigcap_{i=1}^{n} K_i$ とおいて

$$\mu(H_n) \leq \mu(L_n) + \varepsilon$$

が求まる。$D_n \equiv D_{\overline{L_n}}$ を考えると，$\overline{L_n} \downarrow \phi$ だから

$$D_n \in \mathcal{S}, \quad L_n \subset]\!]D_n, \infty[\![, \quad D_n \uparrow \infty \quad \text{a.s}$$

となり，従って $Y \in (D)$ を仮定すれば，$E[Y_{D_n}] \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$ がなりたつ。つまり $n \to \infty$ のとき，$\mu(L_n) \longrightarrow 0$ がでるから $\mu(H_n) \longrightarrow 0$ である。これによって (9) が示され，μ は $\mathcal{G}$ 上の完全加法的集合関数となる。$\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{P}$ に注意すれば，この μ は $\mathcal{P}$ 上の測度として一意に拡張され得る。それを改めて μ で表す。μ は $\mathcal{P}$ 上の有限測度であって，その定義から任意の $H \in \mathcal{E}$ に対して $\mu(H) = 0$ となる。このとき

$$\mu'(X) = \mu({}^{\mathcal{P}}X) \qquad (X \in \mathcal{X})$$

によって定義される $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上の有限測度 μ' は，任意の $X\in\mathcal{X}$ に対して，$\mu'(X)=\mu'({}^{\mathcal{P}}X)$ をみたすため定理2.14により増加過程 $A\in\underline{\mathcal{P}}$ が一意に存在し，$\mu'=\mu_A$ となる。特に $D\in\mathcal{F}_t$ に対し

$$\mu(\rrbracket t_D,\infty\llbracket)=\mu'(\rrbracket t_D,\infty\llbracket)=\mu_A(\rrbracket t_D,\infty\llbracket),$$

即ち，$E[A_\infty-A_t\,;D]=E[Y_t\,;D]$ が得られる。つまり，$Y_t=E[A_\infty\mid\mathcal{F}_t]-A_t$ である。しかも $\mu'(\llbracket 0_D\rrbracket)=0$ $(D\in\mathcal{F}_0)$ だから $A_0=0$ となる。 □

ここで，クラス(D)に属す任意の supermartingale Y に対しても(6)と類似な分解が可能であることを述べよう。Y の Riesz 分解を考え，その potential 部分に Doob-Meyer 分解を施せば増加過程 $A\in\underline{\mathcal{P}}$ が存在して

$$Y_t=E[Y_\infty\mid\mathcal{F}_t]+\left(E[A_\infty\mid\mathcal{F}_t]-A_t\right)\quad(t\geqq 0)$$

と表せる。そこで

$$\bar{A}_t=\begin{cases}A_t & (t<\infty)\\ Y_\infty+A_\infty & (t=\infty)\end{cases}$$

とおくと，$\bar{A}$ は $(\mathcal{F}_t)$ に適合しており，$t=\infty$ で不連続となる可能性があるものの $E[\int_{[0,\infty]}|d\bar{A}_s|]<\infty$ をみたしている。しかも $Y_t=E[\bar{A}_\infty\mid\mathcal{F}_t]-\bar{A}_t$ と表現される。

定理2.21　定理2.20において，特に A が連続となるための必要十分条件は，任意の $T\in\mathcal{S}^P$ に対して $E[Y_T]=E[Y_{T-}]$ がなりたつことである。

（証明） 任意の $T\in\mathcal{S}^p$ に対し

$$E[Y_T]=E[A_\infty-A_T],\quad E[Y_{T-}]=E[A_\infty-A_{T-}]\ .$$

従って，必要性は明らかである。逆に $E[Y_T]=E[Y_{T-}]$ とすれば $E[A_T]=E[A_{T-}]$ 。 $A_{T-}\leq A_T$ a.s だから当然 $\Delta A_T=0$ a.s である。依って，Aの連続性が示された。 □

Doob-Meyer の分解定理は，次章以下で述べるように確率積分と連結し，Martingale の理論が著しく発展する要因となった。その意味からも Meyer の成した貢献は真に大きなものと云わざるを得ない。

§8. Local Martingale

$M\in\mathcal{M}$ に対し

$$M^*=\sup_t|M_t|\ ,\quad \|M\|_{H^p}=\|M^*\|_p\ ,\quad H^p=\{M\in\mathcal{M}\ ;\ \|M\|_{H^p}<\infty\}$$

とおく。ただし $1\leq p\leq\infty$ とする。H^p は $\|\ \|_{H^p}$ をノルムとして Banach 空間をなしている。証明は通常の論法に基づいて達成できるので省略する。特に $1<p<\infty$ の場合は，$p^{-1}+q^{-1}=1$ として Doob の不等式を用いれば

$$\|M_\infty\|_p\leq\|M\|_{H^p}\leq q\,\|M_\infty\|_p\quad(M\in\mathcal{M}_u)$$

が得られる。従って M に M_∞ を対応させて H^p と L^p を同一視できる。そう考えると H^p の共役空間が H^q であることは難なく理解できよう。正確に述べれば，H^p 上の任意の有界な線形汎関数 φ に対して $M\in H^q$ が一意に存在し $\varphi(N)=E[M_\infty N_\infty]$ ($N\in H^p$) となる。特に H^2 は $E[M_\infty N_\infty]$ を M と N の内積とする Hilbert 空間である。

さて此処で K. Ito - S. Watanabe [41] に従い local martingale について述べよう。Y を非負な supermartingale とし、各 $n \geq 1$ に対して $T_n = \inf\{t ; Y_t \geq n\}$ とおく。勿論 $\mathcal{S} \ni T_n \uparrow \infty$, $Y_{T_n} \in L^1$ である。さらに T_n の定義により $Y^*_{T_n} = \sup_{t \leq T_n} Y_t \leq n + Y_{T_n}$ がなりたつため Y^{T_n} はクラス (D) に属す supermartingale となる。すると前節の終りで指摘したように $M^{(n)} \in \mathfrak{M}_u$ と増加過程 $A^{(n)} \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ ($A^{(n)}_0 = 0$, $A^{(n)}_\infty \in L^1$) が存在して

$$Y^{T_n} = M^{(n)} - A^{(n)}$$

と書き表せる。この分解の一意性に注意すれば "$M_{t \wedge T_n} = M^{(n)}_t$" なる性質をみたす確率過程 M の存在が分る。このような事実に促されて，martingale の自然な拡張としての次に述べるような概念が導入された。

<u>定義 2.4</u> 確率過程 $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ が local martingale であるとは，$T_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ が存在し

$$M^{T_n} I_{\{T_n > 0\}} \in \mathfrak{M}_u \quad (n \geq 1), \quad T_n \uparrow \infty \quad \text{a.s}$$

となることをいう。

簡単のため local martingales の全体を $\mathcal{L}$ で示した。勿論，$\mathcal{L} \cap (D) \subset \mathfrak{M}_u$ である。併し乍ら $M \in \mathcal{L}$ が一様可積だからと云って，martingale とは限らない ([15], p95 参照)。特に上記の $T_n \in \mathcal{S}$ が $M^{T_n} I_{\{T_n > 0\}} \in H^p$ であるように選べるときに，M を locally L^p- integrable martingale と云い，その全体を $H^{p,loc}$ で表した。また $\mathfrak{M}$, H^p, $\mathcal{L}$, $H^{p,loc}$ 等について，連続なものの全体を $\mathfrak{M}_c$, H^p_c, $\mathcal{L}_c$, $H^{p,loc}_c$ とする。明らかに $\mathcal{L}_c \subset H^{\infty,loc}$ である。IV に対しても同様に IV^{loc}, IV^{loc}_c を考えることにする。

K. A. Yen (Meyer [69] 参照) と C. Doléans-Dade [22] が独

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

えれ得た次の結果は、一般の確率積分に関する議論を進める上で極めて重要な位置を占めている。

<u>定理2.22</u> 任意の $M \in \mathcal{L}$ に対し, $N \in H^{\infty, loc}$ と $A \in \mathcal{L} \cap IV^{loc}$ が存在して

$$M_t = M_0 + N_t + A_t \qquad (t \geq 0)$$

となる。

(証明) 一般性を失わずに $M_0 = 0$ を仮定できる。最初に

$$\alpha_t = \sum_{s \leq t} \Delta M_s \, I_{\{ |\Delta M_s| \geq \frac{1}{2} \}} \qquad (t \geq 0)$$

とおき, これが IV^{loc} に属すことを示そう。そのために

$$\beta_t = \sum_{s \leq t} |\Delta M_s| \, I_{\{ |\Delta M_s| \geq \frac{1}{2} \}} \qquad (t \geq 0)$$

を考察する。各 $t \geq 0$ に対し, $\{ s \leq t \,;\, |\Delta M_s| \geq 1/2 \}$ は有限集合となるため $\beta_t < \infty$ a.s である。このとき stopping time

$$S_n \equiv \inf \{ s \,;\, \beta_s \geq n \text{ 又は } |M_s| \geq n \}$$

について $S_n \uparrow \infty$ a.s. $\{ s < S_n \} \subset \{ \beta_s \vee |M_s| < n \}$ が云える。他方で $T_n \uparrow \infty$, $M^{T_n} \in \mathcal{M}_u$ をみたす $T_n \in \mathcal{S}$ が存在している。そこで $U_n = S_n \wedge T_n$ とおけば, $\mathcal{S} \ni U_n \uparrow \infty$, $M_{U_n} \in L^1$, $\beta_{U_n -} \vee |M_{U_n -}| \leq n$ がなりたち

$$\beta_{U_n} \leq \beta_{U_n -} + |\Delta M_{U_n}| \leq 2n + |M_{U_n}| \in L^1$$

がでる。従って, $\alpha \in IV^{loc}$ である。

次に定理2.16をαに適用し，$A = \alpha - \alpha^{\mathcal{P}}$とおくと$A \in \mathcal{L} \cap \mathrm{IV}^{loc}$である。このとき$N \equiv M - A \in H^{\infty, loc}$がなりたつことを証明しよう。予め$M \in \mathcal{M}_u$及び$A \in \mathcal{M}_u \cap \mathrm{IV}$を仮定できるため，話を$N \in \mathcal{M}_u$なる場合に限定して論ずればよい。$T \in \mathcal{S}^t$に対しては，$\Delta\alpha_T^{\mathcal{P}} = 0$だから

$$\Delta N_T = \Delta M_T - \Delta\alpha_T = \Delta M_T I_{\{|\Delta M_T| < \frac{1}{2}\}},$$

即ち，$|\Delta N_T| < 1/2$が求まる。次に$T \in \mathcal{S}^p$とすると$A \in \mathcal{M}_u$だから$E[\Delta A_T | \mathcal{F}_{T-}] = 0$，従って$E[\Delta\alpha_T | \mathcal{F}_{T-}] = \Delta\alpha_T^{\mathcal{P}}$となる。同じく$E[\Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}] = 0$でもあるから

$$\begin{aligned}\Delta N_T &= (\Delta M_T - \Delta\alpha_T) + \Delta\alpha_T^{\mathcal{P}} \\ &= \Delta M_T I_{\{|\Delta M_T| < \frac{1}{2}\}} + E[\Delta\alpha_T | \mathcal{F}_{T-}] - E[\Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}] \\ &= \Delta M_T I_{\{|\Delta M_T| < \frac{1}{2}\}} - E[\Delta M_T I_{\{|\Delta M_T| < \frac{1}{2}\}} | \mathcal{F}_{T-}].\end{aligned}$$

依って$T \in \mathcal{S}^p$のとき$|\Delta N_T| \leq 1$がなりたつ。すると定理2.3により$|\Delta N| \leq 1$。そこで，各$n \geq 1$に対し

$$\gamma_n = \inf\{t ; |N_t| \geq n\}$$

とおけば$\mathcal{S} \ni \gamma_n \uparrow \infty$，$N_{\gamma_n}^* \leq N_{\gamma_n-}^* + |\Delta N_{\gamma_n}| \leq n+1$が成立し，$N \in H^{\infty, loc}$が示された。□

此処で，“$\mathcal{L} = H^{2, loc}$? ”という問題について触れておきたい。結論から云えば，$H^{2, loc} \subset \mathcal{L}$は定義から自明であるけれども，この逆は正しくない。そのことを示す反例を最初に発見したのはC. Doléans-Dade [21]である。以下にそれを紹介しよう。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

<u>例2.5</u> $\Omega \equiv]0,\infty[$ とし，その上に位相的Borel集合体$\mathscr{F}^\circ$を考え，$S(\omega)=\omega$ ($\omega\in\Omega$)，$\mathscr{F}^\circ_t = \mathfrak{S}(S\wedge t)$ とおく。$\mathscr{F}^\circ_t$ は区間 $]0,t[$ 上のBorel集合とatom $[t,\infty[$ により生成されるσ-fieldに他ならない。この場合 $\mathscr{F}^\circ_{t-}=\mathscr{F}^\circ_t$ がなりたつ。然るに $\mathscr{F}^\circ_{t+}$ は区間 $]0,t[$ 内のBorel集合とatoms $\{t\}$, $]t,\infty[$ とから生成されているため，$\mathscr{F}^\circ_t \neq \mathscr{F}^\circ_{t+}$ となる。$\{S\leq t\} =]0,t] \in \mathscr{F}^\circ_{t+}\setminus\mathscr{F}^\circ_t$ だから，S は $(\mathscr{F}^\circ_{t+})$ に関するstopping timeであるが $(\mathscr{F}^\circ_t)$ に関してはstopping timeとはならない。

<u>補題1</u> r.v. T が $(\mathscr{F}^\circ_t)$ に関するstopping timeであるための必要十分条件は，次の(a),(b)をみたす $s\in[0,\infty]$ が存在することである：

(a) $\{S<s\}\subset\{T>S\}$　　(b) $\{S\geq s\}\subset\{T=s\}$

(証明) T を $(\mathscr{F}^\circ_t)$ に関するstopping timeと仮定しよう。任意の $\omega\in\Omega$ に対し $S(\omega)<T(\omega)$ ならば $s=\infty$ とおけばよい。これに対して $T(\omega)\leq S(\omega)$ をみたす $\omega\in\Omega$ が存在する場合は，$s=T(\omega)$ と定める。明らかに $s\leq\omega$ である。しかも，$\{T=s\}\in\mathscr{F}^\circ_s$ であり，$\omega\in\{T=s\}\cap[s,\infty[$，$[s,\infty[$ は $\mathscr{F}^\circ_s$ のatomだから，$[s,\infty[\subset\{T=s\}$ となる。つまり，(b)が成立する。次に(a)を示すために $S(\omega')<s$ であるが $T(\omega')\leq S(\omega')$ となる ω' の存在を仮定して矛盾を導く。$s'=T(\omega')$ とおけば $s'\leq\omega'<s$ である。この場合も $\{T=s'\}\in\mathscr{F}^\circ_{s'}$ だから $\omega'\in\{T=s'\}\cap[s',\infty[$ となり，$[s',\infty[$ が $\mathscr{F}^\circ_{s'}$ のatomであることに注意すれば $[s',\infty[\subset\{T=s'\}$ を得る。$s'<s$ だから当然 $[s,\infty[\subset[s',\infty[$，つまり $[s,\infty[$ 上では $T=s$ と $T=s'$ が同時に成立し，従って $s=s'$ となって矛盾を生じる。これで(a)が示されたわけである。

さて今度は(a),(b)をみたす $s\in[0,\infty]$ の存在を仮定し，$\{T\leq t\}\in\mathscr{F}^\circ_t$ ($t\geq 0$) がなりたつことを証明しよう。仮定により，$t<s$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

ならば, $\{T \leq t\} \subset \{S < s, T \leq t\} \subset \{S < T \leq t\} \subset \{S < t\}$, 従って $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}^0_t$ である。一方 $t \geq s$ とすれば

$$[t, \infty[\; \subset \{S \geq s\} \subset \{T = s\} \subset \{T \leq t\}$$

がなりたつから, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}^0_t$ が得られる。ゆえに T は $(\mathcal{F}^0_t)$ に関する stopping time である。 □

同様の考察によって, T が $(\mathcal{F}^0_{t+})$ に関する stopping time になるための必要十分条件は, (a') $\{S \leq s\} \subset \{T \geq S\}$ (b') $\{S > s\} \subset \{T = s\}$ をみたす $s \in [0, \infty]$ が存在すること, となる。

いま T を $(\mathcal{F}^0_t)$ に関する任意の stopping time とし, s を補題1のように定める。$s = 0$ のときは, 恒等的に $T = 0$ となるから $T \in \mathcal{S}^p$ である。また $s > 0$ のときは数列 (s_n) を $s_n < s_{n+1} < s$, $s_n \longrightarrow s$ とし

$$T_n = \begin{cases} n \wedge \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) T + \frac{S}{n} \right) & (S < n \wedge s_n) \\ n \wedge s_n & (S \geq n \wedge s_n) \end{cases}$$

を考えると, 補題1により各 T_n は $(\mathcal{F}^0_t)$ に関する stopping time となり, しかも $T_n \uparrow T$, $\{T > 0\} \subset \bigcap_n \{T_n < T\}$ をみたしているので $T \in \mathcal{S}^p$ である。即ち, $(\mathcal{F}^0_t)$ に関しては $\mathcal{S} = \mathcal{S}^p$ が成立する。

さて可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ 上に $P(\{\omega\}) = 0$ $(\forall \omega \in \Omega)$ をみたす確率測度 P を定めて, それによる $\mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}^0_t$ の完備化を $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$ としよう。すると当然 $\mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}^0_{t+}}$ である。従って $S \in \mathcal{S}$ となる（実は, $S \in \mathcal{S}^t$ である）。さらに定義によって $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S-} = \mathcal{F}$ が成立する。このとき次の結果が得られる。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

補題2　(i) $\mathcal{L} = \mathcal{M}$　　(ii) $H^{2,loc} = \{ M \in \mathcal{M} \,;\, M_t \in L^2, \forall t \}$

(証明)　(ii)は(i)と同様の論法で示すことができるので、(i)のみ証明しよう。$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ だから M_0 は定数となり、従って $M_0 = 0$ を仮定できる。$M \in \mathcal{L}$ に対して $M^{T_n} \in \mathcal{M}_u$ $(n \geqq 1)$ をみたす $\mathcal{S} \ni T_n \uparrow \infty$ が存在するが、この場合各 T_n を有界と考えてよい。すると補題1により、T_n に対して2条件(a),(b)をみたす $s_n \in]0,\infty[$ が定まる。一方 $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}$ だから、任意の $\Lambda \in \mathcal{F}$ に対し、$\Lambda \cap \{S \leqq t\} \in \mathcal{F}_{S\wedge t}$ がなりたち、しかも $M_t^{T_j}$ は $\{S > t\}$ 上で定数 $C_t^{(j)}$ となる。このとき

$$M_{t\wedge S\wedge T_j} = E[M_{t\wedge T_j} \mid \mathcal{F}_{S\wedge t}] = M_{t\wedge T_j} I_{\{S\leqq t\}} + C_t^{(j)} I_{\{S>t\}}.$$

従って $\{S \leqq t\}$ 上で $M_{S\wedge T_j} = M_{t\wedge T_j}$ となるため、$j \to \infty$ として、$M_t = M_S$ $(S \leqq t)$ が得られる。M_t もまた $\{S>t\}$ 上で定数 C_t となるので

$$M_t = M_S I\{S\leqq t\} + C_t I_{\{S>t\}}$$

である。M^{T_n} に対しても同様に定数 $C_t^{(n)}$ が存在して

$$M_{t\wedge T_n} = M_{S\wedge T_n} I_{\{S\leqq t\}} + C_t^{(n)} I_{\{S>t\}}$$

と表現できる。そこで $t \leqq s_n$ とすると、$\{S\leqq t\} \subset \{S \leqq s_n\} \subset \{T_n > S\}$ だから

$$M_{t\wedge T_n} = M_S I_{\{S\leqq t\}} + C_t^{(n)} I_{\{S>t\}}.$$

さらに $\{S > s_n\} \subset \{S>t\} \cap \{T_n = s_n\}$ であるから、$\{S>s_n\}$ 上では $M_{t\wedge T_n} = M_{t\wedge s_n} = M_t$ が成立する。つまり、$t \leqq s_n$ のとき $C_t^{(n)} = C_t$ である。ところが $s_n \uparrow \infty$ だから、n を十分

大にとれば，$t \leq \sigma_n$ となるので $M_t = M_t^{T_n}$ がなりたつ。従って $M \in \mathcal{M}$ である。□

以上の準備を終えて，$\mathcal{L} \setminus H^{2,loc} \neq \phi$ を次に例証しよう。$m(dx)$ を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とし

$$P(\Lambda) = m(\Lambda \cap]0,1]) \qquad (\Lambda \in \mathcal{F})$$

とおく。さらに $X(\omega) = S(\omega)^{-1/2} I_{]0,1]}(\omega)$，$M_t = E[X \mid \mathcal{F}_t]$ とすると $M \in \mathcal{M}_u$ である。然るに，$M_t \geq X I_{\{S \leq t\}}$ だから

$$E[M_1^2] \geq E[X^2 ; S \leq 1] = \int_0^1 \omega^{-1} d\omega = \infty ,$$

従って補題2により $M \in \mathcal{L} \setminus H^{2,loc}$ である。

§9. H^2 の直交分解

定理2.22 は，martingale の理論において H^2 の研究が基礎となることを示唆している。それ故に，暫くは話を H^2 に限定して論じよう。

$M \in H^2$ とする。このとき $Y_t \equiv E[M_\infty^2 \mid \mathcal{F}_t] - M_t^2$ はクラス (D) に属す potential である。従って Doob-Meyer の分解定理により，$Y_t = E[A_\infty \mid \mathcal{F}_t] - A_t$，$A_0 = M_0^2$ をみたす増加過程 $A \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ が一意に存在する。この A を通常は $\langle M, M \rangle$ で示す。即ち $M \in H^2$ ならば，$M^2 - \langle M, M \rangle \in \mathcal{M}_u$，$\langle M, M \rangle_0 = M_0^2$ である。特に $M \in H_c^2$ に対しては，定理2.21 により $\langle M, M \rangle$ も連続となる。

次に Kunita-Watanabe [56] の考えに従い，$M, N \in H^2$ に対し

$$(11) \qquad \langle M, N \rangle = \frac{1}{4} \left(\langle M+N, M+N \rangle - \langle M-N, M-N \rangle \right)$$

とおけば，明らかに $\langle M, N \rangle_0 = M_0 N_0$，$\langle M, N \rangle \in IV$ であって

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

しかも,

$$MN-\langle M,N\rangle=\frac{1}{4}\left[\left\{(M+N)^2-\langle M+N,M+N\rangle\right\}-\left\{(M-N)^2-\langle M-N,M-N\rangle\right\}\right]$$

が成立するから $MN-\langle M,N\rangle\in\mathcal{M}_u$ となる。この性質は以下に述べる要領で $H^{2,loc}$ に拡張できる。$M\in H^{2,loc}$ のとき,$M^{T_n}\in H^2$ となる $\mathcal{S}\ni T_n\uparrow\infty$ が存在するが,この場合各 n に対して $(M^{T_n})^2-\langle M^{T_n},M^{T_n}\rangle\in\mathcal{M}_u$ であって,しかも $[\![0,T_n]\!]$ 上で $M^{T_{n+1}}=M^{T_n}$ なること及び $\langle\ ,\ \rangle$ の一意性に注意すれば $A^{T_n}=\langle M^{T_n},M^{T_n}\rangle$ をみたす $A\in IV^{loc}$ が存在する筈である。これを改めて $\langle M,M\rangle$ とすると,$M^2-\langle M,M\rangle\in\mathcal{L}$ である。また $M,N\in H^{2,loc}$ に対しても (11) に倣って $\langle M,N\rangle\in IV^{loc}$ を定義すれば,次の関係がなりたつ。

<u>定理 2.23</u> 任意の $M,N\in H^{2,loc}$ に対し,$MN-\langle M,N\rangle\in\mathcal{L}$ である。

これと関連して M. Pratelli [76] が興味深い注意を与えているので,それを紹介しておく。

<u>定理 2.24</u> $M\in\mathcal{L}$ とし,適当な増加過程 $A\in\underline{\mathcal{P}}$ $(A_0=M_0^2)$ によって,$M^2-A\in\mathcal{L}$ とできるとき,実は $M\in H^{2,loc}$,$A=\langle M,M\rangle$ である。

(証明) A の $\mathcal{P}$-可測性及び右連続性から

$$H\equiv\{(t,\omega)\ ;\ A_t(\omega)\geqq n\}\in\mathcal{P}\ ,\quad [\![D_H]\!]\subset H$$

となるため,定理 2.8 系 2 により $S_n\equiv D_H\in\mathcal{S}^p$ である。すると $S_{n,m}\in\mathcal{S}$ $(m\geqq 1)$ を,$S_{n,m}\uparrow S_n$,$\{S_n>0\}\subset\bigcap_m\{S_{n,m}<S_n\}$ なるように選ぶことができる。一方で $(M^2-A)^{T_n}\in\mathcal{M}_u$ となる

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$\mathcal{S} \ni T_n \uparrow \infty$ が存在しており，しかも $S_n \uparrow \infty$ だから m_j を適当に定めて $R_j \equiv T_j \wedge S_{j,m_j} \longrightarrow \infty$ となるようにできる。このとき $(M^2 - A)^{R_j} \in \mathfrak{M}_u$，$A_{R_j} \leqq j$ $(j \geqq 1)$ 及び $M_0^2 = A_0$ だから

$$E[M_{R_j}^2] = E[A_{R_j}] \leqq j$$

が成立する。つまり $M \in \mathbf{H}^{2,loc}$ である。また $\langle\ ,\ \rangle$ の一意性から $A = \langle M, M \rangle$ がでる。 □

さて，前節の冒頭で指摘したように，$\mathbf{H}^2$ は $(M,N) = E[M_\infty N_\infty]$ を内積として Hilbert 空間をなしている。従って $\mathcal{H}$ を $\mathbf{H}^2$ の閉部分空間とするとき，任意の $M \in \mathbf{H}^2$ に対して L^2 空間における意味での直交分解：$M = N + L$ (i.e., $N \in \mathcal{H}$，$E[N_\infty L_\infty] = 0$) が存在する。本節では，それより強い直交性について述べよう。

<u>定義 2.5</u>　$M, N \in \mathbf{H}^2$ が任意の $T \in \mathcal{S}$ に対して，$E[M_T N_T] = 0$ なる関係にあるとき，M と N は直交すると云い，これを $M \perp N$ で表す。

例えば，任意の $M \in \mathbf{H}^2$，$T \in \mathcal{S}$ に対して $M^T \perp M - M^T$ である。また $M \perp N$ として，特に $T = \infty$ の場合を考えれば $E[M_\infty N_\infty] = 0$ つまり L^2 の意味での直交性が得られる。但し乍ら，この逆は成立しない。

<u>例 2.6</u>　$\Omega =]0,1]$ とし，P を Ω 上の Lebesgue 測度，さらに

$$\mathcal{F}_t = \begin{cases} \sigma\left(\mathbb{B}(]0,\frac{1}{4}]),\ ]\frac{1}{4},1]\right) & (0 \leqq t < 1) \\ \sigma\left(\mathbb{B}(]0,\frac{1}{2}]),\ ]\frac{1}{2},1]\right) & (1 \leqq t < \infty) \end{cases}$$

$$M_t = P(]0,\tfrac{1}{2}] \mid \mathcal{F}_t), \quad N_t = P(]\tfrac{1}{2},1] \mid \mathcal{F}_t) \quad (t \geqq 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

とおけば，明らかに $M, N \in H^2$, $E[M_\infty N_\infty] = 0$ である。然るに $M_0 = I_{]0,1/4]} + \frac{1}{3} I_{]1/4,1]}$，$N_0 = \frac{2}{3} I_{]1/4,1]}$ だから $E[M_0 N_0] = 1/6$ となって M と N は直交しない。

<u>定理 2.25</u>　$M, N \in \mathbf{H}^2$ とし $M_0 N_0 = 0$ を仮定するとき，次の 3 条件は同値である：

(i)　$M \perp N$　　(ii)　$MN \in \mathfrak{M}_u$　　(iii)　$\langle M, N \rangle = 0$

(証明) 最初に (i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す。任意の $T \in \mathcal{S}$ と $D \in \mathcal{F}_T$ に対して $T_D \in \mathcal{S}$ となるため，(i) から $E[M_{T_D} N_{T_D}] = 0$。また $E[M_\infty N_\infty] = 0$ でもある。すると

$$E[M_T N_T ; D] = - E[M_\infty N_\infty ; D^c] = E[M_\infty N_\infty ; D]$$

が成立し (ii) が得られる。次に $\langle\ ,\ \rangle$ の一意性から (ii) $\Longrightarrow$ (iii) がでる。最後に (iii) を仮定して (i) を示そう。定理 2.23 によって $MN = MN - \langle M, N \rangle \in \mathfrak{M}_u$ となる。従って，任意の $T \in \mathcal{S}$ に対し $E[M_T N_T] = E[M_0 N_0] = 0$，即ち (i) がなりたつ。∎

<u>定義 2.6</u>　次の 2 条件をみたす $\mathbf{H}^2$ の閉部分空間 $\mathcal{H}$ を stable という：

(i)　$M \in \mathcal{H}$ のとき，任意の $T \in \mathcal{S}$ に対し $M^T \in \mathcal{H}$
(ii)　$M \in \mathcal{H}$ のとき，任意の $A \in \mathcal{F}_0$ に対し $M I_A \in \mathcal{H}$。

<u>例 2.7</u>　$\mathbf{H}^2_c$ は stable である。実際に $\mathbf{H}^2_c$ については，明らかに上の 2 条件 (i), (ii) をみたす $\mathbf{H}^2$ の部分空間だから，閉集合なることを確認すれば十分である。$\mathbf{H}^2_c \ni M^{(n)} \longrightarrow M \in \mathbf{H}^2$ $(n \to \infty)$ とする。Doob の不等式を用い，必要なら部分列を適当にとることにより，予め

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{ \sup_t | M_t^{(n)} - M_t | > 2^{-n} \} < \infty$$

が成立していると仮定できる。すると Borel-Cantelli の補題から $P\{ \lim_{n\to\infty} \sup_t | M_t^{(n)} - M_t | = 0 \} = 1$ となり，M の連続性が示される。従って $M \in \mathbf{H}_c^2$ である。

<u>定理 2.26</u> $M \in \mathbf{H}^2$ とする。さらに $\mathcal{H}$ を $\mathbf{H}^2$ の stable な部分空間とし，$M = N + L$ $(N \in \mathcal{H})$ を L^2 の意味での直交分解と仮定するとき，実は $N \perp L$ である。

（証明） "stable" の定義により，任意の $T \in \mathcal{S}$ に対し $N^T \in \mathcal{H}$ である。従って $E[N_T L_T] = E[N_\infty^T L_\infty] = 0$ となり $N \perp L$ が成立する。 □

これを一般化して次の結果が得られる。

<u>定理 2.27</u> $\mathcal{H}$ を $\mathbf{H}^2$ の部分集合とし，定義 2.6 の条件 (i), (ii) を仮定する。このとき

$$\mathcal{K} \equiv \{ M \in \mathbf{H}^2 \ ; \ E[M_\infty N_\infty] = 0 \ (\forall N \in \mathcal{H}) \}$$

は stable である。しかも $\mathcal{H} \perp \mathcal{K}$ が成立する。

（証明） $\mathcal{K}$ が線形であること及び定義 2.6 の条件 (i), (ii) をみたすことは容易に検証し得る。問題は $\mathcal{K}$ が閉集合か否かである。そこで $\mathcal{K} \ni M^{(n)} \longrightarrow M \in \mathbf{H}^2$ としよう。当然 $M_\infty^{(n)}$ は M_∞ に L^2-収束しているので，任意の $N \in \mathcal{H}$ に対し

$$E[M_\infty N_\infty] = \lim_{n\to\infty} E[M_\infty^{(n)} N_\infty] = 0 \ .$$

依って M は $\mathcal{K}$ に属し，$\mathcal{K}$ は stable となる。定理の後半につ

いては，$M \in \mathcal{K}$，$N \in \mathcal{N}$ として任意の $T \in \mathcal{S}$ に対し $N^T \in \mathcal{N}$ なることに注意すれば，$E[M_T N_T] = E[M_\infty N_\infty^T] = 0$ となり，$M \perp N$ が得られる。 □

此処で，後の議論にとって最も重要な直交分解について触れておく。$\mathbf{H}_c^2$ は stable だから，定理2.27によって

$$\mathbf{H}_d^2 \equiv \{ N \in \mathbf{H}^2 \ ; \ N \perp L \ \ (\forall L \in \mathbf{H}_c^2) \}$$

も stable となり，任意の $M \in \mathbf{H}^2$ は

$$M = M^c + M^d \ , \quad M^c \in \mathbf{H}_c^2 \ , \ M^d \in \mathbf{H}_d^2$$

と一意に直交分解される。M^c を M の continuous part，M^d を M の purely discontinuous part という。

§10. $\mathbf{H}_d^2$ の構造

$T \in \mathcal{S}$ に対し

$$\mathcal{M}(T) = \{ M \in \mathbf{H}_d^2 \ ; \ \{\Delta M \neq 0\} \subset [\![T]\!] \}$$

とおく。一般に，これは stable である。殊に $[\![T]\!] \subset [\![0]\!]$ ならば，当然 $\mathcal{M}(T) = \{ M \in \mathbf{H}_d^2 \ ; \ M_t = M_0 \ \ (\forall t \geq 0) \}$ となる。

本節の目的は，$\mathbf{H}_d^2$ の構造の解析であるが，そのためには先ず $\mathcal{M}(T)$ の構造を探ることが肝要となる。

<u>補題1</u>　$M \in \mathfrak{M} \cap \mathrm{IV}$ のとき，$M^{\mathcal{P}} = 0$ である。

(証明)　$M \in \mathrm{IV}$ ならば，定理2.16により $M - M^{\mathcal{P}} \in \mathfrak{M}_u$。従って $M \in \mathfrak{M} \cap \mathrm{IV}$ のとき，$M^{\mathcal{P}}$ の一意性から $M^{\mathcal{P}} = 0$ となる。 □

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

特に $M \in \mathfrak{M}_c \cap IV$ のとき $M = 0$ となる。従って $M \in \mathfrak{M}_c$ が $M \neq 0$ のとき IV ではない。これによって，例えば Brown 運動の見本関数が有界変動でないことも分る。

<u>補題 2</u>　$M \in \mathfrak{M} \cap IV$ 及び $N \in \mathbf{H}^\infty$ に対して

$$L_t = M_t N_t - \sum_{s \le t} \Delta M_s \Delta N_s \qquad (t \geqq 0)$$

とおくと，$L \in \mathfrak{M}_u$，$L_0 = 0$ がなりたつ。

（証明）明らかに $L_\infty \in L^1$ である。また dual optional projection の定義により

$$E[M_\infty N_\infty] = E\Big[\int_{\mathbb{R}_+} N_s \, dM_s\Big] \text{。}$$

次に dual predictable projection の定義と補題 1 を用いて

$$E\Big[\int_{\mathbb{R}_+} N_{s-} \, dM_s\Big] = E\Big[\int_{\mathbb{R}_+} N_s \, dM_s^{\mathcal{P}}\Big] = 0$$

となる。依って

$$E[M_\infty N_\infty] = E\Big[\int_{\mathbb{R}_+} \Delta N_s \, dM_s\Big] = E\Big[\sum_s \Delta M_s \Delta N_s\Big] \text{。}$$

このとき，任意の $T \in \mathcal{S}$ と $D \in \mathcal{F}_T$ に対し $N^{T_D} \in \mathbf{H}^\infty$ なることに注意すれば，上の関係式から

$$E[L_T ; D] = E\Big[M_T N_T - \sum_{s \le T} \Delta M_s \Delta N_s \; ; D\Big]$$

$$= - E\Big[M_\infty N_\infty - \sum_s \Delta M_s \Delta N_s \; ; D^c\Big]$$

$$= E[L_\infty ; D] \text{，}$$

即ち，$L \in \mathcal{M}_u$ となる。特に $L_0 = M_0 N_0 - \Delta M_0 \Delta N_0 = 0$ である。□

なお，補題2は $\int_{\mathbb{R}_+} |dM_s| \in L^2$，$M \in \mathcal{M}$，$N \in \mathbf{H}^2$ の場合にも成立する。従って，$H^2 \cap IV \subset \mathbf{H}^2_d$ である。

次に $U \in L^2(\mathcal{F}_T)$ に対し，$u_t \equiv U I_{\{T \leq t\}}$ はIVである。さらに，$M^U_t \equiv u_t - u^{\mathcal{P}}_t$ とする。定理2.16により $M^U \in \mathcal{M}_u$ となる。暫くの間，此等の記号を用いる。

<u>定理 2.28</u>　$T \in \mathcal{S}^t$ のとき

$$\mathcal{M}(T) = \{ M^U \ ; \ U \in L^2(\mathcal{F}_T),\ (T = \infty) \subset (U = 0) \}$$

がなりたつ。

（証明）$U \geq 0$ を仮定しても一般性を失わない。しかも $T \in \mathcal{S}^t$ だから $u^{\mathcal{P}}$ は連続となる。すると各 n に対して，$(u^{\mathcal{P}})^{T_n}$ が有界となるような $\mathcal{S} \ni T_n \uparrow \infty$ が存在する。そこで dual predictable projection の定義を思い起し部分積分法を用いれば，

$$\begin{aligned}
E[(u^{\mathcal{P}}_{T_n})^2] &= 2E\left[\int_0^{T_n} (u^{\mathcal{P}}_{T_n} - u^{\mathcal{P}}_s)\, du^{\mathcal{P}}_s\right] \\
&= 2E\left[\int_0^{T_n} (u_{T_n} - u_s)\, du^{\mathcal{P}}_s\right] \\
&\leq 2E[U u^{\mathcal{P}}_{T_n}] \\
&\leq 2\|U\|_2 \|u^{\mathcal{P}}_{T_n}\|_2
\end{aligned}$$

従って $\|u^{\mathcal{P}}_{T_n}\|_2 \leq 2\|U\|_2$ $(n \geq 1)$ が得られる。ここで $n \to \infty$ とすれば $\|u^{\mathcal{P}}_\infty\|_2 \leq 2\|U\|_2$，つまり $M^U \in \mathbf{H}^2$。しかも $\{\Delta M^U \neq 0\} \subset [\![T]\!]$ であり，補題2によって $M^U \perp \mathbf{H}^2_c$ となるため $M^U \in \mathcal{M}(T)$ である。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

逆に $M\in\mathcal{M}(T)$ に対して，$U=\Delta M_T$ とおけば，当然 $U\in L^2(\mathcal{F}_T)$，$\{T=\infty\}\subset\{U=0\}$ をみたしている。このとき $M, M^U\in H_d^2$ で，しかも

$$M_t - M_t^U = (M_t - \Delta M_T I_{\{T\le t\}}) + u_t^p$$

であるから $M-M^U\in H_d^2\cap H_c^2$。ゆえに $M=M^U$ となる。□

定理2.29　$T\in\mathcal{S}^p$ のとき

$$\mathcal{M}(T)=\{M^U;\ U\in L^2(\mathcal{F}_T),\ E[U\mid\mathcal{F}_{T-}]=0\}$$

がなりたつ。

(証明)　$E[U\mid\mathcal{F}_{T-}]=0$　$(U\in L^2(\mathcal{F}_T))$ とし，任意の $D\in\mathcal{F}_t$ に対して $D\cap\{t<T<\infty\}\in\mathcal{F}_{T-}$ なることに注意すれば

$$\begin{aligned} E[u_\infty; D] &= E[u_t; D] + E[U; D\cap\{t<T<\infty\}] \\ &= E[u_t; D] + E[E[U\mid\mathcal{F}_{T-}]; D\cap\{t<T<\infty\}] \\ &= E[u_t; D]\ . \end{aligned}$$

従って $M^U=(u_t)\in H^2$ である。これに補題2を適用して M^U と H_c^2 の直交性が検証できる。ゆえに $M^U\in\mathcal{M}(T)$ となる。

逆に $M\in\mathcal{M}(T)$ $(T\in\mathcal{S}^p)$ とし，$U=\Delta M_T$ とおく。このとき $U\in L^2(\mathcal{F}_T)$，$E[U\mid\mathcal{F}_{T-}]=0$ をみたすことは断るまでもあるまい。しかも，$M-M^U\in H_c^2\cap H_d^2$ だから $M=M^U$ がなりたつ。依って定理が証明された。□

さて，任意の $M\in H_d^2$ が ΔM から再構成されることを述べる。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

定理2.30 $M \in \mathbf{H}^2$ とする。これが $\mathbf{H}^2_d$ に属すための必要十分条件は，次の(i),(ii)をみたす $T_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ が存在することである：

(i) $[\![T_j]\!] \cap [\![T_k]\!] = \phi$ $(j \neq k)$，各 T_n は pred. か t. inac.

(ii) $M = \sum_n M^{U_n}$，ただし $U_n \equiv \Delta M_{T_n}$ 。

(証明) まず必要条件なることを示そう。$M \in \mathbf{H}^2_d$ に対し定理2.7を適用すれば

$$\{ \Delta M \neq 0 \} \subset \bigcup_n [\![T_n]\!] , \quad [\![T_j]\!] \cap [\![T_k]\!] = \phi \quad (j \neq k)$$

をみたす pred. か t. inac. な $T_n \in \mathcal{S}$ が存在する。$U_n = \Delta M_{T_n}$ とおけば，定理2.28及び定理2.29により $M^{U_n} \in \mathcal{M}(T_n)$。しかも $\{[\![T_n]\!]\}_{n \geq 1}$ は互いに素だから補題2によって，$M^{U_j} \perp M^{U_k}$ $(j \neq k)$ がでる。そこで $M' \equiv M - \sum_{i=1}^{n} M^{U_i}$ を考察しよう。やはり補題2により $M' \perp \sum_{i=1}^{n} M^{U_i}$ となるため

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} E[(M^{U_i}_\infty)^2] \leq E[M^2_\infty] \quad (n \geq 1),$$

従って級数 $\sum M^{U_n}$ は $\mathbf{H}^2$-収束する。その和を M'' とすると

$$M'' \in \mathbf{H}^2, \quad M - M'' \in \mathbf{H}^2_c \cap \mathbf{H}^2_d$$

がなりたつので結局 $M = M''$ である。

逆に(i),(ii)を仮定しよう。補題2により各 $n \geq 1$ に対して，$M^{U_n} \perp \mathbf{H}^2_c$ しかも $\lim_{n \to \infty} \| \sum_{i=1}^{n} M^{U_i} - M \|_{\mathbf{H}^2} = 0$ だから，任意の $N \in \mathbf{H}^2_c$ に対し

$$E[M_T N_T] = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} E[M^{U_i}_T N_T] = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

がなりたつ。依って $M \in \mathbf{H}_d^2$ である。 □

Meyer [65] に従い，$M \in \mathbf{H}^2$ に対し $\mathcal{O}$-可測な増加過程

$$(13) \qquad [M, M]_t = \langle M^c, M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2 \qquad (t \geq 0)$$

を定義する。便宜上 $[M, M]_{0-} = 0$ とする。$\langle \ , \ \rangle$ が $\mathbf{H}^{2,loc}$ に対してのみ定義されるのと対照的に，これは任意の $M \in \mathcal{L}$ に対して定義し得る（後述）。因に $[M, M]_\infty$ は，離散時径数における $S(X)^2$ に相当している。特に $M \in \mathbf{H}_d^2$ のときは $[M, M]_t = \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2$ となるので，補題 2 により $M^2 - [M, M] \in \mathfrak{M}_u$ となる。

§11. $[M, M]$ の基本的性質

(11) に倣って任意の $M, N \in \mathbf{H}^2$ に対し

$$(14) \qquad [M, N] = \frac{1}{4}\Big([M+N, M+N] - [M-N, M-N]\Big)$$

とおく。便宜上 $[M, N]_s^t = [M, N]_t - [M, N]_s \quad (s \leq t)$ なる記号を用いることがある。

<u>定理 2.31</u> 任意の $M, N \in \mathbf{H}^2$ に対し，$MN - [M, N] \in \mathfrak{M}_u$ である。

（証明） $M = N$ の場合に検証できれば十分である。先ず $\Delta M = \Delta M^d$ だから，$\sum_s \Delta M_s^2 \in L^1$，従って $M_\infty^2 - [M, M]_\infty \in L^1$。次に定理 2.23 と $M^c \perp M^d$ を考慮すれば

$$M_t^2 - [M, M]_t = 2 M_t^c M_t^d + \left\{ (M_t^c)^2 - \langle M^c, M^c \rangle_t \right\} + \left\{ (M_t^d)^2 - \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2 \right\} \in \mathfrak{M}_u$$

となる。 □

これと定理2.16及び定理2.23により，$[M,N]^{\mathcal{P}} = \langle M,N \rangle$ なることが分る。

系　$M,N \in \mathbf{H}^2$ に対し $M_0N_0 = 0$ を仮定するとき，次の(i),(ii)は同値である：

(i)　$M \perp N$　　　　(ii)　$[M,N] \in \mathfrak{M}_u$

特に $[M,N] = 0$ は，$M^c \perp N^c$ で，しかも $\{\Delta M \neq 0\} \cap \{\Delta N \neq 0\} = \phi$ であることを意味している。

次に分割 Δ：$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ に対し

$$Q_\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$$

を考えよう。C. Doléans-Dade [19] は $\|\Delta\| \to 0$ のとき，Q_Δ が $[M,M]_t$ に確率収束することを指摘している。彼女以前にも，特別な場合で類似の結果がある（P.W. Millar [71], P.A. Meyer [65]）。このノートでは，さらに $M \in \mathbf{H}^2_c$ に限定してその証明を与えるに止めておく。$M \in \mathbf{H}^2_c$ であれば，定義式(13)から，$[M,M] = \langle M,M \rangle$ となり，§9で注意したようにこれは連続である。従って，必要ならstopping timeを利用することにより予め M 及び $[M,M]$ の有界性を仮定できる。すると定理2.31によって

$$\begin{aligned} E[(Q_\Delta - [M,M]_t)^2] &= E\Big[\Big\{\sum_{i=1}^{n} [(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 - [M,M]_{t_{i-1}}^{t_i}]\Big\}^2\Big] \\ &= E\Big[\sum_{i=1}^{n} \{(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 - [M,M]_{t_{i-1}}^{t_i}\}^2\Big] \\ &\leq 2E\Big[\sum_{i=1}^{n} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^4\Big] + 2E\Big[\sum_{i=1}^{n} \big([M,M]_{t_{i-1}}^{t_i}\big)^2\Big] \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

がなりたつ。右辺の第1項を I_1，第2項を I_2 としよう。

$$I_1 \leqq 2E\left[\sup_i (M_{t_i}-M_{t_{i-1}})^2 Q_\Delta\right]$$

$$\leqq 2\|Q_\Delta\|_2 \, E\left[\sup_i (M_{t_i}-M_{t_{i-1}})^4\right]^{1/2},$$

これに Burkholder の不等式（第1章§8参照）を適用して

$$I_1 \leqq C\|M_t\|_4^2 \, E\left[\sup_i (M_{t_i}-M_{t_{i-1}})^4\right]^{1/2}$$

が得られる。ここで $\|\Delta\| \longrightarrow 0$ とすれば，M の連続性により右辺は0に収束する。同様に $[M,M]$ の連続性から

$$I_2 \leqq 2E\left[[M,M]_t \sup_i\left([M,M]_{t_i}-[M,M]_{t_{i-1}}\right)\right] \longrightarrow 0 \quad 。$$

依って Q_Δ が $[M,M]_t$ に確率収束することが示された。この結果は，第3章§4の式(10)の証明に用いられる。

§12. $\mathbf{H}^2$-martingale に関する確率積分

K. Ito の研究（[38], [40]）に端を発する確率積分の理論は，その後の H. Kunita - S. Watanabe [56]，P. A. Meyer [65] 等の martingale を基礎に置く研究を経て極めて一般化されるに至った。しかも連続な martingale の見本関数が一般には有界変動でないと云う事実は，確率積分と Stieltjes 積分の違いを明確に物語っている。本節では，特に $\mathbf{H}^2$ における確率積分を論ずる。

先ず，基本的な"Kunita-Watanabe の不等式"を準備しよう。

<u>補題1</u>　$M, N \in \mathbf{H}^2$ 及び $H, K \in \mathfrak{L}$ に対し，次の不等式が成立する：

$$\int_{\mathbb{R}_+} |H_s K_s|\,|d[M,N]_s| \leqq \left(\int_{\mathbb{R}_+} H_s^2\, d[M,M]_s\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} K_s^2\, d[N,N]_s\right)^{1/2}. \tag{15}$$

(証明) 端的に云えば，(15) は不等式

$$(16) \qquad \left| [M,N]_s^t \right| \leqslant \left([M,M]_s^t \right)^{1/2} \left([N,N]_s^t \right)^{1/2} \qquad (s \leqslant t)$$

に帰着される。これを示すには，任意の実数 x に対して

$$0 \leqslant [xM+N,\ xM+N]_s^t = [M,M]_s^t x^2 + 2[M,N]_s^t x + [N,N]_s^t$$

がなりたつことに注意すればよい。

さて $J_s = d[M,N]_s / |d[M,N]_s|$ とおくと，明らかに $J \in \mathcal{O}$，$|J_s| = 1$ $(s \geqslant 0)$ をみたしている。従って H_s の代りに $H_s J_s \,\mathrm{sgn}(H_s K_s)$ を考えることにより

$$(17) \qquad \left| \int_{\mathbb{R}_+} H_s K_s \, d[M,N]_s \right| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}_+} H_s^2 \, d[M,M]_s \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} K_s^2 \, d[N,N]_s \right)^{1/2}$$

を証明すれば済む。さらに H, K についてはM.C.T により次に述べるような特別な場合に限定して話を進めることができる：定数 $a>0$，分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leqslant a$ 及び確率変数 H_i, K_i が存在して，$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} (\|H_i\|_\infty, \|K_i\|_\infty) < \infty$，

$$H = H_0 I_{[\![0]\!]} + H_1 I_{]\!]0,t_1]\!]} + \cdots + H_n I_{]\!]t_{n-1},t_n]\!]}$$

$$K = K_0 I_{[\![0]\!]} + K_1 I_{]\!]0,t_1]\!]} + \cdots + K_n I_{]\!]t_{n-1},t_n]\!]} \quad .$$

このような設定の下で (16) 及び Schwarz の不等式を用いれば

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+} H_s K_s \, d[M,N]_s \right| \leqslant \left| H_0 K_0 \,\Delta M_0 \Delta N_0 \right| + \sum_{i=1}^n \left| H_i K_i \,[M,N]_{t_{i-1}}^{t_i} \right|$$

$$\leqslant |H_0 \Delta M_0| \, |K_0 \Delta N_0| + \sum_{i=1}^n \left(H_i^2 [M,M]_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{1/2} \left(K_i^2 [N,N]_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(H_0^2 \Delta M_0^2 + \sum_{i=1}^n H_i^2 [M,M]_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{1/2} \left(K_0^2 \Delta N_0^2 + \sum_{i=1}^n K_i^2 [N,N]_{t_{i-1}}^{t_i} \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} H_s^2\, d[M,M]_s\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} K_s^2\, d[N,N]_s\right)^{1/2},$$

依って (17) が得られた。 □

次に $M \in \mathbf{H}^2$ に対し

$$\mathbb{L}^2(M) = \left\{ H \in \underline{\underline{\mathcal{P}}} \;;\; \int_{\mathbb{R}_+} H_s^2\, d[M,M]_s \in \mathbb{L}^1 \right\}$$

とおく。これは，$\|H\|_M \equiv E\left[\int_{\mathbb{R}_+} H_s^2\, d[M,M]_s\right]^{1/2}$ をノルムとして Hilbert 空間をなしており，§5 の記号を用いれば $\mathbb{L}^2(M)$ は，$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_{[M,M]})$ に他ならない。

いま $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \infty$ を $[0,\infty]$ の有限分割とし，H_{-1}, H_0 は $\mathcal{F}_0$-可測，また各 $i \geq 1$ に対して H_i は $\mathcal{F}_{t_i}$-可測なr.v.であって，しかも $\sup_{-1 \leq i \leq n} \|H_i\|_\infty < \infty$ をみたし

(18) $$H_t = H_{-1} I_{\{0\}}(t) + H_0 I_{]0,t_1]}(t) + \cdots + H_{n-1} I_{]t_{n-1},\infty[}(t)$$

と定義される H $(\in \mathbb{L}^2(M))$ の全体を $\mathcal{D}$ としよう。容易に検証できるように $\mathcal{D}$ は $\mathbb{L}^2(M)$ で稠密である。

<u>定理 2.32</u> 任意の $M \in \mathbf{H}^2$ と $H \in \mathbb{L}^2(M)$ に対し，関係式

(19) $$[L,N]_t = \int_0^t H_s\, d[M,N]_s \qquad (N \in \mathbf{H}^2,\ t \geq 0)$$

をみたす $L \in \mathbf{H}^2$ が一意に存在する。さらに

(20) $$\Delta L_t = H_t \Delta M_t \qquad (t \geq 0)$$

がなりたつ。

(証明) 一意性の証明から始めよう。(19) をみたす $L, L' \in \mathbf{H}^2$

があるとき，結果として任意の$N\in \mathbf{H}^2$に対し$[L-L',N]=0$となる。特に$N\equiv L-L'$とすれば，$[L-L',L-L']=0$ i.e. $L=L'$。

次に存在性の証明に移ろう。先ず(18)で与えられる$H\in\mathcal{D}$に対して

$$(H\circ M)_t = H_{-1}\Delta M_0 + \sum_{i=1}^{n} H_{i-1}(M_{t\wedge t_i} - M_{t\wedge t_{i-1}})$$

とおく。すると$H\circ M\in\mathbf{H}^2$である。これが(19),(20)をみたすことの証明は容易であるから省略する。特に$N=H\circ M$とおいて(19)を用いると$[H\circ M, H\circ M]_\infty = \int_{\mathbb{R}_+} H_s^2\, d[M,M]_s$が得られる。さらに定理2.31により$(H\circ M)^2-[H\circ M, H\circ M]$は$\mathfrak{M}_u$に属し，その平均値が0であることに注意してDoobの不等式を適用すれば

$$\| H\circ M \|_{\mathbf{H}^2} \leq 2E[(H\circ M)_\infty^2]^{1/2} = 2\|H\|_M \qquad (H\in\mathcal{D})$$

が成立する。即ち，線形な mapping $\Psi:\mathcal{D}\ni H\longmapsto H\circ M\in\mathbf{H}^2$の有界性が示されたことになる。このとき Hahn-Banach の定理から，Ψの$L^2(M)$への拡張が可能であり，これを改めてΨで表す。すると，$\overline{\mathcal{D}}=L^2(M)$だから，$H\in L^2(M)$に対する$L\equiv\Psi(H)$は当然(19)をみたしている。また$H^{(n)}\in\mathcal{D}$を適当にとって，

$$\|\Psi(H^{(n)})-\Psi(H)\|_{\mathbf{H}^2}\longrightarrow 0\ ,\quad \int_{\mathbb{R}_+}(H_s^{(n)}-H_s)^2\,d[M,M]_s \xrightarrow{a.s} 0$$

とできる。しかも

$$|\Delta\Psi(H)_s - H_s\Delta M_s| \leq 2(\Psi(H^{(n)})-\Psi(H))^* + |H_s^{(n)}-H_s||\Delta M_s|$$

であるから，$\Delta\Psi(H)_s = H_s\Delta M_s$が得られる。□

(19)をみたすLを"HのMによる確率積分"といい，通常これ

を $H\circ M$ 或いは $\int_0^t H_s\,dM_s$ で表す。特に $M_0=0$ のときには、$M^T=I_{]\!]0,T]\!]}\circ M$ である。また (20) から、一般に $(H\circ M)^d=H\circ M^d$ がでる。従って $M\in \mathbf{H}^2_c$ のとき、$H\circ M\in\mathbf{H}^2_c$ となる。さらに任意の $H\in L^2(M)$ と有界な $K\in\underline{\mathcal{P}}$ に対して

$$(HK)\circ M = K\circ(H\circ M) = H\circ(K\circ M)$$

がなりたつ。

系 任意の $M\in\mathbf{H}^2$ と $H\in L^2(M)$ に対し、$(H\circ M)^c=H\circ M^c$ が成立する。

次に任意の有界な $H\in\underline{\mathcal{P}}$ に対し、これの $M\in\mathbf{H}^{2,loc}$ による確率積分を定義しよう。$\mathcal{S}\ni T_n\uparrow\infty$, $M^{T_n}\in\mathbf{H}^2$ (ただし、簡単のため $M_0=0$ を仮定しておく.) とすれば、$H\in L^2(M^{T_n})$ $(n\geq 1)$ だから確率積分 $H\circ M^{T_n}$ が前述のように定義されている。しかも各 $n\geq 1$ に対して

$$(H\circ M^{T_{n+1}})^{T_n}=I_{[\![0,T_n]\!]}\circ(H\circ M^{T_{n+1}})=H\circ\left(I_{[\![0,T_n]\!]}\circ M^{T_{n+1}}\right)=H\circ M^{T_n}.$$

従って、各 $[\![0,T_n]\!]$ 上で $X=H\circ M^{T_n}$ をみたす確率過程 X が一意に定まる筈である。X は明らかに $\mathbf{H}^{2,loc}$ に属している。これを "H の M による確率積分" と呼び、$H\circ M$ で表す。

此処で、特に $M\in\mathbf{H}^2\cap\mathrm{IV}$ である場合に、ω 毎に Stieltjes 積分して得られる確率過程 $(S)\int_0^t H_s\,dM_s$ と確率積分 $\int_0^t H_s\,dM_s$ の関係について言及しておくべきであろう。

補題2 $A\in\mathrm{IV}$ のとき、任意の有界な $H\in\underline{\mathcal{P}}$ に対して

$$\left(\int_0^t H_s\,dA_s\right)^{\mathcal{P}}=\int_0^t H_s\,dA_s^{\mathcal{P}} \quad . \tag{21}$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(証明) $V_t \equiv \int_0^t H_s \, dA_s^{\mathcal{P}}$ とすると，$V \in \underline{\underline{\mathcal{P}}} \cap \mathbb{IV}$。しかも任意の $X \in \mathfrak{X}$ に対して

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_{\mathbb{R}_+}^{\mathcal{P}} X_s H_s \, dA_s\right] &= E\left[\int_{\mathbb{R}_+}^{\mathcal{P}} (X_s H_s) \, dA_s\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}_+} X_s H_s \, dA_s^{\mathcal{P}}\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}_+} X_s \, dV_s\right]
\end{aligned}
$$

が成立するため $V_t = \left(\int_0^t H_s \, dA_s\right)^{\mathcal{P}}$ となる。□

確率積分を定義する際には，通常被積分確率過程に対し $\mathcal{P}$－可測性を要請するが，性質(21)はその妥当性を示唆している。

<u>補題3</u> $M \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{IV}$ と $H \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ に対し，$\int_{\mathbb{R}_+} |H_s| \, |dM_s| \in L^1$ を仮定するとき，$\left\{(S)\int_0^t H_s \, dM_s\right\} \in \mathfrak{M}_u$ である。

(証明) §3の補題1によって，$M \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{IV}$ から $M^{\mathcal{P}} = 0$ がでる。そこで補題2と定理2.16を考慮すると

$$
\begin{aligned}
(S)\int_0^t H_s \, dM_s &= (S)\int_0^t H_s \, dM_s - \int_0^t H_s \, dM_s^{\mathcal{P}} \\
&= (S)\int_0^t H_s \, dM_s - \left((S)\int_0^t H_s \, dM_s\right)^{\mathcal{P}}
\end{aligned}
$$

は $\mathfrak{M}_u$ に属する。□

<u>定理2.33</u> $M \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbb{IV}$ のとき，任意の有界な $H \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ に対し

(22) $$(H \circ M)_t = (S)\int_0^t H_s \, dM_s \qquad (t \geq 0)$$

が成立する。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(証明) $M\in\mathbf{H}^2\cap IV$ ならば当然 $M\in\mathbf{H}^2_d$，従って任意の $N\in\mathbf{H}^2$ に対して

$$[M,N]_t=\sum_{s\leq t}\Delta M_s\Delta N_s \qquad (t\geq 0)$$

となる。他方，補題3から $(S)\int_0^t H_s dM_s$ は $\mathfrak{M}\cap IV$ に属すが，仮定により $M\in\mathbf{H}^2$ でHは有界だから，実は $\mathbf{H}^2$ にも属している。そこで，§3の補題2を適用すると

$$\begin{aligned}E[\{(S)\int_0^t H_s dM_s\}N_t] &= E[\sum_{s\leq t}H_s\Delta M_s\Delta N_s]\\ &= E[\int_0^t H_s\, d[M,N]_s]\\ &= E[(H\circ M)_t N_t]。\end{aligned}$$

従って(22)が成立する。 □

§13. local martingale に関する確率積分

確率過程 $H=(H_t,\mathcal{F}_t)$ が局所有界であるとは，$\mathcal{S}\ni T_n\uparrow\infty$ a.s が存在して各 $H^{T_n}I_{\{T_n>0\}}$ が有界となることを云う。解析学で用いる"局所有界"の概念とは異なる点に注意されたい。特に局所有界な $\mathcal{P}$－可測確率過程の全体を $\underline{\underline{\mathcal{P}}}^{loc}$ なる記号を用いて示した。

さて，$M\in\mathcal{L}$ とし，簡単のため $M_0=0$ を仮定する。任意の $H\in\underline{\underline{\mathcal{P}}}^{loc}$ に対し M に関する確率積分を定義するために，先ず定理2.22に従って

(23) $$M=N+A,\ ただし\ N_0=0,\ N\in\mathbf{H}^{\infty,loc},\ A\in IV^{loc}$$

と分解しておく。局所有界と云っても本質的には有界と変りないから，前節で述べた要領で

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(24) $$\int_0^t H_s\,dN_s + (S)\int_0^t H_s\,dA_s$$

が定義できる。只，形式上これは (23) の分解に依存する訳で，(24) が M に対して一意に定まるとは直ちには云い難い。そこで，もう一つの分解 $M = N' + A'$ ($N' \in \mathbf{H}^{\infty,loc}$, $A' \in \mathrm{IV}^{loc}$) を考えて見る。$N - N' = A' - A \in \mathbf{H}^{\infty,loc} \cap \mathrm{IV}^{loc}$ だから，定理 2.33 により

$$\left(H\circ(N-N')\right)_t = (S)\int_0^t H_s\,d(A'_s - A_s)$$

となる。すると

$$(H\circ N)_t + (S)\int_0^t H_s\,dA_s = (H\circ N')_t + (S)\int_0^t H_s\,dA'_s$$

がなりたち，結果として (24) が (23) の分解の如何に関らず，M と H により一意に定まる。そこで，これを $H\circ M$ とかき，local martingale M による H の確率積分という。

ところで $\mathbf{H}^2$ のときと同様に $\mathcal{L}$ においても直交性が考えられる。即ち，$M, N \in \mathcal{L}$ が $MN \in \mathcal{L}$ となるときに，M と N は直交すると定義すればよい。これを $M \perp N$ で表し

$$\mathcal{L}_d = \{ M \in \mathcal{L} \;;\; M \perp N \quad (\forall N \in \mathcal{L}_c) \}$$

とおく。

<u>定理 2.34</u> 任意の $M \in \mathcal{L}$ に対し，$M^c \in \mathcal{L}_c$ と $M^d \in \mathcal{L}_d$ が存在し

(25) $$M = M^c + M^d$$

と一意に分解できる。

(証明) 先ず，定理 2.22 によって $M \in \mathcal{L}$ を次のように分解する；

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$M = N + A, \quad N \in \mathbf{H}^{\infty, loc}, \quad A \in IV^{loc}$$
$$N = N^c + N^d, \quad N^c \in \mathbf{H}_c^{2, loc}, \quad N^d \in \mathbf{H}_d^{2, loc}$$

§10の補題2から，$\mathcal{L} \cap IV^{loc} \subset \mathcal{L}_d$。従って $A \in \mathcal{L}_d$ となる。このとき，$M^c = N^c$，$M^d = N^d + A$ とおけば問題の分解が得られる。分解の一意性は

$$M = M_1 + N_1 = M_2 + N_2 \quad (M_1, M_2 \in \mathcal{L}_c, \quad N_1, N_2 \in \mathcal{L}_d)$$

と仮定するとき，$M_2 - M_1 = N_1 - N_2 \in \mathcal{L}_c \cap \mathcal{L}_d$ となり，当然 $M_1 = M_2$，$N_1 = N_2$ であることから分る。 □

$M^c \in \mathcal{L}_c \subset \mathbf{H}^{2, loc}$ に注意すれば，$M \in \mathcal{L}$ に対しても

(26) $$[M, M]_t = \langle M^c, M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2 ,$$

が定義できる。この場合も $[M, M]_{0-} = 0$ とおく。さらに $M, N \in \mathcal{L}$ に対して

$$[M, N] = \frac{1}{4} \left([M+N, M+N] - [M-N, M-N] \right)$$

とおく。後で理由を述べるが，実は $MN - [M, N] \in \mathcal{L}$ がなりたつ。また $M \in \mathcal{L}$ に関する確率積分に対しても，定理2.32と同様に $[\ ,\ ]$ を用いた特徴づけが可能である。

<u>定理 2.35</u> $M \in \mathcal{L}$，$H \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}^{loc}$ とする。このとき，任意の $Z \in \mathcal{L}$ に対し関係式

(27) $$[L, Z]_t = \int_0^t H_s \, d[M, Z]_s \qquad (t \geq 0)$$

をみたす $L \in \mathcal{L}$ が一意に存在して，$L = H \circ M$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(証明) 簡単のため $M_0 = Z_0 = 0$ を仮定しておく。最初に M 及び Z を定理2.22に従って次のように分解する：

$$M = N + A, \quad Z = U + V \quad (N, U \in H^{\infty, loc}, \ A, V \in IV^{loc}).$$

すると $\mathcal{S} \ni T_n \uparrow \infty$ が選びとれて、$N^{T_n}, U^{T_n} \in H^{\infty}$、$A^{T_n}, V^{T_n} \in IV$、$H^{T_n}$ は有界となる。そこで、定理2.32を適用して

$$\begin{aligned}
[H\circ M, Z]_{t\wedge T_n} &= [H\circ N^{T_n}, U^{T_n}]_t + [H\circ N^{T_n}, V^{T_n}]_t + [H\circ A^{T_n}, Z^{T_n}]_t \\
&= \int_0^{t\wedge T_n} H_s \, d[N, U]_s + \sum_{s\le t} H_s \Delta N_s^{T_n} \Delta V_s^{T_n} + \sum_{s \le t} H_s \Delta A_s^{T_n} \Delta Z_s^{T_n} \\
&= \int_0^{t\wedge T_n} H_s \, d[N, U]_s + \sum_{s \le t\wedge T_n} H_s (\Delta N_s \Delta V_s + \Delta A_s \Delta Z_s) \\
&= \int_0^{t\wedge T_n} H_s \, d[M, Z]_s \ 。
\end{aligned}$$

依って $n \to \infty$ とすれば、確率積分 $H\circ M$ が (27) をみたすことが分る。しかも、L の一意性は明らかに成立するから、$L = H\circ M$ である。□

次に $\mathcal{V} = \{ A = (A_t, \mathcal{F}_t) ; \int_0^t |dA_s| < \infty \ (\forall t \ge 0) \}$ とおく。当然 $IV^{loc} \subset \mathcal{V}$ である。Y_0 を $\mathcal{F}_0$-可測な r.v. として

(28) $$Y_t = Y_0 + M_t + A_t \qquad (M \in \mathcal{L}, \ A \in \mathcal{V}, \ M_0 = A_0 = 0)$$

と表せる確率過程 Y を semi-martingale と云う。semi-martingale に対するこの形の定義は C. Doléans-Dade — P.A. Meyer [23] で与えられた。一般に、Y に対する (28) の分解は必ずしも一意ではない。にも関らず、結果として

$$H_0 Y_0 + \int_0^t H_s \, dM_s + (S)\int_0^t H_s \, dA_s \qquad (H \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}^{loc})$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

がHとYにより一意に定まる。これを $(H\circ Y)_t$ 或いは $\int_0^t H_s dY_s$ とかき"semi-martingale Y に関するHの確率積分という。明らかに $H\circ Y$ もsemi-martingaleである。ところで(28)の分解が一意とは限らぬことを述べたが，実はMのcontinuous part M^c については，その分解の如何に関せずYに対応して一意に定まるのである。実際に，他の分解 $Y=Y_0+M'+A'$ ($M'\in\mathcal{L}$, $A'\in\mathcal{V}$, $M'_0=A'_0=0$) を考えると，$M-M'=A'-A\in\mathcal{L}\cap IV^{loc}$。従って，$0=(M-M')^c=M^c-(M')^c$ となる。一般に，M^c を Y^c で表す。するとYに対しても(26)と同様に増加過程

$$(29)\qquad [Y,Y]_t\equiv\langle Y^c,Y^c\rangle_t+\sum_{s\le t}\Delta Y_s^2$$

が定義できる。

なお，n個のsemi-martingales $Y^1, Y^2, \ldots, Y^n$ から成る組 $Y=(Y^1,Y^2,\ldots,Y^n)$ をn次元のsemi-martingaleという。

§14. Itoの公式の一般化

gをR上の実数値連続関数とするとき，$Y_t=\int_0^t g(s)ds$ によって定義される確率過程Yは $\mathcal{V}_c$ に属しているので，当然semi-martingaleである。この場合，通常の微積分の公式により，R上の任意の C^1-関数fに対して

$$(30)\qquad f(Y_t)=f(Y_0)+\int_0^t f'(Y_s)dY_s$$

なる展開式が得られる。併し乍ら，もっと一般のsemi-martingale Y，例えば $Y_t=B_t$ $(t\ge 0)$ の場合でさえ最早(30)は望むべくもない。これに対してK.Ito[39]は，特にfが C^2-関数ならば，次の展開式が成立することを主張した：

$$(31)\qquad f(B_t)=f(B_0)+\int_0^t f'(B_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

これが今日“Itoの公式”の名で知られるもので，確率積分の理論における最も強力な公式であり，Markov過程を研究する上でも極めて重要な役割を果している。その後 C. Doléans-Dade－P.A. Meyer [23] は，semi-martingale を基礎に置く観点から検討を加え，この公式の一般化を得るに至った。次に，それを述べよう。

<u>定理2.36</u>　$Y=(Y^1, Y^2, \dots, Y^n)$ を n 次元の semi-martingale とするとき，$\mathbb{R}^n$ 上の任意の C^2-関数 F に対して

$$(32)\qquad F(Y_t) = F(Y_0) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t D^i F(Y_{s-})\,dY_s^i + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n}\int_0^t D^i D^j F(Y_{s-})\,d\langle (Y^i)^c, (Y^j)^c\rangle_s$$
$$+ \sum_{0<s\le t}\Big\{ F(Y_s) - F(Y_{s-}) - \sum_{i=1}^{n} D^i F(Y_{s-})\,\Delta Y_s^i \Big\}$$

がなりたつ。ただし，右辺の和 $\sum_{0<s\le t}$ は概収束の意味とする。

(32) から $F(Y_t)$ もまた semi-martingale をなすことが分る。定理の証明は難かしくはないが，然し複雑であるため，4段階に分けて進めることにした。しかも本質的には，$n=1$ の場合を考察しておけば十分である。依って簡単のため，これを仮定しよう。つまり，$Y_t = Y_0 + M_t + A_t$　($M\in\mathcal{L}$, $A\in\mathcal{V}$, $M_0 = A_0 = 0$) とする。

(証明) <u>[1]　$M\in\mathcal{L}_c$, $A\in IV_c$ の場合</u>：　この設定の下で，証明すべき式(32)は

$$(33)\qquad F(Y_t) = F(Y_0) + \int_0^t F'(Y_s)\,dM_s + \int_0^t F'(Y_s)\,dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(Y_s)\,d\langle M, M\rangle_s$$

となる。右辺の第1，第2，第3の積分をそれぞれ I_1, I_2, I_3 としよう。つまり，$F(Y_t) = F(Y_0) + I_1 + I_2 + I_3$ とおく。また，M と A の連続性が仮定されているため，必要なら stopping time を適当

に利用して，$\mathrm{Max}\{|Y_0|, M^*, \int_0^\infty |dA_s|\} \leq K$ をみたす定数 $K>0$ の存在を仮定できる。すると $Y^* \leq 3K$ である。一方で，

$$\sup_{|x|\leq 3K} \{ |F'(x)| + |F''(x)| \} < \infty ,$$

しかも Taylor の定理により次の形の展開式が得られる。

$$(34) \qquad F(b) = F(a) + (b-a)F'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 F''(a) + r(a,b) \qquad (a,b\in[-3K,3K])$$

ただし，$|r(a,b)| \leq \alpha(|b-a|)(b-a)^2$，$\alpha(t)$ $(t>0)$ は $\lim_{t\to 0}\alpha(t)=0$ をみたす非減少関数である。

そこで $\varepsilon>0$ に対し $T_n\in\mathcal{S}$ を順次 $T_0\equiv 0$，

$$T_i = t\wedge(T_{i-1}+\varepsilon)\wedge\inf\{ s>T_{i-1} ;\ |M_s - M_{T_{i-1}}| \vee |A_s - A_{T_{i-1}}| > \varepsilon \}$$

と定義すれば，

$$0\leq T_i - T_{i-1} \leq \varepsilon , \qquad \mathrm{Max}\{ |M_{T_i} - M_{T_{i-1}}|, |A_{T_i} - A_{T_{i-1}}| \} \leq \varepsilon$$

がなりたつ。また $T_{i-1}\leq u, v\leq T_i$ のとき

$$|Y_u - Y_v| \leq |M_u - M_{T_{i-1}}| + |M_v - M_{T_{i-1}}| + |A_u - A_{T_{i-1}}| + |A_v - A_{T_{i-1}}|$$

$$\leq 4\varepsilon \quad .$$

さらに (34) を用いて

$$F(Y_t) = F(Y_0) + \sum_i \{ F(Y_{T_i}) - F(Y_{T_{i-1}}) \}$$

$$= F(Y_0) + \sum_i F'(Y_{T_{i-1}})(Y_{T_i} - Y_{T_{i-1}}) + \frac{1}{2}\sum_i F''(Y_{T_{i-1}})(Y_{T_i} - Y_{T_{i-1}}) + \sum_i r(Y_{T_i}, Y_{T_{i-1}})$$

となる。右辺の $\sum_i$ を便宜上 S_1, S_2, R で表し、

$$S_{1,1} = \sum_i F'(Y_{T_{i-1}})(M_{T_i} - M_{T_{i-1}}) \ , \quad S_{1,2} = \sum_i F'(Y_{T_{i-1}})(A_{T_i} - A_{T_{i-1}})$$

とおく。勿論 $S_1 = S_{1,1} + S_{1,2}$ である。$S_{1,1}$ に関しては

$$E[(S_{1,1} - I_1)^2] = \sum_i E\Big[\int_{]\!]T_{i-1}, T_i]\!]} \{F'(Y_s) - F'(Y_{T_{i-1}})\}^2 d\langle M, M\rangle_s\Big]$$

$$\leq E\Big[\langle M, M\rangle_t \sup_i \sup_{T_{i-1} < s \leq T_i} \{F'(Y_s) - F'(Y_{T_{i-1}})\}^2\Big]$$

となり、T_i の定義と Lebesgue の収束定理によって、$\varepsilon \to 0$ のとき右辺は 0 に収束する。従って、$S_{1,1} \xrightarrow{L^2} I_1$ である。同様に

$$E[|S_{1,2} - I_2|] \leq E\Big[\sum_i \int_{]\!]T_{i-1}, T_i]\!]} |F'(Y_s) - F'(Y_{T_{i-1}})| \, |dA_s|\Big]$$

$$\leq E\Big[\Big(\int_0^t |dA_s|\Big) \sup_i \sup_{T_{i-1} < s \leq T_i} |F'(Y_s) - F'(Y_{T_{i-1}})|\Big]$$

から、$S_{1,2} \xrightarrow{L^1} I_2$ $(\varepsilon \to 0)$ がでる。従って $S_1 \xrightarrow{L^1} I_1 + I_2$ $(\varepsilon \to 0)$ である。

次に S_2 を処理するために

$$S_{2,1} = \sum_i F''(Y_{T_{i-1}})(A_{T_i} - A_{T_{i-1}})^2$$

$$S_{2,2} = 2\sum_i F''(Y_{T_{i-1}})(A_{T_i} - A_{T_{i-1}})(M_{T_i} - M_{T_{i-1}})$$

$$S_{2,3} = \sum_i F''(Y_{T_{i-1}})(M_{T_i} - M_{T_{i-1}})^2$$

とおけば、$S_2 = S_{2,1} + S_{2,2} + S_{2,3}$ である。$S_{2,1}, S_{2,2}$ が $\varepsilon \to 0$ のとき 0 に概収束するのは明らかなので、$S_{2,3}$ の収束性を調べよう。Burkholder の不等式を用いれば、

$$E[\{S_{2,3} - \sum_i F''(Y_{T_{i-1}}) \langle M,M\rangle_{T_{i-1}}^{T_i}\}^2]$$

$$= \sum_i E[F''(Y_{T_{i-1}})^2 \{(M_{T_i} - M_{T_{i-1}})^2 - \langle M,M\rangle_{T_{i-1}}^{T_i}\}^2]$$

$$\leq C\, E[\sum_i (M_{T_i} - M_{T_{i-1}})^4] + C\, E[\sum_i (\langle M,M\rangle_{T_{i-1}}^{T_i})^2]$$

$$\leq C \|M_t\|_4^2\, E[\sup_i (M_{T_i} - M_{T_{i-1}})^4]^{1/2} + C\, E[\langle M,M\rangle_t \sup_i \langle M,M\rangle_{T_{i-1}}^{T_i}]$$

が得られる。依って T_i の定義により，右辺の第1項及び第2項ともに $\varepsilon \to 0$ のとき 0 に収束する。即ち，S_2 は I_3 に確率収束している。

さて残りの R に関しては，$|Y_{T_i} - Y_{T_{i-1}}| \leq 4\varepsilon$ だから

$$R \leq \sum_i \alpha(|Y_{T_i} - Y_{T_{i-1}}|)(Y_{T_i} - Y_{T_{i-1}})^2$$

$$\leq 2\alpha(4\varepsilon) \sum_i \{(M_{T_i} - M_{T_{i-1}})^2 + (A_{T_i} - A_{T_{i-1}})^2\}。$$

これにより R が 0 に確率収束することが分る。ゆえに (33) が成立する。

[2] $M \in \mathcal{L}_c$，A の見本関数が区間 $[0,t]$ 上で高々 n 個の不連続点しか持たない場合： A に対して定理 2.7 を用いれば，$T_0 = 0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_n \leq T_{n+1} = t$，$\{\Delta A \neq 0\} \cap [\![0,t]\!] \subset \bigcup_{i=0}^{n+1} [\![T_i]\!]$ をみたす $T_i \in \mathcal{S}$ が存在し，各 $[\![T_i, T_{i+1}[\![$ 上では [1] の場合に帰着される。そこで，通常の方法により $A = A^c + A^d$ ($A^c \in \mathcal{V}_c$，A^d は purely discontinuous) と分解しておき，先ず semi-martingale $Y_{(t \vee T_i) \wedge T_{i+1}}$ に対し (33) を適用すると

$$F(Y_{T_{i+1}-}) - F(Y_{T_i}) = \int_{]\!]T_i, T_{i+1}[\![} F'(Y_{s-})\, d(M_s + A_s^c) + \frac{1}{2}\int_{]\!]T_i, T_{i+1}[\![} F''(Y_{s-})\, d\langle M,M\rangle_s。$$

さらに $\Delta A_{T_{i+1}}^d = \Delta Y_{T_{i+1}}$ と $\langle M,M\rangle$ の連続性に注意すれば，

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$F(Y_{T_{i+1}}) - F(Y_{T_i}) = \int_{]\!]T_i, T_{i+1}]\!]} F'(Y_{s-})\,dY_s + \frac{1}{2}\int_{]\!]T_i, T_{i+1}]\!]} F''(Y_{s-})\,d\langle M, M\rangle_s$$

$$+ \left\{ F(Y_{T_{i+1}}) - F(Y_{T_{i+1}-}) - F'(Y_{T_{i+1}-})\,\Delta Y_{T_{i+1}} \right\}.$$

従って

$$F(Y_t) - F(Y_0) = \sum_i \left\{ F(Y_{T_{i+1}}) - F(Y_{T_i}) \right\}$$

$$= \int_0^t F'(Y_{s-})\,dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(Y_{s-})\,d\langle M, M\rangle_s$$

$$+ \sum_i \left\{ F(Y_{T_{i+1}}) - F(Y_{T_{i+1}-}) - F'(Y_{T_{i+1}-})\,\Delta Y_{T_{i+1}} \right\}$$

が成立する。

〔3〕 第3の段階として，確率過程 Y, Z が或る $T \in \mathcal{S}$ に対して $Y = Y^T$，$Z = Z^T$ しかも $[\![0, T[\![$ 上で $Y = Z$ なるとき，Y と Z は同時に (32) をみたすことを証明しよう。Y が (32) をみたすとする。$Z_t = Y_t + (Z_T - Y_T)\,I_{\{T \le t\}}$ であるから，Z も semi-martingale をなし，$Z^c = Y^c$ となる。同様に，$F(Z_t) = F(Y_t) + \{F(Z_T) - F(Y_T)\}\,I_{\{T \le t\}}$ だから，($t \le T$ に対して) (32) を用いて

$$F(Z_t) = \left\{ F(Y_0) + \int_0^t F'(Y_{s-})\,dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(Y_{s-})\,d\langle Y^c, Y^c\rangle_s + \sum_{0<s\le t} \left(\Delta F(Y_s) - F'(Y_{s-})\,\Delta Y_s \right) \right\}$$

$$+ \left\{ F(Z_T) - F(Y_T) \right\} I_{\{T \le t\}}$$

$$= F(Y_0) + \int_0^t F'(Z_{s-})\,dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(Z_{s-})\,d\langle Z^c, Z^c\rangle_s - F'(Z_{T-})(Z_T - Y_T)\,I_{\{T\le t\}}$$

$$+ \sum_{0<s\le t} \left\{ F(Y_s) - F(Z_{s-}) - F'(Z_{s-})(Y_s - Z_{s-}) \right\} + \left\{ F(Z_T) - F(Y_T) \right\} I_{\{T \le t\}}.$$

ここで，$t < T$ と $t = T$ の場合に分けて上式を眺めると，Z に対する (32) 式が難なく得られよう。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

[4] 一般の場合： $Y = Y_0 + M + A$ ($M \in \mathcal{L}, A \in \mathcal{V}, M_0 = A_0 = 0$) とし，各 $n \geq 1$ に対し

$$T_n = \inf\left\{ t \,;\, \int_0^t |dA_s| \geq n \right\}$$

とおく。すると，$\mathcal{S} \ni T_n \uparrow \infty$ a.s，$\int_0^{T_n-} |dA_s| \leq n$ がなりたつ。そこで，A の代りに

$$A'_t \equiv A_t I_{\{t < T_n\}} + A_{T_n-} I_{\{T_n \leq t\}}$$

を考えよう。$A' \in IV$ で，しかも $[\![0, T_n [\![$ 上で $A' = A$ となる。依って，定理2.22と[3]で述べた理由により，予め $Y_0 \in L^\infty$，$M \in H^\infty$ 及び $\int_0^\infty |dA_s| \leq C$ を仮定できる。このとき Y は有界となる訳で，従って $\mathrm{supp}\,F$ が compact である場合を考えておけばよい。他方，定理2.30により $T_n \in \mathcal{S}$，$M^{(n)} \in \mathcal{M}(T_n)$ $(n \geq 1)$ が存在して

$$[\![T_j]\!] \cap [\![T_k]\!] = \phi \quad (j \neq k), \qquad M = M^c + \sum_n M^{(n)}$$

となる。$Z^{(n)} \equiv M^c + \sum_{i=1}^n M^{(i)}$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} \| Z^{(n)} - M \|_{H^2} = 0$ である。必要なら改めて部分列をとることにより，$\lim_{n\to\infty} \sup_t |Z_t^{(n)} - M_t| = 0$ a.s が成立していると仮定してよい。A に対しても同様に，$S_n \in \mathcal{S}$ が存在し，$\{\Delta A \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![S_n]\!]$，$[\![S_i]\!] \cap [\![S_j]\!] = \phi$ $(i \neq j)$ となり，

$$A_t^{(n)} = A_t^c + \sum_{i=1}^n \Delta A_{S_i} I_{\{S_i \leq t\}}$$

とおけば，$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_{\mathbb{R}_+} |d(A_s^{(n)} - A_s)| \right] = 0$ 及び $\sup_t |A_t^{(n)} - A_t| \xrightarrow{a.s} 0$ の成立を仮定できる。このとき $Y^{(n)} = Y_0 + Z^{(n)} + A^{(n)}$ とおいて，これに[2]の結果を適用するとよい。任意の $n \geq 1$ に対して，$(Y^{(n)})^c = Y^c$ なることに注意すれば

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$(35)\qquad F(Y_t^{(n)}) = F(Y_0) + \int_0^t F'(Y_{s-}^{(n)})\,dY_s^{(n)} + \frac{1}{2}\int_0^t F''(Y_{s-}^{(n)})\,d\langle Y^c, Y^c\rangle_s$$
$$+ \sum_{0<s\leq t}\{F(Y_s^{(n)}) - F(Y_{s-}^{(n)}) - F'(Y_{s-}^{(n)})\Delta Y_s^{(n)}\}\text{。}$$

$n \longrightarrow \infty$ のとき, $\sup_t |Y_t^{(n)} - Y_t| \longrightarrow 0$ a.s. だから

$$\lim_{n\to\infty}\sup_t\{|F(Y_t^{(n)}) - F(Y_t)| + |F(Y_{t-}^{(n)}) - F(Y_{t-})|\} = 0 \quad \text{a.s}\text{。}$$

すると,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_t\left|\int_0^t F''(Y_{s-}^{(n)})\,d\langle Y^c, Y^c\rangle_s - \int_0^t F''(Y_{s-})\,d\langle Y^c, Y^c\rangle_s\right| = 0 \quad \text{a.s}$$

さらに supp F が Compact だから, 不等式

$$\left|F(Y_s^{(n)}) - F(Y_{s-}^{(n)}) - F'(Y_{s-}^{(n)})\Delta Y_s^{(n)}\right| \leq C\,\Delta Y_s^2$$

をみたす定数 $C>0$ が存在し, それに加えて $\sum_s \Delta Y_s^2 < \infty$ であるから

$$\sum_{0<s\leq t}\{F(Y_s^{(n)}) - F(Y_{s-}^{(n)}) - F'(Y_{s-}^{(n)})\Delta Y_s^{(n)}\} \xrightarrow{\text{a.s}} \sum_{0<s\leq t}\{F(Y_s) - F(Y_{s-}) - F'(Y_{s-})\Delta Y_s\}$$

がなりたつ。次に (35) の右辺第2項を処理するために

$$\int_0^t F'(Y_{s-}^{(n)})\,dY_s^{(n)} = \int_0^t F'(Y_{s-}^{(n)})\,dZ_s^{(n)} + \int_0^t F'(Y_{s-}^{(n)})\,dA_s^{(n)}$$
$$= \left\{\int_0^t F'(Y_{s-})\,dM_s - \int_0^t [F'(Y_{s-}) - F'(Y_{s-}^{(n)})]\,dZ_s^{(n)} + \int_0^t F'(Y_{s-})\,d(Z_s^{(n)} - M_s)\right\}$$
$$+ \left\{\int_0^t F'(Y_{s-})\,dA_s - \int_0^t [F'(Y_{s-}) - F'(Y_{s-}^{(n)})]\,dA_s^{(n)} + \int_0^t F'(Y_{s-})\,d(A_s^{(n)} - A_s)\right\}$$

と変形しておき,

$$E\left[\left\{\int_0^t [F'(Y_{s-})-F'(Y_{s-}^{(n)})]\, dZ_s^{(n)}\right\}^2\right] \leq E\left[\int_0^t \{F'(Y_{s-})-F'(Y_{s-}^{(n)})\}^2 d\langle M,M\rangle_s\right]$$

$$E\left[\left\{\int_0^t F'(Y_{s-})\, d(Z_s^{(n)}-M_s)\right\}^2\right] = E\left[\int_0^t F'(Y_{s-})^2 d\langle Z^{(n)}-M, Z^{(n)}-M\rangle_s\right]$$

が成立することに注意すれば

$$\int_0^t F'(Y_{s-}^{(n)})\, dZ_s^{(n)} \xrightarrow{L^2} \int_0^t F'(Y_{s-})\, dM_s \qquad (n\to\infty)$$

が求まる。同様の考え方により

$$\int_0^t F'(Y_{s-}^{(n)})\, dA_s^{(n)} \xrightarrow{L^1} \int_0^t F'(Y_{s-})\, dA_s \qquad (n\to\infty)$$

となる。これによって，Y は (32) をみたし，定理の証明が完結する。 □

<u>系1</u>　任意の $M\in\mathcal{L}$ に対し，$M^2-[M,M]\in\mathcal{L}$ である。

(証明)　$Y\equiv M$，$F(x)\equiv x^2$ として (32) を用いると

$$M_t^2 = M_0^2 + 2\int_0^t M_{s-}\, dM_s + \langle M^c, M^c\rangle_t + \sum_{0<s\leq t}(M_s^2 - M_{s-}^2 - 2M_{s-}\Delta M_s)$$

$$= 2\int_0^t M_{s-}\, dM_s + \langle M^c, M^c\rangle_t + \sum_{0\leq s\leq t}\Delta M_s^2$$

i.e., $M_t^2 - [M,M]_t = 2\int_0^t M_{s-}\, dM_s$. □

<u>系2</u>　X, Y が semi-martingale のとき

(36)　$$X_t Y_t = \int_0^t X_{s-}\, dY_s + \int_0^t Y_{s-}\, dX_s + [X,Y]_t$$

が成立する。
特に $X\in\mathcal{V}$ であれば，

$$(37)\qquad X_t Y_t = \int_0^t X_{s-} dY_s + \int_0^t Y_s dX_s$$

となる。

（証明） (36) を示すには，$F(x,y) = xy$ とし，2次元の semi-martingale (X,Y) に対し (32) を適用するとよい。また，$X \in \mathcal{V}$ のときは，$[X,Y]_t = X_0 Y_0 + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \Delta Y_s$ に注意すれば，(36) から (37) が得られる。 □

§15. Exponential Martingale と Girsanov の問題

本節では，X を semi-martingale $(X_0 = 0)$ とし，"Doléans の方程式" の名で知られる次の確率積分方程式を考察しよう。

$$(38)\qquad Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s \quad .$$

特に $X_t = B_t$ なるときの解は，周知のように $Z_t = \exp(B_t - t/2)$ である。
この方程式は，理論的にも興味深い問題を派生すると同時に，応用上からも，例えば雑音を含んだ信号の検定の問題とも連結して重要な課題を提供している（H. Kunita [55] 参照）。

<u>定理2.37</u> 方程式 (38) の解 Z は一意に存在し

$$(39)\qquad Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\right) \prod_{0\leq s\leq t} (1+\Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s} \qquad (t \geq 0)$$

と表せる。ただし，右辺の無限乗積は，確率1で絶対収束する。

特に $X \in \mathcal{L}_c$ の場合は，既に B. Maisonneuve [60] がこの結果を得ているが，最終的な一般化は C. Doléans-Dade [20] によって達成された。彼女の証明方法は，その後 C. Yoeurp [95] の工夫によ

り改良され幾分見通しが良くなっている。

補題1　任意の単調増加で右連続な関数 $u(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ に対して

$$du(t)^n \geq n\,u(t-)^{n-1}\,du(t) \qquad (n \geq 1) \tag{40}$$

がなりたつ。ただし $u(0-)=0$ とする。

(証明)　定理2.36系2により

$$du(t)^n = u(t-)^{n-1}du(t) + u(t)\,du(t)^{n-1}$$

$$\geq u(t-)^{n-1}du(t) + u(t-)\,du(t)^{n-1}$$

が成立する。従って帰納法を用いて (40) が得られる。　□

補題2　任意の有界変動関数 $u(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ に対し，方程式

$$z(t) = 1 + \int_0^t z(s-)\,du(s)$$

の解は一意である。

(証明)　方程式 $v(t) = \int_0^t v(s-)\,du(s)$ が解 $v(t)$ を持てば，$v \equiv 0$ であることを示せばよい。　$w(t) = \int_0^t |du(s)|$，$C_t = \sup_{s \leq t} |v(s)|$ とおく。仮定により，いずれも有限で，$w(t)$ は右連続な単調増加関数である。このとき $0 \leq a \leq t$ に対して

$$|v(a)| \leq \int_0^a |v(s-)|\,dw(s) \leq C_t\,w(a)$$

がなりたち，補題1を用いれば

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$|v(a)| \leq C_t \int_0^a w(s-)\,dw(s) \leq \frac{C_t}{2} w(a)^2$$

が得られる。これを繰返して

$$|v(a)| \leq C_t \frac{w(a)^n}{n!} \qquad (n \geq 1)$$

となり，$n \to \infty$ のとき右辺は 0 に収束する。依って，$v(a) = 0$。 □

<u>補題 3</u>　semi-martingale X に対し，無限乗積

$$V_t \equiv \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

は確率 1 で絶対収束し，$V \in \mathcal{V}$ となる。

（証明）　$|\Delta X_s| \geq 1/2$，$0 < s \leq t$ をみたす s は高々有限個しかない。従って

$$V_t' \equiv \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| \geq 1/2\}}) \exp(-\Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| \geq 1/2\}})$$

は絶対収束し，$V' \in \mathcal{V}$ である。次に，

$$V_t'' = \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| < 1/2\}}) \exp(-\Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| < 1/2\}})$$

とおく。$\sum_{s\leq t} \Delta X_s^2 < \infty$ a.s だから

$$\log V_t'' = \sum_{0<s\leq t} \left\{ \log(1 + \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| < 1/2\}}) - \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| < 1/2\}} \right\}$$

は絶対収束し，従って $V_t'' = e^{\log V_t''}$ も絶対収束する。即ち，$V'' \in \mathcal{V}$。
このとき，当然 $V = V_t' V_t'' \in \mathcal{V}$ である。 □

<u>定理 2.37 の証明</u>：　先ず一意性の問題を処理する。Doléans の

方程式 (38) の解を Z とし、$K_t = \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t - X_t$，$Y_t = Z_t e^{K_t}$ とおく。さらに $F(x,y) = ye^x$ とおけば，$Y_t = F(K_t, Z_t)$ となり，これに定理 2.36 を適用して

$$(41)\quad Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-}dK_s + \int_0^t e^{K_{s-}}dZ_s + \frac{1}{2}\left(\int_0^t Y_{s-}d\langle K^c, K^c\rangle_s + 2\int_0^t e^{K_{s-}}d\langle K^c, Z^c\rangle_s\right)$$
$$+ \sum_{0<s\le t}\left(\Delta Y_s - Y_{s-}\Delta K_s - e^{K_{s-}}\Delta Z_s\right)$$

を得る。$K^c = -X^c$，$Z_t^c = \int_0^t Z_{s-}dX_s^c$，$\Delta K_s = -\Delta X_s$，$\Delta Z_s = Z_{s-}\Delta X_s$ 及び

$$\int_0^t e^{K_{s-}}dZ_s = \int_0^t Y_{s-}dX_s\ ,\quad \int_0^t e^{K_{s-}}d\langle K^c, Z^c\rangle_s = -\int_0^t Y_{s-}d\langle X^c, X^c\rangle_s$$
$$\int_0^t Y_{s-}dK_s = \frac{1}{2}\int_0^t Y_{s-}d\langle X^c, X^c\rangle_s - \int_0^t Y_{s-}dX_s$$

であることに注意して (41) を整頓すると

$$Y_t = 1 + \sum_{0<s\le t}\Delta Y_s = 1 + \sum_{0<s\le t} Y_{s-}\left\{e^{-\Delta X_s}(1+\Delta X_s) - 1\right\}$$

となる。ところで $A_t \equiv \sum_{0<s\le t}\left\{e^{-\Delta X_s}(1+\Delta X_s) - 1\right\}$ は，purely discontinuous で，補題 3 により $\mathcal{V}$ に属し，関係式

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-}dA_s$$

をみたすことになる。すると補題 2 によって，この方程式の解は一意となり，従って (38) の解も一意である。

次に存在性の証明に移ろう。K_t，V_t，$F(x,y)$ を前のように定め $Z_t = F(-K_t, V_t)$ とおく。このとき定理 2.36 から

$$Z_t = 1 - \int_0^t Z_{s-}dK_s + \int_0^t e^{-K_{s-}}dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}d\langle K^c, K^c\rangle_s + \sum_{0<s\le t}\left(\Delta Z_s + Z_{s-}\Delta K_s - e^{-K_{s-}}\Delta V_s\right)$$

となる。$K^c = -X^c$，$\Delta K = -\Delta X$，$Z_s = Z_{s-}(1+\Delta X_s)$，$\int_0^t e^{-K_{s-}}dV_s = \sum_{0<s\le t} e^{-K_{s-}}\Delta V_s$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$\int_0^t Z_{s-}dK_s = \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-}d\langle X^c, X^c\rangle_s - \int_0^t Z_{s-}dX_s$ を上式に代入すれば，$Z = F(-K, V)$ が方程式(38)の解であることが容易に検証できる。 □

特に $X \in \mathcal{L}$ とするとき，Doléans の方程式の解 Z は当然 $\mathcal{L}$ に属している。併し乍ら，必ずしも $Z \in \mathfrak{M}$ とは限らない。そこで，如何なる条件の下で $Z \in \mathfrak{M}$ となるか？ という問題が生じてくる。これを Girsanov の問題という。因に $Z \geq 0$ のときは，" $E[Z_t] = 1$ $(\forall t > 0)$ " がその必要十分条件となるが，然し，この条件の検証は一般に困難である。此処では，さらに $X \in \mathcal{L}_c$ を仮定して Girsanov の問題に対する一つの判定条件を与えよう。 a を任意の実数とし

$$Z_t^{(a)} = \exp\left(aX_t - \frac{a^2}{2}\langle X, X\rangle_t\right) \quad (t \geq 0)$$

とおく。$Z^{(a)}$ は明らかに aX に対応する Doléans の方程式の解に他ならない。従って，$Z = Z^{(1)}$ である。一般に $Z^{(a)}$ は，非負の local martingale だから，$E[Z_t^{(a)}] \leq 1$ が成立している。先ず具体例を述べよう。それによって $Z^{(a)}$ が持つ妙な性格について注意を喚起しておきたい。

例 2.8 原点から出発する1次元 Brown 運動 B_t に対して

$$T = \inf\{t ; B_t \geq 1\}$$

を定義し，$X = B^T$ とおく。勿論 $\mathcal{S} \ni T < \infty$，$X \in \mathfrak{M}_c$ である。このとき $\langle X, X\rangle_t = t \wedge T$，$X_t \leq 1$ だから $Z_t \leq e$ i.e. $Z \in H^\infty$。然るに $Z_\infty^{(-1)} \leq e^{-1}$ だから $Z^{(-1)} \notin \mathfrak{M}_u$。一般に，時間径数が $[0,\infty]$ である martingale は，適当な時間変更により $[0,1]$ を時間径数の区間とする martingale に変換できるので，上の事実は，$Z \in \mathfrak{M}$ から必ずしも $Z^{(-1)} \in \mathfrak{M}$ がでないことをも示唆している。

ところで，A.A. Novikov [74] は，Girsanov の問題に対し次の判定条件を与えた：

$$(\forall t \geq 0) \quad \exp\left(\tfrac{1}{2}\langle X,X\rangle_t\right) \in L^1 \Longrightarrow Z \in \mathfrak{M} \quad .$$

但し乍ら，これは同時に $Z^{(-1)} \in \mathfrak{M}$ をも意味しており，$Z \in \mathfrak{M}$ であるための十分条件としては，必ずしも適切とは云い難い。

<u>定理 2.38 ([49])</u>　$\exp\left(\frac{1}{2}X_t\right)$ が submartingale をなすとき，$Z \in \mathfrak{M}$ である。

（証明）　$0<\delta<1$ とし，$r=(1+2\delta)^2/(1+4\delta)$ とおく。すると，$r>1$ である。さらに $p=1+4\delta$，$q=p/(p-1)=(1+4\delta)/(4\delta)$ とおくと $(r-\sqrt{r/p})\,q=1/2+\delta$ となる。そこで $\mathcal{S} \ni T_n \uparrow \infty$ を $Z^{T_n} \in \mathfrak{M}$ となるように定め，Hölder の不等式を用いれば

$$\begin{aligned}
E[\,Z^r_{t\wedge T_n}\,] &= E\left[\,\exp\left(\sqrt{\tfrac{r}{p}}\,X_{t\wedge T_n} - \tfrac{r}{2}\langle X,X\rangle_{t\wedge T_n}\right)\exp\left\{\left(r-\sqrt{\tfrac{r}{p}}\right)X_{t\wedge T_n}\right\}\right] \\
&\leq E\left[\,Z^{(\sqrt{pr})}_{t\wedge T_n}\,\right]^{1/p} E\left[\,\exp\left\{\left(\tfrac{1}{2}+\delta\right)X_{t\wedge T_n}\right\}\right]^{1/q} \\
&\leq E\left[\,\exp\left\{\left(\tfrac{1}{2}+\delta\right)X_{t\wedge T_n}\right\}\right]^{1/q}
\end{aligned}$$

が得られる。従って，各 t に対し $\sup_n E[\exp\{(1/2+\delta)X_{t\wedge T_n}\}]<\infty$ を仮定するとき，$\{Z_{t\wedge T_n}\}_{n=1,2,\ldots}$ は一様可積分となり $Z \in \mathfrak{M}$ がでる。
次に，$0<a<1$，$0<\delta<(1/a-1)/2$ とし，$p'=1/\{(1+2\delta)a\}$ とおけば $p'>1$ $(1/2+\delta)a<1/2$ で，しかも $\exp(X_t/2)$ が submartingale だから

$$\begin{aligned}
\sup_n E\left[\,\exp\left\{\left(\tfrac{1}{2}+\delta\right)(aX_{t\wedge T_n})\right\}\right] &\leq \sup_n E\left[\,\exp\left(\tfrac{1}{2}X_{t\wedge T_n}\right)\right]^{1/p'} \\
&\leq E\left[\,\exp\left(\tfrac{1}{2}X_t\right)\right]^{1/p'} < \infty
\end{aligned}$$

依って $Z^{(a)} \in \mathcal{M}$ となる。さらに

$$Z_t^{(a)} = Z_t^{a^2} \exp\{a(1-a)X_t\}$$

に注意して Hölder の不等式を適用すると

$$1 = E[Z_t^{(a)}] \leq E[Z_t]^{a^2} E[\exp(\frac{a}{1+a} X_t)]^{1-a^2}$$

$$\leq E[Z_t]^{a^2} E[\exp(\frac{1}{2} X_t)]^{2a(1-a)}$$

が成立する。ここで $a \uparrow 1$ とすると $1 \leq E[Z_t]$ が求まる。ゆえに $Z \in \mathcal{M}$ である。 □

この結果を Novikov の判定条件と比較してみよう。各 t に対し

$$\exp(\frac{1}{2}X_t) = Z_t^{1/2} \exp(\frac{1}{4}\langle X,X\rangle_t)$$

がなりたつから Schwarz の不等式を用いて

$$E[\exp(\frac{1}{2}X_t)] \leq E[Z_t]^{1/2} E[\exp(\frac{1}{2}\langle X,X\rangle_t)]^{1/2} \leq E[\exp(\frac{1}{2}\langle X,X\rangle_t)]^{1/2}$$

が得られる。然し、この逆は成立しない。

例 2.9　例 2.5 のように、$\Omega' =]0,\infty[$, $S(\omega') = \omega'$ $(\omega' \in \Omega')$, $P'(d\omega') = e^{-\omega'}d\omega'$, $\mathcal{F}'_t = \overline{\mathcal{B}(S\wedge t)}$, $\mathcal{F}' = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}'_t$ とおけば、S は $(\mathcal{F}'_t)$ に関する stopping time である。次に、1 次元 Brown 運動 B_t $(B_0 = 0)$ が定義されている確率系 $(\Omega'', \mathcal{F}'', P''; (\mathcal{F}''_t))$ を用意し、これら 2 つの確率系の直積 $(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t))$ を考える。S は $(\mathcal{F}_t)$ に関しても stopping time であり、$X \equiv \sqrt{2}B^S$ は $(\mathcal{F}_t)$ と P に関して martingale となる。さらに $\exp(B_t/\sqrt{2} - t/4)$ も martingale をなすことに注意し Fubini の定理を用いると

$$E[\exp(\tfrac{1}{2}X_\infty)] = E[\exp(\tfrac{1}{\sqrt{2}}B_S)]$$

$$= \int_{\Omega'} e^{\frac{t}{4}} P'(dt) \int_{\Omega''} \exp\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}B_t - \tfrac{t}{4}\right) dP''$$

$$= \int_0 e^{-\frac{3t}{4}} dt < \infty$$

が得られる。然るに $\langle X,X\rangle_\infty = 2S$ だから $\exp(\langle X,X\rangle_\infty/2) \notin L^1$。これによって，$\exp(\langle X,X\rangle_t/2) \notin L^1$ ではあるが $\exp(X_t/2) \in L^1$ となる $X \in \mathcal{M}_c$ の存在が示されたことになる。

最後に，Novikov の判定条件及び定理2.38における定数½は最良であることを例証しておく。

<u>例2.10</u>　Novikov の考えに従って，$0<a<1$ に対し

$$T = \inf\{t;\ B_t \leq at-1\}$$

とおく。すると $\mathscr{S} \ni T<\infty$ で，しかも $X_t \equiv B_{t\wedge T}$ は $\mathcal{M}$ に属し $\langle X,X\rangle_t = t\wedge T$ である。定義により $B_T = aT-1$ だから，

$$X_\infty - \tfrac{1}{2}\langle X,X\rangle_\infty = (a-\tfrac{1}{2})T - 1 \ 。$$

依って　$a - 1/2 \leq a^2/2$　に注意すれば

$$E[Z_\infty] = e^{-1} E[\exp\{(a-\tfrac{1}{2})T\}] \leq e^{-1} E[\exp(\tfrac{1}{2}a^2T)]$$

が得られる。一方　$1 \geq E[Z_\infty^{(a)}] = E[\exp(\tfrac{1}{2}a^2T)]\,e^{-a}$　であるから

$$E[\exp(\tfrac{a^2}{2}\langle X,X\rangle_\infty)] = E[\exp(\tfrac{1}{2}a^2T)] \leq e^a \ 。$$

さらに　$E[Z_\infty] \leq e^{a-1} < 1$　となる。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

最近 Novikov [75] は，定理 2.38 を改良し，定数 $\delta > 0$ が存在して $\sup_{T \in \mathcal{S}} E[\exp(\frac{1}{2}X_T - \delta \langle X, X \rangle_T^{1/2})] < \infty$ をみたすとき，$Z \in \mathfrak{M}_u$ であることを証明している。
なお，Girsanov の問題については，次章の第5節で BMO と関連させて再度論ずることにした。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

第3章 測度の変換とmartingale

1961年F. John－L. Nirenberg [47]により導入されたBMO－関数が解析学における種々な問題と関連することは既に知られていた。その10年後に，C. Fefferman [29]によって，"BMO－関数の全体から成る空間がH^1の共役空間と見做せる"という結果が発表されるや，俄にBMOの概念が注目を浴びるようになり，現在では種々の観点から攻究の対象となっている。確率論の立場からもR.K. Getoor－M.J. Sharpe [34]がFeffermanの共役性を論じて類似を与え，その後のP.A. Meyer [66]，A. Garsia [31]等の研究を経て，martingaleの理論におけるBMOの重要性に対する認識は次第に定着しつつある。

本章の目的は，第1にBMO－martingaleに関する基本的な結果の紹介であり，第2は測度の変換に伴なって生じるGirsanov変換がH^p及びBMOの空間を保存するか否かの問題とBMOの関連を論ずること，そして第3がmartingaleに関する荷重ノルム不等式の問題に対してもBMOが本質的に関わるという事実を指摘することにある。

§1. BMO－martingaleの定義

確率論的設定で論ずる前に，John－NirenbergのBMO－関数について少し触れておく。関数$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$に対し，有限区間I上の平均値を$f_I$で示そう。つまり，区間Iの長さを$|I|$とすれば，$f_I = |I|^{-1}\int_I f(x)\,dx$である。さらに

$$(1) \qquad \|f\|_{BMO} = \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|\,dx$$

とおき，これが有限であるときに，fをBMO－関数という。BMOとはBounded Mean Oscillationの略語である。一般に，$\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_\infty$がなりたつため，任意の有界関数は当然BMOである。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

例 3.1 $f(x)=\log|x|$ とし，$0<a,\delta$ に対し $m=\delta^{-1}\int_a^{a+\delta}\log x\,dx$，$l=\delta^{-1}\int_a^{a+\delta}|\log x-m|\,dx$ とおく。すると

$$m=\frac{a}{\delta}\log\left(1+\frac{\delta}{a}\right)+\log(a+\delta)-1$$

となり，不等式 $0<x^{-1}\log(1+x)<1\quad(x>0)$ に注意すれば

$$l=\frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta}\left|\{\log x-\log(a+\delta)\}+\left\{1-\frac{a}{\delta}\log\left(1+\frac{\delta}{a}\right)\right\}\right|dx$$

$$\leqq\frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta}\{\log(a+\delta)-\log x\}\,dx+1-\frac{a}{\delta}\log\left(1+\frac{\delta}{a}\right)$$

$$\leqq 2\left\{1-\frac{a}{\delta}\log\left(1+\frac{\delta}{a}\right)\right\}\leqq 2\ .$$

従って，$f\in BMO$。然るに f は勿論有界ではない。

例 3.2 $f(x)=\mathrm{sgn}(x)\log|x|$ とおく。明らかに $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ である。f が奇関数であるため，区間 $I=[-\varepsilon,\varepsilon]\ (\varepsilon>0)$ に対しては $f_I=0$ となる。依って

$$\frac{1}{|I|}\int_I|f(x)-f_I|\,dx=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}|\log x|\,dx=1-\log\varepsilon\longrightarrow\infty\quad(\varepsilon\to 0)$$

即ち，$\|f\|_{BMO}=\infty$ である。

さて，BMO－関数の定義式 (1) を確率論の立場から眺めてみよう。先ず，$1\leqq p<\infty$ とし $M\in\mathfrak{M}_u$ に対して

$$\text{(2)}\qquad \|M\|_{BMO_p}=\sup_{T\in\mathcal{S}}\left\|E[\,|M_\infty-M_{T-}|^p\,|\,\mathcal{F}_T\,]^{1/p}\right\|_\infty$$

とおく。$p=1$ のときが (1) に対応している。

例 3.3 $\Omega=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上に実列 $(x_i)_{i=0,1,\dots,2^n}$ を $x_0=-\frac{1}{2}$，

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$x_i - x_{i-1} = 2^{-n}$ $(1 \leq i \leq 2^n)$ をみたすように定め，$\mathcal{F}_t$ を $0 \leq t < 1$ のとき $\{\phi, \Omega\}$，$n \leq t < n+1$ のとき $\sigma([x_{i-1}, x_i], 1 \leq i \leq 2^n)$ とおく。P は Ω 上の Lebesgue 測度とする。このとき，$f \in L^1(\Omega)$ には $M_t^f = E[f \mid \mathcal{F}_t]$ $(t \geq 0)$ と定義される $M^f \in \mathcal{M}_u$ が対応している。特に f が BMO-関数のとき，$\|M^f\|_{BMO_1} < \infty$ となることが難なく検証できる。然るに，この逆は成立しない。例えば，$f(x) = \mathrm{sgn}(x) \log|x|$ $(x \in \Omega)$ は BMO-関数ではないが，$\|M^f\|_{BMO_1} < \infty$ となる。実際に，例 3.1 で計算したように，区間 $I = [x_{k-1}, x_k]$ $(x_{k-1} \geq 0)$ 上で $M_n^f = 2^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \log x \, dx$ だから

$$\frac{1}{P(I)} \int_I |M_\infty^f - M_n^f| \, dP \leq 2$$

が成立する。また，$\mathcal{F}_{n-} = \mathcal{F}_{n-1}$，$M_{n-}^f = M_{n-1}^f$ であり，しかも I に対し，$P(I') = 2P(I)$，$I \subset I'$ をみたす $I' \in \mathcal{F}_{n-1}$ が存在することに注意すれば

$$\frac{1}{P(I)} \int_I |M_\infty^f - M_{n-1}^f| \, dP \leq \frac{2}{P(I')} \int_{I'} |M_\infty^f - M_{n-1}^f| \, dP \leq 4,$$

従って $\|M^f\|_{BMO_1} \leq 4$ となる。

次に，$BMO_p = \{M \in \mathcal{M}_u ; \|M\|_{BMO_p} < \infty\}$ とおく。$\|\cdot\|_{BMO_p}$ は BMO_p 上のノルムである。また，定義より明らかに $BMO_p \subset \mathbf{H}^p$ となる。さらに Hölder の不等式から $\|M\|_{BMO_1} \leq \|M\|_{BMO_p}$ がでる。然し見掛上は異なる此等のノルムも，結果として同値となる。それを示すには少し準備を要する。$T \in \mathcal{S}$ を固定し，$\Omega' = \{T < \infty\}$ (ただし $P(\Omega') > 0$ とする)，$\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{T+t}$，$dP' = I_{\Omega'} dP / P(\Omega')$ とおく。勿論 $\Omega' \in \mathcal{F}_T$ である。便宜上，$(\mathcal{F}'_t)$ と P' に関する $\mathbf{H}^2$ 空間を $\mathbf{H}^2(P')$ で示した。

<u>補題 1</u>　任意の $M' \in \mathbf{H}^2(P')$ に対し，$M'_t = M_{T+t}$ $(t \geq 0)$ をみたす $M \in \mathbf{H}^2$ が存在する。特に $M' \in \mathbf{H}_c^2(P')$ のとき，$M \in \mathbf{H}_c^2$，$M_T = 0$ である。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(証明) $M' \in \mathbf{H}^2(P')$ とすれば、Ω'^c 上で $M'_\infty = 0$ をみたす $M'_\infty \in L^2(P')$ が存在し、$M'_t = E'[M'_\infty \mid \mathcal{F}'_t]$ となる。此処で、$E'[\cdots \mid \mathcal{F}'_t]$ は P' に関する条件付き平均を表す。明らかに $M'_\infty \in L^2(P)$ でもあるから、$M_t \equiv E[M'_\infty \mid \mathcal{F}_t]$ は $\mathbf{H}^2$ に属している。しかも任意の $A \in \mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{T+t}$ に対し

$$\int_A M_{T+t}\, dP = P(\Omega') \int_A E'[M'_\infty \mid \mathcal{F}'_t]\, dP' = \int_A M'_t\, dP$$

がなりたつ。依って $M'_t = M_{T+t}$ である。
特に $M' \in \mathbf{H}^2_c(P')$ のときは、$M'_0 = 0$ だから $M_T = 0$ となる。すると $M_{t\wedge T} = E[M_T \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}] = 0$ $(t \geq 0)$, 即ち $M \in \mathbf{H}^2_c$。 □

<u>補題2</u> 任意の $M \in \mathbf{H}^2$ に対し、$M'_t \equiv M_{T+t} - M_{T-}$ $(t \geq 0)$ は $\mathbf{H}^2(P')$ に属す。さらに

$$M'^c_t = M^c_{T+t} - M^c_T, \qquad M'^d_t = M^d_{T+t} - M^d_{T-}$$
$$[M', M']_t = [M, M]_{T+t} - [M, M]_{T-}$$

が成立する。

(証明) $M' \in \mathbf{H}^2(P')$ であることは断るまでもあるまい。そこで $M'^d_t = M^d_{T+t} - M^d_{T-}$ の証明から始めよう。$L_t \equiv M^d_{T+t} - M^d_{T-}$ とし任意の $N' \in \mathbf{H}^2_c(P')$ に対して補題1を適用すると $N'_t = N_{T+t}$, $N_T = 0$ をみたす $N \in \mathbf{H}^2_c$ が存在する。一方 $(\mathcal{F}'_t)$ に関する任意の stopping time S に対して $S+T$ が $(\mathcal{F}_t)$ に関する stopping time であることに注意すれば

$$E'[L_S N'_S] = E'[(M^d_{T+t} - M^d_{T-}) N_{T+S}]$$

$$= P(\Omega')^{-1} E[M^d_{T+S} N_{T+S} - M^d_{T-} N_T ; \Omega']$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$= \mathcal{P}(\Omega')^{-1}\, \mathcal{E}[\, M_T^d N_T - M_{T-}^d N_T \,;\, \Omega' \,] = 0$$

がなりたち，$L \perp N'$ i.e., $L = (M')^d$ 。同様にして，$M_t'^c = M_{T+t}^c - M_T^c$ が得られる。また $(M_t'^c)^2 - \langle M^c, M^c\rangle_T^{T+t}$ が $\mathcal{P}'$ に関して martingale をなすことは，直接的な計算により検証できる。換言すると $\langle M'^c, M'^c\rangle_t = \langle M^c, M^c\rangle_T^{T+t}$ である。さらに $\sum_{0\leq s\leq t} (\Delta M'_s)^2 = \sum_{T\leq u\leq T+t} \Delta M_u^2$ だから

$$[M', M']_t = \Big(\langle M^c, M^c\rangle_{T+t} + \sum_{u\leq T+t} \Delta M_u^2 \Big) - \Big(\langle M^c, M^c\rangle_T + \sum_{u<T} \Delta M_u^2 \Big)$$

$$= [M, M]_{T+t} - [M, M]_{T-}$$

が成立する。 □

次に準備するのは D.W.Stroock [87] が得た結果で，$\Delta X_\infty = X_\infty - X_{\infty-} \neq 0$ なる場合にも成立する。

<u>補題 3</u>　確率過程 $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq \infty}$ の見本関数は右連続で第一種の不連続性しか持たないとし，さらに任意の $S, T \in \mathcal{S}$ $(S \leq T)$ に対し

(3) $$\mathcal{E}[\, |X_T - X_{S-}| \,|\, \mathcal{F}_S \,] \leq \mathcal{E}[\, U \,|\, \mathcal{F}_S \,]$$

をみたす $0 \leq U \in L^1$ が存在することを仮定する。このとき，任意の $\alpha, \beta > 0$ に対して不等式

(4) $$\beta\, \mathcal{P}(X^* \geq \alpha + \beta) \leq 2\, \mathcal{E}[\, U \,;\, X^* \geq \alpha \,]$$

がなりたつ。ただし，$X^* \equiv \sup_{0\leq t\leq\infty} |X_t|$ とする。

(証明)　$\alpha, \beta > 0$ に対し stopping times

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$S=\inf\{t\,;\,|X_t|\geq\alpha\},\quad T=\inf\{t\,;\,|X_t|\geq\alpha+\beta\}$$

を定義する。明らかに $S\leq T$ である。ただし $\Delta X_\infty=0$ と限らないため，例えば $S=\infty$ について2通りの解釈が生じ少々誤解を招く恐れがある。厳密に述べると，任意の $t\in[0,\infty]$ に対し $|X_t|<\alpha$ となる場合と，任意の $t\in[0,\infty[$ に対し $|X_t|<\alpha$ であるが $|X_\infty|\geq\alpha$ となる場合を考えねばならない。併し乍ら何れの場合も $\{|X_S|\geq\alpha\}\in\mathcal{F}_S$ となり，しかも $X^*>\alpha+\beta$ ならば，当然 $|X_{S-}|\leq\alpha$，$|X_S|\geq\alpha$，$|X_T|\geq\alpha+\beta$ をみたすため $|X_T-X_{S-}|\geq\beta$ が成立する。従って仮定 (3) により

$$\begin{aligned}P(X^*>\alpha+\beta)&\leq P(|X_S|\geq\alpha,\ |X_T-X_{S-}|\geq\beta)\\&\leq\frac{1}{\beta}E[\,|X_T-X_{S-}|\,;\,|X_S|\geq\alpha\,]\\&\leq\frac{1}{\beta}E[\,U\,;\,X^*\geq\alpha\,]\end{aligned}$$

が得られる。□

(3) から $X_\infty\in L^1$ がでるため，$M_t\equiv E[X_\infty\,|\,\mathcal{F}_t]$ は $\mathcal{M}_u$ に属す。特に $U=C$（定数）のときは，任意の $T\in\mathcal{S}$ に対し

$$|M_T-X_{T-}|\leq E[\,|X_\infty-X_{T-}|\,|\,\mathcal{F}_T\,]\leq C$$

がなりたつ。依って $|M_{T-}-X_{T-}|\leq C$ である。このとき

$$E[\,|M_\infty-M_{T-}|\,|\,\mathcal{F}_T\,]\leq E[\,|X_\infty-X_{T-}|\,|\,\mathcal{F}_T\,]+|M_{T-}-X_{T-}|\leq 2C$$

つまり $\|M\|_{BMO_1}\leq 2C$ となる。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

定理 3.1　任意の p $(1 \leq p < \infty)$ に対し，次の不等式をみたす定数 $C_p > 0$ が存在する：

$$\|M\|_{BMO_1} \leq \|M\|_{BMO_p} \leq C_p \|M\|_{BMO_1} \qquad (M \in \mathfrak{M}_u)$$

（証明）左側の不等式については既に言及してある。右側不等式の証明を考察する場合は，$\|M\|_{BMO_1} = 1$ を仮定できるので，任意の $S, T \in \mathcal{S}$ $(S \leq T)$ に対し

$$E[\,|M_T - M_{S-}|\,|\,\mathcal{F}_S\,] \leq E[\,|M_\infty - M_{S-}|\,|\,\mathcal{F}_S\,] \leq 1$$

がなりたつ。このとき $X \equiv M$，$U \equiv 1$，$\alpha \equiv 4(n-1)$，$\beta \equiv 4$ として式(4)を適用すると，$P(M^* \geq 4n) \leq 2^{-n}$ が得られる。一方で $0 < c < (\log 2)^2/16$ (<1) のとき，$\exp(cx) \leq 2^{\sqrt{c}\,x/4}$ $(x \geq 0)$ であるから，

$$\begin{aligned}
E[e^{cM^*}] &\leq E[2^{\frac{\sqrt{c}}{4}M^*}] \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{c}(n+1)} P\left(n \leq \frac{M^*}{4} < n+1\right) \\
&\leq 2^{\sqrt{c}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{c}\,n} P(M^* \geq 4n) \\
&\leq 2^{\sqrt{c}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(1-\sqrt{c})n} \equiv K < \infty
\end{aligned}$$

が成立する。この不等式から，同一の定数 K により

$$E[\exp(c \sup_t |M_{T+t} - M_{T-}|)\,|\,\mathcal{F}_T\,] \leq K \qquad (T \in \mathcal{S})$$

となることを導くには，補題の1及び2を適用して $\|M'\|_{BMO_1(P)} \leq \|M\|_{BMO_1}$ の成立に注意すればよい。このとき，任意の $1 \leq p < \infty$ に対し $E[\,|M_\infty - M_T|^p\,|\,\mathcal{F}_T\,] \leq C_p$，即ち $\|M\|_{BMO_p} \leq C_p$ が求まる。□

任意の $p \geq 1$ に対し $BMO_p = BMO_1$ を知り得たので，以後これを単に BMO と表し，$\|M\|_{BMO_2}$ を $\|M\|_{BMO}$ としよう。一般に，$M \in H^2$ のとき，$M^2 - [M,M] \in \mathfrak{M}_u$，$[M,M]_0 = M_0^2$ だから

$$\|M\|_{BMO}^2 = \sup_{T \in \mathcal{S}} E[\,[M,M]_\infty - [M,M]_{T-} \mid \mathcal{F}_T\,]$$

である。此処で，BMO に関する若干の注意を述べよう。

<u>注意 1</u>　f を $\mathbb{R}^2$ 上の Lipschitz 関数とし，$M, N \in BMO$ に対して

$$L_t = E[\, f(M_\infty, N_\infty) \mid \mathcal{F}_t\,] \qquad (t \geq 0)$$

とおく。勿論 $L \in \mathfrak{M}_u$ である。いま $X_t \equiv f(M_t, N_t)$ とすると，任意の $S, T \in \mathcal{S}$ $(S \leq T)$ に対して

$$E[\,|X_T - X_{S-}| \mid \mathcal{F}_S\,] \leq C\left\{ E[\,|M_T - M_{S-}| \mid \mathcal{F}_S\,] + E[\,|N_T - N_{S-}| \mid \mathcal{F}_S\,]\right\}$$

$$\leq C\left(\|M\|_{BMO_1} + \|N\|_{BMO_1} \right)$$

が成立し，従って $L \in BMO$ を得る。特に $E[M_\infty \wedge N_\infty \mid \mathcal{F}_t]$ 及び $E[M_\infty \vee N_\infty \mid \mathcal{F}_t]$ などが BMO となる。

<u>注意 2</u>　$\mathcal{O}$ー可測な増加過程 A が

$$\sup_{T \in \mathcal{S}} E[\,A_\infty - A_{T-} \mid \mathcal{F}_T\,] \leq C$$

をみたすとき，$M_t \equiv E[A_\infty \mid \mathcal{F}_t]$ $(t \geq 0)$ は BMO に属す。実際に $Y_t = M_t - A_{t-}$ とおけば，仮定により $0 \leq Y_{T-} \leq C$。しかも $M_\infty - M_{T-} = A_\infty - A_{T-} - Y_{T-}$ だから

$$E[\,|M_\infty - M_{T-}| \mid \mathcal{F}_T\,] \leq E[\,A_\infty - A_{T-} \mid \mathcal{F}_T\,] + Y_{T-} \leq 2C \quad \text{i.e., } \|M\|_{BMO_1} \leq 2C.$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

<u>注意3</u> 今度は $\mathcal{P}$－可測な増加過程 A に対し，

$$\sup_{T\in\mathcal{S}} E[A_\infty - A_T \mid \mathcal{F}_T] \leqq C$$

を仮定する。このとき，$M_t \equiv E[A_\infty \mid \mathcal{F}_t]$ $(t \geqq 0)$ が BMO に属すことを指摘しておく。注意2から $\Delta A \leqq C$ がなりたてば十分である。任意の $T\in\mathcal{S}^p$ に対し，ΔA_T は $\mathcal{F}_{T-}$－可測であり，また仮定によって $E[A_\infty - A_{T-} \mid \mathcal{F}_{T-}] \leqq C$ が成立する。そこで $\{\Delta A > C\}$ $\notin \mathcal{E}$ としよう。すると Section の定理により

$$\{T<\infty\} \subset \{\Delta A_T > C\},\quad P(T<\infty) > 0$$

をみたす $T\in\mathcal{S}^p$ が存在する。このとき $\{T<\infty\}$ 上で

$$E[A_\infty - A_{T-} \mid \mathcal{F}_T] \geqq \Delta A_T > C$$

となり，最初の仮定に矛盾してしまう。依って，$\Delta A \leqq C$ である。

<u>注意4</u> A を $\mathcal{O}$－可測な増加過程とし，$H\in\underline{\mathcal{P}}$ 及び $L\in\mathcal{L}$ に対し $|A_t L_t| \leqq 1$, $|H_t| \leqq A_{t-}$ $(t\geqq 0)$ を仮定するとき $\|H\circ L\|_{BMO} \leqq \sqrt{6}$ がなりたつ。これを検証するには，予め L, $L^2-[L,L]$, $H\circ L$ の何れもが $\mathcal{M}_u$ に属している場合を想定しておけば十分である。便宜上 $M = H\circ L$ とおく。すると仮定により

$$|\Delta M_t| = |H_t \Delta L_t| \leqq |H_t L_t| + |H_t L_{t-}| \leqq |A_t L_t| + |A_{t-} L_{t-}| \leqq 2$$

となる。しかも任意の $T\in\mathcal{S}$ に対し

$$E[[M,M]_\infty - [M,M]_{T-} \mid \mathcal{F}_T] \leqq E[[M,M]_T^\infty \mid \mathcal{F}_T] + 4$$

$$\leqq E\Big[\int_{]T,\infty[} A_{s-}^2\, d[L,L]_s \,\Big|\, \mathcal{F}_T\Big] + 4$$

が成立する。此処で部分積分法を用いて

$$\int_{]T,\infty[} A_{s-}^2 \, d[L,L]_s = \int_{]T,\infty[} [L,L]_s^\infty \, dA_s^2 + [L,L]_T^\infty A_T^2 \quad .$$

しかも $E[\,[L,L]_t^\infty \mid \mathcal{F}_t\,] \leqq E[\,L_\infty^2 \mid \mathcal{F}_t\,]$ だから

$$E\Big[\int_{]T,\infty[} A_{s-}^2 \, d[L,L]_s \;\Big|\; \mathcal{F}_T\Big] \leqq 2\,E[\,L_\infty^2 A_\infty^2 \mid \mathcal{F}_T\,] \leqq 2.$$

従って，$E[\,[M,M]_\infty - [M,M]_{T-} \mid \mathcal{F}_T\,] \leqq 6$ である。

§2. BMO-martingale の特徴づけ

BMO に関するいくつかの特徴づけの中で，特に Fefferman の双役定理に対する確率論的類似と C. Herz-D. Lépingle の結果を紹介する。

<u>定理 3.2</u>　H^∞ は H^1 で稠密である。

（証明）　$M \in H^1$ とし，簡単のため $M_0 = 0$ を仮定しよう。先ず定理 2.22 に従って，$M = N + A$　（$N \in H^{\infty,loc}$, $A \in IV^{loc}$）と分解し，$\mathcal{S} \ni T_n \uparrow \infty$ を共通にとって $N^{T_n} \in H^\infty$, $A^{T_n} \in IV$ $(n \geqq 1)$ としておく。明らかに $M^{T_n} \xrightarrow{H^1} M$ $(n \longrightarrow \infty)$ だから，予め $M \in IV$ をも仮定して検証すれば十分である。さらに H^∞ は H^2 において稠密だから，結局 M が H^2 の要素で近似できれば目的が達成される。しかも $IV \cap H^1$ の構造を考慮すると，証明は $U \in L^1(\mathcal{F}_T)$, $u_t \equiv U I_{\{T \leqq t\}}$ として，$M = u - u^{\mathcal{P}}$ なる場合に帰着できる。そこで $U^{(n)} \in L^\infty(\mathcal{F}_T)$ を $U^{(n)} \xrightarrow{L^1} U$ とし，これに対して $u_t^{(n)} = U^{(n)} I_{\{T \leqq t\}}$, $M^{(n)} = u^{(n)} - u^{(n)\mathcal{P}}$ とおけば，当然 $M^{(n)} \in H^2$ で

$$\| M^{(n)} - M \|_{H^1} \leqq E\Big[\int_{\mathbb{R}_+} |d(M_s^{(n)} - M_s)|\,\Big] \leqq 2\,\| U^{(n)} - U \|_1$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

が成立する。従って, $\lim_{n\to\infty}\|M^{(n)}-M\|_{H^1}=0$ である。 □

H^p の双対空間を $(H^p)^*$ で示そう。$1<p<\infty$ のとき, 前にも述べたように, $(H^p)^*=H^q$ (ただし, $p^{-1}+q^{-1}=1$) である。確率論の立場から Fefferman の双対定理を眺めてその類似を与えたのは Getoor-Sharpe [34] である。只然し, 彼等は見本関数の連続性を仮定して論じており, その意味で十分とは云い難い。その後間もなく Meyer [66] によって最終的な一般化が与えられた。また, 離散時径数の場合には Garsia [31] による創意溢れる研究がある。

<u>定理 3.3</u> $(H^1)^*\subset BMO$

(証明) Meyer の着想に基づく証明方法を採用する。$\varphi\in(H^1)^*$ i.e. $|\varphi(N)|\le C\|N\|_{H^1}$ ($N\in H^1$) としよう。$C\le 1$ を仮定しても何ら問題はない。ところで, $\|N\|_{H^1}\le\|N\|_{H^2}$ だから $\varphi\in(H^2)^*$ とも見做せるため, F. Riesz の定理によって

$$\varphi(N)=E[M_\infty N_\infty]\quad(N\in H^2)$$

をみたす $M\in H^2$ が一意に存在する。このとき, 実は $M\in BMO$ であることを示す。実際に, 任意の $T\in\mathcal{S}$ と $D\in\mathcal{F}_T$ に対し

$$U=I_D\cdot\mathrm{sgn}(M_\infty-M_T),\quad N_t=E[U-E[U\mid\mathcal{F}_T]\mid\mathcal{F}_t]\quad(t\geq 0)$$

とおくと, $N^*\le 2I_D$ がなりたち, $|\varphi(N)|\le 2P(D)$ が得られる。一方で

$$\varphi(N)=E[M_\infty(U-E[U\mid\mathcal{F}_T])]$$

$$=E[(M_\infty-M_T)U]$$

$$= E[\,|M_\infty - M_T|\,;\,D\,]$$

が成立している。従って，$E[\,|M_\infty - M_T|\,|\,\mathcal{F}_T\,] \leqq 2$. さらに $T_D \in \mathcal{S}$ だから $A_t \equiv I_{\{T_D \leqq t\}}$ は $\mathcal{O}$－可測な増加過程であって，定理2.16により $N' \equiv A - A^{\mathcal{P}} \in \mathbf{H}^2_d$ となる。しかも

$$\varphi(N') = E[\Delta N'_{T_D}\,\Delta M_{T_D}] = E[\Delta M_T\,;\,D\,]\,,\qquad \|N'\|_{\mathbf{H}^1} \leqq 2P(D)$$

に注意すれば，$|\Delta M_T| \leqq 2$ が求まる。このとき

$$E[\,|M_\infty - M_{T-}|\,|\,\mathcal{F}_T\,] \leqq E[\,|M_\infty - M_T|\,|\,\mathcal{F}_T\,] + |\Delta M_T| \leqq 4,$$

即ち，$\|M\|_{BMO_1} \leqq 4$ となる。換言すれば $(\mathbf{H}^1)^* \subset BMO$ である。□

C. Herz 及び D. Lépingle（Meyer[70] 参照）が得た次の結果は，今後の BMO に関連する研究を進める上で有効な足掛りになり得る側面を探りだしたもので極めて重要であると思われる。

<u>定理 3.4</u>　$M \in BMO$ なるための必要十分条件は，次の (i), (ii) をみたす raw IV な確率過程 $A = (A_t)_{0 \leqq t \leqq \infty}$ が存在することである：

$$\text{(i)}\quad \int_{[0,\infty]} |dA_s| \leqq C \qquad\qquad \text{(ii)}\quad M_t = E[A^0_\infty \,|\, \mathcal{F}_t] \quad (t \geqq 0)$$

（証明）先ず (i), (ii) を仮定しよう。このとき，任意の $N \in H^2$ に対し

$$E[M_\infty N_\infty] = E[\int_{[0,\infty]} N_\infty\, dA^0_s] = E[\int_{[0,\infty]} N_s\, dA_s]\,,$$

従って，$|E[M_\infty N_\infty]| \leqq C\|N\|_{\mathbf{H}^1}$ が成立する。定理3.2によって $\overline{\mathbf{H}^2} = \mathbf{H}^1$ だから，$\mathbf{H}^2 \ni N \longmapsto E[M_\infty N_\infty]$ は $\mathbf{H}^1$ 上の有界線形汎関数

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

として一意に拡張できる。このとき定理3.3の証明から $\|M\|_{BMO_1}$ $\le 4C$ がでる。

次に必要条件なることを述べよう。簡単のため $\|M\|_{BMO_1} \le 1$ としよう。すると当然 $|\Delta M_t| \le 1$, $E[|M_\infty - M_t| \mid \mathcal{F}_t] \le 1$ $(t \ge 0)$ である。いま stopping times $(T_n)_{n=0,1,2,\dots}$ を順次

$$T_{-1} = 0-, \qquad T_n = \inf\{t > T_{n-1} ;\ |M_t - M_{T_{n-1}}| > 2\} \qquad (n \ge 1)$$

によって定義すると、十分大なる n に対し $T_n = \infty$ となる。さらに $\{T_{n+1} < \infty\} \subset \{|M_{T_{n+1}} - M_{T_n}| \ge 2\}$ だから

$$P(T_{n+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{T_n}) \le \frac{1}{2} E[|M_{T_{n+1}} - M_{T_n}| \mid \mathcal{F}_{T_n}] \le \frac{1}{2}$$

がなりたつ。そこで

$$U_n = \frac{M_{T_n} - M_{T_{n-1}}}{1 - P(T_{n+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{T_n})} I_{\{T_n < \infty,\ T_{n+1} = \infty\}} \qquad (n \ge 0)$$

とおけば，これは勿論 $\mathcal{F}_{T_{n+1}}$－可測であって，

$$|U_n| \le 2|M_{T_n} - M_{T_{n-1}}| \le 2|M_{T_n-} - M_{T_{n-1}}| + 2|\Delta M_{T_n}| \le 6 .$$

依って， $C_t = \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_{\{T_n \le t\}}$ に対して， $\int_{\mathbb{R}_+} |dC_t| \le 6$ が成立する。ただし，(C_t) は $(\mathcal{F}_t)$ に適合しているとは限らない。併し乍ら，任意の $X \in \mathcal{X}$ に対して

$$E\left[\int_{\mathbb{R}_+} X_s \, dC_s^{o}\right] = E\left[\int_{\mathbb{R}_+} {}^{o}X_s \, dC_s\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[{}^{o}X_{T_n} E[U_n \mid \mathcal{F}_{T_n}] I_{\{T_n < \infty\}}],$$

これに

$$E[U_n \mid \mathcal{F}_{T_n}] = \frac{M_{T_n} - M_{T_{n-1}}}{1 - P(T_{n+1} < \infty \mid \mathcal{F}_{T_n})} P(T_{n+1} = \infty \mid \mathcal{F}_{T_n}) I_{\{T_n < \infty\}}$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$= (M_{T_n} - M_{T_{n-1}}) I_{\{T_n < \infty\}}$$

を代入し

$$E[\int_{\mathbb{R}_+} X_s \, dC_s^0] = \sum_{n=0}^{\infty} E[{}^0X_{T_n} (M_{T_n} - M_{T_{n-1}}) I_{\{T_n < \infty\}}]$$

が得られる。従って　$C_s^0 = \sum_{n=0}^{\infty} (M_{T_n} - M_{T_{n-1}}) I_{\{T_n \leq s\}}$ である。次に $L(\omega) = \mathrm{Max}\{T_n(\omega) ; T_n(\omega) < \infty\}$ $(\omega \in \Omega)$ とおく。すると，$L(\omega) = T_j(\omega) < T_{j+1}(\omega) = \infty$ をみたす番号 $j = j(\omega)$ が存在し

$$C_\infty^0 \equiv \lim_{t \to \infty} C_t^0 = M_{T_j} = M_L , \quad |M_\infty - M_L| \leq 2$$

がなりたつ。此処で

$$A_t \equiv \begin{cases} C_t & (t < \infty) \\ C_\infty + (M_\infty - M_L) & (t = \infty) \end{cases}$$

を考えると，これは $\mathcal{F}_t$－可測とは限らないが

$$\int_{[0,\infty]} |dA_s| \leq \int_{\mathbb{R}_+} |dC_s| + |\Delta A_\infty| \leq 8$$

となり，(i) が成立する。さらに

$$A_t^0 = \begin{cases} C_t^0 & (t < \infty) \\ C_\infty^0 + (M_\infty - M_L) = M_\infty & (t = \infty) \end{cases}$$

であるから，$E[A_\infty^0 | \mathcal{F}_t] = M_t$，即ち (ii) が求まる。　□

さて，上の同値性を用いて，次節で述べる Fefferman の不等

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

式と本質的に同型な不等式を導くことにしよう。$M, N \in \mathbf{H}^2$ のとき，既に見たように $MN - [M,N] \in \mathcal{M}_u$，$[M,N]_0 = M_0 N_0$ となるため，$E[[M,N]_\infty] = E[M_\infty N_\infty]$ である。特に $M \in BMO$ のときは，上の定理により

$$M_\infty = A^o_\infty, \quad \int_{[0,\infty]} |dA_s| \leq 8\|M\|_{BMO_1}$$

をみたす raw IV な確率過程 A が存在するから

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad \left| E[[M,N]_\infty] \right| &= \left| E\left[\int_{[0,\infty]} N_s \, dA_s\right] \right| \\
&\leq E\left[N^* \int_{[0,\infty]} |dA_s| \right] \\
&\leq 8\|M\|_{BMO_1} \|N\|_{\mathbf{H}^1}
\end{aligned}
$$

が成立する。これは $BMO \subset (\mathbf{H}^1)^*$ なることを意味しており，定理3.3と合せて考慮すれば Fefferman の双対性に対する確率論的類似が得られる。即ち：

<u>定理 3.5</u>　　$BMO = (\mathbf{H}^1)^*$

依って，BMO が Banach 空間であることも分る。さらに定理の3.4及び3.5により，「$\varphi \in (\mathbf{H}^1)^*$ なるための必要十分条件は，$\int_{[0,\infty]} |dA_s| \leq C$ をみたす raw IV な確率過程 A が存在して

$$\varphi(N) = E\left[\int_{[0,\infty]} N_s \, dA_s\right] \qquad (N \in \mathbf{H}^1)$$

が成立することである」という結果まで知り得た訳である。

§3. Fefferman の不等式とその応用

本節の目的は，Fefferman の得た不等式に対する確率論的類似

とその適用例の紹介である。

定理 3.6　$N \in BMO$ のとき

$$E\left[\int_{\mathbb{R}_+} |d[M,N]_s|\right] \leqq \sqrt{2}\, E\left[\sqrt{[M,M]_\infty}\right] \|N\|_{BMO} \qquad (M \in \mathcal{L})$$

が成立する。

（証明）Kunita-Watanabe の不等式と Schwarz の不等式を用いれば，

$$E\left[\int_{\mathbb{R}_+} |d[M,N]_s|\right] \leqq \sqrt{2}\, E\left[\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt[4]{[M,M]_s}}{\sqrt{\sqrt{[M,M]_s} + \sqrt{[M,M]_{s-}}}} |d[M,N]_s|\right]$$

$$\leqq \sqrt{2}\, E\left[\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{[M,M]_s} + \sqrt{[M,M]_{s-}}} d[M,M]_s\right]^{1/2} E\left[\int_{\mathbb{R}_+} \sqrt{[M,M]_s}\, d[N,N]_s\right]^{1/2}$$

$$\leqq \sqrt{2}\, E\left[\sqrt{[M,M]_\infty}\right]^{1/2} E\left[\int_{\mathbb{R}_+} ([N,N]_\infty - [N,N]_{s-})\, d\sqrt{[M,M]_s}\right]^{1/2}$$

$$\leqq \sqrt{2}\, E\left[\sqrt{[M,M]_\infty}\right] \|N\|_{BMO}$$

が得られる。　□

上の不等式から $BMO \subset (\mathbf{H}^1)^*$ がでることは前節で述べてある。

次に $\mathcal{H}^p = \{ M \in \mathcal{L} \,;\, \sqrt{[M,M]_\infty} \in L^p \}$ とおく。$\mathcal{H}^p$ は，$\|M\|_{\mathcal{H}^p} = \|\sqrt{[M,M]_\infty}\|_p$ をノルムとして Banach 空間をなし，定理 3.2 の証明と同様の論法により $\mathbf{H}^\infty$ が $\mathcal{H}^1$ で稠密となることが難なく検証できる。また，明らかに $\mathbf{H}^2 \subset \mathcal{H}^1$ である。

補題　次の (i), (ii) が成立する。

(i) $\mathcal{H}^1 \subset \mathfrak{M}_u$ (ii) $\|M_\infty\|_1 \leq C\|M\|_{\mathcal{H}^1}$ $(M \in \mathfrak{M}_u)$

(証明) $M \in \mathbf{H}^2$ のとき，$E[M_\infty N_\infty] = E[[M,N]_\infty]$ $(N \in \mathbf{H}^2)$ だから，特に $N \in \mathbf{H}^\infty$ としてこの式の右辺に Fefferman の不等式を適用すると

$$\left| E[M_\infty N_\infty] \right| \leq \sqrt{2}\,\|M\|_{\mathcal{H}^1}\,\|N\|_{BMO}$$

$$\leq 2\sqrt{2}\,\|M\|_{\mathcal{H}^1}\,\|N_\infty\|_\infty \quad .$$

従って，$\|M_\infty\|_1 \leq 2\sqrt{2}\,\|M\|_{\mathcal{H}^1}$ がなりたつ。そこで $\mathbf{H}^2$ が $\mathcal{H}^1$ において稠密であること及び $\mathbf{H}^2$ のノルム $\|M_\infty\|_1$ による完備化が $\mathfrak{M}_u$ となることに注意すれば (i) と (ii) が同時に得られる。□

Garsia [31] は，Burkholder-Davis-Gundy の不等式（定理1.11）を求めるのに，Fefferman の不等式から出発するという興味深い別証明を考案したが，連続時径数の場合にも活用し得ることが Meyer により指摘されている。以下にそれを紹介しよう。最初に連続時径数の martingale に対する Davis 型の不等式について述べる。

<u>定理3.7</u> 次の不等式をみたす定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在する：

$$c_1\|M\|_{\mathbf{H}^1} \leq \|M\|_{\mathcal{H}^1} \leq c_2\|M\|_{\mathbf{H}^1} \qquad (M \in \mathcal{L})$$

(証明) 右側不等式の証明から始めよう。その場合 $\|M\|_{\mathbf{H}^1} < \infty$ を仮定できることは勿論である。M は条件付確率 $P(d\omega\,|\,\mathcal{F}_0)$ に関しても martingale となるため M_0 は定数と考えて差支えない。仮にその定数が 0 のときは，M の代りに新たに実数 $a \neq 0$ を加えて，$M' \equiv M + a$ を扱うことにより，$M'_0 = a$，$(M')^* \leq M^* + a$ $[M',M'] = [M,M] + a$ となるため，予め $M_0 = a\ (\neq 0)$ なる場合

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

に限定できる。さらに $M^2-[M,M]\in\mathcal{M}_u$ を仮定しても一般性を失わない。このような設定の下で，$N_t = E[1/M^* \mid \mathcal{F}_t]$ $(t\geq 0)$ とおく。$1/M^*\leq 1/|a|$ だから $N\in\mathbf{H}^\infty$ である。しかも $M_t^* N_t\leq 1$ が成立している。依って，$L=M_-\circ N$ とおけば，§1の注意4により $\|L\|_{BMO}\leq\sqrt{6}$ となる。また必要なら stopping time を適用して考えることにより，$ML-[M,L]\in\mathcal{M}_u$ を仮定しても問題はない。このとき，$M_t^2-[M,M]_t = 2\int_0^t M_{s-}\,dM_s$ に注意し，不等式(5)を用いると

$$
\begin{aligned}
\|M\|_{\mathcal{H}^1} &= E\left[\frac{\sqrt{M^*}\sqrt{[M,M]_\infty}}{\sqrt{M^*}}\right] \\
&\leq \|M\|_{\mathbf{H}^1}^{1/2}\ E\left[\frac{[M,M]_\infty}{M^*}\right]^{1/2} \\
&\leq \|M\|_{\mathbf{H}^1}^{1/2}\left\{\|M\|_{\mathbf{H}^1}+\left|E[(M_\infty^2-[M,M]_\infty)N_\infty]\right|\right\}^{1/2} \\
&\leq \|M\|_{\mathbf{H}^1}^{1/2}\left(\|M\|_{\mathbf{H}^1}+2\left|E[M_\infty L_\infty]\right|\right)^{1/2} \\
&\leq \|M\|_{\mathbf{H}^1}^{1/2}\left(\|M\|_{\mathbf{H}^1}+16\|M\|_{\mathbf{H}^1}\|L\|_{BMO_1}\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{1+16\sqrt{6}}\ \|M\|_{\mathbf{H}^1}
\end{aligned}
$$

が得られる。

次に左側不等式を考察しよう。最初に $M\in\mathbf{H}^2$ を仮定する。このとき $M^*\in L^2$ だから当然任意の非負有限な r.v S に対し $M_S\in L^2$ となる。さて $V_t\equiv \mathrm{sgn}(M_S)I_{\{S<t\}}$ とし

$$
A_t = V_t^o,\quad Y_t = E[V_\infty - V_t \mid \mathcal{F}_t],\quad N_t = E[A_\infty \mid \mathcal{F}_t]\quad (t\geq 0)
$$

とおく。$V_{t-}=V_t$ だから，任意の $T\in\mathcal{S}$ に対し

$$
Y_T = E[V_\infty - V_{T-} \mid \mathcal{F}_T] = E[A_\infty - A_{T-} \mid \mathcal{F}_T]
$$

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

つまり $Y_t = O(A_\infty - A_{t-})$ である。さらに $N_\infty - N_{T-} = (A_\infty - A_{T-}) - Y_{T-}$ 及び $|Y_t| \leq 2$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
E[(N_\infty - N_{T-})^2 \mid \mathcal{F}_T] &= E[(A_\infty - A_{T-})^2 - 2Y_{T-}(A_\infty - A_{T-}) + Y_{T-}^2 \mid \mathcal{F}_T] \\
&= 2E\left[\int_{[\![T,\infty[\![} (A_\infty - A_{t-})\, dA_t \mid \mathcal{F}_T\right] - 2Y_{T-}Y_T + Y_{T-}^2 \\
&\leq 2E\left[\int_{[\![T,\infty[\![} Y_s\, dV_s \mid \mathcal{F}_T\right] + 12 \\
&\leq 2E[Y_T(V_\infty - V_{T-}) \mid \mathcal{F}_T] + 12 \\
&\leq 2Y_T^2 + 12 \leq 20, \quad \text{i.e., } \|N\|_{BMO}^2 \leq 20.
\end{aligned}$$

一方，S は有限だから

$$\begin{aligned}
E[|M_S|] &= E\left[\int_{\mathbb{R}_+} M_s\, dV_s\right] \\
&= E\left[\int_{\mathbb{R}_+} M_\infty\, dA_s\right] \\
&= E[M_\infty A_\infty] .
\end{aligned}$$

これに Fefferman の不等式を用いて

$$E[|M_S|] \leq \sqrt{2}\, \|N\|_{BMO} \|M\|_{\mathcal{H}^1} \leq 2\sqrt{10}\, \|M\|_{\mathcal{H}^1}$$

が求まる。ところで，この関係式は S の代りに $S \wedge n$ を考えて，後で $n \to \infty$ とすればよいから $0 \leq S \leq \infty$ なる場合にも成立している。第2章§3の補題によって2条件

(i) $\{S_n < \infty\} \subset \{M^* - 2^{-n} < |M_{S_n}|\}$ (ii) $P\{S_n = \infty\} \leq 2^{-n}$

をみたす r.v $0 \leq S_n \leq \infty$ が存在する。このとき $|M_{S_n}| \longrightarrow M^*$ a.s である。依って Fatou の補題を用いて

$$\|M\|_{H^1} \leq 2\sqrt{10}\, \|M\|_{\mathcal{H}^1} \tag{6}$$

が得られる。最後に "$M \in \mathbf{H}^2$" なる仮定を除去しよう。そのために $\|M\|_{\mathcal{H}^1} < \infty$ とし，$M^{(n)} \in \mathbf{H}^2$ を $\|M^{(n)} - M\|_{\mathcal{H}^1} \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ をみたすように選ぶ。すると補題の (ii) により $M^{(n)}_\infty \xrightarrow{L^1} M_\infty$ となる。このとき Doob の不等式により（必要なら部分列をとることによって）$\lim_{n\to\infty} (M^{(n)} - M)^* = 0$ a.s. が成立すると考えてよい。各 $M^{(n)}$ に対して (6) がなりたち，しかも $\|M^{(n)}\|_{\mathcal{H}^1} \longrightarrow \|M\|_{\mathcal{H}^1}$ だから再び Fatou の補題を用いて結論が得られる。 □

定理 3.7 と §1 の補題2 を適用すれば，任意の $T \in \mathcal{S}$ に対して

$$c_1 E[\sup_t |M_{T+t} - M_{T-}| \,|\, \mathcal{F}_T] \leq E[\sqrt{[M,M]^\infty_{T-}} \,|\, \mathcal{F}_T] \leq C_2 E[\sup_t |M_{T+t} - M_{T-}| \,|\, \mathcal{F}_T]$$

なる不等式が求まる。依って

$$c_1 E[M^* - M^*_{T-} \,|\, \mathcal{F}_T] \leq E[\sqrt{[M,M]_\infty} \,|\, \mathcal{F}_T]$$
$$E[\sqrt{[M,M]_\infty} - \sqrt{[M,M]_{T-}} \,|\, \mathcal{F}_T] \leq 2C_2 E[M^* \,|\, \mathcal{F}_T]$$

である。このとき第1章定理1.9 の証明と同じ方法により，連続時径数の martingale に対する Burkholder-Davis-Gundy の不等式が成立する。即ち：

<u>定理 3.8</u>　関数 F が tame のとき，次の不等式をみたす定数 $c, C > 0$ が存在する：

$$c\,E[F(M^*)] \leq E[F([M,M]^{1/2}_\infty)] \leq C\,E[F(M^*)] \qquad (M \in \mathcal{L})$$

特に $F(x)=x^p$ $(p>1)$ に対応する結果と定理3.7から不等式

(7) $$c_p\|M\|_{H^p} \leq \|M\|_{\mathcal{H}^p} \leq C_p\|M\|_{H^p} \quad (1\leq p<\infty)$$

がでる。

§4. Girsanov の変換

$\hat{P}$ を P と同等な確率測度とすると，$d\hat{P}=Z_\infty dP$，$Z_\infty>0$ a.s をみたす $Z\in\mathfrak{M}_u$ が一意に存在する。簡単のため $Z_0=1$ を仮定し，$M_t=\int_0^t Z_{s-}^{-1}\,dZ_s$ とおく。martingale の概念は，云うまでもなく確率測度に依存しており，本節では P と $\hat{P}$ の双方の測度に関する martingale の間の関係について述べる。この話題は，雑音の混入した観測データに基づいて信号を検定する問題とも関連し応用的にも興味深い。一般的な設定で論ずる前に $B=(B_t,\mathcal{F}_t)$ が P に関して Brown 運動である場合を考えて見よう。この場合が最も基本となる。良く知られているように M は適当な $H\in\underline{\underline{P}}^{loc}$ によって $M_t=\int_0^t H_s\,dB_s$ と表現され得る。また $\hat{P}\neq P$ のとき，B は $\hat{P}$ に関して最早 Brown 運動ではない。併し乍ら I.V. Girsanov [35] は，その鋭い洞察力によって

$$\hat{B}_t\equiv\int_0^t H_s\,ds-B_t \qquad (t\geq 0)$$

が $\hat{P}$ に関する Brown 運動となることを看破した。それ故に，これを Girsanov の変換という。或いは変換式の形から，この種の測度の変換には“ずれの変換”の名がある。Girsanov の変換は，martingale の理論的成長に伴い，H. Van Schuppen-E. Wong [79] 等の一般化の試みを経て E. Lenglart [58] により最終的な一般化を得るに至った。Lenglart の結果は単に $\hat{P}$ が P に関して絶対連続という設定で十分であるが，此処では P と $\hat{P}$ の同等性を仮定して話しを進めることにした。$\hat{P}$ に関する $\mathcal{L}$, H^p, BMO 等のクラスを，便宜上 $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{H}^p$, $\widehat{BMO}$ のように表す。

定理 3.9　$X \in \mathcal{L}$ に対して

(8)
$$\hat{X}_t = \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[X, Z]_s - X_t \qquad (t \geq 0)$$

とおくとき，$\hat{X} \in \hat{\mathcal{L}}$ である。

(証明)　$A \in \mathcal{V}$ とし，$(A-X)Z$ に対し定理 2.36 を適用して

$$d(A_s - X_s)Z_s = (A_{s-} - X_{s-})dZ_s + Z_{s-}d(A_s - X_s) + d[A-X, Z]_s$$

$$= \{(A_{s-} - X_{s-})dZ_s - Z_{s-}dX_s\} + \{Z_{s-}dA_s - d[X, Z]_s\}$$

となる。従って，$A_t = \int_0^t Z_s^{-1} d[X, Z]_s$ とおけば，$(A-X)Z \in \mathcal{L}$，つまり，$\hat{X} \in \hat{\mathcal{L}}$ である。 □

(8)で定義される mapping $\phi : \mathcal{L} \ni X \longmapsto \hat{X} \in \hat{\mathcal{L}}$ を Girsanov 型の変換と呼ぶことにしよう。明らかに，ϕ は線形である。定理 2.37 から $dZ_s = Z_{s-}dM_s = Z_s(1+\Delta M_s)^{-1}dM_s$ がでるため

$$\phi(X)_t = \int_0^t \frac{1}{1+\Delta M_s} d[X, M]_s - X_t$$

とも書ける。

さて，$Y = Y_0 + X + A$ $(X \in \mathcal{L},\ A \in \mathcal{V})$ を semi-martingale とするとき，(8)によって $X = Z^{-1} \circ [X, Z] - \phi(X)$ だから

(9)
$$Y = Y_0 - \phi(X) + (Z^{-1} \circ [X, Z] + A),$$

依って，これは $\hat{P}$ に関しても semi-martingale となる。即ち，semi-martingale の概念は，P と $\hat{P}$ に関して不変である。

次に $X \in \mathcal{L}_c$ とする。このとき $[X, M] = \langle X, M^c \rangle \in \mathcal{V}_c$ だから $\phi(X) = \langle X, M^c \rangle - X \in \hat{\mathcal{L}}_c$ となる。しかも $P, \hat{P}$ の何れの意味

で考えても，次の関係がなりたつ。

$$(10) \qquad \langle \Phi(X), \Phi(X) \rangle = \langle X, X \rangle \qquad (X \in \mathcal{L}_c)$$

これを示すには，区間 $[0,t]$ の分割 $\Delta: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n}(\hat{X}_{t_j}-\hat{X}_{t_{j-1}})^2=\sum_{j=1}^{n}(X_{t_j}-X_{t_{j-1}})^2-2\sum_{j=1}^{n}(X_{t_j}-X_{t_{j-1}})\langle X, M^c\rangle_{t_{j-1}}^{t_j}+\sum_{j=1}^{n}(\langle X, M^c\rangle_{t_{j-1}}^{t_j})^2$$

を考え，$\|\Delta\| \longrightarrow 0$ なるときの収束性を調べればよい。右辺の第2，第3の和は X と $\langle X, M^c\rangle$ の連続性により $\mathcal{P}$ と $\hat{\mathcal{P}}$ の何れに関してもOに概収束している。一方，第2章§11で指摘したように右辺の第1の和は $\langle X, X\rangle_t$ に，また左辺は $\langle \hat{X}, \hat{X}\rangle_t$ にそれぞれ確率収束している。依って(10)が成立する。

ところで，任意の $X \in \mathcal{L}$ に対して $\Phi(X)^c=\Phi(X^c)$ がなりたつため，式(9)を $\hat{\mathcal{P}}$ で眺めると，任意のsemi-martingale Y に対し，$Y^c=-\Phi(X^c)$ となる。すると(10)から

$$[Y, Y]_t=\langle \Phi(X^c), \Phi(X^c)\rangle_t+\sum_{s\le t}\Delta Y_s^2=\langle X^c, X^c\rangle_t+\sum_{s\le t}\Delta Y_s^2 .$$

従って，$[Y, Y]$ もまた $\mathcal{P}$ と $\hat{\mathcal{P}}$ に関して不変である。

確率積分 $H\circ X$ に対しても同様の問題を考察しておく必要がある。そのためめに，$\mathcal{P}$ の意味で定義されるその確率積分を便宜上 $H \underset{\mathcal{P}}{\circ} X$ とかくことにしよう。

<u>定理 3.10</u> X がsemi-martingaleのとき，任意の $H \in \underline{\underline{\mathcal{P}}}^{loc}$ に対して $H\underset{\mathcal{P}}{\circ}X = H\underset{\hat{\mathcal{P}}}{\circ}X$ が成立する。

（証明） $X \in \mathcal{L}$ なる場合が本質的であるから，これを仮定し $L=H\underset{\mathcal{P}}{\circ}X$ とおく。すると $L \in \mathcal{L}$，$[L, Z]_t=\int_0^t H_s\, d[X, Z]_s$ が成立し，さらに定理3.10により

$$\hat{L}_t = \int_0^t \frac{H_s}{Z_s} d[X, Z]_s - L_t \qquad (t \geqq 0)$$

は $\hat{\mathcal{L}}$ に属している。しかも任意の semi-martingale U に対して

$$\begin{aligned}[\hat{L}, U]_t &= \sum_{s \leqq t} \frac{H_s}{Z_s} \Delta X_s \Delta Z_s \Delta U_s - [L, U]_t \\ &= \int_0^t H_s \, d[\tfrac{1}{Z} \circ [X, Z] - X, U]_s \\ &= \int_0^t H_s \, d[\hat{X}, U]_s\end{aligned}$$

がなりたつため $\hat{L} = H \underset{\hat{P}}{\circ} \hat{X}$ となる。従って，$X = \frac{1}{Z} \circ [X, Z] - \hat{X}$ に注意すれば

$$\begin{aligned}H \underset{\hat{P}}{\circ} X &= \frac{H}{Z} \circ [X, Z] - H \underset{\hat{P}}{\circ} \hat{X} \\ &= \frac{H}{Z} \circ [X, Z] - \hat{L} \\ &= L \quad , \qquad \text{i.e.,} \quad H \underset{P}{\circ} X = H \underset{\hat{P}}{\circ} \hat{X} \quad 。 \quad \square\end{aligned}$$

次の結果は，次節以降の議論にとって基本的な足掛りとなるものである。

<u>定理 3.11</u>　Girsanov 型の変換 $\Phi : \mathcal{L} \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}$ は bijection である。

(証明)　先ず Φ が injective なることを示そう。任意の $X \in \mathcal{L}$ に対して

$$\Phi(X)_t = \langle X^c, M^c \rangle_t + \sum_{s \leqq t} \frac{\Delta X_s \Delta M_s}{1 + \Delta M_s} - X_t ,$$

依って，$\Delta \Phi(X)_t = -\Delta X_s (1 + \Delta M_s)^{-1}$ で，しかも $\hat{P}$ に関して $\Phi(X)^c = -X^c$

となる。このとき

$$\Phi(X)_t = -\langle \Phi(X)^c, M^c \rangle_t - \sum_{s \le t} \Delta\Phi(X)_s \Delta M_s - X_t$$

$$= -[\Phi(X), M]_t - X_t$$

が成立する。従って，$\Phi(X) = \Phi(Y)$ $(X, Y \in \mathcal{L})$ ならば $X = Y$ である。次に Φ が surjective であることを証明しよう。$\hat{P}$ で眺めると (10) から，$\langle \Phi(M)^c, \Phi(M)^c \rangle = \langle M^c, M^c \rangle$，$\Phi(M)^c \in \hat{\mathcal{L}}_c$，$M^c \in \mathcal{L}_c$。さらに $\Delta\Phi(M)_t = -(1+\Delta M_t)^{-1}\Delta M_t$，$\Phi(M)_t = -M_t + \langle M^c, M^c \rangle_t + \sum_{s \le t}(1+\Delta M_s)^{-1}\Delta M_s^2$，$\Phi(M)_0 = 0$ に注意すれば，方程式 $W_t = 1 + \int_0^t W_{s-} d\Phi(M)_s$ の解は

$$W_t = \exp\left\{ \Phi(M)_t - \frac{1}{2}\langle M^c, M^c \rangle_t \right\} \prod_{s \le t} (1 + \Delta\Phi(M)_s) e^{-\Delta\Phi(M)_s}$$

$$= \exp\left(-M_t + \frac{1}{2}\langle M^c, M^c \rangle_t \right) \prod_{s \le t} \frac{e^{\Delta M_s}}{1 + \Delta M_s}$$

$$= \frac{1}{Z_t} \quad 。$$

すると定理 3.9 により任意の $X' \in \hat{\mathcal{L}}$ に対し

$$X \equiv \frac{1}{W} \circ [X', W] - X' = -[X, \Phi(M)] - X' \in \mathcal{L} \quad 。$$

従って，$X' = -[X, \Phi(M)] - X = -[\Phi(X), M] - X = \Phi(X)$ が成立し Φ は surjective となる。ゆえに Φ は bijective である。 □

なお，Φ の定義から，任意の $H \in \underline{\mathcal{P}}^{loc}$ に対し $\Phi(H \circ X) = H \circ \Phi(X)$ なることが直ちにでる。但し乍ら，一般には $X \in \mathbf{H}^\infty$ から $\Phi(X) \in \hat{\mathbf{H}}^\infty$ がでない。しかも可積分性を重要視する立場からすると或る意味で病的とも云える次のような事例が存在する。

<u>例 3.4</u>　確率系 $(\Omega, \mathcal{F}, d\mu; (\mathcal{F}_t))$ 上に原点から出発する 1 次元

の Brown 運動 B_t が与えられているとし，$T=\inf\{t\,;\,B_t\geqq 1\}$ $\in\mathcal{S}$ を定めて　$W_t=\exp(B_{t\wedge T}-(t\wedge T)/2)$　$(t\geqq 0)$ とおく。明らかに $W_t\leqq e$，$W_\infty>0$ で $d\mathcal{P}\equiv W_\infty d\mu$ は Ω 上の確率測度となる。このとき定理3.10によって，$M\equiv\langle B^T,B^T\rangle-B^T$ は $\mathcal{P}$ に関するクラス $\mathcal{L}$ に属し $\langle M,M\rangle_\infty=T$ がなりたつ。そこで $Z_t\equiv\exp(M_t-\langle M,M\rangle_t/2)$ を考える。$Z_t=W_t^{-1}$ だから，Z は $\mathcal{P}$ に関する $\mathcal{M}_u$ に属しており，しかも $d\hat{\mathcal{P}}\equiv Z_\infty d\mathcal{P}=d\mu$ である。このような設定の下で $X\equiv M/\sqrt{2}$ とおけば，$X\in\mathcal{L}$ で

$$\begin{aligned}E[\exp(\langle X,X\rangle_\infty)]&=\int_\Omega\exp\left(\tfrac{1}{2}\langle M,M\rangle_\infty\right)\exp\left(B_T-\tfrac{1}{2}T\right)d\mu\\&=\int_\Omega\exp(B_T)\,d\mu\\&=e\end{aligned}$$

従って，$X\in\bigcap_p\mathbf{H}^p$ となる。然るに $\phi(X)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(M)=\frac{1}{\sqrt{2}}B_T$ は $\hat{\mathcal{P}}=\mu$ に関して一様可積分にもならない。

§5. BMO と (A_p) 条件

$M\in\mathcal{L}$ $(M_0=0)$ とし，任意の実数 a に対して

$$Z_t^{(a)}=\exp\left(aM_t-\frac{a^2}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t\right)\prod_{s\leqq t}(1+a\Delta M_s)\exp(-a\Delta M_s)\quad(t\geqq 0)$$

とおく。云うまでもなく $Z^{(a)}$ は $\mathcal{L}$ に属し，方程式 $Z_t=1+a\int_0^t Z_{s-}dM_s$ の一意解である。$Z^{(1)}$ を単に Z で示した。<u>以後 M に関しては特に断らない限り次の条件を仮定して話を進める</u>：

(S)　　$-1+\delta\leqq\Delta M\leqq C_M$

ただし δ，C_M は正の定数で $0<\delta\leqq 1$ とする。
条件 (S) は "$\delta\leqq Z_t/Z_{t-}\leqq C$" と同値である。特に $M\in\mathcal{L}_c$ のと

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

きは当然この条件がなりたっている。また条件(S)の下では,Zは非負なsupermartingaleとなるためDoobの収束定理により確率1で極限$Z_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} Z_t$が存在し,つねに$E[Z_\infty] \leq 1$である。

<u>定理 3.12</u>　$M \in BMO$のとき,任意の$p>1$に対して

$$Z_T^{1/p} \leq \exp\left(\frac{1}{2p\delta}\|M\|_{BMO}^2\right) E[Z_\infty^{1/p} \mid \mathcal{F}_T] \quad (T \in \mathcal{S}) \tag{11}$$

が成立する。

(証明) 条件(S)を考慮して不等式$\exp(-\frac{1}{2\delta}x^2) \leq (1+x)e^{-x}$ ($x \geq -1+\delta$)を用いると

$$\exp\left(-\frac{1}{2\delta}\Delta M_t^2\right) \leq (1+\Delta M_t)\exp(-\Delta M_t) \quad (t \geq 0)$$

となる。依って各$T \in \mathcal{S}$に対し

$$\frac{Z_\infty}{Z_T} \geq \exp\left(M_\infty - M_T - \frac{1}{2}\langle M^c, M^c\rangle_T^\infty - \frac{1}{2\delta}\sum_{T<s}\Delta M_s^2\right)$$

$$\geq \exp\left(M_\infty - M_T - \frac{1}{2\delta}[M,M]_{T-}^\infty\right) \quad 。$$

これにJensenの不等式を適用すれば

$$E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^{1/p} \Big| \mathcal{F}_T\right] \geq \exp\left(-\frac{1}{2p\delta}E[[M,M]_{T-}^\infty \mid \mathcal{F}_T]\right)$$

$$\geq \exp\left(-\frac{1}{2p\delta}\|M\|_{BMO}^2\right)$$

が得られる。 □

<u>系</u>　$M \in BMO$のとき,$Z \in \mathcal{M}_u$である。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(証明) $M \in BMO$ のとき，(11) から

$$Z_T \leqslant C_{p,\delta}\, E[Z_\infty \mid \mathcal{F}_T] \quad , \quad Z_\infty \in L^1 \quad 。$$

これは $Z \in (D)$ を意味している。従って $Z \in \mathcal{M}_u$ 。 □

条件 (S) なしには $M \in BMO$ から $Z \in \mathcal{M}_u$ がでない。次に，それを例証しよう。

<u>例 3.5</u>　$T \in \mathcal{S}^t$ (ただし，$0 < T < \infty$) を用意し，$A_t = I_{\{T \leqslant t\}}$ $M = A^{p} - A$ とおく。この場合 $\Delta M \geqslant -1$ だから，Z は非負な local martingale である。しかも $M_0 = 0$，$[M,M]_t = A_t$ であるから，任意の $S \in \mathcal{S}$ に対して

$$E[\,[M,M]_\infty - [M,M]_{S-} \mid \mathcal{F}_S\,] = E[\,I_{\{S \leqslant T\}} \mid \mathcal{F}_S\,] = I_{\{S \leqslant T\}} ,$$

つまり $\|M\|_{BMO} = 1$ となる。然るに $\Delta M_T = -1$ だから $Z_T = 0$ となり，$Z \notin \mathcal{M}_u$ である。

特に $M \in BMO \cap \mathcal{L}_c$ ならば，任意の a に対して $Z^{(a)} \in \mathcal{M}_u$ となる。併し乍ら，逆は成立しない。これに関して L. A. Shepp [82] の例を紹介する。

<u>例 3.6</u>　stopping time $T = \inf\{t ; |B_t| \geqslant \sqrt{t+1}\}$ を定め，$M \equiv B^T$ とおく。$T < \infty$，$B_T^2 = T+1$ a.s だから当然 $M \notin H^2$。然るに Novikov の定理によって，任意の実数 a に対し $Z^{(a)} \in \mathcal{M}$ となるため

$$1 = E[Z_n^{(a)}] \leqslant E[Z_\infty^{(a)}] + E[\exp(aB_n - \frac{a^2}{2}n) \,;\, n < T]$$

が成立する。さらに T の定義によって，$n < T$ のとき不等式

$$\exp(aB_n - \frac{a^2}{2}n) \leq \exp(|a|\sqrt{n+1} - \frac{a^2}{2}n)$$

をみたし，右辺は $n \longrightarrow \infty$ のとき 0 に収束している。従って，$1 \leq E[Z_\infty^{(a)}]$ が得られ，$Z^{(a)} \in \mathfrak{M}_u$ となる。

さて次に定義するのは，Fourier解析における荷重ノルム不等式の問題（[12], [72]）に本質的に関与する条件の確率論的類似である。

定義　$1 < p < \infty$ とし

$$\sup_{T \in \mathcal{S}} \left\| E\left[\left(\frac{Z_T}{Z_\infty} \right)^{\frac{1}{p-1}} \Big| \mathcal{F}_T \right] \right\|_\infty < \infty$$

がなりたつとき，Z は (A_p) 条件をみたすという。また，$\sup_{T \in \mathcal{S}} \left\| \frac{Z_T}{Z_\infty} \right\|_\infty < \infty$ のとき，(A_1) 条件が成立するという。

(A_1) ならば当然 (A_p) $(p>1)$ である。さらに $1 \leq p < p'$ のとき，Hölderの不等式より (A_p) から $(A_{p'})$ がでる。

定理3.13　$1 < p < \infty$ とし，Z が (A_p) をみたすとき，任意の $T \in \mathcal{S}$ に対し，Z^T は (A_{p+1}) をみたす。特に $Z \in \mathfrak{M}_u$ ならば，Z^T は (A_p) をみたす。

（証明）　$1 < p < \infty$，$p^{-1} + q^{-1} = 1$ とし，Hölderの不等式を用いれば，任意の $S \in \mathcal{S}$ に対して

$$E\left[\left(Z_S^T / Z_\infty^T \right)^{1/p} \Big| \mathcal{F}_{S \wedge T} \right] \leq E\left[\left(\frac{Z_{S \wedge T}}{Z_\infty} \right)^{\frac{1}{p-1}} \Big| \mathcal{F}_{S \wedge T} \right]^{1/q} E\left[\frac{Z_\infty}{Z_T} \Big| \mathcal{F}_{S \wedge T} \right]^{1/p}$$

が成立する。右辺の第2項は，supermartingaleの不等式から1以下であり，しかも Z が (A_p) をみたすため，第1項は或る定数 K_p より小となる。依って，$E[(Z_S^T / Z_\infty^T)^{1/p} | \mathcal{F}_{S \wedge T}] \leq K_p$ となり

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

Z^Tに対する(A_{p+1})条件が示された。
また，$Z\in\mathfrak{M}_u$を仮定するとき，Jensenの定理によって

$$Z_T^{-\frac{1}{p-1}} \leq E[Z_\infty^{-\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_T]$$

がなりたち，これと(A_p)条件から

$$E[Z_T^{-\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_{S\wedge T}] \leq E[Z_\infty^{-\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_{S\wedge T}] \leq K_p Z_{S\wedge T}^{-\frac{1}{p-1}}$$

が得られる。依って，$E[(Z_{S\wedge T}/Z_T)^{\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_S] \leq K_p$である。 □

本稿では，或る$p\geq 1$に対して(A_p)条件が成立する，という条件を簡単のため(A_∞)で表すことにした。

定理3.14　条件(S)の代りに，$-1<\Delta M\leq C$を仮定し，さらにZが(A_∞)をみたすならば，$M\in BMO$となる。

（証明）予め$C\geq 1$を仮定できるので，$|\Delta M|\leq C$である。次に，$\gamma=\inf_{-1<x\leq C} x^{-2}\log\frac{1}{2}(1+\frac{e^x}{1+x})$とおく。すると不等式$\exp(\gamma x^2)\leq(1+x)^{-1}e^x$ $(-1<x\leq C)$が得られる。依って

$$\exp(\gamma\Delta M_s^2) \leq (1+\Delta M_s)^{-1}\exp(\Delta M_s) \qquad (s\geq 0)。$$

一方で$M^{T_n}\in\mathfrak{M}_u$をみたす$\mathcal{S}\ni T_n\uparrow\infty$が存在しており，$Z$に対して条件$(A_\infty)$を仮定すれば，定理3.13によって適当な$p>1$と定数$C_p>0$が存在して

$$E[(Z_S^{T_n}/Z_\infty^{T_n})^{\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_S] \leq C_p \qquad (S\in\mathcal{S},\ n=1,2,\cdots)$$

となる。そこで，$0<\gamma<1/2$なることに注意しJensenの定理を用いると

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$C_p \geqq E\left[\exp\left\{\frac{1}{p-1}\left(M_{S\wedge T_n} - M_{T_n} + \gamma\,[M,M]_{S\wedge T_n}^{T_n}\right)\right\} \,\Big|\, \mathcal{F}_{S\wedge T_n}\right]$$

$$\geqq \exp\left\{\frac{\gamma}{p-1} E\left[[M,M]_{S\wedge T_n}^{T_n} \,\Big|\, \mathcal{F}_{S\wedge T_n}\right]\right\},$$

$$\text{i.e.,}\quad E\left[[M,M]_{S\wedge T_n}^{T_n} \,\Big|\, \mathcal{F}_{S\wedge T_n}\right] \leqq \frac{p-1}{\gamma}\log C_p\ .$$

ここで $n \longrightarrow \infty$ として，$E[[M,M]_S^\infty \mid \mathcal{F}_S] \leqq C_{p,\gamma}$ が得られる。さらに $\Delta M^2 \leqq C^2$ だから，$E[[M,M]_{S-}^\infty \mid \mathcal{F}_S] \leqq C_{p,\gamma} + C^2$ となり，結局 $M \in BMO$ がでる。 □

一般には，(A_∞) から $M \in BMO$ がでない。これを Sekiguchi [81] に従って例証しよう。

<u>例 3.7</u> $\Omega =]0,1]$ とし，P を Ω 上の Lebesgue 測度，$\mathcal{F}$ は Ω における可測集合の全体とする。また，$\mathcal{F}_t$ は $0 \leqq t < 1$ ならば $\{\phi, \Omega\}$，$1 \leqq t$ ならば $\mathcal{F}$ とし，さらに

$$M_t(\omega) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t < 1) \\ \dfrac{1}{2\omega^{1/4}} - \dfrac{2}{3} & (1 \leqq t < \infty) \end{cases}$$

とおく。すると $M \in \mathcal{M}_u \setminus BMO$ である。ところが

$$Z_t = \begin{cases} 1 & (0 \leqq t < 1) \\ 1 + M_1 & (1 \leqq t < \infty) \end{cases}$$

となり，$1 + \Delta M \geqq 1/2$ だから $Z_t / Z_\infty \leqq 2 \quad (t \geqq 0)$ 。つまり Z は (A_1) 条件をみたしている。

次に述べるのは，John-Nirenberg [47] が与えた結果の確率論

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

的類似であって，BMOを攻究するための武器として有力な役割を果している。

<u>定理 3.15</u> $\|M\|_{BMO} < 1$ のとき

(12) $$E[\exp([M,M]_\infty - [M,M]_{T-}) \mid \mathcal{F}_T] \leq (1-\|M\|^2_{BMO})^{-1} \quad (T \in \mathcal{S})$$

が成立する。

(証明) (12) の右辺を簡単のため K_M としよう。先ず $\lambda > 0$ に対して stopping time $T \equiv \inf\{t ; [M,M]_t > \lambda\}$ を定めると，$[M,M]_{T-} \leq \lambda$ a.s. $\{[M,M]_\infty > \lambda\} = \{T < \infty\} \in \mathcal{F}_T$ となる。さらに

$$E[[M,M]_\infty - \lambda ; [M,M]_\infty > \lambda] \leq E[[M,M]^\infty_{T-} ; [M,M]_\infty > \lambda]$$

$$\leq \|M\|^2_{BMO} P\{[M,M]_\infty > \lambda\}$$

がなりたつ。この両辺に e^λ を掛けて λ について $[0,\infty[$ 上で積分すると，左辺に関しては

$$E\left[\int_0^{[M,M]_\infty} ([M,M]_\infty - \lambda) e^\lambda d\lambda\right] = E[\exp([M,M]_\infty) - [M,M]_\infty] - 1$$

$$\geq E[\exp([M,M]_\infty)] - \|M\|^2_{BMO} - 1,$$

また，右辺に関しては

$$\|M\|^2_{BMO} \int_0^\infty e^\lambda P([M,M]_\infty > \lambda)\, d\lambda = \|M\|^2_{BMO} E[\exp([M,M]_\infty) - 1]$$

となる。従って両者を比較して，$E[\exp([M,M]_\infty)] \leq K_M$ が求まる。これから (12) を導くには，§1 の補題2 を適用すればよい。□

上の定理において，$\|M\|_{BMO}<1$ という条件は除去できないことを次に例証しておく。

例3.8　第2章§8で述べたように，$\Omega'\equiv]0,\infty[$，$S(\omega')\equiv\omega'$ $(\omega'\in\Omega')$，$P'(d\omega')\equiv e^{-\omega'}d\omega'$，$\mathcal{F}'_t\equiv\overline{\sigma(S\wedge t)}$，$\mathcal{F}'\equiv\bigvee_{t\geq 0}\mathcal{F}'_t$ とし，さらにBrown運動 B_t $(B_0=0)$ が定義されている確率系 $(\Omega'',\mathcal{F}'',P'';(\mathcal{F}''_t))$ を用意して，これら2つの確率系の直積 $(\Omega,\mathcal{F},P;(\mathcal{F}_t))$ を考える。S は $(\mathcal{F}_t)$ に関する stopping time であり，従って $M\equiv B^S$ は $(\mathcal{F}_t)$ と P に関して martingale である。しかも $[M,M]_t=S\wedge t$ だから

$$E[[M,M]_{T-}^{\infty}\mid\mathcal{F}_T]=E[S-S\wedge T\mid\mathcal{F}_T]=I_{\{T<S\}},$$

即ち，$\|M\|_{BMO}=1$ となる。然るに，$\exp([M,M]_\infty)=e^S\notin L^1$。従って (12) が成立し得ない。

さて，(S) を仮定して定理3.14の逆を示そう。

定理3.16　$M\in BMO$ のとき，Z は (A_∞) をみたす。

(証明)　$M\in BMO$ ならば，$M^c, M^d\in BMO$ である。さらに

$$Z^c_t=\exp(M^c_t-\frac{1}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t),\qquad Z^d_t=\exp(M^d_t)\prod_{s\leq t}(1+\Delta M_s)e^{-\Delta M_s}$$

とおくと，明らかに $Z=Z^cZ^d$ がなりたち，しかも Z^c 及び Z^d が条件 (A_∞) をみたせば，Z も (A_∞) をみたす。従って，$M=M^c$ と $M=M^d$ の各場合について考察すればよい。

1) $M=M^c$ のとき：　$p>1$ を $\|M\|_{BMO}<\sqrt{2}(\sqrt{p}-1)$ をみたすように定める。次いで $p_0=\sqrt{p}+1$，$q_0=p_0/(p_0-1)=(\sqrt{p}+1)/\sqrt{p}$ とおくとき

$$\frac{1}{q_0(\sqrt{p}-1)^2}-\frac{p_0}{(p-1)^2}=\frac{1}{p-1}$$

なることに注意してHölderの不等式を用いれば

$$E\left[\left(\frac{Z_T}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\Big|\mathcal{F}_T\right]=E\left[\exp\left\{-\frac{1}{p-1}(M_\infty-M_T)-\frac{p_0}{2(p-1)^2}\langle M,M\rangle_T^\infty\right\}\exp\left\{\frac{1}{2q_0(\sqrt{p}-1)^2}\langle M,M\rangle_T^\infty\right\}\Big|\mathcal{F}_T\right]$$

$$\leqslant E\left[Z_\infty^{\left(-\frac{p_0}{p-1}\right)}\Big/Z_T^{\left(-\frac{p_0}{p-1}\right)}\ \Big|\ \mathcal{F}_T\right]^{1/p_0}E\left[\exp\left\{\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)^2}\langle M,M\rangle_T^\infty\right\}\Big|\mathcal{F}_T\right]^{1/q_0}。$$

ところで任意の実数 a に対して $Z^{(a)}\in\mathcal{M}_u$ だから，右辺の第1の条件付平均は1に等しく，第2の条件付平均は定理3.15から $\left\{1-\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)^2}\|M\|_{BMO}^2\right\}^{-1}$ より小である。従ってZに対する (A_p) 条件が成立する。

<u>2) $M=M^d$ のとき</u>： 仮定から $-1+\delta\leqslant\Delta M\leqslant\|M\|_{BMO}$ である。そこで，$m>\mathrm{Max}\{2,1/\delta\}$，$0<\alpha<1$ とし

$$x_\alpha=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\alpha}-1-\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\frac{1}{m\alpha}(m-1-\alpha)}\right\},\quad y_\alpha=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\alpha}-1+\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\frac{1}{m\alpha}(m-1-\alpha)}\right\}$$

とおくと，$-1<x_\alpha<0<y_\alpha<1/\alpha$ しかも $\alpha\longrightarrow 0$ のとき $x_\alpha\longrightarrow -1+1/m$ $y_\alpha\longrightarrow\infty$ となることが難なく検証できる。さらに $x_\alpha\leqslant x\leqslant y_\alpha$ のときは，不等式 $0<(1+x)^{-\alpha}(1-\alpha x)^{-1}\leqslant\exp(m\alpha x^2/2)$ がなりたっている。$-1+1/m<-1+\delta$ だから，α を十分小にとって

$$0<\alpha<\frac{2}{m\|M\|_{BMO}^2},\quad x_\alpha<-1+\delta,\quad y_\alpha\geqslant\|M\|_{BMO}$$

とすることが可能である。このとき

$$0<(1+\Delta M_s)^{-\alpha}(1-\alpha\Delta M_s)^{-1}\leqslant\exp\left(\frac{m\alpha}{2}\Delta M_s^2\right)\qquad(s\geqslant 0)$$

が成立する。次に，$p\equiv 1+2/\alpha$ (i.e. $\alpha=2/(p-1)$) とし，Schwarzの不等式と定理3.15を用いれば

$$E\left[\left(\frac{Z_T}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\Big|\mathcal{F}_T\right]=E\left[\left\{\exp(M_T-M_\infty)\prod_{T<s}(1-\alpha\Delta M_s)^{1/\alpha}e^{\Delta M_s}\right\}^{\frac{1}{p-1}}\prod_{T<s}(1+\Delta M_s)^{-\frac{1}{p-1}}(1-\alpha\Delta M_s)^{-1/2}\Big|\mathcal{F}_T\right]$$

$$\leq E\left[\frac{Z_\infty^{(-\alpha)}}{Z_T^{(-\alpha)}}\,\Big|\,\mathcal{F}_T\right]^{1/2} E\left[\prod_{T<s}(1+\Delta M_s)^{-\alpha}(1-\alpha\Delta M_s)^{-1}\,\Big|\,\mathcal{F}_T\right]^{1/2}$$

$$\leq E\left[\exp\left(\frac{m\alpha}{2}[M,M]_{T-}^{\infty}\right)\Big|\,\mathcal{F}_T\right]^{1/2}$$

$$\leq \left(1-\frac{m\alpha}{2}\|M\|_{BMO}^2\right)^{-1/2}$$

となり，Z が条件 $(A_{1+2/\alpha})$ をみたすことが示された。 □

定理 3.14 及び 3.16 によって，仮定 (S) の下では $M\in BMO$ なるための必要十分条件は Z が条件 (A_∞) をみたすこと，となる。

<u>定理 3.17</u>　次の2条件は同値である：

(i) $M\in BMO$　　　(ii) $\sup_{T\in\mathcal{S}}\left\|E\left[\log^+\frac{Z_T}{Z_\infty}\,\Big|\,\mathcal{F}_T\right]\right\|_\infty<\infty$.

(証明)　先ず (i) を仮定する。条件 (S) と不等式 $(1+x)e^{-x}\leq\exp\left(\frac{1}{2\delta}x^2\right)$ $(-1+\delta\leq x)$ により

$$\log\prod_{T<s}(1+\Delta M_s)^{-1}\exp(\Delta M_s)\leq\frac{1}{2\delta}\sum_{T<s}\Delta M_s^2\qquad(T\in\mathcal{S})$$

がなりたつ。すると $E\left[\log^+\frac{Z_T}{Z_\infty}\,\Big|\,\mathcal{F}_T\right]$ は，

$$E\left[\left\{-(M_\infty-M_T)+\frac{1}{2}\langle M^c,M^c\rangle_T^\infty+\log\prod_{T<s}(1+\Delta M_s)^{-1}\exp(\Delta M_s)\right\}I_{\{Z_T>Z_\infty\}}\Big|\,\mathcal{F}_T\right]$$

$$\leq\|M\|_{BMO_1}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)E\left[[M,M]_{T-}^\infty\,\big|\,\mathcal{F}_T\right]$$

$$\leq\|M\|_{BMO_1}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\|M\|_{BMO}^2\ .$$

従って (ii) が示される。

次に (ii) を仮定して (i) を示そう。任意の $T\in\mathcal{S}$ に対し

$$E[\log^+ \frac{Z_{t\wedge T}}{Z_T} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}] \leq E[\log^+ \frac{Z_{t\wedge T}}{Z_\infty} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}]$$

が成立するため，予め $M \in \mathcal{M}_u$ を仮定できる。このとき，定理3.14の証明の中で述べた不等式 $\gamma x^2 \leq \log(1+x)^{-1} e^x$ $(-1<x\leq c_M)$ $0<\gamma<1/2$ を用いて

$$K \geq E[\log^+ \frac{Z_T}{Z_\infty} \mid \mathcal{F}_T] \geq E[M_T - M_\infty + \gamma [M,M]_T^\infty \mid \mathcal{F}_T] = \gamma E[[M,M]_T^\infty \mid \mathcal{F}_T]$$

が得られる。しかも $|\Delta M| \leq c_M$ だから $E[[M,M]_{T-}^\infty \mid \mathcal{F}_T] \leq K\gamma^{-1} + c_M^2$，即ち，$M \in BMO$ である。 □

§6. 逆向きHölderの不等式

確率測度 P の下で成立する事柄を $\hat{P}$ で観察する場合に，次の関係式が基本的な役割を果す。

<u>補題1</u>　任意の $U \in L^1(d\hat{P})$ に対して

$$\hat{E}[U \mid \mathcal{F}_T] = \frac{1}{Z_T} E[Z_\infty U \mid \mathcal{F}_T] \quad (T \in \mathcal{S}) \tag{13}$$

が成立する。ここに $\hat{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_T]$ は $\hat{P}$ に関する条件付平均である。

(13) は条件付平均の定義から直ちに検証し得るので，証明は省略する。前節と同様，これからの議論においてもつねに条件(S)が仮定されているものとする。

<u>補題2</u>　$M \in BMO$ のとき，次の不等式をみたす定数 $a>1$ が存在する：

$$\hat{P}(Z_\infty > \lambda) \leq 2(1+\|M\|_{BMO})\lambda P(Z_\infty > \frac{\lambda}{a}) \quad (\lambda > 0) \tag{14}$$

(証明)　$\lambda>0$ に対して，$T = \inf\{t; Z_t > \lambda\} \in \mathcal{S}$ を定める。

すると $Z_T=(1+\Delta M_T)Z_{T-}\leq(1+\|M\|_{BMO})\lambda$。また $M\in BMO$ を仮定すると定理3.16により，Zは或る $p>1$ に対し条件 (A_p) をみたす。そこで

$$K\equiv\sup_{T\in\mathcal{S}}\left\|\mathcal{E}\left[\left(\frac{Z_T}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\middle|\mathcal{F}_T\right]\right\|_\infty ,\quad a\equiv 2^p K^{p-1}$$

とおく。$K\geq 1$ だから明らかに $a>1$ である。さらに

$$N_t\equiv\mathbb{P}(Z_\infty\leq Z_T/a\mid\mathcal{F}_t)\qquad(t\geq 0)$$

を考えると，当然 $N\in\mathbf{H}^\infty$ であって，しかも補題1により

$$N_T=Z_T\hat{\mathcal{E}}\left[\frac{N_\infty}{Z_\infty}\middle|\mathcal{F}_T\right]$$

と表現できる。$N_\infty=I_{\{Z_\infty\leq Z_T/a\}}$ に注意し，$p^{-1}+q^{-1}=1$ として Hölder の不等式を用いると

$$\begin{aligned}N_T^p&\leq Z_T^p\,\hat{\mathcal{E}}[Z_\infty^{-q}\mid\mathcal{F}_T]^{p-1}\,\hat{\mathcal{E}}[N_\infty^p\mid\mathcal{F}_T]\\&\leq Z_T\,\mathcal{E}[Z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}\mid\mathcal{F}_T]^{p-1}\,\frac{1}{Z_T}\mathcal{E}[Z_\infty I_{\{Z_\infty\leq Z_T/a\}}\mid\mathcal{F}_T]\\&\leq K^{p-1}a^{-1}=2^{-p}\quad。\end{aligned}$$

即ち $N_T\leq 1/2$ が求まる。このとき

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}I_{\{T<\infty\}}&\leq\mathbb{P}(Z_\infty>Z_T/a,\ T<\infty\mid\mathcal{F}_T)\\&\leq\mathbb{P}(Z_\infty>\tfrac{\lambda}{a}\mid\mathcal{F}_T)\end{aligned}$$

であるから，$\mathbb{P}(T<\infty)\leq 2\mathbb{P}(Z_\infty>\lambda/a)$ がでる。さらに $Z\in\mathfrak{M}_u$ 及び $\{Z_\infty>\lambda\}\subset\{T<\infty\}$ に注意すれば

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$E[Z_\infty ; Z_\infty > \lambda] \leq E[Z_T ; T < \infty]$$

$$\leq (1 + \|M\|_{BMO})\lambda P(T < \infty)$$

$$\leq 2(1 + \|M\|_{BMO})\lambda P(Z_\infty > \frac{\lambda}{a}) \text{。} \qquad \square$$

次の定理は，F. W. Gehring [33] の結果を Doléans-Meyer [25] が確率論の観点から眺め直し拡張したもので，確率測度の変換と BMO の関係を論ずる上で極めて重要である。

<u>定理 3.18</u>　$M \in BMO$ のとき，次の不等式をみたす $\varepsilon > 0$ が存在する：

$$(15) \qquad E[Z_\infty^{1+\varepsilon} \mid \mathcal{F}_T] \leq 3 Z_T^{1+\varepsilon} \qquad (T \in \mathcal{S})$$

（証明）　$M \in BMO$ を仮定するとき，定理 3.16 によって Z は或る $p > 1$ に対し条件 (A_p) をみたす。一方，定理 3.12 系から $Z \in \mathfrak{M}_u$ となるため，定理 3.13 により任意の $T \in \mathcal{S}$ に対し Z^T は上と合一の p に関して条件 (A_p) をみたすことになる。しかも仮定 (S) があるから $Z \in H^{\infty, loc}$。従って，$Z \in H^\infty$ なる場合に限定して論ずることができる。そこで，$l = 2(1 + \|M\|_{BMO})$ とおけば，補題 2 によって

$$(16) \qquad E[Z_\infty ; Z_\infty > \lambda] \leq l \lambda P(Z_\infty > \frac{\lambda}{a}) \qquad (\lambda > 0)$$

をみたす $a > 1$ が存在する。$b_\varepsilon = l\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} a^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ とおいて，$b_\varepsilon \longrightarrow 0$ $(\varepsilon \to 0)$ に注意すれば，$\varepsilon > 0$ を十分小にとって，$b_\varepsilon \leq 1/3$ とできる。このように設定しておいて，(16) の両辺に $\varepsilon\lambda^{\varepsilon-1}$ を掛けて λ に関して 1 から ∞ まで積分すると，左辺については

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$\varepsilon \int_1^\infty \mathbb{E}[Z_\infty ; Z_\infty > \lambda] \lambda^{\varepsilon-1} d\lambda = \mathbb{E}[Z_\infty^{1+\varepsilon} - Z_\infty ; Z_\infty > 1],$$

一方，右辺については

$$\ell \varepsilon \int_1^\infty \lambda^\varepsilon P(Z_\infty > \frac{\lambda}{a}) d\lambda \leqq b_\varepsilon \mathbb{E}[Z_\infty^{1+\varepsilon} ; Z_\infty > \frac{1}{a}]$$

となる。依って

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_\infty^{1+\varepsilon} - Z_\infty ; Z_\infty > 1] &\leqq b_\varepsilon \mathbb{E}[Z_\infty^{1+\varepsilon} ; Z_\infty > \frac{1}{a}] \\ &\leqq \frac{1}{3} \mathbb{E}[Z_\infty^{1+\varepsilon} ; Z_\infty > 1] + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となり，$\mathbb{E}[Z_\infty^{1+\varepsilon} ; Z_\infty > 1] \leqq 2$ が得られる。従って，$\mathbb{E}[Z_\infty^{1+\varepsilon}] \leqq 3$ である。この結果から (15) を導くには，§1の補題2を適用すればよい。 □

式 (15) は"逆向きHölderの不等式"と云われ，$Z \in H^{1+\varepsilon}$ をも意味している。

次に $W_t = Z_t^{-1}$ とおく。明らかに $W \in \hat{\mathfrak{M}}_u$，$W_\infty d\hat{P} = dP$ である。便宜上 $\hat{P}$ に関する条件 (A_p), (A_∞) を $(\hat{A}_p)$, $(\hat{A}_\infty)$ で示した。

<u>系 1</u>　(A_∞) と $(\hat{A}_\infty)$ は，同値な条件である。

(証明)　Z が (A_∞) をみたすとき，定理3.14から $M \in BMO$ となる。すると定理3.17により適当な $\varepsilon > 0$ に対して (15) がなりたち，これを補題1を用いて書き直すと

$$\hat{\mathbb{E}}[\left(\frac{W_T}{W_\infty}\right)^\varepsilon \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^{1+\varepsilon} \mid \mathcal{F}_T] \leqq 3 \quad (T \in \mathcal{S})$$

が得られる。従って，W は $p > 1 + 1/\varepsilon$ なる p に対して $(\hat{A}_p)$ 条件をみたす。同様の理由により逆が成立する。 □

$BMO_c = BMO \cap \mathcal{L}_c$ とおく。これは BMO の閉部分空間である。各 $M \in BMO_c$ に方程式 $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dM_s$ の解 Z を対応させる関数を Ψ とする。前述したように，$\Psi(M) = Z \in \mathbf{H}^1$ である。

系2　$\Psi : BMO_c \ni M \longmapsto Z \in \mathbf{H}^1$ は連続である。

（証明）　$M^{(n)}, M \in BMO_c$ に対して，$\lim_{n\to\infty} \| M^{(n)} - M \|_{BMO} = 0$ を仮定するとき，$\lim_{n\to\infty} \| \Psi(M^{(n)}) - \Psi(M) \|_{\mathbf{H}^1} = 0$ を示す。$B = \sup_n \| M^{(n)} \|_{BMO}^2$ とおき，$B < 2(\sqrt{p}-1)^2$ とするとき定理3.1 によって

$$E\left[\left\{ \Psi(M^{(n)})_T \Big/ \Psi(M^{(n)})_\infty \right\}^{\frac{1}{p-1}} \Big| \mathcal{F}_T \right] \leq C_p \equiv \left\{ 1 - \frac{B}{2(\sqrt{p}-1)^2} \right\}^{-\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1}}$$

が成立する。従って，定理3.18 により $\varepsilon > 0$ が存在して

$$\sup_n E[\Psi(M^{(n)})_\infty^{1+\varepsilon}] < \infty$$

となる。他方 $| \langle M^{(n)}, M^{(n)} \rangle_\infty^{1/2} - \langle M, M \rangle_\infty^{1/2} | \leq \langle M^{(n)} - M, M^{(n)} - M \rangle_\infty^{1/2}$ に注意し Schwarz の不等式を用いれば

$$\| \langle M^{(n)}, M^{(n)} \rangle_\infty - \langle M, M \rangle_\infty \|_1 \leq \left\{ E[\langle M^{(n)}, M^{(n)} \rangle_\infty]^{1/2} + E[\langle M, M \rangle_\infty]^{1/2} \right\} E[\langle M^{(n)} - M, M^{(n)} - M \rangle_\infty]^{1/2}$$

$$\leq 2\sqrt{B} \, \| M^{(n)} - M \|_{BMO} \quad 。$$

さらに $\| M^{(n)}_\infty - M_\infty \|_2 \leq \| M^{(n)} - M \|_{BMO}$ であるから，$\Psi(M^{(n)})_\infty$ は $\Psi(M)_\infty$ に確率収束する。依って，$1 < r < 1+\varepsilon$ なる r に対して，$\Psi(M^{(n)})_\infty$ は $\Psi(M)_\infty$ に L^r－収束である。このとき Doob の不等式により

$$\| \Psi(M^{(n)}) - \Psi(M) \|_{\mathbf{H}^1} \leq C_r \| \Psi(M^{(n)})_\infty - \Psi(M)_\infty \|_r \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

がなりたつ。 □

例3.5からも分るように，系2を一般のBMOへ拡張することは望むべくもない。

§7. 確率測度の変換とBMO

Girsanov型の変換 $\Phi : \mathcal{L} \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}$ については

$$[\Phi(X), \Phi(X)]_t = \langle X^c, X^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \frac{\Delta X_s^2}{(1+\Delta M_s)^2} \qquad (X \in \mathcal{L})$$

が成立しており，従って仮定(S)の下では，次の関係式をみたす定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在する：

(17) $$C_1 [X, X]_s^t \leq [\Phi(X), \Phi(X)]_s^t \leq C_2 [X, X]_s^t \qquad (s < t) .$$

定理3.19 $M \in BMO$ のとき，任意の $X \in BMO$ に対して $\Phi(X) \in \widehat{BMO}$ となる。しかも，この場合 $\Phi : BMO \longrightarrow \widehat{BMO}$ は同型である。

（証明） 最初に

(18) $$\|X\|_{BMO} \leq C \|\Phi(X)\|_{\widehat{BMO}} \qquad (X \in \mathcal{L})$$

を示す。$\|\Phi(X)\|_{\widehat{BMO}} = 0$ から $X = 0$ がでるため，$0 < \|\Phi(X)\|_{\widehat{BMO}} < \infty$ を仮定して論ずることができる。また，$M \in BMO$ のとき定理3.16により Z はある(A_p)条件をみたす。そこで，$a = (2p\|\Phi(X)\|^2_{\widehat{BMO}})^{-1}$ (i.e., $ap\|\Phi(X)\|^2_{\widehat{BMO}} = 1/2$) とおいて定理3.15を用いると

$$\hat{E}[\exp\{ap[\Phi(X), \Phi(X)]_{T-}^{\infty}\} \mid \mathcal{F}_T] \leq \{1 - ap\|\Phi(X)\|^2_{\widehat{BMO}}\}^{-1} = 2 .$$

このとき(A_p)条件と関係式(17)を考慮して，Hölderの不等式を用いれば

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$E[\,[X,X]_{T-}^{\infty} \mid \mathcal{F}_T] \leq c_1^{-1} E[\,[\phi(X),\phi(X)]_{T-}^{\infty} \mid \mathcal{F}_T]$$

$$\leq c_1^{-1} a\, E\left[\left(\frac{Z_T}{Z_\infty}\right)^{1/p}\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^{1/p} \exp\{a[\phi(X),\phi(X)]_{T-}^{\infty}\} \mid \mathcal{F}_T\right]$$

$$\leq C_p \|\phi(X)\|_{\widehat{BMO}}^2\, E\left[\left(\frac{Z_T}{Z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}} \Big| \mathcal{F}_T\right]^{1-1/p} \hat{E}[\exp\{ap[\phi(X),\phi(X)]_{T-}^{\infty}\} \mid \mathcal{F}_T]^{1/p}$$

$$\leq C_p \|\phi(X)\|_{\widehat{BMO}}^2$$

となり，(18)が得られた。
一方，定理 3.18 系 1 により，$W \equiv 1/Z$ も $(\hat{A}_\infty)$ をみたしている。
しかも $(1+\Delta M)(1+\Delta\phi(M)) = 1$ だから

$$-1 + (1+\|M\|_{BMO})^{-1} \leq \Delta\phi(M) \leq \delta^{-1}$$

がなりたつ。依って前半と同じ論理によって不等式

$$\|X'\|_{\widehat{BMO}} \leq C\|\phi^{-1}(X')\|_{BMO} \qquad (X' \in \hat{\mathcal{L}})$$

が得られる。特に $X' = \phi(X)$ $(X \in \mathcal{L})$ とおくと

$$\|\phi(X)\|_{\widehat{BMO}} \leq C\|X\|_{BMO}$$

である。つまり $\phi : BMO \longrightarrow \widehat{BMO}$ は同型となる。 □

此処で話を少し前に戻して，定理 3.12 の逆がなりたつことを述べよう。

<u>定理 3.20</u> 或る $p>1$ に対して不等式

(19) $$Z_T^{1/p} \leq C_p\, E[Z_\infty^{1/p} \mid \mathcal{F}_T] \qquad (T \in \mathcal{S})$$

が成立するとき，$M \in BMO$ である。

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

(証明) 既に指摘してあるように，(19) から $Z \in \mathcal{M}_u$ がでる。また条件(S)が仮定されているため $Z \in H^{\infty, loc}$ となり，しかも Z が(19)をみたすとき，任意の $T \in \mathcal{S}$ に対し Z^T も(19)をみたすことから，証明は $Z \in H^\infty$ なる場合に限定し得る。
さて，$\lambda > 0$ として stopping time $T \equiv \inf\{s ; Z_s \geqq \lambda^p\}$ を考える。当然 $\{T < \infty\} \subset \{Z_T \geqq \lambda^p\}$ である。さらに式(19)の定数 C_p に対して，$0 < h < \min\{1, C_p^{-1}\}$ とし，(19)を適用すれば

$$\lambda P(T<\infty) \leqq E[Z_T^{1/p} ; T<\infty]$$

$$\leqq C_p E[Z_\infty^{1/p} ; T<\infty]$$

$$\leqq C_p E[Z_\infty^{1/p} ; Z_\infty^{1/p} > h\lambda] + C_p h \lambda P(T<\infty),$$

即ち，$\lambda P(T<\infty) \leqq (1-C_p h)^{-1} C_p E[Z_\infty^{1/p} ; Z_\infty^{1/p} > h\lambda]$ が得られる。
次に条件(S)から，$Z_T \leqq c_m Z_{T-}$ をみたす定数 $c_m > 0$ が存在するので

$$E[Z_\infty ; Z_\infty^{1/p} > \lambda] \leqq E[Z_\infty ; T<\infty] \leqq c_m E[Z_{T-} ; T<\infty] \leqq c_m \lambda^p P(T<\infty)$$

となり，従って

$$E[Z_\infty ; Z_\infty^{1/p} > \lambda] \leqq K \lambda^{p-1} E[Z_\infty^{1/p} ; Z_\infty^{1/p} > h\lambda]$$

が成立する。ただし，$K>0$ は C_p, c_m, h のみに依存する定数である。この不等式の両辺に $a\lambda^{a-1}$ $(a>0)$ を掛け，λ に関して区間 $[1,\infty[$ 上で積分すると，左辺については

$$E[Z_\infty \int_1^{Z_\infty^{1/p}} a\lambda^{a-1} d\lambda ; Z_\infty > 1] = E[Z_\infty^{1+a/p} - Z_\infty ; Z_\infty > 1],$$

右辺については

$$K\,E[Z_\infty^{1/p}\int_1^{h^{-1}Z_\infty^{1/p}} a\lambda^{p+a-2}\,d\lambda\ ;\ Z_\infty^{1/p}>h] = \frac{aK}{p+a-1}E[Z_\infty^{1/p}\{(\frac{Z_\infty^{1/p}}{h})^{p+a-1}-1\}\ ;Z_\infty^{1/p}>h]$$

$$\leq \frac{aK}{p+a-1}h^{1-p-a}E[Z_\infty^{1+a/p}\ ;\ Z_\infty^{1/p}>h]\ 。$$

ここで，$a>0$ を十分小にとって $0<\frac{aK}{p+a-1}h^{1-p-a}<\frac{1}{3}$ をみたすようにし，$\varepsilon=a/p$ とおけば

$$E[Z_\infty^{1+\varepsilon}-Z_\infty\ ;\ Z_\infty>1] \leq \frac{1}{3}E[Z_\infty^{1+\varepsilon}\ ;\ Z_\infty^{1/p}>h]$$

$$\leq \frac{1}{3}E[Z_\infty^{1+\varepsilon}\ ;\ Z_\infty>1] + \frac{1}{3}$$

となる。従って，$E[Z_\infty^{1+\varepsilon}]\leq 3$ が求まる。これに§1の補題2を適用すれば，逆向きHölderの不等式(15)が得られる。換言すると，Wに対する$(\hat{A}_\infty)$条件の成立が示されたことになる。このとき定理3.14及び定理3.18の系1によって $M\in BMO$ である。 □

なお，定理3.12により，或る $p>1$ に対し(19)が成立すれば，実は任意の $p>1$ に対しても成立するという結果も得られる。最後に，これまで述べてきた結果を整理しておく。

<u>定理 3.21</u> $Z\in\mathfrak{M}_u$ を仮定するとき，次の7条件は同値である：

(a) $M\in BMO$

(b) $\phi(M)\in \widehat{BMO}$

(c) Z に対する(A_∞)条件

(d) W に対する$(\hat{A}_\infty)$条件

(e) $\exists\varepsilon>0,\ E[Z_\infty^{1+\varepsilon}\mid\mathcal{F}_T]\leq C_\varepsilon Z_T^{1+\varepsilon}\quad(T\in\mathcal{S})$

(f) $Z_T^{1/p}\leq C_p E[Z_\infty^{1/p}\mid\mathcal{F}_T]\quad(1<p<\infty,\ T\in\mathcal{S})$

(g) $\sup_{T\in\mathcal{S}}\|E[\log^+\frac{Z_T}{Z_\infty}\mid\mathcal{F}_T]\|_\infty<\infty$

§8 確率測度の変換と $\mathbf{H}^p$

Girsanov 型の変換 ϕ は，BMO と $\widehat{\mathrm{BMO}}$ の間の同型写像をなすが，しかし後述の例3.9 によっても明らかなように，一般には $X \in \mathbf{H}^p$ から $\phi(X) \in \widehat{\mathbf{H}}^p$ がでない。そこで $1 \leq p < \infty$ に対し

$$\Phi_p(X)_t \equiv \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}^{1/p}} d\phi(X)_s \qquad (X \in \mathcal{L})$$

により定義される線形な mapping $\Phi_p : \mathcal{L} \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}$ を考えよう。明らかに $\Phi_p(X) = \phi(Z_-^{-1/p} \circ X)$ が成立している。これもやはり bijection であることが難なく検証できる。

<u>定理 3.22</u> $1 \leq p < \infty$ とし，$M \in \mathrm{BMO}$ を仮定する。このとき，任意の $X \in \mathbf{H}^p$ に対し，$\Phi_p(X) \in \widehat{\mathbf{H}}^p$ である。しかも mapping $\Phi_p : \mathbf{H}^p \longrightarrow \widehat{\mathbf{H}}^p$ は同型となる。特に $M \in \mathrm{BMO}_c$ ならば，$1<p<\infty$ $p^{-1} + q^{-1} = 1$ に対して

(20) $$\exp\left\{-\frac{1}{2q}\|\phi(M)\|^2_{\widehat{\mathrm{BMO}}}\right\} \leq \|\Phi_p\| \leq \exp\left\{\frac{1}{2q}\|M\|^2_{\mathrm{BMO}}\right\}$$

が成立する。ここに，$\|\Phi_p\|$ は Φ_p のノルムである。

(証明) <u>1) $1<p<\infty$ の場合</u>： $M \in \mathrm{BMO}$ とする。このとき，定理3.16 によって或る $p_0 > 1$ に対し，Z は条件 (A_{p_0}) をみたす。当然 $Z_\infty^{-1/(p_0-1)} \in L^1$ である。次に $Y' \in \widehat{\mathbf{H}}^\infty$ とし，$p_0^{-1} + q_0^{-1} = 1$ に関して Hölder の不等式を用いれば

$$E[\,[Y',Y']_\infty^{q/2}\,] \leq E[\,Z_\infty^{-\frac{1}{p_0-1}}\,]^{1/q_0}\ \hat{E}[\,[Y',Y']_\infty^{\frac{p_0 q}{2}}\,]^{1/p_0} < \infty \quad (1<p<\infty,\ \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1).$$

一方で，任意の $X \in \mathbf{H}^p$ に対し $[\phi(X),\phi(X)]_\infty^{p/2} \leq C_p [X,X]_\infty^{p/2} \in L^1$ だから，結局 $\int_0^\infty |d[\phi(X),Y']_s| \in L^1$ となる。また必要なら適当に stopping time を定めて処理すればよいから，さらに $\int_0^\infty Z_{s-}^{-1/p} |d[\phi(X),Y']_s| \in L^1$ を仮定しても一般性を失わない。このように設定しておい

て，定理2.13，定理3.12及びKunita-Watanabeの不等式を用いると

$$
\begin{aligned}
\hat{E}[|[\Phi_p(X), Y']_\infty|] &\leq E[Z_\infty \int_{\mathbb{R}_+} Z_{s-}^{-1/p} |d[\phi(X), Y']_s|] \\
&\leq C_p E[Z_\infty \int_{\mathbb{R}_+} Z_s^{-1/p} |d[\phi(X), Y']_s|] \\
&\leq C_p E[\int_{\mathbb{R}_+} Z_s^{1/q} |d[\phi(X), Y']_s|] \\
&\leq C_p E[\int_{\mathbb{R}_+} E[Z_\infty^{1/q} | \mathcal{F}_s] |d[\phi(X), Y']_s|] \\
&\leq C_p E[Z_\infty^{1/q} [Y', Y']_\infty^{1/2} [\phi(X), \phi(X)]_\infty^{1/2}] \\
&\leq C_p \hat{E}[[Y', Y']_\infty^{q/2}]^{1/q} E[[\phi(X), \phi(X)]_\infty^{p/2}]^{1/p} \\
&\leq C_p \|Y'\|_{\hat{H}^q} \|X\|_{H^p}
\end{aligned}
$$

がなりたつ。特に $M \in BMO_c$ のときは，定理3.12の式(11)において $\delta=1$ とおくことができ，しかも勿論 $Z_s = Z_{s-}$ でもあるから上の定数 C_p は $\exp(\|M\|_{BMO}^2/(2q))$ にとれる（依って(20)の右側不等式が得られる)。ここで，双役性 $\hat{H}^p = (\hat{H}^q)^*$ を考慮すれば，$\|\Phi_p(X)\|_{\hat{H}^p} \leq C_p \|X\|_{H^p}$ が求まる。従って，mapping $\Phi_p : H^p \to \hat{H}^p$ は有界である。

同様に，$\phi(M)$ もまた条件(S)をみたし，$M \in BMO$ から $\phi(M) \in \hat{BMO}$ がでるため

$$
\hat{\Phi}_p(X')_t = \int_0^t \frac{1}{W_{s-}^{1/p}} d\phi^{-1}(X')_s \qquad (X' \in \hat{\mathcal{L}})
$$

によって定義される線形な mapping $\hat{\Phi}_p : \hat{H}^p \longrightarrow H^p$ もまた有界となる。いま $X' \in \hat{H}^p$ に対して，$X \equiv \hat{\Phi}_p(X')$ とするとき，$X \in H^p$ $\Phi_p(X) = X'$ i.e., $\hat{\Phi}_p = \Phi_p^{-1}$。従って，$\Phi_p : H^p \longrightarrow \hat{H}^p$ は同型であ

る。特に $M \in BMO_c$ のときは、$\phi(M) \in \hat{BMO}_c$ となるので

$$\| \hat{\Phi}_p \| \leq \exp\left\{ \frac{1}{2q} \| \phi(M) \|^2_{\hat{BMO}} \right\},$$

従って，(20) の左側不等式が得られる。

<u>2) $p=1$ の場合</u>：定理 3.19 により任意の $Y' \in \hat{BMO}$ に対し

$$Y' = \phi(Y), \qquad c\|Y\|_{BMO} \leq \|Y'\|_{\hat{BMO}} \leq C\|Y\|_{BMO}$$

をみたす $Y \in BMO$ が存在する。しかも Fefferman 型の不等式から，任意の $X \in \mathbf{H}^1$ に対して

$$\begin{aligned}
\hat{E}\left[\int_{\mathbb{R}_+} |d[\Phi_1(X), Y']_s| \right] &\leq E\left[Z_\infty \int_{\mathbb{R}_+} Z_{s-}^{-1} |d[\phi(X), \phi(Y)]_s| \right] \\
&\leq C\, E\left[\int_{\mathbb{R}_+} |d[\phi(X), \phi(Y)]_s| \right] \\
&\leq C\, E\left[\int_{\mathbb{R}_+} |d[X, Y]_s| \right] \\
&\leq C \|X\|_{\mathbf{H}^1} \|Y\|_{BMO} \\
&\leq C \|X\|_{\mathbf{H}^1} \|Y'\|_{\hat{BMO}}
\end{aligned}$$

がなりたつ。ここで，$\hat{BMO} = (\hat{\mathbf{H}}^1)^*$ を考慮すれば

$$\|\Phi_1(X)\|_{\hat{\mathbf{H}}^1} \leq C\|X\|_{\mathbf{H}^1} \qquad (X \in \mathbf{H}^1)$$

が得られる。このように Fefferman 型の不等式を利用する点を除いてその他は 1) の場合と全く同じ論理で Φ_1 が $\mathbf{H}^1$ から $\hat{\mathbf{H}}^1$ への同型写像をなすことが検証できる。 □

ところで，定理 3.19 及び定理 3.22 の逆の問題，つまり ϕ が BMO

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$\widehat{BMO}$ を，Φ_p が H^p と $\hat{H}^p$ を同型とするとき，$M \in BMO$ であるか？という問題は非常に興味深いが，目下のところ何の手懸りも得られていない。

最後に，測度の変換と H^p の問題と関連して，簡単な注意を述べておく。

<u>定理 3.23</u>　$M \in \mathcal{L}_c$ とし $Z \in \mathcal{M}_u$，$Z_\infty > 0$ a.s を仮定するとき，次の (i), (ii) は同値である：

$$\text{(i)} \quad Z \in H^1 \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \Phi(M) \in \hat{H}^2$$

(証明)　先ず (i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す。この場合 $\Phi(M) \in \hat{\mathcal{M}}_u$ を仮定しても差し支えない。すると

$$\hat{E}[\langle \Phi(M), \Phi(M) \rangle_\infty] = 2\hat{E}[-\Phi(M)_\infty + \frac{1}{2}\langle \Phi(M), \Phi(M) \rangle_\infty]$$

$$= 2E[Z_\infty \log Z_\infty]$$

がなりたつ。ここで，S. Watanabe [92] が与えた不等式

$$E[Z_\infty \log Z_\infty] \leq 4\sqrt{2}\,\pi\,(E[Z^*] + 1)$$

を利用すれば，$Z \in H^1$ から (ii) がでる。

次に (ii) を仮定しよう。このとき

$$E[Z_t \log^+ Z_t] = \hat{E}[\log^+ Z_t]$$

$$= \hat{E}[-\Phi(M)_t + \frac{1}{2}\langle \Phi(M), \Phi(M) \rangle_t \;;\; Z_t \geq 1]$$

$$\leq \|\Phi(M)\|_{\hat{H}^1} + \frac{1}{2}\|\Phi(M)\|^2_{\hat{H}^2}$$

となるため，当然 $Z \in \mathbf{H}^1$ である。 □

この定理を用いて，$M \notin BMO$ のときには最早定理3.22が成立しないことを例証しよう。

例3.9 設定は例3.8と同一とする。ただし，此処では S の分布を $P'(S \in dt) \equiv I_{[1,\infty[}(t)\, t^{-2}\, dt$ と定める。すると $M \equiv B^S \in \mathcal{L}_c$ $Z_\infty = \exp(B_S - S/2)$ で，しかも

$$E[Z_\infty] = \int_{\mathbb{R}_+} P'(dt) \int_{\Omega''} \exp\left\{ B_t(\omega'') - \frac{t}{2} \right\} P''(d\omega'') = \int_1^\infty t^{-2}\, dt = 1$$

が成立するため，$Z \in \mathcal{M}_u$ である。さらに簡単な計算によって $E[\langle M, M\rangle_\infty^{1/2}] = 2$ i.e., $M \in \mathbf{H}^1$ が示せる。然るに $E[\langle M, M\rangle_\infty] = \int_1^\infty t\, P'(dt) = \infty$ i.e., $M \notin \mathbf{H}^2$ となり，定理3.23によって $W \notin \hat{\mathbf{H}}^1$ が得られる。依って，$\Phi_1(M) = W \circ \phi(M) = W - 1 \notin \hat{\mathbf{H}}^1$ である。

§9. 重荷付不等式と (A_p) 条件

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ に対し

$$f^*(x) = \sup_{y \neq x} \frac{1}{y - x} \int_x^y |f(t)|\, dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義される関数 f^* は Hardy-Littlewood の最大関数と云われている。確率論的に，これに対応する概念は $M \in \mathcal{L}$ に対する M^* であろう。古典解析の分野では，「$1 < p < \infty$，$0 < w \in L^1$ として重荷付不等式

$$(21) \qquad \int_{\mathbb{R}} f^*(x)^p\, w(x)\, dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, w(x)\, dx \qquad (f \in L^1_{loc})$$

が成立するための条件は何か？」という問題が，可なり以前から研究されてきた。その最も基本となる結果は，当然 $w(x) \equiv 1$ の場合であって，Hardy-Littlewood の不等式[36]として良く

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

知られている。これに対応するのが Doob の不等式であろう。さて (21) の問題であるが，E. M. Stein [84] は，例えば $w(x)=|x|^{\alpha}$ $(-1<\alpha<p-1)$ であればよいとした。また，C. Fefferman - E. M. Stein [30] は新たに次の形の不等式を与えている：

$$\int_{\mathbb{R}} f^*(x)^p w(x)\,dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w^*(x)\,dx \qquad (1<p<\infty).$$

従って $w^*(x)\leq Cw(x)$ ならば当然 (21) が成立することになる。併し乍ら，この問題に本質的な意味での決着を与えたのは B. Muckenhoupt [72] である。彼は，(21) が成立するためには

$$(22) \qquad \sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} < \infty$$

をみたすことが必要十分条件であるという結論を得た。ここに $|I|$ は区間 I の長さを表す。因に (22) には (A_p) 条件の名がある。実際は，これが本家本元の (A_p) 条件であって，C. Watari [94] により最初に提起された重荷付 Doob の不等式の問題を考察するために定義した条件 (A_p) (§5) は，その確率論的類似である。本稿での (A_p) 条件は勿論後者の意味である。なお，本節では条件 (S) の代りに，$Z\in\mathfrak{M}_u$，$Z_\infty>0$ を仮定するのみで十分であることを注意しておく。

先ず T. Tsuchikura [89] が与えた結果の紹介から始めよう。

<u>定理 3.24</u>　$1\leq p<\infty$ とし，Z に対し (A_p) 条件を仮定するとき，

$$(23) \qquad \lambda^p \hat{P}(X^*>\lambda) \leq C_p \hat{E}[|X_\infty|^p\,;\,X^*>\lambda] \qquad (\lambda>0,\ X\in\mathfrak{M}_u)$$

が成立する。

(証明)　最初に，$1\leq p<\infty$ に対し

$$(24)\qquad |X_T|^p \leq C_p \hat{E}[|X_\infty|^p | \mathcal{F}_T] \qquad (T \in \mathcal{S},\ X \in \mathcal{M}_u)$$

が成立することを示そう。$p=1$ のときは，(A_1) 条件の定義と (13) から $|X_T| \leq E[|X_\infty| | \mathcal{F}_T] \leq C\,\hat{E}[|X_\infty| | \mathcal{F}_T]$，また $1<p<\infty$ のときは (13) と Hölder の不等式を用いて

$$|X_T|^p \leq E\Big[\Big(\frac{Z_T}{Z_\infty}\Big)^{1/p}\Big(\frac{Z_\infty}{Z_T}\Big)^{1/p}|X_\infty| \,\Big|\, \mathcal{F}_T\Big]^p$$

$$\leq E\Big[\Big(\frac{Z_T}{Z_\infty}\Big)^{\frac{1}{p-1}} \Big| \mathcal{F}_T\Big]^{p-1} \hat{E}[|X_\infty|^p | \mathcal{F}_T]$$

$$\leq C_p\,\hat{E}[|X_\infty|^p | \mathcal{F}_T]$$

となる。

次に stopping time $T = \inf\{t\,;\,|X_t| > \lambda\}$ を定めると，明らかに $\{X^* > \lambda\} = \{T < \infty\} \subset \{|X_T| \geq \lambda\}$ である。従って (24) から

$$\lambda^p \hat{P}(X^* > \lambda) \leq \hat{E}[|X_T|^p\,;\,X^* > \lambda] \leq C_p\,\hat{E}[|X_\infty|^p\,;\,X^* > \lambda]$$

が成立する。 □

上の定理の逆は，A. Uchiyama [90] によって得られた。それを次に述べよう。

<u>定理 3.25</u> $1 \leq p < \infty$ に対して不等式 (23) がなりたてば，Z は (A_p) 条件をみたす。

（証明） Doléans-Meyer [25] に従い，先ず (23) から (24) を導く。そのために，$T \in \mathcal{S}$，$A \in \mathcal{F}_T$ として $Y_t \equiv E[X_\infty I_A | \mathcal{F}_t]$ $(X \in \mathcal{M}_u)$ を考える。当然 $Y \in \mathcal{M}_u$，$Y_\infty = X_\infty I_A$ で，しかも $T \leq t$ のとき $Y_t = X_t I_A$ となる。さらに $A \cap \{|X_T| > \lambda\} \subset \{Y^* > \lambda\}$ だから

(23) によって

$$\lambda^p \hat{P}(|X_T| > \lambda, A) \leq \lambda^p \hat{P}(Y^* > \lambda) \leq C_p \hat{E}[|Y_\infty|^p] = C_p \hat{E}[|X_\infty|^p ; A]$$

がなりたつ。$A \in \mathcal{F}_T$ は任意だから，この不等式は

$$\lambda^p I_{\{|X_T| > \lambda\}} \leq C_p \hat{E}[|X_\infty|^p \mid \mathcal{F}_T] \qquad (\lambda > 0)$$

を意味している。従って (24) が得られる。

そこで (24) を仮定し，Z に対する (A_p) 条件を証明しよう。
$p=1$ のとき，(24) から $E[Z_T |X_T|] \leq C\, E[Z_\infty |X_\infty|]$ $(X \in \mathcal{M}_u, T \in \mathcal{S})$。
特に $X_t \equiv P(\Lambda \mid \mathcal{F}_t)$ $(\Lambda \in \mathcal{F})$ とすると

$$E[Z_T ; \Lambda] = E[Z_T X_T] \leq C\, E[Z_\infty ; \Lambda] \quad 。$$

これが任意の $\Lambda \in \mathcal{F}$ に対して成立することから，$Z_T \leq C Z_\infty$ つまり (A_1) 条件が求まる。また $1 < p < \infty$ のときは，$\varepsilon > 0$，$D \in \mathcal{F}_T$ に対して

$$X_t = E[I_{D \cap \{Z_\infty \geq \varepsilon\}} Z_\infty^{-\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_t] \qquad (t \geq 0)$$

を定め，これに (24) を適用する。明らかに

$$0 \leq X_t \leq \varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}, \quad X_\infty = I_{D \cap \{Z_\infty \geq \varepsilon\}} Z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}, \quad X_T = E[I_{\{Z_\infty \geq \varepsilon\}} Z_\infty^{-\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_T] I_D$$

であるから，(24) より

$$E[Z_T E[Z_\infty^{-\frac{1}{p-1}} I_{\{Z_\infty \geq \varepsilon\}} \mid \mathcal{F}_T] ; D] \leq C_p E[Z_\infty^{-\frac{1}{p-1}} I_{\{Z_\infty \geq \varepsilon\}} ; D]$$

が得られる。$D \in \mathcal{F}_T$ は任意だから，$Z_T E[Z_\infty^{-\frac{1}{p-1}} I_{\{Z_\infty \geq \varepsilon\}} \mid \mathcal{F}_T]^{p-1} \leq C_p$。
ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，Z に対する (A_p) 条件が成立する。 □

§10. 重荷付Doobの不等式

本節では再び条件(S)を仮定して話を進める。最初に述べるのはMuckenhouptが得た結果の一般化であって，多くの重荷付不等式を考察する際の重要な手懸りとなっている。

定理3.26　$1<p<\infty$ とし，Z に対し (A_p) 条件を仮定するとき，或る $\alpha\in]0,p-1[$ が存在して，Z は条件 $(A_{p-\alpha})$ をみたす。

（証明）　$U_t=Z_t^{-\frac{1}{p-1}}$ とおくとき，Z に対する (A_p) 条件は不等式 $E[U_\infty\,|\,\mathcal{F}_t]\leqq C_p U_t$ の成立と同値である。そこで，Z に対する条件 $(A_{p-\alpha})$ を示すために，先ず不等式

$$(25)\qquad E[U_\infty^{1+\alpha}]\leqq 3E[U_\infty]$$

をみたす $\alpha>0$ が存在することの証明から始めよう。条件(S)が仮定されているため，U は局所有界である。しかも定理3.12の系により $Z\in\mathcal{M}_u$ となるので，任意の $T\in\mathcal{S}$ に対し Z^T もまた (A_p) 条件をみたす。従って，U がsubmartingaleであることを考慮すれば，U は予め有界として差し支えない。さて，$\lambda>0$ に対してstopping time $T=\inf\{t\,;\,U_t>\lambda\}$ を定めると，(S)から

$$U_T\leqq\delta^{-\frac{1}{p-1}}U_{T-}\leqq\delta^{-\frac{1}{p-1}}\lambda$$

がなりたつ。さらに定理3.18により $\varepsilon>0$ を適当にとって，逆向きHölderの不等式(15)が成立するようにできる。このとき

$$Y_t=\hat{P}(U_\infty\leqq\tfrac{1}{a}U_T\,|\,\mathcal{F}_t)\quad,\quad a=(3\times2^{1+\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon(p-1)}}$$

とおいて，Hölderの不等式を用いれば，(15)から

$$Y_T\leqq E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^{1+\varepsilon}\,\middle|\,\mathcal{F}_T\right]^{\frac{1}{1+\varepsilon}}P(U_\infty\leqq\tfrac{1}{a}U_T\,|\,\mathcal{F}_T)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

$$\leqslant 3^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \hat{E}\left[\frac{Z_T}{Z_\infty} I_{\{U_\infty \leqslant U_T/a\}} \middle| \mathcal{F}_T\right]^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

が得られる。ところで，$U_\infty \leqslant U_T/a$ のとき，$Z_T/Z_\infty = (U_\infty/U_T)^{p-1} \leqslant a^{-(p-1)}$ であるから

$$Y_T \leqslant 3^{\frac{1}{1+\varepsilon}} a^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(p-1)} = \frac{1}{2} \quad 。$$

従って，$\{T<\infty\} \subset \{U_T \geqslant \lambda\}$ に注意すれば

$$\frac{1}{2} I_{\{T<\infty\}} \leqslant (1-Y_T) I_{\{T<\infty\}}$$

$$\leqslant E\left[\left(\frac{U_T}{U_\infty}\right)^{p-1} I_{\{U_\infty > U_T/a,\, T<\infty\}} \middle| \mathcal{F}_T\right]$$

$$\leqslant a^{p-1} P\left(U_\infty > \frac{\lambda}{a} \middle| \mathcal{F}_T\right) ,$$

i.e., $$P(T<\infty) \leqslant 2a^{p-1} P\left(U_\infty > \frac{\lambda}{a}\right) \quad 。$$

このとき，$E[U_\infty \mid \mathcal{F}_T] \leqslant c\, U_T \leqslant c\,\delta^{-\frac{1}{p-1}} \lambda$ を用いて

$$E[U_\infty ; U_\infty > \lambda] \leqslant E[U_\infty ; T<\infty]$$

$$\leqslant C_{p,\delta} \lambda P(T<\infty)$$

$$\leqslant C_{p,\delta}\, a^{p-1} \lambda P\left(U_\infty > \frac{\lambda}{a}\right)$$

が成立する。この式の両端辺に $\varepsilon\lambda^{\varepsilon-1}$ を掛けて λ に関して区間 $[1,\infty[$ 上で積分すれば

$$E[U_\infty^{1+\varepsilon} - U_\infty ; U_\infty > 1] \leqslant \frac{C_{p,\delta}\, a^{p+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \varepsilon\, E\left[U_\infty^{1+\varepsilon} ; U_\infty > \frac{1}{a}\right]$$

となる。ここで $\varepsilon > 0$ を予め $C_{p,\delta}\, a^{p+\varepsilon} \varepsilon (1+\varepsilon)^{-1} \leqslant 1/3$ をみたすよ

うにとることにより (25) が得られる。これに §1 の補題 2 を適用して

$$E\left[\left(\frac{U_\infty}{U_T}\right)^{1+\varepsilon} \middle| \mathcal{F}_T\right] \leq 3E\left[\frac{U_\infty}{U_T} \middle| \mathcal{F}_T\right] \leq C_p \quad (T \in \mathcal{S}),$$

換言すれば, $E[(Z_T/Z_\infty)^{\frac{1+\varepsilon}{p-1}} | \mathcal{F}_T] \leq C_p$ なることが分る。従って, $\alpha \equiv \varepsilon(p-1)/(1+\varepsilon)$ とすると, $0<\alpha<p-1$, $(p-\alpha-1)^{-1} = (1+\varepsilon)/(p-1)$ だから, Z に対する $(A_{p-\alpha})$ 条件が証明された。 □

この定理において, 条件 (S) は除去できないことを, D. Bekolle - A. Bonami [1] が注意しているので, それを紹介しておく。

例 3.10 $\Omega \equiv]0,1]$ 上の Lebesgue 測度を P とし, $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$, 各 $\Lambda_k \equiv]1/(k+1)!, 1/k!]$ $(k=1,2,\cdots,n)$ から生成される σ-field を $\mathcal{F}_n$ とする。さらに

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} z_k I_{\Lambda_k}, \quad ただし \quad z_k = \frac{a2^k}{k!}, \quad a = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} P(\Lambda_k)\right\}^{-1}$$

とおく。すると, $0<Z$, $E[Z]=1$ である。次に, $Z_n \equiv E[Z|\mathcal{F}_n]$ を定義する。このとき $Z_0 = 1$ で, しかも任意の $n \geq 1$ に対し

$$Z_n = c_n I_{]0,\frac{1}{(n+1)!}]} + \sum_{k=1}^{n} z_k I_{\Lambda_k}, \quad ただし, c_n = (n+1)! \int_0^{1/(n+1)!} Z\, dP.$$

と表せるから

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Z_n}{Z} \middle| \mathcal{F}_n\right] &= I_{]\frac{1}{(n+1)!},1]} + c_n E\left[\frac{1}{Z}; \left]0, \frac{1}{(n+1)!}\right]\right] I_{]0,\frac{1}{(n+1)!}]} \\ &= I_{]\frac{1}{(n+1)!},1]} + \left\{(n+1)! \int_0^{1/(n+1)!} Z\, dP\right\}\left\{(n+1)! \int_0^{1/(n+1)!} \frac{1}{Z}\, dP\right\} I_{]0,\frac{1}{(n+1)!}]} \end{aligned}$$

となる。

一方, 任意の $\beta \geq 1$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$a^{-1}\int_0^{1/j!} Z\,dP = a^{-1}\sum_{k=j}^{\infty} z_k P(\Lambda_k) \leqslant \sum_{k=j}^{\infty}\frac{2^k}{(k!)^2} \leqslant \frac{2^{j+1}}{(j!)^2}$$

$$a\int_0^{1/j!}\frac{1}{Z}\,dP = a\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{z_k}P(\Lambda_k) = \sum_{k=j}^{\infty}2^{-k}\frac{k}{k+1} \leqslant 2^{-j+1}$$

がなりたつため

$$\left(j!\int_0^{1/j!} Z\,dP\right)\left(j!\int_0^{1/j!}\frac{1}{Z}\,dP\right) \leqslant 4$$

である。従って，$E[Z_n/Z_\infty \mid \mathcal{F}_n] \leqslant 4 \quad (n \geqslant 0)$ となり，Z に対する (A_2) 条件が示された。然るに，任意の $p>1$ に対し

$$E[Z^{-p}] = a^{-p}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k!}{2^k}\right)^p P(\Lambda_k) = \infty$$

なることが D'Alembert の定理を用いて難なく検証できる。依って，如何なる $0<\varepsilon\leqslant 1$ に対しても $(A_{2-\varepsilon})$ 条件は成立し得ない。

<u>定理 3.27</u>　$1<p<\infty$ に対して，重荷付 Doob の不等式

$$(26)\qquad \hat{E}[(X^*)^p] \leqslant C_p\,\hat{E}[|X_\infty|^p] \qquad (X\in\mathfrak{M}_u)$$

が成立するための必要十分条件は，Z が (A_p) をみたすことである。

（証明）必要条件なることは，定理 3.25 により明らかである。そこで Z に対し条件 (A_p) を仮定して (26) を示そう。定理 3.26 によって，$0<\alpha<p-1$ なる α を適当に選び Z が $(A_{p-\alpha})$ 条件をみたすようにできる。このとき，$p_0=p-\alpha$, $q_0=(p-\alpha)/(p-\alpha-1)$ とおいて Hölder の不等式を用いると，任意の $X\in\mathfrak{M}_u$ に対し

$$|X_t| \leqslant E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_t}\right)^{1/p_0}\left(\frac{Z_t}{Z_\infty}\right)^{1/p_0}|X_\infty| \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right]$$

$$\leq E[(\frac{Z_t}{Z_\infty})^{\frac{1}{p-\alpha-1}} | \mathcal{F}_t]^{1/q_0} \hat{E}[|X_\infty|^{p_0} | \mathcal{F}_t]^{1/p_0}$$

となる。即ち，$X^* \leq C_{p,\alpha} \sup_t \hat{E}[|X_\infty|^{p_0} | \mathcal{F}_t]^{1/p_0}$ である。これに Doob の不等式を適用すれば

$$\hat{E}[(X^*)^p] \leq C_{p,\alpha} \hat{E}[\sup_t \hat{E}[|X_\infty|^{p_0} | \mathcal{F}_t]^{p/p_0}] \leq C_{p,\alpha} \hat{E}[|X_\infty|^p]$$

が求まる。 □

上の証明では，(A_p) から $(A_{p-\alpha})$ がでるところを手懸りとした。併し乍ら，例3.10で明らかとなったように，仮定(S)なしには，これが成立するとは限らない。しかも，この例では $p=2$ のときの荷重ノルム不等式(26)の成立が分る。つまり，如何なる条件の下で重荷付Doobの不等式がなりたつか？ という問題については完全に解明されたわけではない。

系 $1<p<\infty$ とし，W が $(\hat{A}_p)$ 条件をみたすとき，次の不等式が成立する：

$$E[\sup_t \left| \int_0^t Z_s^{-1} d[X,Z]_s - X_t \right|^p] \leq C_p \sup_{T\in\mathcal{S}} E[\left| \int_0^T Z_s^{-1} d[X,Z]_s - X_T \right|^p] \quad (X \in \mathcal{M}_u)$$

これは，定理3.27と表裏の関係にあると見做し得る。

§11. 重荷付 Burkholder-Davis-Gundy の不等式

ここでは，T. Sekiguchi [80] と A. Bonami-D. Lépingle [3] がそれぞれ独立に得た結果を紹介しよう。

定理3.28 $M \in BMO$ を仮定するとき，次の不等式をみたす定数 $c, C>0$ が存在する：

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$(27) \qquad c\,\hat{E}[X^*] \leq \hat{E}[[X,X]_\infty^{1/2}] \leq C\,\hat{E}[X^*] \qquad (X\in\mathcal{L})$$

（証明）　$X\in\mathcal{L}$ とする。このとき，$X=-\Phi(X)-[\Phi(X),M]$ だから

$$X^* \leq \Phi(X)^* + \int_{\mathbb{R}_+}|d[\Phi(X),M]_s| \quad 。$$

しかも，仮定(S)の下では，$[\Phi(X),\Phi(X)]_s^t \leq C[X,X]_s^t \ (s\leq t)$ 及び $\int_{\mathbb{R}_+}|d[\Phi(X),M]_s| \leq c\int_{\mathbb{R}_+}|d[\Phi(X),\Phi(M)]_s|$ が成立している。従って Fefferman の不等式及び Davis の不等式を適用して

$$\mathrm{Max}\left\{\hat{E}\left[\int_{\mathbb{R}_+}|d[\Phi(X),M]_s|\right],\ \hat{E}[\Phi(X)^*]\right\} \leq c\,\hat{E}[[X,X]_\infty^{1/2}]$$

となる。依って，(27)の左側不等式が得られた。

次に，右側不等式の証明に移ろう。不等式 $0\leq x\leq (a+bx)^{1/2}$ $(a,b>0)$ をみたす x の範囲が $0\leq x\leq (b+\sqrt{b^2+4a})/2$ であるという簡単な事実に問題を帰着させる Meyer の方法を採用する。定理3.7の証明と同様に，$1/X^*$ は有界と仮定でき，さらに $\hat{E}[X^*]\leq 1$ としても一般性を失わない。このような設定の下で $N'_t \equiv \hat{E}[1/X^*\,|\,\mathcal{F}_t]$ とおくと，§1の注意4で述べたように $\|X_-\circ N'\|_{\hat{BMO}} \leq \sqrt{6}$ である。また，定理2.36の系1により，$X^2-[X,X]_t = 2\int_0^t X_{s-}dX_s$ がなりたつから

$$\begin{aligned}
\left|\hat{E}[(X_\infty^2-[X,X]_\infty)N'_\infty]\right| &\leq 2\left|\hat{E}[(X_-\circ\Phi(X))_\infty N'_\infty]\right| + 2\,\hat{E}\left[\int_{\mathbb{R}_+}\frac{X_{s-}}{X^*}|d[X,\Phi(M)]_s|\right] \\
&\leq 2\left|\hat{E}[\Phi(X)_\infty(X_-\circ N')_\infty]\right| + 2\,\hat{E}\left[\int_{\mathbb{R}_+}|d[X,\Phi(M)]_s|\right] \\
&\leq 2\sqrt{6}\,\hat{E}[[\Phi(X),\Phi(X)]_\infty^{1/2}] + \hat{E}\left[\int_{\mathbb{R}_+}|d[\Phi(X),\Phi(M)]_s|\right] \\
&\leq c\,\hat{E}[[X,X]_\infty^{1/2}]
\end{aligned}$$

である。このとき

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

$$\hat{E}[[X,X]_\infty^{1/2}] \leq \hat{E}[X^*]^{1/2}\,\hat{E}[\frac{[X,X]_\infty}{X^*}]^{1/2}$$

$$\leq \{ 1 + |\hat{E}[(X_\infty^2 - [X,X]_\infty)\frac{1}{X^*}]| \}^{1/2}$$

$$\leq (1 + C\hat{E}[[X,X]_\infty^{1/2}])^{1/2}$$

となり，前述の不等式 $0 \leq x \leq (a+bx)^{1/2}$ の問題に帰着された。ゆえに，$\hat{E}[[X,X]_\infty^{1/2}] \leq C$ である。 □

さらに，第1章の定理1.8の証明と同じ方法を用いて，次の重荷付 Burkholder-Davis-Gundy の不等式が得られる。

<u>定理3.29</u> $M \in BMO$ を仮定するとき，任意の tame な関数 $F(x)$ に対して

$$\hat{E}[F(X^*)] \leq \hat{E}[F([X,X]_\infty^{1/2})] \leq C\,\hat{E}[F(X^*)] \quad (X \in \mathcal{L})$$

が成立する。

M. Izumisawa [43] は，離散時径数の場合の不等式 (27) を考察し，もっと一般的な結果を得ている。また，Sekiguchi は，逆に (27) の左側不等式を仮定して $M \in BMO$ を導くと同時に，より広い観点から martingale に対する荷重ノルム不等式の問題を系統的に研究している（[80], [81]）。併し乍ら，この種の問題及び Girsanov 型の変換と BMO の問題等についてもまだ不明のまま残された事柄がいくつかある。今後の研究を待たねばなるまい。

References

[1] D. Bekolle and A. Bonami, Inégalités à poids pour le noyau de Bergman, C. R. Acad. Sc. Paris 286(1978), 775-778.

[2] S. N. Bernstein, Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, Math. Ann. 97(1927), 1-59.

[3] A. Bonami and D. Lépingle, Fonction maximale et variation quadratique des martingales en présence d'un poids, Séminaire de Probabilités XIII, Lecture Notes in Math. 721(1979), 294-306.

[4] D. L. Burkholder, Martingale transforms, Ann. Math. Stat. 37(1966), 1494-1504.

[5] ——————————, Distribution function inequalities for martingales, Ann. Prob. 1(1973), 19-42.

[6] D. L. Burkholder, B. J. Davis and R. F. Gundy, Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. of the 6 th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 2(1972), 223-240.

[7] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales, Acta Math., 124(1970), 250-304.

[8]. D. L. Burkholder, R. F. Gundy and M. J. Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p, Trans. Amer. Math. Soc. 157(1971), 137 -153.

[9] L. Chevalier, Un nouveau type d'inégalités pour les martingales discrètes, Z.W 49(1979), 249-255.

[10] Y. S. Chow and H. Teicher, Probability theory, Springer-Verlag New York, 1978.

[11] K. L. Chung and J. L. Doob, Fields, optionality and measurability, Amer. J.of Math. 87(1965), 397-424.

[12] R. R. Coifman and C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math. 51(1974), 241-250.

[13] B. J. Davis, On the integrability of the martingale square function, Israel J. Math. 8(1970), 187-190.

[14] C. Dellacherie, Capacités et processus stochastiques, Ergebnisse der Math. 67, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1972.

[15] C. Dellacherie and P. A. Meyer, Probabilités et Potentiel (2 d edition), Herman, Paris 1980.

[16] C. Dellacherie, P. A. Meyer and M. Yor, Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Sém. Prob. XII, Lecture Notes in Math. 649(1978), 98 -113.

[17] H. Dinges, Inequalities leading to a proof of the classical martingale convergence theorem, Lecture Notes in Math. 190(1971), 9-12.

[18] C. Doléans-Dade, Existence du processus croissant naturel associé à un

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

potentiel de la classe (D), Z.W 9(1968), 309-314.

[19] C. Doléans-Dade, Variation quadratique des martingales continues à droite, Ann. Math. Stat. 40(1969), 284-289.

[20] ——————, Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semi-martingales, Z.W 16(1970), 181-194.

[21] ——————, Une martingales uniformément intégrables, mais non localement de carré intégrable, Sém. Prob. V, Lecture Notes in Math. 191(1971) 138-140.

[22] ——————, On the existence and unicity of solutions of stochastic differential equations, Z.W 36(1976), 93-101.

[23] C. Doléans-Dade and P. A. Meyer, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Sém. Prob. IV, Lecture Notes in Math. 124(1970), 77 -107.

[24] ——————————————, Une caracterization de BMO, Sém. Prob. XI Lecture Notes in Math. 581(1977), 383-389.

[25] ——————————————, Inégalités de normes avec poids, Sém. Prob. XIII, Lecture Notes in Math. 721(1979), 313-331.

[26] J. L. Doob, Stochastic processes, J. Wiley and sons, New York 1953.

[27] ——————, Regularity properties of certain families of chance variables, Trans. Amer. Math. Soc. 47(1940), 455-486.

[28] ——————, Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. of the third Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. 1954/55, vol.2 49-80.

[29] C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation, Bull. Amer. Math. Soc. 77(1971), 587-588.

[30] C. Fefferman and E. M. Stein, Some maximal inequalities, Amer. J. Math. 93 (1971), 137-193.

[31] A. M. Garsia, Martingale inequalities, Seminar Notes on Recent Progress, New York, Benjamin 1973.

[32] ——————, Topics in almost everywhere convergence, Markham Publishing Co, Chicago 1970.

[33] F. W. Gehring, The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping, Acta Math. 130(1973), 265-277.

[34] R. K. Getoor and M. J. Sharpe, Conformal martingales, Inventiones math. 16 (1972), 271-308.

[35] I. V. Girsanov, On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, Theor. Prob. Appl. 5 (1960), 285-301.

[36] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A maximal theorem with function-theoretic

applications, Acta. Math. 54(1930), 81-116.

[37] R. Isaac, A proof of the martingale convergence theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 16(1965), 842-844.

[38] K. Ito, Stochastic integral, Proc. Imperial Acad., Tokyo 20(1944), 519-524.

[39] ———, On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J.3 (1951), 55-65.

[40] ———, Markov 過程を定める微分方程式, 阪大全国紙上数学談話会誌 1077 (1942), 1352-1400.

[41] K. Ito and S. Watanabe, Transformation of Markov processes by multiplicative functionals, Ann. Inst. Fourier 15(1965), 15-30.

[42] ———————————, Introduction to stochastic differential equations, Kyoto, Kinokuniya (1976), 1-30.

[43] M. Izumisawa, Weighted norm inequality for operators on martingales, Tôhoku Math. J., 32(1980), 1-8.

[44] M. Izumisawa and N. Kazamaki, Weighted norm inequalities for martingales, Tôhoku Math. J., 29(1977), 115-124.

[45] M. Izumisawa, T. Sekiguchi and Y. Shiota, Remark on a characterization of BMO-martingales, Tôhoku Math. J., 31(1979), 281-284.

[46] J. Jacod, Calcul stochastique et problèmes de martingales, Lecture Notes in Math. 714, Springer-Verlag 1979.

[47] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14(1961), 415-426.

[48] N. Kazamaki, A characterization of BMO-martingales, Sém. Prob.X, Lecture Notes in Math. 511(1976), 536-538.

[49] ——————, On a problem of Girsanov, Tôhoku Math. J., 29(1977), 597-600.

[50] ——————, A property of BMO-martingales, Math. Rep. Toyama Univ., 1(1978) 55-63.

[51] ——————, A sufficient condition for the uniform integrability of exponential martingales, Math. Rep. Toyama Univ., 2(1979), 1-11.

[52] ——————, An elementary proof of a theorem of Novikov on exponential martingales, Math. Rep. Toyama Univ., 2(1979), 65-68.

[53] ——————, Transformation of H^p-martingales by a change of law, Z.W 46 (1979), 343-349.

[54] K. Krickeberg, Convergence of martingales with a directed index set, Trans. Amer. Math. Soc., 83(1956), 313-337.

[55] H. Kunita, 確率過程の推定, 産業図書 1976.

[56] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J., 30(1967), 209-245.

[57] C. W. Lamb, A short proof of the martingale convergence theorem, Proc. Amer.

Math. Soc., 38(1973), 215-217.

[58] E. Lenglart, Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilité, Z.W 39(1977), 65-70.

[59] P. Lévy, Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchainées, Bull. Sci. Math. 59(1935), 84-96.

[60] B. Maisonneuve, Quelques martingales remarquables associées à une martingale continue, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 3(1968), 13-27.

[61] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, Quelques théorème sur les fonctions indépendantes, Studia Math. 7(1938), 104-120.

[62] P. A. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, Illinois J. Math. 6(1962), 193-205.

[63] ——————, Decomposition of supermartingales : the uniqueness theorem, Illinois J. Math. 7(1963), 1-17.

[64] ——————, Probabilités et Potentiel, Paris, Hermann 1966.

[65] ——————, Intégrales stochastiques I-IV, Sém. Prob. I, Lecture Notes in Math. 39(1967), 72-162.

[66] ——————, Le dual de H^1 est BMO (cas continu), Sém. Prob. VII, Lecture Notes in Math. 321(1972), 136-145.

[67] ——————, Martingales and stochastic integrals I, Lecture Notes in Math. 284, Springer 1972.

[68] ——————, Un cours sur les intégrales stochastiques, Sém. Prob. X, Lecture Notes in Math. 511(1976), 245-400.

[69] ——————, Le théorème fondamental sur les martingales locales, Sém. Prob. XI, Lecture Notes in Math. 581(1977), 463-464.

[70] ——————, Sur un théorème de C. Herz et D. Lépingle, Sém. Prob. XI, Lecture Notes in Math. 581(1977), 465-469.

[71] P. W. Millar, Martingales with independent increments, Ann. Math. Stat. 40 (1969), 1033-1041.

[72] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. 165(1972), 207-226.

[73] J. Neveu, Martingales à temps discret, Masson, Paris 1972.

[74] A. A. Novikov, On an identity for stochastic integrals, Theor. Prob. Appl. 17(1972), 717-720.

[75] ——————, On conditions for uniform integrability of non-negative martingales, Intern. Symp. on Stoch. Diff. Equa. Vilnius(1978).

[76] M. Pratelli, Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrables, Sém. Prob. X, Lecture Notes in Math. 511(1976), 401-413.

[77] M. K. Rao, On decomposition theorems of Meyer, Math. Scand. 24(1969), 66-78.

[78] M. M. Rao, Stochastic processes and integration, Sijthoff and Noordhoff 1979.

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

[79] H. Van Schuppen and E. Wong, Transformation of local martingales under a change of law, Ann. Prob. 2(1974), 879-888.

[80] T. Sekiguchi, BMO-martingales and inequalities, Tôhoku Math. J. 31(1979), 355-358.

[81] ——————, Weighted norm inequalities on the martingale theory, Math. Rep. Toyama Univ. 3(1980), 37-100.

[82] L. A. Shepp, A first passage problem for the Wiener process, Ann. Math. Stat. 38(1967), 1912-1914.

[83] J. Snell, Applications of martingale system theorems, Trans. Amer. Math. Soc. 73(1952), 293-312.

[84] E. M. Stein, On certain operators on L^p spaces, Doctoral Dissertation, Univ. of Chicago, Chicago, III, 1955.

[85] W. F. Stout, Almost sure convergence, Academic Press, New York 1974.

[86] C. Stricker, Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtrations, Z.W 39(1977), 55-63.

[87] D. W. Stroock, Applications of Fefferman-Stein type interpolation to a probability theory and analysis, Comm. Pure Appl. Math. 26(1973), 477-495.

[88] T. Tsuchikura, マルチンゲールの法則収束と確率収束, Martingaleとその周辺に関するセミナー, 川渡, 1975.

[89] ——————, マルチンゲールの荷重平均についての一注意, 実解析セミナー, 八王子, 1976.

[90] A. Uchiyama, Weight functions on probability spaces, Tôhoku Math. J. 30 (1978), 463-470.

[91] J. Ville, Etude critique de la notion de collectif, Gauthier-Villars, Paris 1939.

[92] S. Watanabe, A remark on the integrability of $\sup_t X_t$ for martingales, Proc. of the second Japan-USSR symp. on Probability theory 2(1972), 147-155.

[93] ——————, 確率微分方程式, 産業図書, 1975.

[94] C. Watari, マルチンゲールのCalderon-Zygmund分解とその応用, 実解析セミナー, 八王子, 1976.

[95] C. Yoeurp, Décomposition des martingales locales et formules exponentielles, Sém. Prob. X, Lecture Notes in Math. 511(1976), 432-480.

Sem. on Probab.
Vol.51 1981年
P1-169

１９８１年2月 確率論セミナー発行