SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 52

無限分解可能分布

佐藤健一

1981

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

まえがき

無限分解可能分布については確率論の基礎的な本や極限定理の本，確率過程の本，分解問題の本などに沢山の記述があるが，その多くは1次元の場合であるので，多次元の場合を含めて，証明をつけて基本的なことをここにまとめてみた．私自身，この10年ほどの間に無限分解可能分布に関する問題のいくつかに取り組んだが，その過程で理論をきちんと整理しておく必要が生じてまとめたものと，私の考えた問題の一部が，この内容である．もちろん，これ以外にも種々の問題があり，興味深い結果があることは，途中の補足やあとがきにも触れる通りである．

1981年3月 金沢にて

佐藤健一

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

まえがき

無限分解可能分布については確率論の基礎的な本や極限定理の本，確率過程の本，分解問題の本などに沢山の記述があるが，その多くは1次元の場合であるので，多次元の場合を含めて，証明をつけて基本的なことをここにまとめてみた．私自身，この10年ほどの間に無限分解可能分布に関する問題のいくつかに取り組んだが，その過程で理論をきちんと整理しておく必要が生じてまとめたものと，私の考えた問題の一部が，この内容である．もちろん，これ以外にも種々の問題があり，興味深い結果があることは，途中の補足やあとがきにも触れる通りである．

1981年3月 金沢にて

佐藤健一

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

目次

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

無限分解可能分布

§1. Lévyの標準形

無限分解可能分布は，確率論における最も重要な分布のクラスといえるであろう．それは，第1に独立確率変数の和の極限定理に極限分布として現われ，第2に独立増分をもつ確率過程（加法過程）の分布として現われる．そして加法過程は，一方では空間的一様性を落すことによってマルコフ過程に拡張され，他方では（増分の平均0のものが）martingale へと拡張される．

まず，一般的な記号と定義を述べる．R^d は d 次元 Euclid 空間（$1 \le d < \infty$）．R^d 内の点 $x=(x_1, \cdots, x_d)$，$y=(y_1,\cdots,y_d)$ に対し

$$xy = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d$$
$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}.$$

$\chi_B(x)$ は集合 B の indicator 関数，すなわち

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

$\mathcal{B}(R^d)$ は R^d における Borel 集合の全体．$\mathcal{P}(R^d)$ は $(R^d, \mathcal{B}(R^d))$ の上の確率測度（分布ともいう）の全体．$\mathcal{P}(R^d)$ の中の列 $\{\mu_n\}$ の $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ への収束 $\mu_n \to \mu$ $(n\to\infty)$ は，すべての有界連続関数 $f(x)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R^d} f(x)\mu_n(dx) = \int_{R^d} f(x)\mu(dx)$$

ということで定義する（弱収束ともいう）．もっと一般に μ_n，μ が有限測度のときも収束 $\mu_n \to \mu$ $(n\to\infty)$ を，すべての有

界連続関数 $f(x)$ に対し上式が成り立つことで定義する (complete な収束ともいう).

1.1. 定義. $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(R^d)$ から

$$\mu(B)=\iint_{R^d\times R^d}\chi_B(x+y)\,\mu_1(dx)\,\mu_2(dy), \qquad B\in\mathcal{B}(R^d)$$

によって定義される $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ を, $\mu=\mu_1*\mu_2$ とあらわし, μ_1 と μ_2 とのたゝみこみ (convolution) という.

たゝみこみの演算は交換法則, 結合法則に従う. X_1, X_2 が独立な R^d 値の確率変数で, その分布がそれぞれ μ_1, μ_2 であるならば, X_1+X_2 の分布が $\mu_1*\mu_2$ となる.

1.2. 定義. μ が R^d の上の無限分解可能分布 (infinitely divisible distribution) であるとは, $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ で, 任意の正の整数 n に対し $\mu_n\in\mathcal{P}(R^d)$ が存在して, μ_n の自分自身との n 回のたゝみこみが μ となること, すなわち

$$\mu=\mu_n^{n*}=\underbrace{\mu_n*\cdots*\mu_n}_{n}$$

となることである. R^d の上の無限分解可能分布の全体を $I(R^d)$ とかく.

たとえば, 1次元の場合, Gauss分布 (例1.6), Poisson分布 (例1.7), 幾何分布 (問1 I), 指数分布 (問5D), χ^2 分布 (問5D), Cauchy分布 (問3H) などは無限分解可能であり, 2項分布, 一様分布などは無限分解可能でない (注10.4).

1.3. 補題. $I(R^d)$ はたゝみこみに関し閉じている.

証明は定義から明かである．

無限分解可能分布を研究するための最も有効な道具はFourier変換すなわち特性関数である．

1.4. 定義． $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ に対し

$$\hat{\mu}(z) = \int_{R^d} e^{izx}\,\mu(dx)\,, \qquad z\in R^d$$

で定義される関数 $\hat{\mu}(z)$ を μ の特性関数（characteristic function）という． R^d 値の確率変数 X の分布を μ_X とかき， μ_X の特性関数 $\hat{\mu}_X(z)$ を $\varphi_X(z)$ ともかく．

特性関数は分布を一意的に定める（附1B）．さらに，特性関数から分布を定める反転公式がある（その1つは附1N）．分布の収束は特性関数の各点収束または広義一様収束であらわされる（附1D）．分布のたたみこみは特性関数では積となる（附1F）から， μ が無限分解可能であることをいいかえれば，特性関数 $\hat{\mu}(z)$ の n 乗根として何かの特性関数になっているものがとれることである．

1.5. 例（δ分布）． 1点 $\gamma\in R^d$ に集中している分布 δ_γ の特性関数は $e^{i\gamma z}$ である． $e^{i\gamma z} = (e^{i\frac{\gamma}{n}z})^n$ であるから，δ分布は無限分解可能．

1.6. 例（Gauss分布）． $\gamma\in R^d$ とし， $A(z)$ を非負2次形式すなわち

(1.1) $$A(z)=\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk} z_j z_k\,, \qquad A=(a_{jk}) \text{ は対称，非負定値}$$

とする．このとき

(1.2) $$\varphi(z) = \exp\left(i\gamma z - \frac{1}{2}A(z)\right)$$

はある $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ の特性関数である．これを d 次元 Gauss 分布という．特性関数であることは，A が正定値のときは密度関数を具体的に与えることによって示され（問 1 G），A が一般のときは，

$$A_n(z) = A(z) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{d} z_j^{\,2}$$

とすると A_n は正定値であるから，Lévy の定理（問 1 E）を用いて，$\exp(i\gamma z - \frac{1}{2}A_n(z)) \to \exp(i\gamma z - \frac{1}{2}A(z))$ によって示される（別の方法は問 1 H）．正の整数 n に対し

$$\varphi(z) = \left[\exp\left(i\frac{\gamma}{n}z - \frac{1}{2n}A(z)\right)\right]^n$$

であるから，Gauss 分布は無限分解可能である．

1.7. 例（Poisson 分布） 平均 $\lambda>0$ の Poisson 分布，すなわち 1 次元の分布 μ で

$$\mu(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

のものは，無限分解可能である．

$$\hat{\mu}(z) = \exp(\lambda(e^{iz}-1)) = \left[\exp\left(\frac{\lambda}{n}(e^{iz}-1)\right)\right]^n, \qquad z\in R^1$$

であるから．

1.8. 例（複合 Poisson 分布）． N を平均 $\lambda>0$ に従う非負整数値の確率変数とする． $X_1, X_2, \cdots$ を独立同分布（その分布を μ_0）の R^d 値の確率変数で N とも独立とする．

(1.3) $$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

とし，$S = S_N$ によって R^d 値の確率変数 S を定義する．S の分布 μ を複合 Poisson 分布（compound Poisson distribution）という．その特性関数は

(1.4)
$$\hat{\mu}(z)=\exp\left[\lambda\int_{R^d}(e^{izy}-1)\,\mu_0(dy)\right]$$

である．なぜならば

$$\hat{\mu}(z)=E\left(e^{izS_N}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\{N=n\}}e^{izS_n}P(d\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}E\left(e^{izS_n}\right)P(N=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\mu}_0(z)^n\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}=\exp\left(\lambda\hat{\mu}_0(z)-\lambda\right)$$

であるから．すなわち

(1.5)
$$\mu=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mu_0^{n*}$$

である．ただし，$\mu_0^{0*}=\delta_0$ とする．（1.4）の形から，複合 Poisson 分布が無限分解可能であることがわかる．

次の定理が無限分解可能分布の特性関数に対する Lévy の標準形で，無限分解可能分布の理論における基本定理である．これは，一般の無限分解可能分布が，ある意味で Gauss 分布と複合 Poisson 分布とから構成されることを示している．これは，1次元（d=1）の場合に 1920 年代末から 1930 年代にかけて，de Finetti，Kolmogorov などによって特別な場合，Lévy によって一般の場合が得られ，そして直ちに d 次元へ拡張された（論文は [L2]，[L3] に引用されている）．Lévy は加法過程の path をくわしく研究し運動を連続な部分と跳びの部分とに分けて行くことによってこの定理を証明したのであって，彼の場合これは，加法過程の path 毎の分解定理（Lévy-伊藤の分解と呼ばれる）の平均をとった表現に過ぎない．また，こう考えることによって，表現（1.6）に現れる要素の意味が明瞭になる．Lévy-伊藤の分解の方が定理1.9より格段に深い内容を持っているのであり，それだけに，その証明は [L2]，[I1] に見られるように大変である．Khintchine は Lévy の標準形

だけならば，加法過程を使わずもっと簡単に導けることを示した．以下の証明はそれを d 次元に modify したもので，主として [C] によるが，一意性の証明は [P] の idea による．他に，凸集合の表現定理を使う証明法もある (Johansen (1966)).

1.9. 定理 (Lévy の表現定理). $\mu\in I(R^d)$ ならば

$$\hat{\mu}(z)=\exp\left[i\gamma z-\frac{1}{2}A(z)+\int_{R^d}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)\right],\quad z\in R^d \tag{1.6}$$

と表わされる．ただし

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma\in R^d,\ A(z)\text{ は非負2次形式，}\nu\text{ は }(R^d,\mathcal{B}(R^d))\text{ の上}\\ \text{の測度で }\ \nu(\{0\})=0,\quad \displaystyle\int_{R^d}\frac{|y|^2}{1+|y|^2}\nu(dy)<\infty.\end{array}\right. \tag{1.7}$$

この γ, A, ν は μ からただ1通りに定まる．逆に，(1.7) のような γ, A, ν に対しては (1.6) という特性関数をもつような $\mu\in I(R^d)$ がただ1つ存在する．

1.10. 定義. $\mu\in I(R^d)$ に対し，(1.7) をみたす γ, A, ν による $\hat{\mu}(z)$ の表現 (1.6) を Lévy の表現または Lévy の標準形といい，γ, A, ν を μ の3要素ということにする．測度 ν を μ の Lévy 測度という． $\exp[i\gamma z-\frac{1}{2}A(z)]$ あるいは $\exp[-\frac{1}{2}A(z)]$ あるいは $\exp[i\gamma_0 z-\frac{1}{2}A(z)]$ (γ_0 は次の注のもの) を特性関数とする Gauss 分布を，μ の Gauss 部分という．

1.11. 注. z を固定するとき

$$e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\left\{\begin{array}{ll}=e^{izy}-1-izy+izy\dfrac{|y|^2}{1+|y|^2}=O(|y|^2), & y\to0\\ =O(1), & |y|\to\infty\end{array}\right.$$

であるから (1.6) における ν による積分が存在する． ν が

特に

(1.8) $$\int_{R^d} \frac{|y|}{1+|y|}\nu(dy) < \infty$$

をみたすときには，(1.6) は

(1.9) $$\hat{\mu}(z) = \exp\left[i\gamma_0 z - \frac{1}{2}A(z) + \int_{R^d}(e^{izy}-1)\nu(dy)\right]$$

と表わされる．たゞし

(1.10) $$\gamma_0 = (\gamma_{01},\cdots,\gamma_{0d}),\qquad \gamma_{0j} = \gamma_j - \int_{R^d}\frac{y_j}{1+|y|^2}\nu(dy)$$

である．条件 (1.8) がみたされるときには表現 (1.9) の方が表現 (1.6) より重要である．それは，後に見るように γ_0 には内在的な意味があるからである． $h(y)$ を $h(y)=y+O(|y|^2)$，$y\to 0$，をみたす有界関数とすると，γ を変えれば，(1.6) における $e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}$ を $e^{izy}-1-izh(y)$ と変えた表現も得られる．その中で特に (1.6) がよいという理由はなく，γ には内在的な意味がない．

例 1.8 の複合 Poisson 分布は (1.9) の形の表現をもつ例である．この場合は $\gamma_0=0$，$A=0$，$\nu=\lambda[\mu_0]_{R^d\setminus\{0\}}$ である（$[\mu_0]_{R^d\setminus\{0\}}$ は μ_0 の $R^d\setminus\{0\}$ への制限）．

定理 1.9 のうち表現の一意性の部分は，次のように，他と独立に証明できる．

定理 1.9 のうち表現の一意性の証明． 関数 $\hat{\mu}(z)$ の表現 (1.6) が 2 通りあったとする．すなわち (1.7) をみたす γ_1，A_1，ν_1 および γ_2，A_2，ν_2 によって (1.6) の形に表わされた

とする． $\gamma=\gamma_1-\gamma_2$， $A=A_1-A_2$， $\nu=\nu_1-\nu_2$ とかこう． A は非負とは限らない 2 次形式，ν は signed measure である．

(1.11) $$i\gamma z-\frac{1}{2}A(z)+\int_{R^d}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)=0$$

となる．なぜならば，左辺は z の連続関数で $z=0$ のとき 0 であり，しかも exp を施すと仮定によって恒等的に 1 であるから．(1.11) の実部を考えると

(1.12) $$\int(\cos zy-1)\,\nu(dy)=\frac{1}{2}A(z)$$

が得られる．2次形式であるから

$$A(z+z')+A(z-z')-2\left(A(z)+A(z')\right)=0,$$

故に (1.12) から

$$\int[\cos(z+z')y+\cos(z-z')y-2-2(\cos zy+\cos z'y-2)]\,\nu(dy)=0$$

すなわち

$$\int(\cos z'y-1)(\cos zy-1)\,\nu(dy)=0$$

である． $(\cos zy-1)\nu(dy)=\nu_z(dy)$ とおく． ν_z は有限 signed measure で $\int(\cos z'y-1)\,\nu_z(dy)=0$ である． $\tilde{\nu}_z(B)=\nu_z(-B)$, $B\in\mathcal{B}(R^d)$， と定義すると $\int(\cos z'y-1)\,\tilde{\nu}_z(dy)=0$ であるから

$$\int(e^{iz'y}-1)(\nu_z+\tilde{\nu}_z)(dy)=0,$$

すなわち

$$\int e^{iz'y}(\nu_z+\tilde{\nu}_z)(dy)=2\nu_z(R^d)$$

である．左辺は，z' に関し定数だから 0 における δ 分布 δ_0 の定数倍の Fourier 変換である．Fourier 変換が一致すれば signed measure は一致する（問 1 M）から，

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

$$\nu_z + \tilde{\nu}_z = 2\nu_z(R^d)\delta_0$$

である．ところが ν_z, $\tilde{\nu}_z$ は 0 に mass をもっていないから，$\nu_z(R^d)=0$ が分る．これは

$$\int (\cos zy - 1)\nu\,(dy) = 0$$

を意味する．(1.12) によりこれは $A(z)=0$ を意味する．これを使うと (1.11) により

$$\int \left(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy) = -i\gamma z$$

である．右辺は1次形式であるから $\gamma(z'+z)+\gamma(z'-z)-2\gamma z'=0$，従って

$$\int \left(e^{i(z'+z)y} + e^{i(z'-z)y} - 2e^{iz'y}\right)\nu(dy)=0$$

すなわち

$$\int e^{iz'y}\,\nu_z(dy)=0$$

である．右辺は 0 測度の Fourier 変換だから，$\nu_z=0$ が分る（問1M）．故に $y\neq0$ において $\nu(dy)=0$ である．一方 (1.7) により ν は 0 に mass をもっていないから，$\nu=0$ である．$\gamma=0$ も分ったことになる．□

1.12. 補題．$\mu\in I(R^d)$ ならば $\hat{\mu}(z)$ は 0 にならない．

証明．正の整数 n に対し，μ_n が存在して $\hat{\mu}(z)=\hat{\mu}_n(z)^n$ であるから $|\hat{\mu}_n(z)|^2=|\hat{\mu}(z)|^{2/n}$ である．故に

$$\lim_{n\to\infty}|\hat{\mu}_n(z)|^2=\varphi(z)=\begin{cases}1 & (\hat{\mu}(z)\neq0 \text{ のとき})\\ 0 & (\hat{\mu}(z)=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

である．問1Aにより $\hat{\mu}(z)$ は $z=0$ の近傍で 0 にならないから，そこでは $\varphi(z)=1$ である．一方 $|\hat{\mu}_n(z)|^2$ は分布の特性函数である（問1J）から，問1Eによって $\varphi(z)$ は分布の特

性関数である．従って $\varphi(z)$ は連続になり（問1A），それは恒等的に 1 であることになる．故に $\hat{\mu}(z)=0$ となる点はない．□

上の補題の逆は成り立たない．たとえば $p\neq 1/2$ のときパラメター n, p の2項分布の特性関数は 0 にならないが，2項分布は無限分解可能でない．

$\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ で $\hat{\mu}(z)$ が 0 にならないならば，複素関数 $\log\hat{\mu}(z)$，$\hat{\mu}(z)^{1/k}$（kは正の整数）の分枝を，連続かつ $\log\hat{\mu}(0)=0$，$\hat{\mu}(0)^{1/k}=1$ という条件で一意的に定められる．今後 $\log\hat{\mu}(z)$ と $\hat{\mu}(z)^{1/k}$ はいつもこの分枝を示す意味で用いる．両者の関係は $\hat{\mu}(z)^{1/k}=e^{\frac{1}{k}\log\hat{\mu}(z)}$ である．また，$\hat{\mu}(z)^{t}$ を $\hat{\mu}(z)^{t}=e^{t\log\hat{\mu}(z)}$ によって定義する．$\hat{\mu}(z)^{t}$ がある分布の特性関数であるとき，その分布を μ^{t*} とかく．上の補題から，$\mu\in I(R^d)$ に対し $\mu=\mu_k^{k*}$ をみたす $\mu_k\in\mathcal{P}(R^d)$ は一意的で $\hat{\mu}_k(z)=\hat{\mu}(z)^{\frac{1}{k}}=e^{\frac{1}{k}\log\hat{\mu}(z)}$，すなわち $\mu_k=\mu^{\frac{1}{k}*}$ となる．

<u>1.13. 補題.</u> $\mathcal{P}(R^d)$ の中で $I(R^d)$ は収束に関し閉じている．

<u>証明.</u> $\mu_n\in I(R^d)$，$\mu\in\mathcal{P}(R^d)$，$\mu_n\to\mu$ とする．$\mu\in I(R^d)$ を示せばよい．$\hat{\mu}_n(z)\to\hat{\mu}(z)$ である（問1D）から，任意の正整数 k に対し $|\hat{\mu}_n(z)|^{2/k}\to|\hat{\mu}(z)|^{2/k}$ である．μ_n の無限分解可能性と問1J によって $|\hat{\mu}_n(z)|^{2/k}$ は特性関数であり，$|\hat{\mu}(z)|^{2/k}$ は連続（問1A）であるから，Lévy の定理（問1E）によって $|\hat{\mu}(z)|^{2/k}$ は特性関数である．故に，$|\hat{\mu}(z)|^{2}$ は無限分解可能分布の特性関数である．故に補題1.12 によって $\hat{\mu}(z)\neq 0$ である．しかも収束 $\hat{\mu}_n(z)\to\hat{\mu}(z)$ は広義一様（問1D）であるから，$\hat{\mu}_n(z)^{1/k}\to\hat{\mu}(z)^{1/k}$ で，$\hat{\mu}(z)^{1/k}$ はある分布の特性関数である（問1E）．□

定理1.9 のうち逆の部分の証明. (1.7) をみたす γ, A, ν に対しては特性関数 (1.6) をもつ無限分解可能分布がただ1つ存在することを示そう. まず, 存在すればただ1つであることは明かである (問1B). (1.6) の右辺を $\varphi(z)$ とする. $n>0$ に対し

$$\hat{\mu}_n(z)=\exp\left[i\gamma z-\frac{1}{2}A(z)+\int_{|y|>1/n}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)\right]$$

をみたす $\mu_n\in I(R^d)$ が存在する. なぜならば, これは適当な $\gamma_n\in R^d$ によって

$$\hat{\mu}_n(z)=\exp\left[i\gamma_n z-\frac{1}{2}A(z)+\int_{|y|>1/n}\left(e^{izy}-1\right)\nu(dy)\right]$$

と書け, ν を $\{|y|>1/n\}$ に制限したものは有限測度であるから, Gauss 分布 (例1.6) と複合 Poisson 分布 (例1.8) のたたみこみが μ_n となり, 補題1.3 によって $\mu_n\in I(R^d)$ である. $\hat{\mu}_n(z)\to\varphi(z)$ で, しかも $\varphi(z)$ は連続であるから, Lévy の定理 (問1E) と補題1.13 によって φ はある $\mu\in I(R^d)$ の特性関数である. □

1.14. 定理. $n=1,2,\cdots$ に対し μ_n が γ_n, A_n, ν_n による Lévy の表現をもつ R^d 上の無限分解可能分布であるとする. $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ とする. $\mu_n\to\mu$ となる必要十分条件は, μ が, ある γ, A, ν による Lévy の表現をもつ無限分解可能分布で, しかも次の3つが成り立つことである.

(a) $f(y)$ が有界連続で原点の近傍で 0 ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^d}f(y)\nu_n(dy)=\int_{R^d}f(y)\nu(dy).$$

(b) $z\in R^d$, $\varepsilon>0$ に対し

$$A_{n,\varepsilon}(z)=A_n(z)+\int_{|y|<\varepsilon}(zy)^2\nu_n(dy)$$

とおくとき，任意の z に対し

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=A(z)\,.$$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma\,.$$

<u>証明.</u> $\mu_n\to\mu$ とする．補題1.13によって $\mu\in I(R^d)$ となり，補題1.12と函1Dによって

(1.13) $$\log\hat{\mu}_n(z)\longrightarrow\log\hat{\mu}(z)$$ (広義一様)

である．仮定から

(1.14) $$\log\hat{\mu}_n(z)=i\gamma_n z-\frac{1}{2}A_n(z)+\int_{R^d}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu_n(dy)$$

である． $\rho_n(dy)=\dfrac{|y|^2}{1+|y|^2}\nu_n(dy)$ に対し

(1.15) $$\sup_n\rho_n(R^d)<\infty,$$

(1.16) $$\lim_{\ell\to\infty}\sup_n\int_{\{|y|>\ell\}}\rho_n(dy)=0$$

を示そう．

$$C_h=\{y=(y_1,\cdots,y_d)\in R^d:\ -h\leqslant y_j\leqslant h\quad(j=1,\cdots,d)\}$$

とおくと

$$-\int_{C_h}\log\hat{\mu}_n(z)dz=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}a_{n,jj}\int_{C_h}z_j^2dz-\int_{R^d}\nu_n(dy)\int_{C_h}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)dz$$

$$=\frac{1}{3}2^{d-1}h^{d+2}\sum_{j=1}^{d}a_{n,jj}+(2h)^d\int_{R^d}\left(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin hy_j}{hy_j}\right)\nu_n(dy)$$

である．ただし $a_{n,jj}$ は $A_n(z)$ における z_j^2 の係数（ゆえに

非負) である. h を固定するとき左辺は $-\int_{C_h} \log \hat{\mu}(z)dz$ に収束するから有界であり, また

$$\inf_{y\in R^d}\left(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin hy_j}{hy_j}\right)\frac{1+|y|^2}{|y|^2}>0$$

であるから, (1.15) が分る. $h\downarrow 0$ のとき

$$\frac{-1}{(2h)^d}\int_{C_h}\log\hat{\mu}(z)dz\to 0$$

であるから, $\varepsilon>0$ に対し n_0 と h_0 が存在して, $n\geqq n_0$ に対し

$$\int_{R^d}\left(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin h_0y_j}{h_0y_j}\right)\nu_n(dy)<\varepsilon$$

である. $|y|>2\sqrt{d}/h_0$ では $|y_{j_0}|>2/h_0$ となる j_0 が存在するから

$$1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin h_0y_j}{h_0y_j}\geqq 1-\left|\frac{\sin h_0y_{j_0}}{h_0y_{j_0}}\right|\geqq 1-\frac{1}{h_0|y_{j_0}|}>\frac{1}{2}$$

である. ゆえに

$$\frac{1}{2}\int_{\{|y|>2\sqrt{d}/h_0\}}\nu_n(dy)<\varepsilon \qquad (n\geqq n_0)$$

である. ゆえに

$$\int_{\{|y|>2\sqrt{d}/h_0\}}\rho_n(dy)<\varepsilon \qquad (n\geqq n_0)$$

である. これで (1.16) もいえたことになる. (1.15), (1.16) から Helly の選出定理 (内 1K) によって, 収束部分列 $\{\rho_{n_k}\}$ が選べる. $\rho_{n_k}\to\rho$ とし, ν を, $\nu(\{0\})=0$, $|y|>0$ では $\frac{1+|y|^2}{|y|^2}\rho(dy)$

$=\nu(dy)$ と定義する．明かに $\int_{R^d}\frac{|y|^2}{1+|y|^2}\nu(dy)<\infty$ である．$\varepsilon>0$ に対し $D_\varepsilon=\{y:|y|<\varepsilon\}$ とし，(1.14) を書き直して

(1.17) $$\log\hat{\mu}_n(z)=i\gamma_n z-\frac{1}{2}A_{n,\varepsilon}(z)+I_1+I_2,$$

$$I_1=\int_{D_\varepsilon^c}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\frac{1+|y|^2}{|y|^2}\rho_n(dy),$$

$$I_2=\int_{D_\varepsilon}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}+\frac{(zy)^2}{2}\right)\frac{1+|y|^2}{|y|^2}\rho_n(dy)$$

の形にする．以下，$n\to\infty$ は $\{n_k\}$ に沿ってとし，$\varepsilon>0$ は D_ε が ρ 連続集合すなわち $\rho(\partial D_\varepsilon)=0$ であるような ε に沿ってとする．まず問1L を用いて

(1.18) $$I_1\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{D_\varepsilon^c}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\frac{1+|y|^2}{|y|^2}\rho(dy)\xrightarrow[\varepsilon\downarrow0]{}\int_{R^d}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)$$

が分る．また，z を固定し $y\to0$ とするとき

$$\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}+\frac{(zy)^2}{2}\right)\frac{1+|y|^2}{|y|^2}=\left(e^{izy}-1-izy+\frac{(zy)^2}{2}\right)\frac{1+|y|^2}{|y|^2}+izy\longrightarrow 0$$

であるから

(1.19) $$\lim_{\varepsilon\downarrow0}\limsup_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,I_2=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\liminf_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,I_2=0$$

である．(1.13), (1.18), (1.19) によって (1.17) の実部を考えると

$$\lim_{\varepsilon\downarrow0}\limsup_{n\to\infty}A_{n,\varepsilon}(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\liminf_{n\to\infty}A_{n,\varepsilon}(z)\qquad(\text{有限})$$

が分る．これを $A(z)$ とする．$A_{n,\varepsilon}(z)$ が非負の2次形式であるから，$A(z)$ も非負の2次形式となる（ε を固定して z にいろいろの値（成分のうち高々2個が1で残りは0）を入れて収束する部分列をとり，次に $\varepsilon\downarrow0$ とすれば分る）．(1.13),

(1.17) を再び使うと

$$\mathrm{Re}\ \log \hat{\mu}(z) = -\frac{1}{2}A(z) + \mathrm{Re}\int_{R^d}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)$$

が得られる．一方 (1.19) の Re を Im に変えたものも成り立つから，(1.17) の虚部を考えると

$$\limsup_{n\to\infty}\gamma_n z = \liminf_{n\to\infty}\gamma_n z \qquad (\text{有限})$$

が分る．これは1次形式，すなわちある $\gamma\in R^d$ によって γz と書ける．ゆえに

$$\mathrm{Im}\log\hat{\mu}(z) = \gamma z + \mathrm{Im}\int_{R^d}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)$$

が得られる．以上によって，μ が γ, A, ν による Lévy 表現をもち，$n\to\infty$ と $\varepsilon\downarrow 0$ を上で述べた意味にとれば (a), (b), (c) が成り立つことが分った．$\varepsilon\downarrow 0$ において D_ε が ρ 連続集合であるような ε という制限をはずしても (b) が成り立つことは，ε に関する単調性から明かである．μ の Lévy 表現は一意的であることを既に確かめてあるから，部分列をとらないでも (a) の成立することが，上の証明を見なおせば分る．従って，(1.17) 以下の議論は，$n\to\infty$ を部分列をとらないでと理解しても成り立つことになり，(b), (c) も完全にいえる．

逆に，μ が γ, A, ν による Lévy 表現をもち，しかも (a), (b), (c) が成立するとしよう．ρ_n を上と同じに定義し $\rho(dy)=\frac{|y|^2}{1+|y|^2}\nu(dy)$ とする．ε は D_ε が ρ 連続集合であるようにとる．(a) から問1L と同様のことを用いて (1.18) がいえる．(a), (b) から ρ_n が一様有界であることが分るから，(1.19) もいえる．また (1.19) の Re を Im に変えたものもいえる．故に (1.17) の実部と虚部の極限を考えることと

によって

$$\lim_{n\to\infty} \log \hat{\mu}_n(z) = i\gamma z - \frac{1}{2}A(z) + \int_{R^d} \left(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)$$

がいえる．従って問1Dによって $\mu_n \to \mu$ である．□

<u>定理1.9のうち表現の可能性の証明．</u> $\mu \in I(R^d)$ とする．μ が複合Poisson分布の極限として表わされることを示そう．正の整数 n に対し $\mu^{\frac{1}{n}*}$ を用いて複合Poisson分布 μ_n を

$$\hat{\mu}_n(z) = \exp\left[n \int_{R^d} (e^{izy} - 1)\mu^{\frac{1}{n}*}(dy)\right]$$

によって定義する（(1.4)参照）．

$$\hat{\mu}_n(z) = \exp\left[n\left(\hat{\mu}(z)^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right] = \exp\left[n\left(e^{\frac{1}{n}\log\hat{\mu}(z)} - 1\right)\right]$$

$$= \exp\left[n\left(\frac{1}{n}\log\hat{\mu}(z) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]$$

であるから，$\mu_n \to \mu$ である．複合Poisson分布はLévy表現をもつ（注1.11）から，定理1.14によって μ もLévy表現をもつ．□

以上でLévyの表現定理の証明を終った．途中で得た定理1.14も，Lévyの表現のある意味での連続性を示す重要な結果である．

以下の各節で扱うのは，無限分解可能分布の種々の性質がLévyの表現定理における3要素でどのように表わされるか，という問題である．3要素 γ, A, ν のうち γ は単に μ の平行移動（translation）を表わし，A はGauss部分でその影響は容易に分ることが多いから，最も興味あるのはLévy測度 ν が種々の性質にどう関係するかという問題である．

Lévyの表現定理からすぐに次のことが分る．

__1.15. 系.__ $\mu \in I(R^d)$ でその3要素が γ, A, ν であるとき，任意の非負の実数 t に対し μ^{t*} という分布が存在して無限分解可能になり，その3要素は $t\gamma$, tA, $t\nu$ である．

線形変換で無限分解可能がどう変るかも容易に分る．系1.18は，T が射影（projection）のとき丸山（1970）でくり返し使われている性質である．

__1.16. 定義.__ ν が $\mathcal{B}(R^{d_1})$ の上の測度，T が R^{d_1} から R^{d_2} の中への可測写像であるとき，$\mathcal{B}(R^{d_2})$ の上の測度 $T\nu$ を $(T\nu)(\cdot) = \nu(T^{-1}(\cdot))$ によって定義する．X が R^{d_1} に値をとる確率変数ならば，X の分布 μ_X と TX の分布 μ_{TX} との関係がちょうど $\mu_{TX} = T\mu_X$ である．

T が R^d から R^d の中への線形変換（行列）であるとき，T の共役（転置行列）を T' であらわす．

__1.17. 補題.__ T が R^d から R^d の中への線形変換で $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ ならば，$\widehat{T\mu}(z) = \mu(T'z)$ である．

__証明.__ $\mu = \mu_X$ とすれば，$\widehat{T\mu}(z) = E e^{iz TX} = E e^{i(T'z)X}$ $= \hat{\mu}(T'z)$．

__1.18. 系.__ $\mu \in I(R^d)$ でその3要素を γ, A, ν とする．T が R^d から R^d の中への線形変換であれば，$T\mu$ も $I(R^d)$ に属し，その3要素 γ_T, A_T, ν_T は次の通りである．

(1.20) $$\gamma_T = ((\gamma_T)_1, \cdots, (\gamma_T)_d), \quad (\gamma_T)_j = (T\gamma)_j + \int_{R^d} (Ty)_j \left(\frac{1}{1+|Ty|^2} - \frac{1}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)$$

(1.21) $$A_T = TAT'$$ （A, A_T とそれを表わす対称行列とを同一視する）

(1.22) $\qquad \nu_T = [T\nu]_{R^d \setminus \{0\}}$ （すなわち $T\nu$ の $R^d\setminus\{0\}$ への制限）.

証明. 補題1.17によって

$$\widehat{T\mu}(z)=\hat{\mu}(T'z)=\exp\left[i\gamma T'z-\frac{1}{2}A(T'z)+\int\left(e^{i(T'z)y}-1-\frac{i(T'z)y}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)\right]$$

$$=\exp\left[i(T\gamma)z-\frac{1}{2}(TAT')(z)+\int\left(e^{izTy}-1-\frac{izTy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)\right]$$

$$=\exp\left[i\gamma_T z-\frac{1}{2}(TAT')(z)+\int\left(e^{izTy}-1-\frac{izTy}{1+|Ty|^2}\right)\nu(dy)\right]$$

となる．ここで γ_T は(1.20)とする．

$$\int_{R^d}\frac{|Ty|^2}{1+|Ty|^2}\nu(dx)\leq\|T\|\int_{|y|\leq 1}|y|^2\nu(dy)+\int_{|y|>1}\nu(dy)<\infty$$

であるから，$T\mu$ は(1.20)−(1.22)の γ_T, A_T, ν_T を3要素とする無限分解可能分布である．□

1.19. 系. T が R^d から ℓ 次元部分空間 M への射影であるとき，M と R^ℓ を同一視すれば，$T(I(R^d))=I(R^\ell)$ である．

1.20. 系. A を非負定値の対称行列で階数 $r<d$ とし，A の，0 でない固有値をすべて考えて，それらの固有空間の直和（r 次元）を V とする．$\hat{\mu}(z)=\exp(-\frac{1}{2}A(z))$ ならば，μ は V に集中している．

証明. A の固有値を（重複度だけ同じものを並べて）$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \underbrace{0, \cdots, 0}_{d-r}$ とする．$x_1, \cdots, x_d$ をこれらに対する固有ベクトルから成る正規直交系とする．これらは縦ベクトルと見なし，$x_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1d}\end{pmatrix}$, $\cdots$, $x_d=\begin{pmatrix}x_{d1}\\ \vdots\\ x_{dd}\end{pmatrix}$ とする．$U=\begin{pmatrix}x_{11} & \cdots & x_{d1}\\ \vdots & & \vdots\\ x_{1d} & \cdots & x_{dd}\end{pmatrix}$,

$$D=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0\end{pmatrix}$$

とすれば $AU=UD$ すなわち $A=UDU'$ である．

V は $x_1, \cdots, x_r$ の張る部分空間であるから, V への射影 T は, $I_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & {}_{r}\ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & {}_{d-r}\ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ によって $T = UI_rU'$ とあらわされる.

$$TAT = UI_rU'UDU'UI_rU' = UDU' = A$$

であるから

$$\widehat{T\mu}(z) = \hat{\mu}(Tz) = \exp\left(-\frac{1}{2}(TAT)(z)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}A(z)\right) = \hat{\mu}(z)$$

となり, $\mu = T\mu$ である. □

1.21. 系. $\mu \in I(R^d)$, その3要素 γ, A, ν のうち $\gamma = 0$, $A = 0$ とする. ν がある部分空間 V に集中していれば, μ も V に集中している.

証明. V への射影を T とする. 系 1.18 によって

$$\widehat{T\mu}(z) = \exp\left[i\gamma_T z + \int_{R^d}\left(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+|y|^2}\right)(T\nu)(dy)\right]$$

である. 仮定により $T\nu = \nu$ であり,

$$(\gamma_T)_j = \int_V (Ty)_j\left(\frac{1}{1+|Ty|^2} - \frac{1}{1+|y|^2}\right)\nu(dy) = 0$$

であるから, $T\mu = \mu$ である. □

無限分解可能分布を得る重要な変換を追加しておく.

1.22. 例 (compounding). N を非負整数値の確率変数でその分布 λ が $I(R^1)$ に属し, $\lambda(\{0\}) > 0$ とする. $X_1, X_2, \cdots$ を独立同分布の R^d 値確率変数とし, その分布 μ_0 には何の制限もつけない. $X_1, X_2, \cdots$ は N と独立とする. $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とする. このとき S_N の分布 μ は $I(R^d)$ に属すことがいえる. 実際

$$(1.23) \qquad \mu(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0^{n*}(\cdot)\,\lambda(\{n\})$$

であるから，

$$(1.24) \qquad \hat{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}_0(z)^n \lambda(\{n\}) = E\left[\hat{\mu}_0(z)^N\right]$$

である．k に対し，$N_1, \cdots, N_k$ を独立同分布で $\lambda^{\frac{1}{k}*}$ に従うとする。問1S によって，これも非負整数値をとる．

$$\hat{\mu}(z) = E\left[\hat{\mu}_0(z)^{N_1+\cdots+N_k}\right] = \left(E\left[\hat{\mu}_0(z)^{N_1}\right]\right)^k$$

であり，$E[\hat{\mu}_0(z)^{N_1}]$ も特性関数であるから，$\mu \in I(R^d)$ がいえた．同時に

$$\mu^{\frac{1}{k}*}(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0^{n*}(\cdot)\, \lambda^{\frac{1}{k}*}(\{n\})$$

も分った．この証明から

$$\mu^{\frac{l}{k}*}(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0^{n*}(\cdot)\, \lambda^{\frac{l}{k}*}(\{n\})$$

も分る．故に，任意の $t \geqq 0$ に対し

$$(1.25) \qquad \mu^{t*}(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0^{n*}(\cdot)\, \lambda^{t*}(\{n\})$$

である．

λ が特に Poisson 分布のとき，上の μ の定義は複合 Poisson 分布の定義（例 1.8）に一致するが，実は，一般の λ の場合にも μ は複合 Poisson 分布になる．そのことと，μ の Lévy 測度の形は 10.9 で示す．

<u>1.23. 例</u>（複合幾何分布）．上の例において λ をパラメーター p $(0<p<1)$ の幾何分布

$$\lambda(\{n\}) = (1-p)\,p^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

にとることができる．幾何分布は $I(R^1)$ に属す（問1I）からである．このとき μ を複合幾何分布（compound geometric distribution）と呼ぶ．(1.24) によって

(1.26) $$\hat{\mu}(z) = \frac{1-p}{1-p\hat{\mu}_0(z)}$$

である．複合幾何分布の全体は複合 Poisson 分布の全体より小さく，その中間にある種々のクラスを van Harn [vH] が調べている．

1.24. 例． $\lambda \in I(R^1)$ で，$[0,\infty)$ に集中しているとする．$\mu_0 \in I(R^d)$ に対し μ を

(1.27) $$\mu(\cdot) = \int_{[0,\infty)} \mu_0^{s*}(\cdot)\,\lambda(ds)$$

によって定義すると，$\mu \in I(R^d)$ となり，$t \geq 0$ に対し

(1.28) $$\mu^{t*}(\cdot) = \int_{[0,\infty)} \mu_0^{s*}(\cdot)\,\lambda^{t*}(ds)$$

となる．これを示そう．k に対し $Y_1, \cdots, Y_k$ を独立同分布で，$\lambda^{\frac{1}{k}*}$ に従うとする．$\lambda^{\frac{1}{k}*}$ は $[0,\infty)$ に集中している．

(1.29) $$\hat{\mu}(z) = \int_{[0,\infty)} \hat{\mu}_0(z)^s\,\lambda(ds)$$

であるから

$$\hat{\mu}(z) = E\left[\hat{\mu}_0(z)^{Y_1+\cdots+Y_k}\right] = \left(E\left[\hat{\mu}_0(z)^{Y_1}\right]\right)^k = \left(\int \hat{\mu}_0(z)^s\,\lambda^{\frac{1}{k}*}(ds)\right)^k$$

である．故に $\mu \in I(R^d)$ で

$$\mu^{\frac{l}{k}*}(\cdot) = \int \mu_0^{s*}(\cdot)\,\lambda^{\frac{l}{k}*}(ds)$$

が分る．特性関数になおし，有理数で t を近似することにより (1.28) がいえる．

この例は Bochner の subordination の特別の場合である．μ の 3 要素が，λ と μ_0 の 3 要素によってどのように表わ

されるかは, 10.10 で調べる.

1.25. 補足. 無限次元空間における無限分解可能分布の Lévy の標準形に関しては, 1960年代前半までの研究が [P] にまとめられており, その後も種々の研究がある (たとえば de Acosta-Samur (1979)). 独立確率変数の和の極限定理などと共に, 有限次元からの形式的な拡張がどこまで可能かが追及されている. Euclid 空間以外の有限次元空間における無限分解可能分布ないし加法過程の考察は興味ある問題であり, たとえば Getoor (1961) がある.

問1A. $\varphi(z)$ がある $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ の特性関数ならば, $\varphi(0)=1$, $|\varphi(z)|\leq 1$, $\varphi(-z)=\overline{\varphi(z)}$ であり, $\varphi(z)$ は一様連続関数である. これを示せ. (たとえば [C] p.12)

問1B $\mu_1, \mu_2\in\mathcal{P}(R^d)$ の特性関数が一致すれば $\mu_1=\mu_2$ であることを示せ. (たとえば [C] p.14. 問1N からいってもよい.)

問1C (Bochner の定理). R^d の上の複素数値関数 $\varphi(z)$ が R^d の上のある分布の特性関数であるための必要十分条件は次の3つがみたされることである.

(a) $\varphi(0)=1$

(b) $\varphi(z)$ は 0 において連続.

(c) 任意の正の整数 n, 任意の $z_1,\cdots,z_n\in R^d$, 任意の複素数 $w_1,\cdots,w_n$ に対し

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(z_j-z_k)\,w_j\,\overline{w_k}\geqq 0.$$

これを示せ. (たとえば [C] p.41)

問1D. $\mu_n, \mu\in\mathcal{P}(R^d)$ に対し次の3つが同値であることを

を示せ.

(i) $\mu_n \to \mu \quad (n\to\infty)$.

(ii) 各点で $\hat{\mu}_n(z) \longrightarrow \hat{\mu}(z)$.

(iii) 広義一様に $\hat{\mu}_n(z) \longrightarrow \hat{\mu}(z)$.

(たとえば [C] p. 37, 39)

問1E (Lévy). $\mu_n \in \mathcal{P}(R^d)$, $n=1,2,\cdots$, で, R^d の各点で $\hat{\mu}_n(z) \longrightarrow \varphi(z)$ $(n\to\infty)$, $\varphi(z)$ が $z=0$ において連続であるならば, $\varphi(z)$ は R^d の上のある分布の特性関数である. これを示せ. (たとえば [C] p. 39. もし Bochner の定理 (問1C) をこれと独立に示しておけば, これはその系である.)

問1F. $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(R^d)$ に対し $\widehat{\mu_1 * \mu_2}(z) = \hat{\mu}_1(z)\,\hat{\mu}_2(z)$ を示せ. (たとえば [C] p. 24)

問1G (非退化 Gauss 分布). A を $d\times d$ の対称行列で正定値とし $\gamma \in R^d$ とする.

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2}(\det A)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}A^{-1}(x-\gamma)\right)$$

を密度関数とする分布の特性関数が (1.2) になることを示せ ($A^{-1}(x)$ は A の逆行列 A^{-1} の定める 2 次形式).

問1H. A の階数が r のとき, 例 1.6 の Gauss 分布は support が r 次元超平面であり, この上の r 次元 Lebesgue 測度に関し絶対連続であることを示せ. ($r<d$ のとき (1.2) がある分布の特性関数であることは, 例 1.6 のように近似によらず, 超平面の上で密度関数を具体的に与えることによって証明してもよい.)

問1I. 幾何分布すなわち R^1 の上の分布 μ で

$$\mu(\{k\}) = (1-p)p^k, \quad 0<p<1, \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

のものが複合 Poisson，従って無限分解可能であることを示せ。

$(\hat{\mu}(z) = \dfrac{1-p}{1-pe^{iz}} = \exp\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{p^n}{n}(e^{inz}-1)$ を (1.4) と比較せよ。)

問1J. $\varphi(z)$ が R^d の上の分布の特性関数ならば，$\overline{\varphi(z)}$，$|\varphi(z)|^2$ も R^d の上の分布の特性関数であることを示せ。

問1K (Helly の選出定理). $\{\rho_n\}$ が R^d の上の有限測度の列で (1.15), (1.16) をみたすならば，$\{\rho_n\}$ のある部分列 $\{\rho_{n_k}\}$ がある有限測度 ρ に収束することを示せ。(たとえば [C] p.29)

問1L. ρ_n, ρ が R^d の上の有限測度で，$\rho_n \to \rho$ ならば，$\rho(\partial B)=0$ をみたす任意の $B\in\mathcal{B}(R^d)$ と任意の有界連続な $f(x)$ に対し

$$\int_B f(x)\rho_n(dx) \longrightarrow \int_B f(x)\rho(dx)$$

であることを示せ。(たとえば [C] p.36)

問1M. ν が $(R^d, \mathcal{B}(R^d))$ の上の有限な signed measure であるとき，Fourier 変換 $\hat{\nu}$ を

$$\hat{\nu}(z) = \int_{R^d} e^{izy}\,\nu(dy), \qquad z\in R^d$$

によって定義する。Fourier 変換が一致する 2つの有限な signed measure は一致することを示せ。(Jordan 分解により問1B に帰する。)

問1N (Lévy の反転公式). $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ が $\hat{\mu}(z)$ から次の式で決まることを示せ。$a, b\in R^d$ に対し $B_{a,b}=\{x\in R^d : a_1<x_1<b_1, \cdots, a_d<x_d<b_d\}$ とする。$B_{a,b}$ が空でなく，$B_{a,b}$ の境界の μ 測度が 0 ならば

$$\mu(B_{a,b}) = (2\pi)^{-d} \lim_{u\to\infty} \int_{|z_1|<u,\cdots,|z_d|<u} \left(\prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-iz_jb_j} - e^{-iz_ja_j}}{-iz_j}\right) \hat{\mu}(z)\,dz.$$

（たとえば [C] p.16, [I1] p.37）

問1O. 系1.20 にあるように A から定まる部分空間 V を, A の support と呼ぶことにする（A が階数 d のときは A の support は R^d とする）. H を r 次元超平面とする（すなわち, ある $\gamma_H \in R^d$ と r 次元部分空間 V によって $H = \gamma_H + V$ と表わされる。明かに V は H から一意的に定まる）. $\mu \in I(R^d)$, その3要素を γ, A, ν とする. このとき, μ が H に集中している必要十分条件は, $\gamma \in H$ で A の support が V 内にあり ν が V に集中していることである. これを示せ.（十分であることは系1.20, 1.21 から分る. 必要であることは, μ^0 を $\hat{\mu^0}(z) = e^{-i\gamma_H z}\hat{\mu}(z)$ で定義すると, μ^0 は V に集中し, μ^0 の3要素は $\gamma-\gamma_H$, A, ν であるから, 系1.18 により $\gamma-\gamma_H \in V$, $A = TAT$, $\nu = [T\nu]_{R^d\setminus\{0\}}$ （T は V への射影）, 従って $\nu = T\nu$ である.）

問1P（Cramér-Wold の定理）. X, Y を R^d の値をとる確率変数とし, 任意の $z \in R^d$ に対し, zX と zY が同分布をもつとする. このとき, X, Y が同分布をもつことを示せ.（問1B に帰着する.）

問1Q. R^3 の値をとる確率変数 $X = (X_1, X_2, X_3)$ で, (X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_2, X_3) の分布が2次元の無限分解可能分布であっても, X の分布は無限分解可能とは限らない. これを示せ.（Lévy (1948)）

問1R. R^2 の上の無限分解可能でない分布 μ で, 任意の $z \in R^2$ に対し $Tx = z_1x_1 + z_2x_2$ と定義するとき $T\mu$

$\in I(R^1)$ となるものが存在する．十分小さい $\varepsilon>0$ に対し

$$a(y)=\begin{cases} 0 & |y|>1 \\ 1 & 1\geq|y|>\frac{1}{2}+\varepsilon \\ -\varepsilon & \frac{1}{2}+\varepsilon\geq|y|>\frac{1}{2}-\varepsilon \\ 1 & |y|\leq\frac{1}{2}-\varepsilon \end{cases}$$

とすると $\exp\int_{R^2}(e^{izy}-1)a(y)dy$ がこのような分布 μ の特性関数であることを示せ．(Ibragimov (1972))

注．同様な性質をもつ R^3 の上の分布の例が Dwass-Teicher (1957) にある．

問15． $\mu\in I(R^1)$ で μ は非負の整数に集中しており，しかも $\mu(\{0\})>0$ とする．このとき $n=1,2,\cdots$ に対し $\mu^{\frac{1}{n}*}$ も非負の整数に集中していること，さらに，任意の $t\geq 0$ に対し μ^{t*} も非負の整数に集中していることを示せ．(まず，$\mu^{\frac{1}{n}*}$ は $[0,\infty)$ に集中し，0 に point mass をもつことが分る．)

§2. null array の極限分布

独立確率変数の和に対する極限定理を調べる対象として3つの段階がある．第1は $\{X_n : n=1,2,\cdots)$ が独立同分布であるとき $S_n = X_1+X_2+\cdots+X_n$ を適当に normalize したものの分布の極限などを調べること，第2は，「同分布」という条件を落して同様のことを調べること，この2つの段階で，大数の法則，中心極限定理，その収束の速さ，large deviation などが，1次元では非常にくわしく調べられており，多次元でもかなりの結果がある．第3は，更に拡張して，次に定義する array の和に対し分布の極限定理などを調べることである．Poisson の小数の法則がこのタイプの典型的な極限定理である．

2.1. 定義. R^d に値をとる確率変数の族 $\{X_{nk} : n=1,2,\cdots ; k=1,2,\cdots,r_n\}$ が array（または triangular array，または配列）であるとは，任意に n を固定するとき $X_{n1}, X_{n2}, \cdots, X_{nr_n}$ が独立であることである．array に対し和 S_n を

$$S_n = X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{nr_n}$$

と定義する．

array に次の条件をつけることにより，その和の極限分布のクラスが無限分解可能分布の全体と一致する（定理2.5）．これは重要な結果である．

2.2. 定義. array $\{X_{nk} : n=1,2,\cdots ; k=1,\cdots,r_n\}$ が null array であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し

(2.1) $$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le r_n} P(|X_{nk}|>\varepsilon)=0$$

が成り立つことである．

この用語は Feller [F2], Cuppens [C] などに従った. Gnedenko-Kolmogorov [GK] はこれを「infinitesimal な成分をもつ」といい, Parthasarathy [P] は「uniformly infinitesimal な成分をもつ」といい, Loève [Lo] は「uan (uniformly asymptotically negligible) な成分をもつ」といっている.

以下の結果は1次元で (後に定義する a_{nk} でなく median を用いて) Bawly, Gnedenko が得たもので [GK] などにあるが, ここに述べる証明は, それを改良して更に多次元にしてある [C] のものである. 補題 2.3 の a を centering に用いることは, 既に [F2] にある.

写像 $\tau: R^d \to R^d$ を次のように定義する.

$$\tau(x) = (\tau_1(x), \cdots, \tau_d(x)),$$

$$\tau_j(x) = \tau_j(x_1, \cdots, x_d) = \begin{cases} 1, & x_j \geq 1 \\ x_j, & -1 \leq x_j \leq 1 \\ -1, & x_j \leq -1. \end{cases}$$

2.3. 補題. R^d に値をとる任意の確率変数 X に対し,

$$E\,\tau_j(X-a) = 0 \qquad (j=1,\cdots,d) \tag{2.2}$$

をみたすような $a \in R^d$ が存在する.

注. 期待値 $E(X)$ を表わすときの括弧はしばしば省略する. たとえば $E\tau_j(X-a)$ は $E(\tau_j(X-a))$ の意, EX^2 は $E(X^2)$ の意である.

証明. $a=(a_1, \cdots, a_d)$ の関数と見るとき $E\tau_j(X-a)$ は a_j だけに依存しており, 有界収束定理によって

$$\lim_{a_j \to -\infty} E\tau_j(X-a) = 1, \qquad \lim_{a_j \to \infty} E\tau_j(X-a) = -1,$$

しかも a_j に関し連続である. 故に, ある a_j において $E\tau_j(X-a) = 0$ となる. □

2.4. 注意. 上の補題の a は必ずしも唯一ではない. たとえば, $d=1$ として X を確率 $1/2$ ずつで 2 と -2 をとる確率変数とすると, $-1 \leqq a \leqq 1$ に対し $E\tau_1(X-a)=0$ である.

2.5. 定理. $\{X_{nk} : n=1,2,\cdots ; k=1,\cdots,r_n\}$ が R^d に値をとる null array であるとし, S_n をその和とし, $a_{nk} \in R^d$ に対し

$$E\,\tau_j(X-a_{nk})=0 \qquad (j=1,\cdots,d) \tag{2.3}$$

とする. $X^0_{nk}=X_{nk}-a_{nk}$ の分布を $\mu^0_{nk}=\mu_{X^0_{nk}}$ とする. このとき $b_n \in R^d$, $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ に対し次の3つは同値である.

(i) $\mu_{S_n-b_n} \to \mu \ (n\to\infty)$, すなわち, S_n-b_n の分布が μ に収束する.

(ii) 任意の $z \in R^d$ に対し

$$\exp\Big[i\Big(\sum_{k=1}^{r_n} a_{nk}-b_n\Big)z+\sum_{k=1}^{r_n}\big(\widehat{\mu}^0_{nk}(z)-1\big)\Big] \to \widehat{\mu}(z), \tag{2.4}$$

すなわち, 表現(1.9)における γ_0, A, ν が $\sum_{k=1}^{r_n} a_{nk}-b_n$, 0, $\sum_{k=1}^{r_n}\mu^0_{nk}$ であるような無限分解可能分布が μ に収束する.

(iii) $\mu \in I(R^d)$ であって, その3要素 γ, A, ν に対し

(a) $f(y)$ が有界連続で原点の近傍で0ならば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r_n}\int_{R^d} f(y)\mu^0_{nk}(dy)=\int_{R^d} f(y)\nu(dy).$$

(b) $z \in R^d$, $\varepsilon>0$ に対し

$$A_{n,\varepsilon}(z)=\sum_{k=1}^{r_n}\int_{|y|<\varepsilon}(zy)^2\mu^0_{nk}(dy)$$

とおくとき, 任意の z に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=A(z).$$

(c) 任意の z に対して

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\big(\sum_{k=1}^{r_n} a_{nk} - b_n\big)z + \sum_{k=1}^{r_n}\int_{R^d}\frac{zy}{1+|y|^2}\mu^0_{nk}(dy)\Big] = \gamma z.$$

まず，null array の条件を特性関数で表わしておく．

<u>2.6. 補題.</u> $\{X_{nk}\,;\, n=1,2,\cdots;\, k=1,\cdots,r_n\}$ を array とするとき，次の３つは同値．

(i) $\{X_{nk}\}$ は null array.

(ii) 任意の $z\in R^d$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le r_n}|\varphi_{X_{nk}}(z)-1| = 0.$$

(iii) 任意の $M<\infty$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|z|\le M}\max_{1\le k\le r_n}|\varphi_{X_{nk}}(z)-1| = 0.$$

<u>証明.</u> $\mu_{X_{nk}} = \mu_{nk}$, $\varphi_{X_{nk}} = \varphi_{nk}$ とおく．(i)⇒(iii) をいうには，

$$|\varphi_{nk}(z)-1| = \Big|\int_{R^d}(e^{izx}-1)\mu_{nk}(dx)\Big| \leqslant \int_{|x|\leqslant\varepsilon}|e^{izx}-1|\mu_{nk}(dx) + 2P(|X_{nk}|>\varepsilon)$$
$$\leqslant \varepsilon|z| + 2P(|X_{nk}|>\varepsilon)$$

を用いればよい。最後の不等式は $|e^{izx}-1|\leqslant|z||x|$ （問2A）による．(iii)⇒(ii) は自明 (ii)⇒(i) を示そう． $X_{nk} = ((X_{nk})_1, \cdots, (X_{nk})_d)$ とするとき

$$P(|X_{nk}|>\varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{d} P\Big(|(X_{nk})_j| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\Big),$$

$$\varphi_{(X_{nk})_j}(z_j) = \varphi_{nk}(0,\cdots,0,z_j,0,\cdots,0)$$

であるから，1次元の場合にいえばよい．$d=1$ とする．

$$\int_0^\infty e^{-z}|\varphi_{nk}(z)-1|dz \geqslant \int_0^\infty e^{-z}(1-\mathrm{Re}\,\varphi_{nk}(z))dz = 1-\int_{-\infty}^{\infty}\mu_{nk}(dx)\int_0^\infty e^{-z}\cos zx\,dz$$

$$=1-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\mu_{nk}(dx)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mu_{nk}(dx)\geqq\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}P\left(|X_{nk}|>\varepsilon\right)$$

であるから，

$$\max_{1\leqq k\leqq r_n}P\left(|X_{nk}|>\varepsilon\right)\leqq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int_0^\infty e^{-z}\max_{1\leqq k\leqq r_n}|\varphi_{nk}(z)-1|\,dz\longrightarrow 0$$

である．□

2.7. 補題. X が R^d に値をとる確率変数で $E\tau_j(X)=0$ $(j=1,\cdots,d)$ ならば，任意の $z\in R^d$ に対し

$$|\varphi_X(z)-1|\leqq\left(2+\sqrt{d}\,|z|+\frac{|z|^2}{2}\right)E|\tau(X)|^2 .$$

証明. $\varphi_X(z)-1=E\left(e^{izX}-1-iz\tau(X)\right)$ であり，$|x_j|\leqq 1$ $(j=1,\cdots,d)$ においては，$\tau(x)=x$ であるから 問2A により

$$\left|e^{izx}-1-iz\tau(x)\right|\leqq\frac{1}{2}\left(z\tau(x)\right)^2\leqq\frac{1}{2}|z|^2|\tau(x)|^2$$

であり，ある j に対し $|x_j|>1$ という所では

$$\left|e^{izx}-1-iz\tau(x)\right|\leqq 2+\sqrt{d}\,|z|\leqq\left(2+\sqrt{d}\,|z|\right)|\tau(x)|^2$$

である．□

定理2.5の証明. $\gamma_n^0=\sum_{k=1}^{r_n}a_{nk}-b_n$ とおこう．(2.4) の左側を特性関数とする無限分解可能分布の3要素 γ_n, A_n, ν_n は

$$\gamma_n z=\gamma_n^0 z+\sum_{k=1}^{r_n}\int_{R^d}\frac{zy}{1+|y|^2}\mu_{nk}^0(dy),$$

$$A_n(z)=0,$$

$$\nu_n=\sum_{k=1}^{k_n}\mu_{nk}^0$$

であるから，収束定理1.14によって (ii) と (iii) は同値である．故に，(i) と (ii) の同値を示せばよい．まず，null array ということから

$$(2.5)\qquad \lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq r_n}|a_{nk}|=0$$

といおう・補題2.3の証明のように，$a\in R^d$ を動かして X_{nk} に対し a_{nk} を定めるときを考える。$0<\varepsilon<1$ に対し $a_j=-\varepsilon$ とすると，(2.1) から，n を大きくするときすべての k に対し

$$E\tau_j(X_{nk}-a)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}P(|(X_{nk})_j|<\frac{\varepsilon}{2})-P((X_{nk})_j\leqslant-\frac{\varepsilon}{2})\geqslant\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{8}$$

である．故に，n が大きいとき $(a_{nk})_j>-\varepsilon$ である．同様に，$a_j=\varepsilon$ とすると，n を大きくするときすべての k に対し

$$E\tau_j(X_{nk}-a)\leqslant-\frac{\varepsilon}{2}P(|(X_{nk})_j|<\frac{\varepsilon}{2})+P((X_{nk})_j\geqslant\frac{\varepsilon}{2})\leqslant-\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{8}=-\frac{\varepsilon}{8}$$

であるから，n を大きくするとき $(a_{nk})_j<\varepsilon$ である．これで (2.5) がいえた。(2.5) により，$\{X^c_{nk}\}$ も null array になる．故に補題2.6により

$$(2.6)\qquad \lim_{n\to\infty}\sup_{|z|\leqq M}\max_{1\leqq k\leqq r_n}|\hat{\mu}^0_{nk}(z)-1|=0$$

である．故に，M をきめたとき，n が大きければ $\{|z|\leqq M\}$ において $\log\hat{\mu}^0_{nk}(z)$ が定義される．これに対し，$v_n=\sum_{k=1}^{r_n}E|\tau(X^0_{nk})|^2$ とするとき $\{|z|\leqq M\}$ で一様に

$$(2.7)\qquad \sum_{k=1}^{r_n}\log\hat{\mu}^0_{nk}(z)=\sum_{k=1}^{r_n}(\hat{\mu}^0_{nk}(z)-1)+o(v_n)\qquad(n\to\infty)$$

がいえる．なぜならば，$\theta_{nk}(z)=\hat{\mu}^0_{nk}(z)-1$ とすると

$$\log\hat{\mu}^0_{nk}(z)=\log(1+\theta_{nk}(z))=\theta_{nk}(z)(1+\rho_{nk}(z)),$$

ただし

$$\rho_{nk}(z)=\sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}\frac{1}{1+\ell}\theta_{nk}(z)^{\ell},$$

であり，従って $|\rho_{nk}(z)|\leqq|\theta_{nk}(z)|/(1-|\theta_{nk}(z)|)$ となり，(2.6) によって

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{|z|\le M}\ \max_{1\le k\le r_n}|\rho_{nk}(z)|=0$$

となり，一方，補題 2.7 によって

$$\sum_{k=1}^{r_n}|\theta_{nk}(z)|\le\left(2+\sqrt{d}\,|z|+\frac{|z|^2}{2}\right)v_n$$

であるからである．

さて，(i) から (ii) をいおう．$\mu_{S_n-b_n}\to\mu$ から

$$e^{i\gamma_n^0 z}\prod_{k=1}^{r_n}\hat{\mu}_{nk}^0(z)\longrightarrow\hat{\mu}(z)\qquad\text{(広義一様)}\tag{2.8}$$

である．$h>0$ を小さくとり，$C_h=\{y\in R^d:\ -h\le y_j\le h\ (1\le j\le d)\}$ の中に $\hat{\mu}(z)$ の零点がないようにする．(2.8) から

$$i\gamma_n^0 z+\sum_{k=1}^{r_n}\log\hat{\mu}_{nk}^0(z)\longrightarrow\log\hat{\mu}(z)\qquad(C_h\text{ で一様})$$

である．これに (2.7) を用いてから C_h で積分し，$-1/(2h)^d$ を乗じると，

$$\sum_{k=1}^{r_n}\int_{R^d}\left(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin hy_j}{hy_j}\right)\mu_{nk}^0(dy)+o(v_n)+o(1)=\frac{-1}{(2h)^d}\int_{C_h}\log\hat{\mu}(z)dz\tag{2.9}$$

である．なぜなら，

$$\frac{-1}{(2h)^d}\int_{C_h}(\hat{\mu}_{nk}^0(z)-1)dz=1-\int_{R^d}\mu_{nk}^0(dy)\int_{C_h}\frac{e^{izy}}{(2h)^d}dz=\int_{R^d}\left(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin hy_j}{hy_j}\right)\mu_{nk}^0(dy)$$

であるから．さて，h を固定するとき，

$$c_1=\inf_{y\in R^d}\left(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin hy_j}{hy_j}\right)\frac{1}{|\tau(y)|^2}>0$$

であるから，(2.9) の右辺を c_2 とすると

$$c_1\sum_{k=1}^{r_n}\int_{R^d}|\tau(y)|^2\mu_{nk}^0(dy)+o(v_n)+o(1)\le c_2$$

である．左辺の第1項は c_1v_n であるから，

$$v_n=O(1)\qquad(n\to\infty)\tag{2.10}$$

となる．(2.7), (2.8), (2.10) を組み合せれば

$$\hat{\mu}(z) = \exp\Big[i\gamma_n^0 z + \sum_{k=1}^{r_n} \big(\hat{\mu}_{nk}^0(z) - 1\big) + o(1) \Big] + o(1) \qquad (広義一様)$$

であるから，(ii) がいえた．

次に，(ii) から (i) をいおう．(ii) を仮定すると，問1D によって収束 (2.4) は広義一様である．故に，C_h を上と同様に選ぶと

$$i\gamma_n^0 z + \sum_{k=1}^{r_n} \big(\hat{\mu}_{nk}^0(z) - 1\big) \to \log \hat{\mu}(z) \qquad (C_h で一様)$$

である．これを C_h で積分し $-1/(2h)^d$ を乗じると，上と同様に

$$c_1 V_n + o(1) \le c_2$$

が得られるから，(2.10) がわかる．一方，(2.4) と (2.7) から

$$\hat{\mu}(z) = \exp\Big[i\gamma_n^0 z + \sum_{k=1}^{r_n} \log \hat{\mu}_{nk}^0(z) + o(V_n) \Big] + o(1) \qquad (広義一様)$$

であるから (2.8) が得られ，(i) がいえたことになる．□

2.8. 定理． $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ とする．μ が無限分解可能であるための必要十分条件は，R^d に値をとる確率変数の null array $\{X_{nk}\}$ と $b_n \in R^d$ が存在して $\mu_{S_n - b_n} \to \mu$ となることである．

証明． 十分であることは定理2.5から分る．必要であることは，$\mu \in I(R^d)$ に対し，$\{X_{nk} : n=1,2,\cdots ; k=1,\cdots,n\}$ を $\mu_{X_{nk}} = \mu^{\frac{1}{n}*}$ の array とし，$b_n = 0$ にとればよい．これが null array であることは補題2.6から分る．□

定理2.5の収束条件は a_{nk} による centering が介在しているのでその意味がとらえにくいが，次のように書きなおすことが出来る．

2.9. 定理. $\{X_{nk}\,;\ n=1,2,\cdots;\ k=1,\cdots,r_n\}$ が R^d に値をとる確率変数の null array であるとし, $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ とする. $\mu_{nk}=\mu_{X_{nk}}$ とかく. このとき次の2つは同値である.

(i) ある $b_n\in R^d$ に対し $\mu_{S_n-b_n}\to\mu$.

(ii) $\mu\in I(R^d)$ であって, その3要素 γ, A, ν に対し,

(a) $f(y)$ が有界連続で原点の近傍で 0 ならば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r_n}\int_{R^d} f(y)\,\mu_{nk}(dy)=\int_{R^d} f(y)\,\nu(dy)$$

(b) $z\in R^d$, $\varepsilon>0$ に対し

$$A_{n,\varepsilon}(z)=\sum_{k=1}^{r_n}\left[\int_{|y|<\varepsilon}(zy)^2\mu_{nk}(dy)-\left(\int_{|y|<\varepsilon} zy\,\mu_{nk}(dy)\right)^2\right]$$

とおくとき, 任意の z に対して

(2.11) $$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=A(z).$$

2.10. 補題. 一般に, R^d の上の測度 ν が

$$\int_{R^d\setminus\{0\}}\frac{|y|^2}{1+|y|^2}\,\nu(dy)<\infty$$

ならば

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^2\int_{|y|>\varepsilon}\nu(dy)=0.$$

証明. $u>0$ に対し $F(u)=\int_{|y|>u}\nu(dy)$ とする. $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ に対し

$$\int_{\varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2}|y|^2\,\nu(dy)=-\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}u^2\,dF(u)$$

であるから,

(2.12) $$\varepsilon_2^2F(\varepsilon_2)-\varepsilon_1^2F(\varepsilon_1)=2\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}uF(u)\,du-\int_{\varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2}|y|^2\,\nu(dy)$$

である. $\varepsilon\downarrow 0$ における $\varepsilon^2F(\varepsilon)$ の liminf, limsup をそれぞれ

θ_1, θ_2 とする．$\theta_1 < \theta_2$ とすると，$\theta_1 < \theta_1 + \eta < \theta_2$ の η をとれば，すべての十分小さい ε_1, ε_2 に対し $-\int_{\varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2} |y|^2\nu(dy) > -\eta$ である一方，適当な十分小さい $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に対しては (2.12) の左辺は $-\eta$ より小となるから，(2.12) に反する．故に $\theta_1=\theta_2$ である．$\theta_1=\theta_2>c>0$ とすると，十分小さい u に対しては $u^2F(u)>c$ であるから，ε_2 を固定し $\varepsilon_1\downarrow 0$ とするとき (2.12) の右辺は ∞ に発散するが左辺は $\varepsilon_2 F(\varepsilon_2)$ でおさえられているから，矛盾である．故に $\theta_1=\theta_2=0$ である．□

<u>定理2.9の証明．</u> (i) を仮定し (ii) を証明しよう．(i) から，定理2.5 (iii) の3つの条件が成り立つ．これを (a)′, (b)′, (c)′ と表わすことにする．まず (a) をいうには，一様連続という付加条件をみたす f に対していえば十分である．$|y|\le c$ において $f(y)=0$ とする．$0<\varepsilon<c/2$ に対し $\delta>0$ を適当にとれば，$|y-y'|<\delta$ のすべての $y, y'\in R^d$ に対し $|f(y)-f(y')|<\varepsilon$ である．

$$\left|\sum_k \int f(y)\mu_{nk}(dy) - \sum_k \int f(y)\mu^0_{nk}(dy)\right| \le \sum_k \int |f(y+a_{nk})-f(y)|\,\mu^0_{nk}(dy)$$

(2.5) により，n が十分大きければ $|a_{nk}|<\delta\wedge(c/2)$ であるから，これは

$$\le \varepsilon\sum_k\int_{|y|>c/2}\mu^0_{nk}(dy)$$

である．(a)′ によってこれは ε の定数倍でおさえられる．故に (a) がいえた．

(b) をいうために，$b_{nk}\in R^d$ を，第 j 成分が $(b_{nk})_j = E\tau_j(X_{nk})$ として定義する．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{r_n}|a_{nk}-b_{nk}|=0 \tag{2.13}$$

を見よう．それには，$Y_{nk}=\tau(X_{nk}-a_{nk})-\tau(X_{nk})+a_{nk}$ とおくと $|(Y_{nk})_j|\le|(a_{nk})_j|$ であるから $|Y_{nk}|\le|a_{nk}|$ である．また，

$|X_{nk}| \leq 1-|a_{nk}|$ ならば $Y_{nk}=0$ である．a_{nk} のとり方から $E(Y_{nk})_j = (a_{nk})_j - (b_{nk})_j$ であるから，

$$\sum_k |a_{nk}-b_{nk}| \leq \sum_{j=1}^{d} \sum_k |(a_{nk})_j-(b_{nk})_j| \leq d\sum_k E|Y_{nk}|$$

$$\leq d\sum_k |a_{nk}|\, P(|X_{nk}|>1-|a_{nk}|) \leq \mathrm{const} \max_k |a_{nk}|$$

である．最後の不等式には (a) を用いた．故に (2.5) によって (2.13) が分る．さて，(2.11) のような命題を

$$A(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_{n,\varepsilon}(z)$$

とかくことにしよう．(b)' が成り立っているから，

(2.14) $$A(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{r_n} E[(zX^0_{nk})^2 ;\ |X^0_{nk}|<\varepsilon]$$

である．ただし $X^0_{nk}=X_{nk}-a_{nk}$ である．これをかきなおして行こう．

$$\sum_k |E[(zX^0_{nk})^2;\ |X^0_{nk}|<\varepsilon]-E[(zX^0_{nk})^2;\ |X_{nk}|<\varepsilon]|$$

$$\leq \sum_k E[(zX^0_{nk})^2;\ \{|X^0_{nk}|<\varepsilon\}\ominus\{|X_{nk}|<\varepsilon\}]$$

n を大きくすれば (2.5) によって

$$\leq 2|z|^2\varepsilon^2\sum_k P(\{|X^0_{nk}|<\varepsilon\}\ominus\{|X_{nk}|<\varepsilon\})$$

$$\leq 2|z|^2\varepsilon^2\sum_k P(\mathrm{dis}(X_{nk},K_\varepsilon)<|a_{nk}|),$$

ただし $K_\varepsilon=\{x\in R^d:\ |x|=\varepsilon\}$ とし，一般に

$$\{|X-a|<\varepsilon\}\ominus\{|X|<\varepsilon\}\subset\{\mathrm{dis}(X,K_\varepsilon)<|a|\}$$

であることを用いた．上の不等式の最後のものは，n を大きくすれば (a) と (2.5) によって $2|z|^2\varepsilon^2\int_{\varepsilon/2<|y|<3\varepsilon/2}\nu(dy)$ でおさえられ，これは補題 2.10 により $\varepsilon\downarrow 0$ のとき 0 に収束する．故に (2.14) から

(2.15) $$A(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{r_n}E[(zX^0_{nk})^2;\ |X_{nk}|<\varepsilon]$$

がいえる。次に

$$\sum_k|E[(zX^0_{nk})^2;\ |X_{nk}|<\varepsilon]-E[(z(X_{nk}-b_{nk}))^2;\ |X_{nk}|<\varepsilon]|$$

$$=\sum_k|E[-2(za_{nk}-zb_{nk})(zX_{nk})+(za_{nk})^2-(zb_{nk})^2;\ |X_{nk}|<\varepsilon]|$$

$$\leqslant\sum_k(2|z|^2\varepsilon|a_{nk}-b_{nk}|+|z|^2|a_{nk}+b_{nk}||a_{nk}-b_{nk}|)$$

であり，これは，ε を固定して $n\to\infty$ とするとき (2.13) によって 0 に近づく。ゆえに，(2.15) で X^0_{nk} の代りに $X_{nk}-b_{nk}$ としたものが成り立つ。$0<\varepsilon<1$ を固定し，c_{nk}，d_{nk} を第 j 成分が $(c_{nk})_j=E[(X_{nk})_j;\ |X_{nk}|<\varepsilon]$，$(d_{nk})_j=E[\tau_j(X_{nk});\ |X_{nk}|\geqslant\varepsilon]$ として定義する。$b_{nk}=c_{nk}+d_{nk}$，$|d_{nk}|\leqslant dP(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon)$ であるから，

$$\sum_k|E[(zX_{nk})^2;\ |X_{nk}|<\varepsilon]-(E[zX_{nk};\ |X_{nk}|<\varepsilon])^2-E[(z(X_{nk}-b_{nk}))^2;\ |X_{nk}|<\varepsilon]|$$

$$=\sum_k|-(zc_{nk})^2+2(zb_{nk})(zc_{nk})-(zb_{nk})^2P(|X_{nk}|<\varepsilon)|$$

$$=\sum_k|-(zd_{nk})^2+(zb_{nk})^2P(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon)|$$

$$\leqslant|z|^2\left(d^2\max_k P(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon)+\max_k|b_{nk}|^2\right)\sum_k P(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon)$$

となり，これは，$n\to\infty$ のとき 0 に近づくことが (a) を用いて分る。従って

(2.16) $$A(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{r_n}\left(E[(zX_{nk})^2;\ |X_{nk}|<\varepsilon]-(E[zX_{nk};\ |X_{nk}|<\varepsilon])^2\right)$$

であり，これは (b) がいえたことに他ならない。

逆に (ii) を仮定して (i) を示すには，まず (a) から (a)′ をいい，次に上と同様にして (b) から (b)′ をいい，b_n を (c)′ がみたされるように選べばよい。□

定理 2.9 をもとにして，中心極限定理が成立するための必要

十分条件，安定分布への収束の必要十分条件などが導かれる．それには，1次元では［GK］，［Lo］，［Sh］などがあり，多次元では Rvačeva (1954) がある．

問2A. 任意の正の整数 n と実数 x に対して，

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}$$

を示せ．（たとえば［I］p.90，［F2］p.512）

問2B. 定理2.9は，条件(b)で $\left(\int_{|y|<\varepsilon} zy\,\mu_{nk}(dy) \right)^2$ の項を落した時は成り立たないことを示せ．（［F2］p.588の例を用いればよい．）

問2C. 任意の $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ と $z \in R^d$ に対し

$$\mathrm{Re}\,(1-\hat{\mu}(2z)) \leq 4\,\mathrm{Re}\,(1-\hat{\mu}(z))$$

を示せ．$\left(\mathrm{Re}\,(1-\hat{\mu}(2z)) = 2\int \sin^2 zx\,\mu(dx) \leqslant 4\int (1-\cos zx)\,\mu(dx) \right)$

問2D. $\{X_{nk}\,;\ n=1,2,\cdots;\ k=1,\cdots,r_n\}$ を array とする．$z=0$ のある近傍で

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq r_n} \left| \varphi_{X_{nk}}(z) - 1 \right| = 0$$

ならば，$\{X_{nk}\}$ は null array である．これを示せ．（問2Cによって $\lim\limits_{n} \max\limits_{k} \mathrm{Re}\,(1-\varphi_{X_{nk}}(z)) = 0$ が $z \in R^d$ でいえる．故に $(\mathrm{Im}\,\varphi_{X_{nk}}(z))^2 \leqslant 1 - (\mathrm{Re}\,\varphi_{X_{nk}}(z))^2$ によって補題2.6の(ii)がいえる．）

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

§3 安定分布

R^d の上の無限分解可能分布の全体 $I(R^d)$ の重要なサブクラスとして，安定分布の全体 $S(R^d)$ がある．これは，独立同分布な確率変数列の最初の n 個の和 S_n に scale の変更と平行移動を許したものの分布の極限として定義される．それを特性関数の性質で特徴づけよう．

3.1. 定義: $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ が安定分布 (stable distribution) であるとは，R^d に値をとる独立同分布な確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ と，$a_n \in R^d$，$b_n > 0$ を適当にとり

$$(3.1) \qquad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad Y_n = b_n^{-1} S_n - a_n$$

とするとき $\mu_{Y_n} \to \mu$ が成り立つことである．R^d における安定分布の全体を $S(R^d)$ とする．

たとえば Gauss 分布が安定分布であることは，その特性関数を考えれば，X_k の分布をその Gauss 分布そのものとすることにより分る．

定義 3.1 の安定分布は [GK], [Lo], [F2] などで安定分布と呼んでいるものと一致するが，Lévy [L2] では quasi-stable と呼ばれているものになる．なぜ「安定」という語が使われるかというと，次の定理の性質 (ii) による．このため，(ii) の方を安定分布の定義に採用している本が多い．

以下の 3 つの定理 (3.2, 3.8, 3.9) は本質的には Lévy [L1], [L2] による．

3.2. 定理. $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ に対し，次の 2 つは同値.

(i) $\mu \in S(R^d)$.

(ii) 任意の $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ に対し $c > 0$ と $\gamma \in R^d$ が存在して

(3.2) $$\hat{\mu}(c_1 z)\hat{\mu}(c_2 z) = \hat{\mu}(cz)e^{i\gamma z}, \qquad z\in R^d$$

となる．

これを証明する前に，「同じタイプに属する」ということの定義と，タイプの収束に関する，よく知られた補題を示す．

3.3. 定義. $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(R^d)$ が同じタイプに属する，あるいはタイプ同値（type equivalent）であるとは，適当な Y（R^d に値をとる確率変数），$a\in R^d$，$b>0$ を選ぶと，$\mu_1=\mu_Y$，$\mu_2=\mu_{bY+a}$ となることである．いいかえれば，任意の $B\in\mathcal{B}(R^d)$ に対し $\mu_1(B)=\mu_2(bB+a)$ が成り立つことである．ただし，$bB+a=\{bx+a : x\in B\}$.

3.4. 補題. $\mu_n, \mu, \mu_n', \mu' \in \mathcal{P}(R^d)$ とし，$\mu_n\to\mu$，$\mu_n'\to\mu'$ とし，μ, μ' は δ分布ではないとする．もし各 n に対し μ_n と μ_n' がタイプ同値ならば，μ と μ' がタイプ同値である．

この補題は，もう少し強くして，次の形でいっておく．

3.5. 補題. Y_n, Y, Y' を R^d に値をとる確率変数，$a_n\in R^d$，$b_n>0$ とする．$\mu_{Y_n}\to\mu_Y$，$\mu_{b_nY_n+a_n}\to\mu_{Y'}$ とし，$\mu_Y, \mu_{Y'}$ はδ分布でないとする．このとき，$a\in R^d$ と $b>0$ が存在して $\mu_{Y'}=\mu_{bY+a}$ かつ $a_n\to a$，$b_n\to b$ である．

証明. 特性関数を使わず直接にでもいえるが（たとえば[GK]），ここでは [Lo] に従って特性関数を用いて示す．$\hat{\mu}_{Y_n}=\varphi_n$，$\hat{\mu}_Y=\varphi$，$\hat{\mu}_{Y'}=\varphi'$ とする．$\varphi_n(z)\longrightarrow\varphi(z)$，$e^{ia_nz}\varphi_n(b_nz)\longrightarrow\varphi'(z)$ から $a_n\to a$，$b_n\to b$，$\varphi'(z)=e^{iaz}\varphi(bz)$ を示せばよい．b_n から収束列 b_{n_k} を選ぶ．ただし極限 b は $0\leq b\leq+\infty$ である．問1D によって $\varphi_n\to\varphi$ は広義一様にいえるから，$b=0$ とすると

$$|\varphi'(z)| = \lim |\varphi_{n_k}(b_{n_k} z)| = |\varphi(0)| = 1$$

となり，問3A により Y' の分布は δ 分布となって仮定に反する．$b=+\infty$ とすると同様に

$$|\varphi(z)| = \lim |\varphi_{n_k}(z)| = \lim |\varphi_{n_k}(b_{n_k}\frac{z}{b_{n_k}})| = |\varphi'(0)| = 1$$

となって Y の分布が δ 分布となり，仮定に反する．故に，$0 < b < +\infty$ である．$z=0$ の近傍で $\varphi'(z)$, $\varphi(bz)$ は 0 でないから

$$e^{ia_{n_k}z} = \frac{e^{ia_{n_k}z}\varphi_{n_k}(b_{n_k}z)}{\varphi_{n_k}(b_{n_k}z)} \longrightarrow \frac{\varphi'(z)}{\varphi(bz)} \neq 0$$

である．しかもこの収束は 0 のある近傍で一様である．故にそこにおいて $ia_{n_k}z \longrightarrow \log\frac{\varphi'(z)}{\varphi(bz)}$ である．故に a_{n_k} はある $a \in R^d$ に収束し，$\varphi'(z) = e^{iaz}\varphi(bz)$ である．あとは，$b_n \to b$ をいえばよい．部分列 b_{m_k} に対し $b_{m_k} \longrightarrow b'$ とする．$a_{n_k} \longrightarrow a$, $a_{m_k} \longrightarrow a'$ となる．$e^{iaz}\varphi(bz) = e^{ia'z}\varphi(b'z)$，従って $|\varphi(bz)| = |\varphi(b'z)|$ である．$b' > b$ とすると，$|\varphi(z)| = |\varphi(\frac{b}{b'}z)|$ であるから

$$|\varphi(z)| = |\varphi(\frac{b}{b'}z)| = |\varphi((\frac{b}{b'})^2 z)| = \cdots = |\varphi((\frac{b}{b'})^n z)| \longrightarrow |\varphi(0)| = 1$$

となり，問3A によって φ は δ 分布の特性関数となって仮定に反する．同様に，$b' < b$ も否定されるから $b' = b$ であり，$b_n \to b$ がいえたことになる．□

3.6. 補題. Y_n, Y を R^d に値をとる確率変数，a_n, a_n' を R^d の元，$b_n > 0$, $b_n' > 0$ とする．$\mu_{b_nY_n+a_n} \longrightarrow \mu_Y$ かつ $\mu_{b_n'Y_n+a_n'} \longrightarrow \mu_Y$ で，μ_Y は δ 分布ではないとする．このとき $\frac{b_n'}{b_n} \to 1$ かつ $a_n' - \frac{b_n'}{b_n}a_n \longrightarrow 0$ である．

証明. $b'_n Y_n + a'_n = \frac{b'_n}{b_n}(b_n Y_n + a_n) + a'_n - \frac{b'_n}{b_n} a_n$ であるから，補題3.5を，それの Y_n, b_n, a_n をそれぞれ $b_n Y_n + a_n$, $\frac{b'_n}{b_n}$, $a'_n - \frac{b'_n}{b_n} a_n$ として適用すればよい。ここで

$$(3.3)\quad \begin{cases} a \in R^d,\ b > 0,\ \mu_Y = \mu_{bY+a} \text{ で } \mu_Y \text{ が } \delta \text{ 分布でない} \\ \text{ならば } b = 1,\ a = 0 \text{ である.} \end{cases}$$

ということを使う. (3.3) は，補題3.5の証明の最後の部分のようにして分る. □

3.7. 補題. $\mu \in S(R^d)$ で X_n, a_n, b_n を定義3.1のものとする. μ が δ 分布でなければ，

$$(3.4)\qquad b_n \to \infty \quad \text{かつ} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$$

である.

証明. $\varphi_{Y_n}(z) = e^{-ia_n z}\varphi_{X_1}\left(\frac{z}{b_n}\right)^n$ であるから $\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{z}{b_n}\right)\right|^n \to |\hat{\mu}(z)|$ (広義一様) である. 0 の近傍で $\hat{\mu}(z) \neq 0$ であるから，0 のある近傍で一様に

$$\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{z}{b_n}\right)\right| = e^{\frac{1}{n}\log\left(\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{z}{b_n}\right)\right|^n\right)} \longrightarrow 1$$

である. b_n の部分列 b_{n_k} が有界とすると，従って $|\varphi_{X_1}(z)| = \left|\varphi_{X_1}\left(\frac{b_{n_k} z}{b_{n_k}}\right)\right| \to 1$ が $z=0$ の近傍でいえる. 故に X_1 の分布は δ 分布になり (問3A)，μ も δ 分布となって仮定に反する. 故に $b_n \to \infty$ がいえた. $Y'_n = \frac{S_n}{b_{n+1}} - a_{n+1}$ とおくと $Y_{n+1} = Y'_n + \frac{X_{n+1}}{b_{n+1}}$，故に $\varphi_{Y_{n+1}}(z) = \varphi_{Y'_n}(z)\varphi_{X_{n+1}}\left(\frac{z}{b_{n+1}}\right)$ であるから，$\varphi_{Y'_n}(z) \to \hat{\mu}(z)$ である. 故に補題3.6によって $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$ となる. □

定理3.2の証明. (ii) ⇒ (i) をいおう. μ が (ii) をみたせば $\hat{\mu}(z)^n = \hat{\mu}(c_n z)^{i\gamma_n z}$ すなわち

(3.5) $$\hat{\mu}(z) = e^{-i\frac{1}{c_n}\gamma_n z}\,\hat{\mu}\left(\frac{z}{c_n}\right)^n$$

をみたす $c_n > 0$ と $\gamma_n \in R^d$ が見出されるから，X_k の分布を μ，$b_n = c_n$，$a_n = \frac{1}{c_n}\gamma_n$ にとればよい．

次に (i) ⇒ (ii) をいおう．μ が δ 分布のときは明かに (ii) をみたすから，μ は δ 分布でないとする．μ に対し定義3.1 の X_n，a_n，b_n をとる．補題3.7 により，b_n は (3.4) をみたす．$c_1 > 0$，$c_2 > 0$ が与えられたとき，(3.2) をみたす $c > 0$ と $\gamma \in R^d$ を見出せることを示そう．$c_1 \leq c_2$ としてよい．b_n の部分列 b_{n_k}，b_{m_k} を $\frac{b_{m_k}}{b_{n_k}} \to \frac{c_2}{c_1}$ $(k \to \infty)$ に選ぶことができる．なぜならば，$c_1 = c_2$ のときは $n_k = k$，$m_k = k+1$ に選べばよいし，$c_1 < c_2$ のときは，まず n_k をすべての $n \geqq n_k$ に対し $|\log b_{n+1} - \log b_n| < 1/k$ となるようにとれば，$m_k \geqq n_k$ を $\left|\log b_{m_k} - \log b_{n_k} - \log\frac{c_2}{c_1}\right| < \frac{1}{k}$ にとることができるからである．

$$Z_{n,m} = c_1\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{b_n} - a_n\right) + \frac{c_1 b_m}{b_n}\left(\frac{X_{n+1} + \cdots + X_{n+m}}{b_m} - a_m\right)$$

とすると，

$$\varphi_{Z_{n,m}}(z) = \varphi_{Y_n}(c_1 z)\,\varphi_{Y_m}\left(\frac{c_1 b_m}{b_n} z\right)$$

であるから，$n = n_k$，$m = m_k$ として極限をとると $\hat{\mu}(c_1 z)\hat{\mu}(c_2 z)$ となる．一方 $Z_{n,m}$ の分布は Y_{n+m} の分布とタイプ同値であるから，補題3.4 によって $\hat{\mu}(c_1 z)\hat{\mu}(c_2 z)$ は $\hat{\mu}(z)$ とタイプ同値である．すなわち，(3.2) をみたす c と γ が存在する．□

3.8. 定理. 安定分布は無限分解可能である．すなわち，$S(R^d) \subset I(R^d)$．

証明. 2通り与えよう. 第1の証明. 定理3.2により $\mu\in S(R^d)$ は(ii)をみたすから, (3.5)により $\hat{\mu}(z)=\hat{\mu}_n(z)^n$ をみたすような $\mu_n\in\mathcal{P}(R^d)$ が存在する. 第2の証明. μ が δ 分布ならば $\mu\in I(R^d)$ は明かであるから, $\mu\in S(R^d)$ で δ 分布ではないとする. 定義3.1における b_n は補題3.7によって $b_n\to\infty$ であるから, $\left\{\frac{X_k}{b_n} : n=1,2,\cdots ; k=1,\cdots,n\right\}$ は null array となる. 故に定理2.8によって $\mu\in I(R^d)$ となる. □

次の定理は, 安定分布に対するLévy測度を求め, それの系としていうこともできるが, ここでは直接にいうことにする.

3.9. 定理. $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ が定理3.2の(ii)をみたすとし, δ 分布ではないとする. このとき, c は c_1 と c_2 から1通りに定まる. しかも, $0<\alpha\leq 2$ をみたす α が μ からただ1つ定まって

(3.6) $$c=(c_1^{\alpha}+c_2^{\alpha})^{1/\alpha}$$

となる.

証明. c が c_1, c_2 から1通りに定まることは, (3.3)によって明かである. (3.2)から

$$|\hat{\mu}(c_1z)|^2\,|\hat{\mu}(c_2z)|^2=|\hat{\mu}(cz)|^2$$

である. ゆえに, μ のかわりにその対称化, すなわち $|\hat{\mu}(z)|^2$ を特性関数とする分布を考えることにより, (3.2)が $\gamma=0$ で成り立つとしてよい(c_1, c_2 からの c の定まり方は変らない). まず $\hat{\mu}(z)^2=\hat{\mu}(qz)$ となる $q>0$ が存在する. $q\neq 1$ である($q=1$ とすると $z=0$ の近傍で $\hat{\mu}(z)=1$ となり, 問3Aにより μ が δ 分布になってしまう). 故に $\hat{\mu}(z)$ は零点をもたない(零点 z_0 をもつと, qz_0, $q^{-1}z_0$ も零点になり, 従って q^nz_0, $q^{-n}z_0$

も零点になるから，零点が原点に集積して矛盾)．故に，$\psi(z) = \log\hat{\mu}(z)$ が定義でき，

$$\psi(c_1 z) + \psi(c_2 z) = \psi(cz)$$

である．故に，任意の正の整数 n に対し

$$n\psi(z) = \psi(b_n z) , \qquad z \in R^d$$

をみたす $b_n > 0$ がただ1つ存在する．$b_{mn} = b_m b_n$ である．さらに，任意の正の数 s に対し

(3.7) $$s\psi(z) = \psi(b_s z), \qquad z \in R^d$$

をみたす $b_s > 0$ が存在することを示そう．存在すれば1通りであることは，やはり (3.3) から分る．まず

$$\psi\left(\frac{b_n}{b_m} z\right) = n\psi\left(\frac{z}{b_m}\right) = \frac{n}{m}\psi(z)$$

であるから，s が有理数 $\frac{n}{m}$ のときは $b_s = \frac{b_n}{b_m}$ とすればよい．s_1, s_2 が有理数ならば

(3.8) $$b_{s_1 s_2} = b_{s_1} b_{s_2}$$

である．有理数 $r < 1$ に対し，$b_r < 1$ である．なぜならば，$b_r \geqq 1$ とすると，$\psi(z) = r^n \psi\left(\frac{z}{b_r^n}\right) \to 0$，従って $\psi(z) = 0$ となって仮定に反するから．故に，s_1, s_2 が有理数で $s_1 < s_2$ ならば，(3.8) によって $b_{s_1} < b_{s_2}$ である．s が正の無理数のときは，r を有理数とし $b_s = \lim_{r \uparrow s} b_r$ によって b_s を定義しよう．すると，ψ の連続性により (3.7) が成り立つ．やはり ψ の連続性により b_s は s に関し連続となり，(3.8) がすべての正の数 s_1, s_2 に対し成り立つ．

$$f(t) = \log b_{e^t}$$

とすると，$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$ であるから $f(t) = \beta t$ と

表わされる（問3D）．すなわち $b_s = s^\beta$ である．b_s は強い意味で単調増加だから，$\beta > 0$ である．$\alpha = 1/\beta$ とする．

$$\psi(s_1^{1/\alpha} z) + \psi(s_2^{1/\alpha} z) = s_1 \psi(z) + s_2 \psi(z) = \psi((s_1+s_2)^{1/\alpha} z)$$

であるから (3.6) がいえた．α, α' が共に (3.6) をみたすならば，$c^\alpha = c_1^\alpha + 1$，$c^{\alpha'} = c_1^{\alpha'} + 1$ であるから，任意の $t = c_1^\alpha$ に対し $(t+1)^{\alpha'/\alpha} = t^{\alpha'/\alpha} + 1$ となり，従って $\alpha = \alpha'$ である．故に α は μ からただ1つ定まる．

残っているのは，$\alpha \le 2$ の証明である．これを Feller [F2] に従って示そう．$X, X_1, X_2, \cdots$ を独立で同分布 μ をもつとする．まず，$E|X|^2 < \infty$ ならば $\alpha = 2$ である．なぜならば，$c_1 X_1 + c_2 X_2$ と cX が同分布，X の各成分の平均は 0（対称だから）であるため $c_1^2 E|X_1|^2 + c_2^2 E|X_2|^2 = c^2 E|X|^2$ となり，$c^2 = c_1^2 + c_2^2$ となるからである．次に，$\alpha > 2$ とすると $E|X|^2 < \infty$ となり，従って矛盾を生じることを示そう．X の各成分 $(X)_j$ に対し $E(X)_j^2 < \infty$ をいえばよい．$(X)_j$ が δ 分布をもてば明かであるから，そうでないとする．$(X)_j$ の分布は対称で定理3.2 の (ii) をみたし，それに対する α も変らない．故に，もともと X を1次元とする．t を $P(|X| > t) < 1/4$ にとる．問3F によって

$$\frac{1}{2}\left(1 - e^{-nP(|X| > tn^{1/\alpha})}\right) \le P(|S_n| > tn^{1/\alpha}) = P(|X| > t) < \frac{1}{4}$$

であるから，$nP(|X| > tn^{1/\alpha})$ が n に関し有界である．$\xi > x$，$(\xi/t)^\alpha > 2$ の任意の ξ に対し，n を $tn^{1/\alpha} < \xi \le t(n+1)^{1/\alpha}$ に選ぶと

$$P(|X| > \xi) \le P(|X| > tn^{1/\alpha}) \le \frac{K}{n} \le \frac{K}{(\xi/t)^\alpha - 1} \le \frac{2Kt^\alpha}{\xi^\alpha}$$

であるから

$$E(X^2 ; 2^{k-1} < |X| \le 2^k) \le \text{const}\ 2^{(2-\alpha)k}$$

である．故に $EX^2 < \infty$ となる．□

3.10. 定義. $\mu \in S(R^d)$ で，δ分布ではないとき，定理3.9によって定まる α を安定分布 μ の指数（exponent または index）という．$0 < \alpha \le 2$ である．指数 α の安定分布の全体を $S_\alpha(R^d)$ とかく．

各 α に対し $S_\alpha(R^d)$ が空でないことは後に（§5）示される．

3.11. 補足. 安定分布に対してはその domain of attraction を定める問題，すなわち，$\mu \in S(R^d)$ に対し定義3.1において μ を定めるような X_k の分布をすべて求めるという問題がある．1次元の場合これは Khintchine, Feller, Lévy, Gnedenko, Dœblin によって 1930年代に解かれ，その結果は [GK], [F2] などに見ることが出来る．多次元でも結果はほぼ同様で，Rvačeva (1954) が扱っている．[F2] では regularly varying な関数の一般論を展開しておき，それを使って，安定分布の特性関数と domain of attraction を同時に求めている．

(3.1) において S_n を normalize して Y_n を作るときに，b_n^{-1} という正の数を乗じるかわりに線形写像を作用させることを許すと極限分布のクラスが広がるが，Sharpe (1969 a) はそれを operator-stable distribution と呼んで，その特徴づけを与えた．このクラスについては，その後，Semovskii (1979) など，いくつかの研究がある．

問3A. $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ とする．0 のある近傍で $|\hat{\mu}(z)| = 1$ ならば μ は δ分布であることを示せ．（射影を考えれば1次元の場合に帰着する．1次元では，[GK] p.56, 59, [Lo] p.202 など．）

問3B. $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(R^d)$ とする．0 のある近傍で $\hat{\mu}_1(z) = \hat{\mu}_2(z)$ であっても，$\mu_1 = \mu_2$ とは限らない．これを示せ．（たとえば

[G] p. 305, [F2] p. 506)

問3C. 補題3.5の仮定において, $b_n>0$ のかわりに $b_n\in R^1$ とすると, 結論を「$a\in R^d$ と $b\neq 0$ が存在して $\mu_{Y'}=\mu_{bY+a}$ かつ $|b_n|\to|b|$ である」としたものが成り立つ. これを示せ. (補題3.5の証明と同じ方法でいえる. [Lo] p. 203)

問3D. R^1 の上で定義された実数値関数 $f(t)$ が Lebesgue 可測かつ局所有界で, すべての t_1, t_2 に対し

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2)$$

であるならば, $f(t)=\text{const}\cdot t$ である. これを示せ.
($f(t)=\int_t^{t+1}f(s)\,ds-\int_0^1 f(s)\,ds$ を用いればよい.)

問3E. $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ に対し次の3つは同値であることを示せ.
(i) μ が対称, すなわち, 任意の $B\in\mathcal{B}(R^d)$ に対し $\mu(B)=\mu(-B)$
(ii) $\hat{\mu}(z)$ が実.
(iii) $\hat{\mu}(z)=\hat{\mu}(-z)$.

問3F. $X_1, X_2, \cdots$ が独立同分布の1次元の確率変数の列で, その分布が対称とする. このとき任意の t に対し

$$P(|X_1+\cdots+X_n|>t)\geqq\frac{1}{2}P\left(\max_{1\leq k\leq n}|X_k|>t\right)\geqq\frac{1}{2}\left(1-e^{-nP(|X_1|>t)}\right)$$

であることを示せ. ([F2] p.149)

問3G. $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ に対し次の性質は定理3.2の性質(ii)と同値であることを示せ. 任意の正の整数 n に対し $b_n>0$ と $\gamma_n\in R^d$ が存在して

$$\hat{\mu}(z)^n=\hat{\mu}(b_n z)e^{i\gamma_n z},\qquad z\in R^d.$$

(この性質から (iii) がいえることを定理3.9の証明が示している.)

注. 実は $n=2,3$ について上のことが成り立てば十分である. しかし, $n=2$ だけでは十分でない ([F2] p.215).

問3H. Cauchy分布 (R^1 の上の) が指数1の安定分布であることを示せ. ($b>0$, $\mu(dx)=\dfrac{b\,dx}{\pi((x-a)^2+b^2)}$ のとき $\hat{\mu}(z)=e^{iaz-b|z|}$)

問3I. R^1 の上の分布で

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2x}}x^{-\frac{3}{2}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

を密度関数とするものが, 指数 $1/2$ の安定分布であることを示せ. ($\hat{\mu}(z)=e^{-|z|^{1/2}(1-i\,\mathrm{sgn}\,z)}$ となる. z の正, 負, 0 に応じて $\mathrm{sgn}\,z$ は $1, -1, 0$ である. なお Laplace変換は $\int e^{-sx}\mu(dx)=e^{-(2s)^{1/2}}$ である. [F2] p.173, 436)

問3J $\mu\in I(R^d)$ でその3要素が γ, A, ν であるとする. μ が対称であることと, $\gamma=0$ かつ ν が対称であることとが同値であることを示せ. (問3E と Lévy の標準形の一意性を用いよ.)

問3K. $0<\alpha\leq 2$ とする. $\mu\in S_\alpha(R^d)$ で T が線形写像であるとき, $T\mu$ は $S_\alpha(R^d)$ に属するかまたは δ 分布であることを示せ. (定理3.2から分る.)

§4. 分布のクラスから新しいクラスを作る操作 $\mathcal{L}$

R^d の上の無限分解可能分布の全体 $I(R^d)$ と安定分布の全体 $S(R^d)$ の間にある重要なサブクラスとして L分布の全体 $L(R^d)$ がある．さらに Urbanik (1972b, 1973) は1次元で $L=L(R^1)$ と $S=S(R^1)$ の間にあるサブクラスの列

$$L=L_0\supset L_1\supset L_2\supset\cdots\supset L_\infty\supset S$$

を，ある種の極限分布のクラスとして定義し，それに属する分布の特性関数を求めた．われわれはこれを Urbanik とは違う方法で，しかも多次元で定義する．以下§4, 5の結果は Sato (1980) による．ただし，特性関数の表現は，別の方法（凸集合の表現定理を用いる）で Kumar-Schreiber (1979) も同様の結果を出している．まず，操作 $\mathcal{L}$ を定義する．

4.1. 定義. $Q\subset\mathcal{P}(R^d)$ に対し，Q から導かれる極限分布のクラス $\mathcal{L}(Q)\subset\mathcal{P}(R^d)$ を次のように定義する．$\mu\in\mathcal{L}(Q)$ とは，$n=1,2,\cdots$ に対し R^d に値をとる確率変数 X_n と $a_n\in R^d$, $b_n>0$ が存在して

(4.1) $\mu_{X_n}\in Q$,

(4.2) $X_1, X_2, \cdots$ は独立,

(4.3) $Y_n=b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_k-a_n$ とするとき $\mu_{Y_n}\to\mu \quad (n\to\infty)$,

(4.4) $\{b_n^{-1}X_k : n=1,2,\cdots ; k=1,\cdots,n\}$ が null array

であること．$X_1, X_2, \cdots$ に同分布を仮定していないことに注意しなければならない．

4.2. 定義. $\mathcal{L}(\mathcal{P}(R^d))$ を $L(R^d)$ とも $L_0(R^d)$ とも書き，これに属する分布を L 分布と呼ぶ．$m=1,2,\cdots$ に対し $L_m(R^d)$ を $L_m(R^d)=\mathcal{L}(L_{m-1}(R^d))$ によって定義する．さらに，$L_\infty(R^d) = \bigcap_{0\leq m<\infty} L_m(R^d)$ と定義する．混同のおそれの無いときは $L_m(R^d)$, $L_\infty(R^d)$ を単に L_m, L_∞ とも書く．

4.3. 定義. $Q\subset\mathcal{P}(R^d)$ が完全に閉じている（completely closed）とは，収束，たゝみこみ，タイプ同値に関し閉じていることとする．すなわち次の3つが成り立っていることである．

(a) $\mu_n\in Q \quad (n=1,2,\cdots), \quad \mu_n\to\mu \quad \Rightarrow \quad \mu\in Q$

(b) $\mu_1\in Q, \quad \mu_2\in Q \quad \Rightarrow \quad \mu_1*\mu_2\in Q$

(c) $\mu_1\in Q$, μ_2 が μ_1 にタイプ同値 $\Rightarrow$ $\mu_2\in Q$

Q が完全に閉じているときには，次の定理のように，Q の特性関数によって $\mathcal{L}(Q)$ の特性関数を特徴づけることができる．この定理は，L 分布に対する Lévy [L2] の結果の拡張である．この性質によって，L 分布のことを self-decomposable な分布ともいう．

4.4. 定理. $Q\subset\mathcal{P}(R^d)$ が完全に閉じているとし，$\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ とする．このとき，次の2つは同値である．

(i) $\mu\in\mathcal{L}(Q)$.

(ii) $0<\alpha<1$ をみたす任意の α に対し $\mu_\alpha\in Q$ が存在して

$$\hat{\mu}(z)=\hat{\mu}(\alpha z)\hat{\mu}_\alpha(z), \qquad z\in R^d \tag{4.5}$$

が成り立つ．

いくつかの補題ののち，これを証明しよう．

4.5. 補題. 任意の $Q\subset\mathcal{P}(R^d)$ に対し $\mathcal{L}(Q)\subset I(R^d)$.

証明. $\mathcal{L}(Q)$ の定義と定理2.8から明か.

4.6. 補題. μ, X_n と $a_n \in R^d$, $b_n > 0$ が (4.2), (4.3), (4.4) をみたすとする. $0 < \alpha < 1$ に対し, 正の整数の列 $\{n_\ell\}$, $\{m_\ell\}$ を

(4.6) $n_\ell \uparrow \infty$, $m_\ell \uparrow \infty$, $m_\ell < n_\ell$, かつ $\lim_{\ell \to \infty} b_{n_\ell}^{-1} b_{m_\ell} = \alpha$

に選べたとする. このとき, 適当に $a'_\ell \in R^d$ を選べば

(4.7) $$Z_\ell = b_{n_\ell}^{-1} \sum_{k=m_\ell+1}^{n_\ell} X_k - a'_\ell$$

の分布 μ_{Z_ℓ} が, (4.5) をみたすような分布 μ_α に収束する.

証明. $a'_\ell = a_{n_\ell} - b_{n_\ell}^{-1} b_{m_\ell} a_{m_\ell}$ として (4.7) によって Z_ℓ を定め,

$$W_\ell = b_{n_\ell}^{-1} \sum_{k=1}^{m_\ell} X_k - b_{n_\ell}^{-1} b_{m_\ell} a_{m_\ell}$$

とすると, $Y_{n_\ell} = W_\ell + Z_\ell$ であるから, $\hat{\mu}_{Y_{n_\ell}}(z) = \hat{\mu}_{W_\ell}(z) \hat{\mu}_{Z_\ell}(z)$ である. (4.3) から問1D によって

$$\hat{\mu}_{Y_n}(z) = e^{-ia_n z} \prod_{k=1}^{n} \hat{\mu}_{X_k}(b_n^{-1} z) \longrightarrow \hat{\mu}(z) \quad (\text{広義一様})$$

であるから, $\hat{\mu}_{W_\ell}(z) = \hat{\mu}_{Y_{m_\ell}}(b_{n_\ell}^{-1} b_{m_\ell} z)$ によって

$$\hat{\mu}_{W_\ell}(z) - \hat{\mu}(b_{n_\ell}^{-1} b_{m_\ell} z) \longrightarrow 0 \qquad (\ell \to \infty)$$

である. $\hat{\mu}(b_{n_\ell}^{-1} b_{m_\ell} z) \to \hat{\mu}(\alpha z)$ であるから, $\hat{\mu}_{W_\ell}(z) \to \hat{\mu}(\alpha z)$ がいえる. 補題の仮定は $\mu \in \mathcal{L}(P(R^d))$ を意味するから, 補題4.5により $\mu \in I(R^d)$, ゆえに補題1.12により $\hat{\mu}(z) \neq 0$ である. 従って $\hat{\mu}_{Z_\ell}(z) \to \hat{\mu}(z)/\hat{\mu}(\alpha z)$ である. この極限は連続であるから, Lévy の定理 (問1E) によってある分布 μ_α の特性関数である. □

4.7. 補題. μ, X_n と $a_n \in R^d$, $b_n > 0$ が (4.2), (4.3), (4.4) をみたし, μ が δ 分布でないとする. このとき

$$(4.8) \qquad b_n \to \infty \quad \text{かつ} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$$

である.

証明. 部分列 b_{n_ℓ} が有限な b に収束するとすると, null array の定義2.2 によって, 任意の k と任意の $\varepsilon > 0$ に対し $P(|X_k| > b\varepsilon) = 0$ がいえるから $X_k = 0$ a.s., 従って $Y_n = -a_n$ a.s. となり, μ が δ 分布になって仮定に反する. 故に $b_n \to \infty$ である. $b_{n+1}/b_n \to 1$ というのは, 補題3.7 の証明の後半と同様である. □

定理4.4 の証明. (i) から (ii) を示そう. Q はすべての δ 分布を含んでいる (問4A) から, μ が δ 分布のときは (ii) は明らかである. $\mu \in \mathcal{L}(Q)$ とし, δ 分布でないとする. $0<\alpha<1$ とする. 補題4.7 によって b_n は (4.8) をみたすから, 定理3.2 の証明の中で述べたように, (4.6) をみたす整数列 n_ℓ, m_ℓ を見出すことができる. 故に補題4.6 により, (4.7) で定まる確率変数 Z_ℓ の分布が, (4.5) をみたすような分布 μ_α に収束する. Q が完全に閉じていると仮定したから, Z_ℓ の分布, 従って分布 μ_α が Q に属する.

逆に, (ii) から (i) を示そう. 問2C の不等式を使うと, $\hat{\mu}(z)$ が零点をもたないことがいえる. 実際, 零点が存在するとすると, 0 に最も近い零点を z_0 とし, (4.5) を用いて

$$1 = \mathrm{Re}\,(1 - \hat{\mu}_\alpha(z_0)) \leq 4\,\mathrm{Re}\,\left(1 - \frac{\hat{\mu}(z_0/2)}{\hat{\mu}(\alpha z_0/2)}\right)$$

がいえ, $\alpha \uparrow 1$ とすると右辺は 0 に近づくから不合理である.

$X_1, X_2, \cdots$ を独立で

$$\varphi_{X_n}(z) = \hat{\mu}_{\frac{n}{n+1}}((n+1)z) = \frac{\hat{\mu}((n+1)z)}{\hat{\mu}(nz)}$$

のようなものとし，$Y_n = n^{-1}(X_1+\cdots+X_n)$ とすると

$$\varphi_{Y_n}(z) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{z}{n}\right) = \frac{\hat{\mu}\left(\frac{n+1}{n}z\right)}{\hat{\mu}\left(\frac{z}{n}\right)} \longrightarrow \hat{\mu}(z) \qquad (n\to\infty)$$

である．$\hat{\mu}(z)$ が連続であるから

$$\max_{1\le k\le n}\left|\varphi_{X_k/n}(z)-1\right| = \max_{1\le k\le n}\left|\frac{\hat{\mu}\left(\frac{k+1}{n}z\right)}{\hat{\mu}\left(\frac{k}{n}z\right)}-1\right| \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

であり，ゆえに補題2.6によって $\{X_k/n : n=1,2,\cdots; k=1,\cdots,n\}$ が null array である．(4.1)—(4.4) がみたされていることが分ったから，$\mu\in\mathcal{L}(Q)$ である．□

4.8. 系. もし Q が完全に閉じていれば，$\mathcal{L}(Q)\subset Q$ で，$\mathcal{L}(Q)$ も完全に閉じている．

証明. $\mathcal{L}(Q)\subset Q$ は Q が完全に閉じていることと $\mathcal{L}(Q)$ の定義から明かである．$\mu_n\in\mathcal{L}(Q)$ と $\mu_n\to\mu$ とから $\mu\in\mathcal{L}(Q)$ をいうには，定理4.4を使えばよい．実際，補題1.13と4.5によって $\mu\in I(R^d)$ であるから補題1.12によって $\hat{\mu}(z)$ は零点をもたず，従って $\hat{\mu}_n(z)=\hat{\mu}_n(\alpha z)\hat{\mu}_{n,\alpha}(z)$ における $\mu_{n,\alpha}\in Q$ に対し $\hat{\mu}_{n,\alpha}(z)\longrightarrow\frac{\hat{\mu}(z)}{\hat{\mu}(\alpha z)}$ がいえる．故に，問1E によって $\frac{\hat{\mu}(z)}{\hat{\mu}(\alpha z)}$ はある分布 μ_α の特性関数で $\mu_{n,\alpha}\to\mu_\alpha$ である．故に $\mu_\alpha\in Q$ となり，$\mu\in\mathcal{L}(Q)$ がいえる．$\mathcal{L}(Q)$ がたたみこみとタイプ同値に関し閉じていることをいうには，同様に定理4.4を使ってもよいし，定義4.1から直接にいってもよい．□

4.9. 系. $m=0,1,\cdots,\infty$ に対し $L_m(R^d)$ は完全に閉じており，

$$I(R^d)\supset L_0(R^d)\supset L_1(R^d)\supset\cdots\supset L_\infty(R^d)\supset S(R^d)$$

である．

証明. $m<\infty$ に対し L_m が完全に閉じており $L_m \supset L_{m+1}$ であることは，系4.8から帰納法で分る．$m<\infty$ に対し L_m が完全に閉じていることから，L_∞ も完全に閉じている．$S \subset L_\infty$ をいおう．δ 分布が L_∞ に属することは明かであるから，μ が δ 分布でない安定分布とする．μ の指数を α とすると定理3.2，3.9によって，任意の $c_1>0$，$c_2>0$ に対し $a\in R^d$ が存在して

$$(4.9) \qquad \hat{\mu}(c_1 z)\hat{\mu}(c_2 z) = \hat{\mu}((c_1^\alpha + c_2^\alpha)^{1/\alpha} z)e^{iaz}$$

である．ゆえに，a をとりなおせば

$$\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}\left(\frac{c_1}{(c_1^\alpha + c_2^\alpha)^{1/\alpha}} z\right)\hat{\mu}\left(\frac{c_2}{(c_1^\alpha + c_2^\alpha)^{1/\alpha}} z\right)e^{iaz},$$

すなわち，任意の $0<\beta<1$ に対し $a\in R^d$ が存在して

$$\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}(\beta z)\hat{\mu}((1-\beta^\alpha)^{1/\alpha} z)e^{iaz}$$

である．ゆえに定理4.4によって $\mu\in L_0$，$\mu\in L_1$，$\cdots$ が順にいえる．□

4.10. 系. Q_1，Q_2 が完全に閉じているならば，$\mathcal{L}(Q_1\cap Q_2) = \mathcal{L}(Q_1)\cap\mathcal{L}(Q_2)$ である．

証明. $\subset$ は $\mathcal{L}$ の定義から一般の Q_1，Q_2 に対していえる．$\supset$ は定理4.4から分る．□

4.11. 系. Q が完全に閉じているならば，$\mathcal{L}(Q) = \mathcal{L}(Q\cap I(R^d))$ である．

証明. $\supset$ は明かである．$\subset$ をいうには，$\mu\in\mathcal{L}(Q)$ から $\mu_\alpha\in I(R^d)$ をいえば十分である．補題4.6により μ_α は μ_{Z_ℓ} の $\ell\to\infty$ における極限であるから，null array の極限分布で

ある．故に定理 2.8 によって $\mu_\alpha \in I(R^d)$ である．□

Q が完全に閉じているときには，$\mathcal{L}(Q)$ の定義を見かけ上もっと強くすることができることを示そう．

4.12. 系. Q が完全に閉じているとし，正の増加数列 b_n で (4.8) をみたすものを固定しておく．$\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ とする．このとき，$\mu \in \mathcal{L}(Q)$ のための必要十分条件は，確率変数列 X_n が存在して，この b_n と $a_n = 0$ に対し (4.1)—(4.4) が成り立つことである．

証明. 「十分」であることは明かである．「必要」であることをいおう．$\mu \in \mathcal{L}(Q)$ とする．μ は定理4.4 の性質 (ii) をもつことになる．定理 4.4 の (ii)$\Rightarrow$(i) の証明と同様に，X_1, $X_2, \cdots$ を独立で

$$\varphi_{X_n}(z) = \hat{\mu}_{b_n/b_{n+1}}(b_{n+1}z) = \frac{\hat{\mu}(b_{n+1}z)}{\hat{\mu}(b_n z)}$$

とし，$Y_n = b_n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$ とすると

$$\varphi_{Y_n}(z) = \frac{\hat{\mu}(b_n^{-1} b_{n+1} z)}{\hat{\mu}(b_n^{-1} b_1 z)} \longrightarrow \hat{\mu}(z)$$

である．b_n が (4.8) をみたす増加数列であることから，

$$\max_{1\le k\le n} \left| \frac{b_{k+1}}{b_n} - \frac{b_k}{b_n} \right| \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

がいえる（そうでないとすると，m_ℓ, n_ℓ が存在して $n_\ell \to \infty$, $m_\ell \le n_\ell$, かつ $\frac{b_{m_\ell+1}}{b_{n_\ell}} - \frac{b_{m_\ell}}{b_{n_\ell}} \to c > 0$ となるから矛盾）．ゆえに $\hat{\mu}(z)$ の連続性から

$$\max_{1\leq k\leq n}\left|\varphi_{X_k/b_n}(z)-1\right|=\max_{1\leq k\leq n}\frac{\left|\hat{\mu}\left(\frac{b_{k+1}}{b_n}z\right)-\hat{\mu}\left(\frac{b_k}{b_n}z\right)\right|}{\left|\hat{\mu}\left(\frac{b_k}{b_n}z\right)\right|}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

がいえるので (4.4) がみたされる．(4.1) ももちろんみたされているから，証明を終る．□

Urbanik (1972b, 1973) は1次元で，$\overbrace{\text{次の性質}}^{Q=\mathcal{P}(R^d)\text{のときの}}$ (ii) でクラス L_m を定義した．われわれの定義もそれと同値であることを次の系は示す．

4.13. 系．Q が完全に次の2つは同値である．

(i) $\mu\in\mathcal{L}(Q)$.

(ii) R^d に値をとる確率変数 X_n と $a_n\in R^d$ が存在して，$b_n=n$ に対し (4.2), (4.3), (4.4) をみたし，しかも，任意の $c>0$ に対し適当に $a_n(c)\in R^d$ を選べば $n^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_{[nc]+k}-a_n(c)$ の分布がある分布 $\nu_c\in Q$ に収束する．

証明．(i) ⇒ (ii)．$\mu\in\mathcal{L}(Q)$ とする．系 4.12 により，$\mathcal{L}(Q)$ の定義 4.1 において $b_n=n$ としてよい．補題 4.6 において $m=[\ell c]$, $n_\ell=[\ell c]+\ell$ に選ぶと

$$\frac{1}{[\ell c]+\ell}\sum_{k=1}^{\ell}X_{[\ell c]+k}-a'_\ell$$

の分布の収束が分り，従って $n^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_{[nc]+k}-a_n(c)$ の分布が収束する．Q が完全に閉じていることから，極限は Q に属する．

(ii) ⇒ (i) を示そう．δ分布ならば $\mathcal{L}(Q)$ に属すことは明かだから，μ はδ分布でないとする．与えられた $0<\alpha<1$ に対し $c=\frac{\alpha}{1-\alpha}$ とし，

$$Z_n=\frac{1}{[nc]+n}\sum_{k=1}^{n}X_{[nc]+k}$$

とする．補題4.6によって，ある $a_n' \in R^d$ に対して $\mu_{Z_n - a_n'} \to \mu_\alpha$ かつ $\hat{\mu}(z) = \hat{\mu}(\alpha z)\hat{\mu}_\alpha(z)$ となる．一方，

$$Z_n - \frac{n}{[nc]+n} a_n(c) = \frac{n}{[nc]+n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{[nc]+k} - a_n(c)\right)$$

であるから，その分布の特性関数は $\hat{\nu}_c(\frac{1}{c+1}z)$ に収束する．ゆえに，補題3.4によって，μ_α と ν_c がタイプ同値になる．ゆえに μ_α も Q に属する．ゆえに定理4.4によって $\mu \in \mathcal{L}(Q)$ となる．□

4.14. 定理．$\mathcal{L}(L_\infty(R^d)) = L_\infty(R^d)$，すなわち $L_\infty(R^d)$ は操作 $\mathcal{L}$ に関し不変である．$L_\infty(R^d)$ は，$\mathcal{P}(R^d)$ のサブクラスのうちこの性質をもつ最大のものとして特徴づけられる．

証明．系4.9によって L_∞ は完全に閉じているから，系4.8によって $\mathcal{L}(L_\infty) \subset L_\infty$ である．一方，$\mu \in L_\infty$ とすると，すべての m に対し $\mu \in L_m = \mathcal{L}(L_{m-1})$ であるから，定理4.4により $\mu_\alpha \in L_{m-1}$ である．μ_α は μ と α から一意的に定まるから，これは $\mu_\alpha \in L_\infty$ を意味する．ゆえにふたたび定理4.4によって，$\mu \in \mathcal{L}(L_\infty)$ となる．すなわち $L_\infty \subset \mathcal{L}(L_\infty)$ である．任意の $Q \subset \mathcal{P}(R^d)$ に対し $\mathcal{L}^m(Q) \subset \mathcal{L}^m(\mathcal{P}(R^d)) = L_{m-1}$ であるから，$\mathcal{L}(Q) = Q$ ならば $Q \subset L_\infty$ が得られる．□

問4A. $Q \subset \mathcal{P}(R^d)$ が空でなく，完全に閉じていれば，すべての δ 分布を含んでいることを示せ．（$P(|X/b_n| > 1/n) < 1/n$ に b_n を選べば，$\mu_{X/b_n} \to \delta_0$）

問4B. $0 < \alpha \leq 2$ を固定するとき，指数 α の安定分布の全体 $S_\alpha(R^d)$ にすべての δ 分布を加えたものが完全に閉じていて $\mathcal{L}$ に関し不変であることを示せ．（定理3.2，3.9を用いよ．）

問4C. $m=0,1,\cdots,\infty$ とする。T が R^d から R^d の中への線形写像であるとき，すべての $\mu\in L_m(R^d)$ に対し $T\mu\in L_m(R^d)$ である。特に T が R^d から d_1 次元部分空間 M の上への射影であるときは，M と R^{d_1} を同一視すれば，$T(L_m(R^d))=L_m(R^{d_1})$ である。これを示せ。（定義4.1からでも定理4.4からでも分る。）

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

§5. 安定分布, L分布, L_m, L_∞ に属する分布の標準形

前の2節で定義した $S(R^d)$, $L(R^d)$, $L_m(R^d)$, $L_\infty(R^d)$ という分布のクラスは，どれも無限分解可能分布 $I(R^d)$ のサブクラスであるから，それに属する分布を特徴づけるには，特性関数の Lévy の標準形における3要素 γ, A, ν を特徴づければよい．このうち γ と A に関しては問題が簡単なので，Lévy 測度 ν を特徴づけることが問題である．そのために $R^d\setminus\{0\}$ の点を球面成分と動径成分で表示することをしばしば用いる．S^{d-1} を R^d における単位球面 $S^{d-1}=\{x\in R^d:\ |x|=1\}$ とする．$E\subset(0,\infty)$, $B\subset S^{d-1}$ に対し EB で $z=u\xi$, $u\in E$, $\xi\in B$ と表わされる点の全体を表わす．$\mathcal{B}((0,\infty))$, $\mathcal{B}(S^{d-1})$ などで，それぞれの Borel 部分集合の全体を表わす．

5.1. 定理. $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ に対し次の2つは同値.

(i) $\mu\in L(R^d)$.

(ii) $\mu\in I(R^d)$ で，その Lévy 測度 ν が 0 であるかまたは $\lambda(d\xi)$ と $k_\xi(u)$ が存在して

$$(5.1)\qquad \nu(EB)=\int_B\lambda(d\xi)\int_E k_\xi(u)u^{-1}du,\qquad E\in\mathcal{B}((0,\infty)),\ B\in\mathcal{B}(S^{d-1})$$

と表わされる．ただし λ は S^{d-1} の上の確率測度であり，$k_\xi(u)$ は，u を固定するとき ξ に関し可測，ξ を固定するとき非負，非増加，右連続な関数で

$$(5.2)\qquad 0<\int_0^\infty k_\xi(u)\frac{u}{1+u^2}du=c<\infty$$

をみたし c は ξ に依存しない．

$\mu\in L(R^d)$ でその Lévy 測度 ν が 0 ではないとき，(ii)

に述べた ν の表現は次の意味でただ1つである．(λ, k_ξ)，$(\tilde{\lambda}, \tilde{k}_\xi)$ が共に ν の表現ならば，$\lambda=\tilde{\lambda}$ であり，λ-a.e. の ξ に対し $k_\xi(\cdot)=\tilde{k}_\xi(\cdot)$ である．

この定理は $d=1$ の場合には Lévy [L2] の結果（[GK]，[Lo] にもある）を見易い形に書きなおしたものである．一般の d でこの形にしたのは Sato (1980) であるが，補題5.3までは本質的には Lévy [L2] と Wolfe (1978) である．

5.2. 補題. $k=1,2$ に対し $\gamma_k \in R^d$，$A_k(z)$ は2次形式（非負と限らない），ν_k は R^d の上の signed measure で $\nu_k(\{0\})=0$，$\int_{R^d} \frac{|y|^2}{1+|y|^2}|\nu_k|(dy) < \infty$ とする．

$$\exp\left[i\gamma_1 z - \frac{1}{2}A_1(z) + \int_{R^d}\left(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu_1(dy)\right]$$

$$= \exp\left[i\gamma_2 z - \frac{1}{2}A_2(z) + \int_{R^d}\left(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu_2(dy)\right], \quad z \in R^d$$

であるならば，$\gamma_1=\gamma_2$，$A_1=A_2$，$\nu_1=\nu_2$ である．

証明. 非負2次形式 A_k^+，A_k^- と測度 ν_k^+，ν_k^- によって $A_k = A_k^+ - A_k^-$，$\nu_k = \nu_k^+ - \nu_k^-$ と書ける．上の等式から

$$\exp\left[i\gamma_1 z - \frac{1}{2}(A_1^+ + A_2^-)(z) + \int\left(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+|y|^2}\right)(\nu_1^+ + \nu_1^-)(dy)\right]$$

$$= \exp\left[i\gamma_2 z - \frac{1}{2}(A_1^- + A_2^+)(z) + \int\left(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+|y|^2}\right)(\nu_1^- + \nu_2^+)(dy)\right]$$

となるから，Lévy の表現の一意性（定理1.9）によって $\gamma_1=\gamma_2$，$A_1^+ + A_2^- = A_1^- + A_2^+$，$\nu_1^+ + \nu_1^- = \nu_1^- + \nu_2^+$ である．従って $A_1=A_2$，$\nu_1=\nu_2$ である．□

5.3. 補題. $\mu \in I(R^d)$, ν をその Lévy 測度とし, $N(u,B) = \nu((u,\infty)B)$ とする. このとき, $\mu \in L(R^d)$ の必要十分条件は, すべての $B \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ に対し $N(e^{-s}, B)$ が $s \in R^1$ の convex な関数であることである.

証明. 定理4.4により, self-decomposability すなわち定理4.4の性質(ii)で $Q = \mathcal{P}(R^d)$ としたものが, $\mu \in L(R^d)$ の必要十分条件である. さらに系4.11を考慮すると, $0<\alpha<1$ に対し $\hat{\mu}(z)/\hat{\mu}(\alpha z)$ が無限分解可能分布の特性関数になることが $\mu \in L(R^d)$ の必要十分条件である.

$$\frac{\hat{\mu}(z)}{\hat{\mu}(\alpha z)} = \exp\Big[i(\gamma z - \alpha\gamma z) - \frac{1}{2}(A(z) - A(\alpha z)) + \int \Big(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+|y|^2}\Big)\nu(dy)$$
$$- \int \Big(e^{i\alpha z y} - 1 - \frac{i\alpha z y}{1+|y|^2}\Big)\nu(dy)\Big]$$
$$= \exp\Big[i\gamma_\alpha z - \frac{1}{2}A_\alpha(z) + \int \Big(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+|y|^2}\Big)\nu_\alpha(dy)\Big],$$

ただし

$$\gamma_\alpha z = \gamma z - \alpha\gamma z + \int \Big(\frac{i\alpha z y}{1+|y|^2} - \frac{i\alpha z y}{1+|\alpha y|^2}\Big)\nu(dy),$$

$$A_\alpha(z) = A(z) - A(\alpha z), \qquad \nu_\alpha(E) = \nu(E) - \nu(\alpha^{-1}E)$$

である. $A_\alpha(z)$ は常に非負である. 故に, 補題5.2と定理1.9により, $\mu \in L(R^d)$ となる必要十分条件は

(5.3) $\qquad E \in \mathcal{B}(R^d)$, $0<\alpha<1$ に対し $\nu(E) \geqq \nu(\alpha^{-1}E)$

である. (5.3) が成り立てば, B を固定して $H(s) = N(e^{-s}, B)$ とおくとき, $\delta > 0$ に対し

$$H(s+\delta) - H(s) = \nu((e^{-s-\delta}, e^{-s}]B) \geqq \nu((\alpha^{-1}e^{-s-\delta}, \alpha^{-1}e^{-s}]B)$$
$$= H(s+\delta+\log\alpha) - H(s+\log\alpha)$$

であるから $H(s)$ は convex である. 逆に, すべての $B \in \mathcal{B}(S^{d-1})$

に対し $N(e^{-s}, B)$ が convex であれば，E が $(0,\infty)$ 内の区間のときに $\nu(EB) \geqslant \nu(\alpha^{-1}EB)$ がいえて，(5.3) が成り立つことになる．□

定理 5.1 の証明．(i)⇒(ii) をいおう．$\mu \in L(R^d)$ とする．補題 4.5 によって $\mu \in I(R^d)$ である．その Lévy 測度 ν が 0 ではないとする．$N(u, B)$ を上の通りとし

$$\lambda(B) = \frac{1}{c}\int_{(0,\infty)B} \frac{|y|^2}{1+|y|^2}\,\nu(dy) = -\frac{1}{c}\int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^2}\,dN(u,B) \tag{5.4}$$

と定義する．c は，λ が S^{d-1} の上の確率測度となるように normalize する定数である．各 $u>0$ に対し $N(u,\cdot)$ は λ に関し絶対連続になる．ゆえに Radon-Nikodym によって，各 $s \in R^1$ に対し ξ の非負可測関数 $H_\xi(s)$ が存在して

$$N(e^{-s}, B) = \int_B H_\xi(s)\,\lambda(d\xi), \qquad B \in \mathcal{B}(S^{d-1}) \tag{5.5}$$

となる．$s_1 < s_2$ ならば，λ-a.e. の ξ に対し

$$H_\xi(s_1) \leqq H_\xi(s_2) \tag{5.6}$$

である．補題 5.3 によって $N(e^{-s}, B)$ は s に関し convex であるから，$s_1 < s_2$ と $0<\alpha<1$ が与えられたとき，λ-a.e. の ξ に対し

$$\alpha H_\xi(s_1) + (1-\alpha) H_\xi(s_2) \geqslant H_\xi(\alpha s_1 + (1-\alpha) s_2) \tag{5.7}$$

である．λ 測度 1 の集合 $E_1 \subset S^{d-1}$ を，すべての $\xi \in E_1$ とすべての有理数の s_1, s_2, α（ただし $s_1 < s_2$，$0<\alpha<1$）に対し (5.6) と (5.7) が成り立つように選ぶ．$\xi \in E_1$ と実数 s に対し

$$\tilde{H}_\xi(s) = \sup_{\substack{s'<s \\ s'\text{：有理数}}} H_\xi(s')$$

と定義する．すると $\tilde{H}_\xi(s)$ は s について非減少かつ convex, ξ について可測である．しかも (5,5) が $H_\xi(s)$ の代りに $\tilde{H}_\xi(s)$ として成り立つ．ゆえに λ測度1の集合 $E_2 \subset E_1$ が存在して，すべての $\xi \in E_2$ に対し $\lim\limits_{s \to -\infty} \tilde{H}_\xi(s) = 0$ である．ゆえに，$\xi \in E_2$ に対しては非負，非減少，左連続の関数 $h_\xi(s)$ が存在して

$$\tilde{H}_\xi(s) = \int_{-\infty}^{s} h_\xi(t)\,dt$$

となる．$h_\xi(s)$ は ξ に関し可測となる．ゆえに，$\tilde{H}_\xi(s)$ による (5,5) から

$$(5,8) \qquad N(u,B) = \int_u^\infty \frac{dv}{v} \int_{B \cap E_2} h_\xi(-\log v)\,\lambda(d\xi)$$

となる．ゆえに (5.4) は

$$\lambda(B) = \frac{1}{c} \int_{B \cap E_2} \lambda(d\xi) \int_0^\infty \frac{u}{1+u^2} h_\xi(-\log u)\,du$$

となる．ゆえに，λ測度1の集合 $E_3 \subset E_2$ が存在して，すべての $\xi \in E_3$ に対し

$$\int_0^\infty \frac{u}{1+u^2} h_\xi(-\log u)\,du = c$$

である．$\xi \in E_3$ に対し $k_\xi(u) = h_\xi(-\log u)$ と定義しよう．$k_\xi(u)$ は u について非負，非増加，右連続で (5,2) をみたし，ξ については可測である．$\xi \notin E_3$ に対してはこれらの性質をもつ任意の関数を $k_\xi(u)$ とすれば，これが (5,1) をみたすような求める関数であることは (5,8) から分る．

逆に (ii) ⇒ (i) をいおう．(ii) がみたされていれば，$N(e^{-s},B)$ は convex になる．ゆえに補題5.3によって $\mu \in L(R^d)$ となる．

次に $\mu \in L(R^d)$ で $\nu \neq 0$ であるとき ν の表現の一意性をいおう．(λ, k_ξ) が ν の表現であれば，(5,1)，(5,2) から (5.4)

がいえる．従って λ は一意的である．次にもう一度 (5.1) を見れば，λ-a.e. の ξ に対して k_ξ が一意的であることが分る．□

5.4. 定義. $\mu \in L(R^d)$ のとき，定理5.1 によって定まる $\lambda(d\xi)$ を μ の Lévy 測度の球面成分といい，$k_\xi(u)$ を μ の k関数ということにする．ただし μ の Lévy 測度 ν が 0 のとき（すなわち μ が Gauss 分布のとき）は，$\lambda = 0$，$k_\xi(u)$ は任意とする．さらに

(5.9) $$h_\xi(s) = k_\xi(e^{-s}), \quad k_\xi(u) = h_\xi(-\log u)$$

によって定まる関数 $h_\xi(s)$ を μ の h関数ということにする．条件 (5,2) は h関数で書くと

(5.10) $$0 < \int_{-\infty}^{\infty} h_\xi(s) \frac{ds}{1+e^{2s}} = c < \infty$$

となる．

次に述べる多次元安定分布の Lévy 測度の表現（定理5.5）は Lévy [L2] の結果である．ここでは定理3.9 と定理5.1 を使って証明するが，これらを使わずに定理3.2 の性質 (ii) から直接に（定理3.9 の証明の前半と類似した議論を行なって）特性関数が (5.11) または (5.13) でなければならないことを示し，さらに (5.13) の場合には条件 (1.7) から $0 < \alpha < 2$ を示すことによって定理5.5 を証明すること，その系として定理3.9 を出すこともできる．

5.5. 定理. $\mu \in S_2(R^d)$ すなわち μ が指数 2 の安定分布であるためには，$\mu \in I(R^d)$，$\nu = 0$，$A \neq 0$ であること，すなわち

(5.11) $$\hat{\mu}(z) = \exp\left(i\gamma z - \frac{1}{2} A(z)\right)$$

で $\gamma\in R^d$, A は 0 ではない非負2次形式であること, いいかえれば δ分布でないGauss分布であることが, 必要十分である. $\mu\in S_\alpha(R^d)$ で $0<\alpha<2$, すなわち μ が指数 $\alpha\neq 2$ の安定分布であるためには, $\mu\in L(R^d)$, $A=0$, $\nu\neq 0$ であって μ の k 関数が λ-a.e. の ξ に対し

$$(5.12)\qquad k_\xi(u)=c'u^{-\alpha},\qquad c'=\text{const.}>0$$

であることが必要十分である. すなわち, $0<\alpha<2$ に対しては,

$$(5.13)\qquad \hat{\mu}(z)=\exp\left[i\gamma z+c'\int_{S^{d-1}}\lambda(d\xi)\int_0^\infty\left(e^{iu\xi z}-1-\frac{iu\xi z}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^{1+\alpha}}\right]$$

で $\gamma\in R^d$, $c'>0$, λ は S^{d-1} の上の確率測度であるとき, かつこのときに限って, $\mu\in S_\alpha(R^d)$ である.

証明. $0<\alpha\leq 2$ とし, $\mu\in S_\alpha(R^d)$ とする. 定理3.2, 3.9 によって, 任意の $c_1>0$, $c_2>0$ に対し $a\in R^d$ が存在して (4.9) をみたす. 系4.9 によって $\mu\in L(R^d)$ であるから定理5.1 の表現が得られることに注意し, $\ell=1,2$ に対し

$$\exp\left[ic_\ell\gamma z-\frac{1}{2}A(c_\ell z)+\int_{S^{d-1}}\lambda(d\xi)\int_0^\infty\left(e^{ic_\ell u\xi z}-1-\frac{ic_\ell u\xi z}{1+u^2}\right)\frac{k_\xi(u)}{u}du\right]$$

$$=\exp\left[i\gamma_\ell z-\frac{1}{2}A(c_\ell z)+\int_{S^{d-1}}\lambda(d\xi)\int_0^\infty\left(e^{iu\xi z}-1-\frac{iu\xi z}{1+u^2}\right)\frac{k_\xi(\frac{u}{c_\ell})}{u}du\right]$$

ただし $\gamma_\ell z=c_\ell\gamma z+\int_{S^{d-1}}\lambda(d\xi)\int_0^\infty\left(\frac{c_\ell u\xi z}{1+c_\ell^2u^2}-\frac{c_\ell u\xi z}{1+u^2}\right)\frac{k_\xi(u)}{u}du$, に注意すると, Lévy の表現の一意性によって

$$(5.14)\qquad A(c_1z)+A(c_2z)=A((c_1^\alpha+c_2^\alpha)^{1/\alpha}z),$$

$$(5.15)\qquad \left(k_\xi\left(\frac{u}{c_1}\right)+k_\xi\left(\frac{u}{c_2}\right)\right)du\,\lambda(d\xi)=k_\xi\left(\frac{u}{(c_1^\alpha+c_2^\alpha)^{1/\alpha}}\right)du\,\lambda(d\xi)$$

を得る．$\nu \neq 0$ とすると，$\lambda \neq 0$ であるから (5.15) から正の整数 n に対し

$$n k_\xi(u) = k_\xi\left(\frac{u}{n^{1/\alpha}}\right) \qquad (\lambda\text{-a.e. の } \xi \text{ に対し})$$

が得られ（$k_\xi(\cdot)$ の右連続に注意），さらに

$$\frac{n}{m} k_\xi(u) = \frac{1}{m} k_\xi\left(\frac{u}{n^{1/\alpha}}\right) = k_\xi\left(\frac{m^{1/\alpha}}{n^{1/\alpha}} u\right),$$

さらにすべての $s > 0$ で

$$s\, k_\xi(u) = k_\xi\left(s^{-1/\alpha} u\right)$$

がいえる．$s = u^\alpha$ として，λ-a.e. の ξ に対し $k_\xi(u) = k_\xi(1) u^{-\alpha}$ を得る．条件 (5.2) から，$k_\xi(1)$ は λ-a.e. に定数で $\alpha < 2$ でなければならず，$A = 0$ でなければならない（$A = 0$ でないと，(5.14) から $\alpha = 2$ となる）．逆に，$\mu \in L(R^d)$，$A = 0$，$\nu \neq 0$ で k 関数が (5.12) をみたし $0 < \alpha < 2$ であれば，(5.15) がいえるから (4.9) がいえ，$\mu \in S_\alpha(R^d)$ となる．δ 分布でない Gauss 分布が $S_2(R^d)$ に属することも明かである．□

L_m と L_∞ の特性関数の特徴づけに進もう．$\delta > 0$ に対し Δ_δ を差分作用素 $\Delta_\delta f(s) = f(s+\delta) - f(s)$ とし，Δ_δ^n をそれを n 回重ねて施すこととしよう．すなわち，$\Delta_\delta^n f(s) = \Delta_\delta(\Delta_\delta^{n-1} f)(s)$ である．$\Delta_\delta^0 f = f$ とする．帰納法で，$n \geqq 0$ に対し

$$\Delta_\delta^n f(s) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(s + k\delta)$$

が分る．

5.6. 定義． $f(s)$ が，ある区間で $k = 0, 1, \cdots, n$ に対し

(5.16) $$\Delta_\delta^k f(s) \geqq 0 \qquad (\delta > 0)$$

をみたすとき，そこで n 位の単調 (monotone of order n) であるということにする．すべての非負の整数 k に対し (5.16) が成り立つとき，Bernstein に従って，$f(s)$ は絶対単調 (absolutely monotone) であるという．

5.7. 補題. $f(s)$ が 2 位の単調であることは，非負，非減少，連続かつ convex であることと同値である．$f(s)$ が n 位の単調であれば，$k=0,1,\cdots,n-1$ と $\delta>0$ に対し $\Delta_\delta^k f(s)$ は非減少である．

証明 ([W] による). 2 位の単調は，非負，非減少かつ

$$(5.17) \qquad f\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(f(s_1)+f(s_2)\right)$$

であることと同値である．$f(s)$ が 2 位の単調であれば $f(s-) \le f(s) \le f(s+)$ となり，また，$2f(s+\delta) \le f(s)+f(s+2\delta)$ と $2f(s) \le f(s+\delta)+f(s-\delta)$ から $f(s+) \le f(s)$，$2f(s) \le f(s+)+f(s-)$ であるから．$f(s+) \le f(s-)$ となる．故に，2 位の単調から連続が得られる．連続と (5.17) から convex となることはよく知られている (たとえば [W] p.148)．逆に，非負，非減少，convex から 2 位の単調が得られることは明かである．補題の後半は $n=1$ ならば明かであるから，$n \ge 2$ とし，$f(s)$ が n 位の単調とする．まず

$$\Delta_\delta f(s) = \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_{\delta/m} f\left(s+\frac{j\delta}{m}\right)$$

に注意する．これは，右辺が $\sum_{j=0}^{m-1}\left[f\left(s+\frac{j+1}{m}\delta\right)-f\left(s+\frac{j}{m}\delta\right)\right]$ であるから明かである．これをくり返し使うと

$$\Delta_\delta^k f(s) = \sum_{j_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{j_k=0}^{m-1} \Delta_{\delta/m}^k f\left(s+(j_1+\cdots+j_k)\frac{\delta}{m}\right)$$

となる．両辺に $\Delta_{\delta/m}$ を施すと

$$\Delta_{\delta/m}\Delta_{\delta}^{k}f(s)=\sum_{j_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{j_k=0}^{m-1}\Delta_{\delta/m}^{k+1}f\left(s+(j_1+\cdots+j_k)\frac{\delta}{m}\right)$$

である。 $0\leqq k\leqq n-1$ とすると右辺は非負だから

$$\Delta_{\delta}^{k}f(s)\leqq\Delta_{\delta}^{k}f\left(s+\frac{\delta}{m}\right)$$

を得る。故に，任意の正の整数 m, m' に対し

$$\Delta_{\delta}^{k}f(s)\leqq\Delta_{\delta}^{k}f\left(s+\frac{m'\delta}{m}\right)$$

である．前半で証明したように f は連続であるから，任意の $s<s'$ に対し $\Delta_{\delta}^{k}f(s)\leqq\Delta_{\delta}^{k}f(s')$ となる．□

5.8. 定理． m を非負の整数とするとき，次の2つは同値．

(i) $\mu\in L_m(R^d)$.

(ii) $\mu\in L_0(R^d)$ で，μ の k 関数 $k_\xi(s)$ が λ-a.e. の ξ に対し s の関数として R^1 で $m+1$ 位の単調である．ただし λ は μ の Lévy 測度の球面成分である．（Gauss 分布は $\lambda=0$ であるから (ii) を trivial にみたす．）

証明．帰納法で証明する．$m=0$ のときは，定理は自明である．$m\geqq1$ とし，$m-1$ のとき定理がいえたとして，m のときを示そう．$\mu\in L_0(R^d)$ で $\nu\neq0$ とする（$\nu=0$ のときは Gauss 分布で，系4.9 により $L_\infty(R^d)$ に属すから，証明することは何もない）。$0<\alpha<1$ に対し定理4.4 の μ_α は無限分解可能で（系4.11），その Lévy 測度 ν_α は

$$\nu_\alpha(EB)=\int_B\lambda(d\xi)\int_E\left(k_\xi(u)-k_\xi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right)\frac{du}{u},\quad E\in\mathcal{B}((0,\infty)),\ B\in\mathcal{B}(S^{d-1})$$

である（定理5.5の証明の初めの部分を参照）．

$$b_\alpha(\xi)=\int_0^\infty\left(k_\xi(u)-k_\xi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right)\frac{u}{1+u^2}du$$

と定義する． $0<b_\alpha(\xi)<c$ になる（c は (5.2) の定数）．

$$\lambda_\alpha(d\xi)=\frac{1}{c_\alpha}b_\alpha(\xi)\lambda(d\xi), \qquad k_{\alpha,\xi}(u)=\frac{c_\alpha}{b_\alpha(\xi)}\left(k_\xi(u)-k_\xi\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right),$$

$$h_{\alpha,\xi}(s)=k_{\alpha,\xi}(e^{-s})=\frac{c_\alpha}{b_\alpha(\xi)}\left(h_\xi(s)-h_\xi(s+\log\alpha)\right)$$

と定義する．ただし定数 c_α は λ_α が確率測度になるように定める．さて，(i) が成り立つとしよう．定理 4.4 により $\mu_\alpha\in L_{m-1}$ であるから，帰納法の仮定により，λ-a.e. の ξ に対し μ_α の h 関数 $h_{\alpha,\xi}(s)$ が m 位の単調である．故に，

$$\Delta_\delta^k h_\xi(s)-\Delta_\delta^k h_\xi(s+\log\alpha)=\frac{b_\alpha(\xi)}{c_\alpha}\Delta_\delta^k h_{\alpha,\xi}(s)\geq 0, \qquad k=0,1,\cdots,m$$

である．従って $k=1,\cdots,m+1$ に対し $\Delta_\delta^k f(s)\geq 0$ となり，(ii) が成り立つ．逆に，もし (ii) が成り立てば，補題 5.7 によって $k=0,1,\cdots,m$ に対し $\Delta_\delta^k h_\xi(s)$ が非減少になるから，$h_{\alpha,\xi}(s)$ が m 位の単調になり，帰納法の仮定により $\mu_\alpha\in L_{m-1}$ となり，従って $\mu\in L_m$ となって (i) がいえる．□

5.9. 定理．次の２つは同値．

(i) $\mu\in L_\infty(R^d)$．

(ii) $\mu\in L_0(R^d)$ で，μ の h 関数 $h_\xi(s)$ が λ-a.e. の ξ に対し s の関数として R^1 で絶対単調である．（Gauss 分布は $\lambda=0$ であるから (ii) を trivial にみたす．）

証明．定理 5.8 と $L_\infty(R^d)$ の定義から分る．□

上の定理と完全単調関数に関する Bernstein の定理によって，$L_\infty(R^d)$ の特性関数のもう１つの表現が得られる．

5.10. 定義．$f(s)$ がある開区間で完全単調 (completely monotone) であるとは，そこで C^∞ 級で $k=0,1,\cdots$ に対し

$$(-1)^k f^{(k)}(s) \geq 0$$

であること．閉区間で完全単調であるとは，そこで連続でその内部で完全単調であること．

5.11. 補題．$n \geq 2$ とする．$f(s)$ がある開区間で n 位の単調であるための必要十分条件は，そこで C^{n-2} 級，$k=0,1,\cdots,n-2$ に対し $f^{(k)} \geq 0$ で，$f^{(n-2)}$ が非減少かつ convex であること．

証明（主として [W] による）．帰納法でいう．$n=2$ のときは補題5.7でいえている．$n \geq 3$ とし，$n-1$ のときはいえているとする．f が n 位の単調とする．左，右の導関数 D^-f，D^+f の存在と

$$(5.18) \qquad s_1 < s_2 \text{ に対し } \quad D^-f(s_1) \leq D^+f(s_1) \leq D^-f(s_2)$$

をいおう．f は convex であるから，$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ に対し

$$0 \leq \frac{f(s+\varepsilon_1)-f(s)}{\varepsilon_1} \leq \frac{f(s+\varepsilon_2)-f(s)}{\varepsilon_2},$$

$$\frac{f(s-\varepsilon_2)-f(s)}{-\varepsilon_2} \leq \frac{f(s-\varepsilon_1)-f(s)}{-\varepsilon_1} \leq \frac{f(s+\varepsilon_1)-f(s)}{\varepsilon_1}$$

である．上の方の不等式から D^+f の存在が分り，下の方の不等式から D^-f の存在と $D^-f \leq D^+f$ が分る．同様に $D^+f(s_1) \leq D^-f(s_2)$ もいえる．D^-f は $n-1$ 位の単調になる．実際，補題5.7から任意の $\varepsilon > 0$ と $k=0,1,\cdots,n-1$ に対して $\Delta_\delta^k f(s-\varepsilon) \leq \Delta_\delta^k f(s)$ であるから $\Delta_\delta^k \dfrac{f(s-\varepsilon)-f(s)}{-\varepsilon} \geq 0$，$\varepsilon \downarrow 0$ として $\Delta_\delta^k D^-f(s) \geq 0$ となる．故に，補題5.7から D^-f は連続になる．故に (5.18) から $D^-f = D^+f$ となる．故に f は C^1 級で f' が $n-1$ 位の単調である．従って，帰納法の仮定により結局 f は C^{n-2} 級，$f^{(k)} \geq 0$ ($k=0,1,\cdots,n-2$)，

$f^{(n-2)}$ が非減少かつ convex となる．逆にこれを仮定すると，帰納法の仮定により f' は n−1 位の単調であり，

$$\Delta_\delta f(s) = \int_s^{s+\delta} f'(t)\,dt, \qquad \Delta_\delta^2 f(s) = \int_s^{s+\delta} \Delta_\delta f'(t)\,dt,$$

さらにくり返して

$$\Delta_\delta^k f(s) = \int_s^{s+\delta} \Delta_\delta^{k-1} f'(t)\,dt$$

であるから $\Delta_\delta^k f \geqslant 0$, $k=1,\cdots,n$ がいえる． □

5.12. 補題. $f(s)$ がある開区間で絶対単調であることは，そこで C^∞ 級ですべての $k=0,1,\cdots$ に対し $f^{(k)}(s) \geqslant 0$ であることと同値である．これは，$f(-s)$ がそこで完全単調であることと同値である．

証明. 補題5.11と絶対単調，完全単調の定義から明か．

5.13. 定義. ある σ-algebra $\mathcal{B}$ の上の測度の族 $\{\lambda_\alpha\}$ が α について可測であるとは，任意の $B \in \mathcal{B}$ に対し $\lambda_\alpha(B)$ が α の関数として可測であることとする．

5.14. 定理. $\mu \in L_\infty(R^d)$ ならば

$$(5.19) \qquad \hat{\mu}(z) = \exp\left[i\gamma z - \frac{1}{2}A(z) + \int_{(0,2)} \Gamma(d\alpha) \int_{S^{d-1}} \lambda_\alpha(d\xi) \int_0^\infty \left(e^{iu\xi z} - 1 - \frac{iu\xi z}{1+u^2}\right) \frac{du}{u^{\alpha+1}}\right]$$

と表わされる．ただし $\gamma \in R^d$, A は非負2次形式，Γ は開区間 $(0,2)$ の上の測度で

$$(5.20) \qquad a(\alpha) = \int_0^\infty \frac{u^{1-\alpha}}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}}, \qquad 0<\alpha<2$$

に対し

$$(5.21) \qquad \int_{(0,2)} a(\alpha)\,\Gamma(d\alpha) < \infty,$$

λ_α は S^{d-1} の上の確率測度で α について可測である．逆に，与えられた γ, A, Γ, λ_α に対し，(5.19) をみたす $\mu \in L_\infty(R^d)$ が存在する．γ, A, Γ は μ から一意的に決まり，λ_α は Γ 測度 0 の α を除いて一意的である．

5.15. 補題． R^1 の上の関数の族 $h_\xi(s)$ に対し次の２つは同値．

(i) $h_\xi(s)$ は s について絶対単調，ξ について可測で

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} h_\xi(s) \frac{ds}{1+e^{2s}} = c < \infty \tag{5.22}$$

をみたし，c が ξ によらない．

(ii) 開区間 $(0,2)$ の上の測度の族 $\Gamma_\xi(d\alpha)$ が存在して

$$h_\xi(s) = \int_{(0,2)} e^{\alpha s}\, \Gamma(d\alpha), \qquad s \in R^1 \tag{5.23}$$

と表わされ，

$$0 < \int_{(0,2)} a(\alpha)\, \Gamma_\xi(d\alpha) = c < \infty \tag{5.24}$$

で c は ξ によらない．Γ_ξ は ξ について可測．

なお，Γ_ξ は h_ξ から一意的に定まる．

証明． (i) ⇒ (ii)． 任意の s_0 に対し，補題 5.12 によって $h_\xi(s_0 - s)$ が完全単調だから，Bernstein の定理（例5A）により，

$$h_\xi(s_0 + s) = \int_{[0,\infty)} e^{\alpha s}\, \Gamma_\xi^{\alpha_0}(d\alpha), \qquad s<0$$

という表現を与える $[0,\infty)$ の上の測度 $\Gamma_\xi^{\alpha_0}$ が一意的に存在する． $s_1 < s_0$ とすると

$$h_\xi(s_1+s) = h_\xi(s_0 + (s+s_1-s_0)) = \int_{[0,\infty)} e^{\alpha(s+s_1-s_0)}\, \Gamma_\xi^{s_0}(d\alpha), \quad s<0$$

であるから $e^{\alpha(s_1-s_0)} \Gamma_\xi^{s_0}(d\alpha) = \Gamma_\xi^{s_1}(d\alpha)$ である．故に，$e^{-\alpha s_0} \Gamma_\xi^{\alpha_0}(d\alpha)$ が s_0 に依存しない．これを $\Gamma_\xi(d\alpha)$ とすると，

$$h_\xi(s)=\int_{[0,\infty)} e^{\alpha s}\,\Gamma_\xi(d\alpha), \qquad s\in R^1$$

である．(5,22) から $\lim_{s\to-\infty} h_\xi(s)=0$ であるから，Γ_ξ は 0 に mass をもたない．Fubini の定理と (5,22) により

$$\int_{(0,\infty)}\Gamma_\xi(d\alpha)\int_0^\infty e^{(\alpha-2)s}\,ds=\int_0^\infty e^{-2s}h_\xi(s)\,ds<\infty$$

であるから，Γ_ξ が $[2,\infty)$ に mass をもたないことも分る．従って (5,22) を書きなおし (5,20) を用いると (5,24) となる．故に Γ_ξ は有限な測度である．Γ_ξ が ξ について可測であることを見るには，任意の α に対し $\Gamma_\xi((0,\alpha])$ が ξ について可測であることをいえばよいが，これは，Γ_ξ がすべての ξ に対し連続な測度ならば 内5B の反転公式から分る．一般の場合は $\mu_n(d\alpha)=n\chi_{[0,1]}(n\alpha)\,d\alpha$，$\Gamma_\xi^n=\Gamma_\xi*\mu_n$ とし Γ_ξ^n の Laplace 変換を $h_\xi^n(-s)$ とすると，Γ_ξ^n は連続な測度（なぜならば $\Gamma_\xi^n(B)=\int\Gamma_\xi(d\alpha)\int\chi_{B-\alpha}(\beta)\mu_n(d\beta)$）で h_ξ^n は ξ について可測（なぜならば $h_\xi^n(-s)=h_\xi(-s)\int e^{-\alpha s}\mu_n(d\alpha)$）であるから，$\Gamma_\xi^n$ が ξ について可測である．$\Gamma_\xi^n\to\Gamma_\xi$ $(n\to\infty)$ であるから Γ_ξ も ξ について可測である．以上で (i)⇒(ii) がいえた．(ii)⇒(i) は容易に分る．$h_\xi(-s)$ が Γ_ξ の Laplace 変換であるから，Γ_ξ は h_ξ から一意的に定まる (内5B)．□

定理5.14の証明．$\mu\in L_\infty(R^d)$ とし，表現 (5.19) を示そう．μ の Lévy 測度 ν が 0 ならば $\Gamma=0$ とすればよいから，$\nu\neq 0$ とする．μ の h 関数 $h_\xi(s)$ が定理5.9 によって絶対単調で，(5,22) をみたすから，補題5.15 によって (0,2) の上の測度 Γ_ξ を得る．$\lambda(d\xi)$ と $\Gamma_\xi(d\alpha)$ から，(0,2) の上の有限測度 $\Gamma(d\alpha)$ と S^{d-1} の上の確率測度の族 $\lambda_\alpha(d\xi)$ を，(5.21) をみたし，λ_α は α について可測で，(α,ξ) について可測な

すべての非負関数 $f(\alpha,\xi)$ に対し

$$(5.25)\qquad \int_{(0,2)}\Gamma(d\alpha)\int_{S^{d-1}}\lambda_\alpha(d\xi)f(\alpha,\xi)=\int_{S^{d-1}}\lambda(d\xi)\int_{(0,2)}\Gamma_\xi(d\alpha)f(\alpha,\xi)$$

が成り立つように定めることができる．このことは，$(0,2)\times S^{d-1}$ の上の確率測度 $c^{-1}a(\alpha)\lambda(d\xi)\Gamma_\xi(d\alpha)$ に対し条件付分布の存在定理を適用すれば分る．$u_0>0$ と $B\in\mathcal{B}(S^{d-1})$ に対し (5.1), (5.9), (5.23), (5.25) によって

$$\nu((u_0,\infty)B)=\int_B\lambda(d\xi)\int_{u_0}^{\infty}\frac{k_\xi(u)}{u}du=\int_B\lambda(d\xi)\int_{-\infty}^{-\log u_0}h_\xi(s)ds$$

$$=\int_B\lambda(d\xi)\int_{-\infty}^{-\log u_0}ds\int_{(0,2)}e^{\alpha s}\Gamma_\xi(d\alpha)=\int_B\lambda(d\xi)\int_{(0,2)}\alpha^{-1}u_0^{-\alpha}\Gamma_\xi(d\alpha)$$

$$=\int_{(0,2)}\Gamma(d\alpha)\int_{S^{d-1}}\lambda_\alpha(d\xi)\int_0^\infty\chi_{(u_0,\infty)}(u)\chi_B(\xi)\frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

である．従って，R^d の上の任意の可測関数 $f(x)\geqq 0$ に対し

$$\int_{R^d}f(x)\nu(dx)=\int_{(0,2)}\Gamma(d\alpha)\int_{S^{d-1}}\lambda_\alpha(d\xi)\int_0^\infty f(u\xi)\frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

である．従って，これは R^d の上の任意の ν 可積分な複素数値関数に対して成り立つ．特に $f(x)=e^{izx}-1-\dfrac{izx}{1+|x|^2}$ に対して成り立つから，表現 (5.19) がいえる．

逆に γ, A, Γ, λ_α が与えられたとし $\Gamma\neq 0$ とする．$c=\int_{(0,2)}a(\alpha)\Gamma(d\alpha)$ で c を定義し，Γ, λ_α から λ, Γ_ξ を，λ は S^{d-1} の上の確率測度，Γ_ξ は (5.24) をみたす $(0,2)$ の上の測度で ξ について可測，しかも (5.25) が成り立つように定めることができる．この Γ_ξ から $h_\xi(s)$ を (5.23) によって定義し，$k_\xi(u)$ を (5.9) で定めると，γ, A, λ, k_ξ から定理5.1によって $\mu\in L(R^d)$ が定まる．この μ は $L_\infty(R^d)$ に属し（定理5.9），ちょうど表現 (5.19) をもつ．(Γ,λ_α) と (λ,Γ_ξ)

との対応が Γ 測度 0 の α と λ 測度 0 の ξ を除いて1対1であるから，異なる γ, A, Γ, λ_α による表現 (5.19) からは異なる γ, A, λ, k_ξ, 従って異なる μ ができる．□

次の定理は $d=1$ で Urbanik (1972 b) の得た結果である.

5.16. 定理. $L_\infty(R^d)$ は，$S(R^d)$ を含みたゝみこみと収束に関し閉じているクラスの中で最小である.

証明. $L_\infty(R^d)$ が $S(R^d)$ を含みたゝみこみと収束に関し閉じていることは既に示した．$Q \subset \mathcal{P}(R^d)$ がたゝみこみと収束に関し閉じており，$Q \supset S(R^d)$ であるとしよう．$L_\infty(R^d) \subset Q$ を示せばよい．$\mu \in L_\infty(R^d)$ とし その表現 (5.19) を考える．$\gamma=0$, $A=0$ として $\mu \in Q$ をいえば十分である．第1段階として，(5.19) における Γ の support がある $\varepsilon>0$ に対し $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$ に入っている時を考える．$[\varepsilon, 2-\varepsilon] \times S^{d-1}$ の上の測度 $M(d\alpha d\xi) = \Gamma(d\alpha)\lambda_\alpha(d\xi)$ に対し M_n を，$M_n \to M$ で M_n の support はある $E_n \times S^{d-1}$ に入り E_n は $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$ 内の有限集合であるように選ぶ。すると $M_n(d\alpha d\xi) = \Gamma_n(d\alpha)\lambda_{n,\alpha}(d\xi)$ と表わされ，Γ_n の support は E_n 内にある.

$$g(\alpha, \xi, z) = \int_0^\infty \left(e^{iu\xi z} - 1 - \frac{iu\xi z}{1+u^2}\right) \frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

とし，μ_n を

$$\hat{\mu}_n(z) = \exp\left[\int_{(0,2)} \Gamma_n(d\xi) \int_{S^{d-1}} \lambda_{n,\alpha}(d\xi) g(\alpha, \xi, z)\right]$$

という分布とする．μ_n は有限個の安定分布のたゝみこみであるから Q に属する．z を固定するとき $g(\alpha, \xi, z)$ は (α, ξ) に関し $(0,2) \times S^{d-1}$ において連続であるから，$\hat{\mu}_n(z) \to \hat{\mu}(z)$ $(n \to \infty)$ である．故に $\mu \in Q$ である．第2段階として Γ に関する制限のない一般の場合を考えよう．Γ を $[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}]$

に制限した時の分布を μ_n とすると，$\mu_n \in Q$ である．

$$\int_{(0,2)} \Gamma(d\alpha)\int_{S^{d-1}} \lambda_\alpha(d\xi)\,|g(\alpha,\xi,z)| < \infty$$

であるから $\hat{\mu}_n(z) \to \hat{\mu}(z)$ $(n\to\infty)$ となり，$\mu \in Q$ が分る．□

完全単調関数の積分表現（Bernsteinの定理）から $L_\infty(R^d)$ に対する定理5.14の表現を得たように，$m+1$ 位の単調関数を積分表現して $L_m(R^d)$ の表現を作ろう．その結果は定理5.18である．特に $m=0$ の場合はL分布の表現となるが，実はこれはUrbanik (1969) の得たものと一致しており，それが多次元L分布の表現としては最初であった．

(5.26) $$a_m(v) = \int_0^v \frac{u}{1+u^2}\left(\log\frac{v}{u}\right)^m du$$

という関数を用いる．

5.17. 補題.

(5.27) $$a_m(v) \sim \frac{1}{m+1}\left(\log v\right)^{m+1} \qquad (v\to\infty)$$

(5.28) $$a_m(v) \sim \frac{m!}{2^{m+1}}\, v^2 \qquad (v\downarrow 0)$$

証明. $v>1$ とする．

$$a_m(v) = \int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\left(\log\frac{v}{u}\right)^m du + \int_1^v \frac{u}{1+u^2}\left(\log\frac{v}{u}\right)^m du \equiv I_1 + I_2$$

とする．

$$I_1 \sim \left(\int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\,du\right)\left(\log v\right)^m \qquad (v\to\infty)$$

であり，

$$I_2 \leq \int_1^v \frac{1}{u}\left(\log\frac{v}{u}\right)^m du = \frac{1}{m+1}\left(\log v\right)^{m+1}$$

である． $\varepsilon > 0$ に対し v_0 を適当にとると

$$I_3 \geqslant \int_1^{v_0} \frac{u}{1+u^2}\left(\log\frac{v}{u}\right)^m du + (1-\varepsilon)\int_{v_0}^{v} \frac{1}{u}\left(\log\frac{v}{u}\right)^m du \sim \frac{1-\varepsilon}{m+1}(\log v)^{m+1}$$

であるから，(5.27) がいえた． $v \downarrow 0$ のときは，

$$a_m(v) \sim \int_0^v u\left(\log\frac{v}{u}\right)^m du = v^2\int_1^\infty \frac{(\log u)^m}{u^3}\,du$$

である．この定積分は

$$\int \frac{(\log u)^m}{u^3}\,du = -\frac{(\log u)^m}{2u^2} + \frac{m}{2}\int \frac{(\log u)^{m-1}}{u^3}\,du$$

から

$$\int_1^\infty \frac{(\log u)^m}{u^3}\,du = \frac{m}{2}\int_1^\infty \frac{(\log u)^{m-1}}{u^3}\,du = \cdots = \frac{m!}{2^m}\int_1^\infty \frac{du}{u^3} = \frac{m!}{2^{m+1}}$$

であるから，(5.28) もいえた． □

5.18. 定理. $0 \leqq m < \infty$ とする． $\mu \in L_m(R^d)$ ならば

(5.29) $$\hat{\mu}(z) = \exp\left[i\gamma z - \frac{1}{2}A(z) + \int_{(0,\infty)} \Gamma(dv)\int_{S^{d-1}} \lambda_v(d\xi)\int_0^v \left(e^{iu\xi z} - 1 - \frac{iu\xi z}{1+u^2}\right)\left(\log\frac{v}{u}\right)^m \frac{du}{u}\right]$$

と表わされる．ただし $\gamma \in R^d$， A は非負2次形式， Γ は $(0,\infty)$ の上の測度で

(5.30) $$\int_{(0,\infty)} a_m(v)\,\Gamma(dv) < \infty,$$

λ_v は S^{d-1} の上の確率測度で v について可測である．逆に，与えられた γ, A, Γ, λ_v に対し (5.29) をみたす $\mu \in L_m(R^d)$ が存在する． γ, A, Γ は μ から一意的に決まり， λ_v は Γ 測度 0 の v を除いて一意的である．

5.19. 補題. $0 \leqq m < \infty$ とする． R^1 の上の関数 $f(s)$ が $m+1$ 位の単調，左連続，かつ $s \to -\infty$ のとき 0 に近づくための必要十分条件は， R^1 の上の測度 Γ^0 で compact 集合に

対し有限で

(5.31)
$$\int_{(-\infty,-1)} (-t)^m \Gamma^0(dt) < \infty$$

をみたすものによって

(5.32)
$$f(s) = \int_{(-\infty,s)} (s-t)^m \Gamma^0(dt)$$

と表わされることである．この測度 Γ^0 は f から一意的に決まり

(5.33)
$$\int_{[s_1,s_2)} \Gamma^0(dt) = \frac{1}{m!}\left(f^{(m)}(s_2) - f^{(m)}(s_1)\right), \qquad s_1 < s_2$$

である．ただし，$f^{(m)}$ は $f^{(m-1)}$ の左導関数である．

<u>証明</u>．帰納法で示す．$m=0$ のときは，$f(s) = \int_{(-\infty,s)} df(t)$ という表現を示しているにすぎないから，明かである．$m \geqq 1$ とし，m のかわりに $m-1$ のときにこの補題がいえたとする．$f(s)$ が (5.32) の形に表わされたとする．$f(s)$ は連続で $s \to -\infty$ のとき 0 に近づき，

$$\frac{f(s-\varepsilon) - f(s)}{-\varepsilon} = \int_{(-\infty,s)} \frac{(s-\varepsilon-t)^m - (s-t)^m}{-\varepsilon} \Gamma^0(dt) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{[s-\varepsilon,s)} (s-\varepsilon-t)^m \Gamma^0(dt)$$

から

$$D^- f(s) = m \int_{(-\infty,s)} (s-t)^{m-1} \Gamma^0(dt)$$

である．右辺は帰納法の仮定により m 位の単調であるから，補題5.11により，f が $m+1$ 位の単調になる（$m \geqslant 2$ ならば右辺は s について連続であるから，f が C^1 級になる）．逆に，$f(s)$ が $m+1$ 位の単調，左連続で，$s \to -\infty$ のとき 0 に近づくとする．$f'(s)$（ただし $m=1$ のときは $D^- f(s)$）は m 位の単調，左連続になる．

$$f(s_2) - f(s_1) = \int_{[s_1,s_2)} f'(t)\,dt, \qquad s_1 < s_2$$

であるから，$s \to -\infty$ のとき $f'(s) \to 0$ であることが分る．故に帰納法の仮定により

$$f'(s)=\int_{(-\infty,s)}(s-t)^{m-1}\Gamma(dt),\quad \int_{(-\infty,-1)}(-t)^{m-1}\Gamma(dt)<\infty$$

と表わされる．故に

$$f(s)=\int_{(-\infty,s)}f'(t)dt=\int_{(-\infty,s)}dt_1\int_{(-\infty,t_1)}(t_1-t_2)^{m-1}\Gamma(dt_2)=\int_{(-\infty,s)}\frac{(s-t)^m}{m}\Gamma(dt)$$

となるから，$\Gamma^0=\frac{1}{m}\Gamma$ とすればよい．(5.31) も同時に分った．一意性は，f が (5.32) の形で表わされれば帰納法の仮定から $m\Gamma^0(dt)=\frac{1}{(m-1)!}df^{(m)}(t)$ となり (5.33) となるから分る．□

定理 5.18 の証明. $\mu \in L_m(R^d)$ とする．定理 5.8 によって，μ の h 関数 $h_\xi(s)$ が λ-a.e. の ξ に対し $m+1$ 位の単調である．故に補題 5.19 によって，$h_\xi(s)$ は R^1 の上の測度 Γ_ξ^0 によって

$$h_\xi(s)=\int_{(-\infty,s)}(s-t)^m\Gamma_\xi^0(dt),\quad \int_{(-\infty,-1)}(-t)^m\Gamma_\xi^0(dt)<\infty$$

と表わされる．(5.33) により，Γ_ξ^0 は ξ に関し可測である．変換 $u=e^{-s}$ による Γ_ξ^0 の像を Γ_ξ とすると，Γ_ξ は $(0,\infty)$ の上の測度で，$(0,\infty)$ 内の compact 集合に対し有限，ξ に関し可測で，(5.9) により

(5.34) $$k_\xi(u)=\int_{(u,\infty)}\left(\log\frac{v}{u}\right)^m\Gamma_\xi(dv),\quad \int_{(e,\infty)}(\log v)^m\Gamma_\xi(dv)<\infty$$

である．(5.2) を書きなおすと (5.26) によって

(5.35) $$\int_{(0,\infty)}a_m(v)\Gamma_\xi(dv)=c$$

となる．定理 5.14 の証明のときと同様に，(5.30) をみたす Γ と v について可測な S^{d-1} の上の確率測度 λ_v を見出して

$\Gamma(dv)\lambda_v(d\xi)=\lambda(d\xi)\Gamma_\xi(dv)$ となるように出来る．μ の Lévy 測度 ν は，$u_0>0$ と $B\in\mathcal{B}(S^{d-1})$ に対し (5.1) によって次の通りになる．

$$\nu((u_0,\infty)B)=\int_B\lambda(d\xi)\int_{u_0}^{\infty}\frac{k_\xi(u)}{u}du=\int_B\lambda(d\xi)\int_{u_0}^{\infty}\frac{du}{u}\int_{(u,\infty)}\left(\log\frac{v}{u}\right)^m\Gamma_\xi(dv)$$

$$=\int_B\lambda(d\xi)\int_{(u_0,\infty)}\Gamma_\xi(dv)\int_{u_0}^{v}\left(\log\frac{v}{u}\right)^m\frac{du}{u}$$

$$=\int_{(0,\infty)}\Gamma(dv)\int_{S^{d-1}}\lambda_v(d\xi)\int_0^v\chi_{(u_0,\infty)}(u)\chi_B(\xi)\left(\log\frac{v}{u}\right)^m\frac{du}{u},$$

故に，任意の非負可測関数 $f(x)$ に対し

$$\int_{R^d}f(x)\nu(dx)=\int_{(0,\infty)}\Gamma(dv)\int_{S^{d-1}}\lambda_v(d\xi)\int_0^v f(u\xi)\left(\log\frac{v}{u}\right)^m\frac{du}{u}$$

である．従って，これは任意の ν 可積分の複素数値関数 $f(x)$ に対して成り立つから，$f(x)=e^{izx}-1-\frac{izx}{1+|x|^2}$ として (5.29) を得る．逆に，$\gamma, A, \Gamma, \lambda_v$ が与えられたとき，Γ, λ_v から λ, Γ_ξ をつくり (5.35) をみたすようにし，(5.27) に注意して $k_\xi(u)$ を (5.34) で定義すると (5.2) をみたす．これに対応する L 分布 μ は定理5.8 と補題5.19 によって $L_m(R^d)$ に属し，その特性関数は (5.29) となる．表現の一意性は，定理5.1 と補題5.19 における一意性から分る．すなわち，異なる $\gamma, A, \Gamma, \lambda_v$ からは異なる $\gamma, A, \lambda, \Gamma_\xi$，従って異なる $\gamma, A, \lambda, k_\xi(u)$ ができる．□

5.20. 補足. 系4.9 にあるように，任意の $m=0,1,\cdots,\infty$ に対し $L_m(R^d)$ は収束に関し閉じている．故に収束の条件を定理5.14 または定理5.18 における表現の要素で表わすことが考えられる．Sato (1980) にある通り，次のことがいえる．

$\mu_n\in L_\infty(R^d)$，$n=1,2,\cdots,\infty$ とし，定理5.14 による μ_n

の表現の要素を γ_n, A_n, Γ_n, $\lambda_{n,\alpha}$ とする． $a(\alpha)$ を (5.20) で定義したものとする。このとき， $\mu_n \to \mu_\infty$ となるための必要十分条件は次の3つが成り立つことである．

(a) $f(\alpha,\xi)$ が $(0,2)\times S^{d-1}$ で定義された有界連続関数で，ある $\varepsilon>0$ に対し $[2-\varepsilon, 2)\times S^{d-1}$ で 0 であるならば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,2)} a(\alpha)\Gamma_n(d\alpha)\int_{S^{d-1}} f(\alpha,\xi)\lambda_{n,\alpha}(d\xi)=\int_{(0,2)} a(\alpha)\Gamma_\infty(d\alpha)\int_{S^{d-1}} f(\alpha,\xi)\lambda_{\infty,\alpha}(d\xi).$$

(b) $\varepsilon>0$ に対し

$$A_{n,\varepsilon}(z)=A_n(z)+\int_{(2-\varepsilon,2)} a(\alpha)\Gamma_n(d\alpha)\int_{S^{d-1}}(\xi z)^2\lambda_{n,\alpha}(d\xi)$$

とおくとき，任意の $z\in R^d$ に対し

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=A_\infty(z).$$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma_\infty .$$

$0\leqq m<\infty$ の場合． $\mu_n\in L_m(R^d)$, $n=1,2,\cdots,\infty$ とし，定理5.18 による μ_n の表現の要素を γ_n, A_n, Γ_n, $\lambda_{n,v}$ とする．このとき， $\mu_n\to\mu_\infty$ となるための必要十分条件は次の3つが成り立つことである．

(a) $f(v,\xi)$ が $(0,\infty)\times S^{d-1}$ で定義された有界連続関数で，ある $\varepsilon>0$ に対し $(0,\varepsilon]\times S^{d-1}$ で 0 であるならば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)} a_m(v)\Gamma_n(dv)\int_{S^{d-1}} f(v,\xi)\lambda_{n,v}(d\xi)=\int_{(0,\infty)} a_m(v)\Gamma_\infty(dv)\int_{S^{d-1}} f(v,\xi)\lambda_{\infty,v}(d\xi).$$

(b) $\varepsilon>0$ に対し

$$A_{n,\varepsilon}(z)=A_n(z)+\int_{(0,\varepsilon)} a_m(v)\Gamma_n(dv)\int_{S^{d-1}}(\xi z)^2\lambda_{n,v}(d\xi)$$

とおくとき，任意の $z\in R^d$ に対し

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}(z)=A_\infty(z).$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma_\infty .$$

定義4.2でL分布を $L(R^d)=\mathcal{L}(\mathcal{P}(R^d))$ と定義したときの操作 $\mathcal{L}$ において，(4.3) の b_n^{-1} の代りに線形写像を許すと，L分布よりも広いクラス（無限分解可能分布の）が得られる．Urbanik (1972 a) はこれを始めて研究し，Lévy's distributions と呼んで，その特徴づけを与えた．最近の論文に Wolfe (1980) がある．

問5A（Bernstein の定理）．次の2つは同値である．

(i) $f(s)$ が $(0,\infty)$ において完全単調．

(ii) $[0,\infty)$ の上の測度 ν によって

$$f(s)=\int_{[0,\infty)} e^{-sx}\,\nu(dx), \qquad s>0$$

とかける．

これを示せ．（たとえば [W] p.161, [F2] p.439）

問5B（測度の Laplace 変換の反転公式）．ν が $[0,\infty)$ の上の測度で

$$f(s)=\int_{[0,\infty)} e^{-sx}\,\nu(dx), \qquad s>0$$

とする（右辺がすべての $s>0$ に対し有限となることを仮定）．このとき，$\nu(\{x\})=0$ の任意の点 x に対し

$$\nu([0,x])=\lim_{s\to\infty}\sum_{n=0}^{[sx]}\frac{(-s)^n}{n!}f^{(n)}(s)$$

である．これを示せ．（たとえば [W] p.295, [F2] p.440）

問5C. $\mu\in\mathcal{P}(R^1)$ に対し次の2つは同値である．

(i) μ はL分布．

(ii) $$\hat{\mu}(z)=\exp\left[i\gamma z-\frac{\sigma^2}{2}z^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+y^2}\right)\frac{k(y)}{|y|}dy\right],\ z\in R^1$$

ただし $\gamma\in R^1$, $\sigma^2\geq 0$, $k(y)$ は非負の関数で $0<y<\infty$ において非増加, $-\infty<y<0$ において非減少で $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|y|}{1+y^2}k(y)dy<\infty$ をみたす.

(ii) の γ, σ^2, $k(y)$ は μ から一通りに定まる ($k(y)$ は a.e. で).

以上を示せ. (定理5.1 の $d=1$ の場合で, $k_{\pm1}(u)$ と $\lambda(\{\pm1\})$ を合せたものが $k(y)$ である.)

問5D (Γ分布). $\beta>0$ とする. $\mu\in\mathcal{P}(R^1)$ が絶対連続で密度が

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\beta)}x^{\beta-1}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

であるとする. このとき

$$\hat{\mu}(z)=(1-iz)^{-\beta}=\exp\left[\beta\int_0^\infty(e^{izy}-1)\frac{e^{-y}}{y}dy\right]$$

であり, 従って, μ が L 分布であることを示せ. (故に指数分布, χ^2 分布も L 分布である.) ([L3] p.168, [GK] p.86)

問5E. $n\geq 2$ とする. $f(s)$ を $s\in R^1$ で定義された C^{n-2} 級の関数で $\int_{-\infty}^{0}|f(s)|ds<\infty$ とする. $f^{(n-2)}$ が convex ならば, f が n 位の単調である. これを示せ. (故に $m\geq 1$ のとき定理5.8 は「m+1 位の単調」を「C^{m-1} 級で m−1 階導関数が convex」と変えても成り立つ.)

(補題5.11 により, $f, f', \cdots, f^{(n-2)}$ が非負, $f^{(n-2)}$ が非減少をいえばよい. $n=2$ のとき, ある $s_1<s_2$ で $f(s_1)>f(s_2)$ とすると $f(s)\to\infty$ $(s\to-\infty)$ となって矛盾するから f は非減少であり, 従って非負である. $n\geq 3$ とし, $n-1$ までいえたとする. $f^{(n-2)}$ が convex から, ある $s_1<s_2$ で $f^{(n-2)}(s_1)>f^{(n-2)}(s_2)$ とすると $f^{(n-2)}(s)\to\infty$ $(s\to-\infty)$ となり, $f^{(n-3)}(s)=f^{(n-3)}(0)-\int_s^0 f^{(n-2)}(t)dt\to-\infty$ $(s\to-\infty)$ となり, 結局 $s\to-\infty$ き $f(s)\to\infty$ または $-\infty$ となって矛盾する. 故に $f^{(n-2)}$ は非減少, 故に $f^{(n-3)}$ は convex, 故に f は $n-1$ 位の単調, 故に補題5.11 により $f, f', \cdots, f^{(n-3)}$ が非負, $f^{(n-3)}$ が非減少である. 故に $f^{(n-2)}$ も非負である.)

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

§6. 安定分布についての補足

R^d の上の安定分布の特性関数の標準形はすでに定理5.5で示したが，これを Lévy [L2] にあるように表現しておこう．

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t=0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$$

とする．

<u>6.1. 定理.</u> $\varphi(z)$ が R^d の上の指数 $0<\alpha<1$ または $1<\alpha<2$ の安定分布の特性関数であることは，

$$(6.1) \quad \varphi(z)=\exp\left[i\gamma_0 z - c_0|z|^\alpha \int_{S^{d-1}} \left(1 - i\tan\frac{\pi\alpha}{2}\operatorname{sgn}(\zeta\xi)\right)|\zeta\xi|^\alpha \lambda(d\xi)\right],$$

$$z=|z|\zeta \in R^d$$

と表わされることと同値である．たゞし $\gamma_0 \in R^d$, $c_0>0$ で λ は S^{d-1} の上の確率測度である． $\varphi(z)$ が R^d の上の指数 1 の安定分布であることは，

$$(6.2) \quad \varphi(z)=\exp\left[i\gamma_1 z - c_1|z| \int_{S^{d-1}} \left(|\zeta\xi| + i\frac{2}{\pi}\zeta\xi\log|z\xi|\right)\lambda(d\xi)\right],$$

$$z=|z|\zeta \in R^d$$

と表わされることと同値である．たゞし $\gamma_1 \in R^d$, $c_1>0$, λ は S^{d-1} の上の確率測度である． γ_0, c_0, λ または γ_1, c_1, λ は φ から一意的に定まる．

<u>6.2. 注.</u> 表現 (6.1), (6.2) における λ は定理5.5 における λ と同じもの，すなわち Lévy 測度の球面成分（定義5.4）である． (6.1) における c_0，(6.2) における c_1 と定理5.5 における c' との関係は

$$c_0 = -\Gamma(-\alpha)\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)c' \qquad (0<\alpha<1 \text{ または } 1<\alpha<2)$$

$$c_1=\frac{\pi}{2}c'$$

である．（$0<\alpha<1$ では $\Gamma(-\alpha)<0$，$1<\alpha<2$ では $\Gamma(-\alpha)>0$ に注意．）$0<\alpha<1$ のときは (6.1) の γ_0 は (1.9) の γ_0 と一致している．

6.3. 補題.

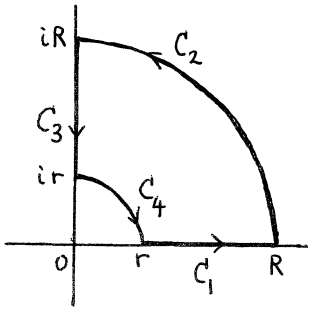
$$(6.3)\qquad \int_0^\infty (e^{iu}-1)\frac{du}{u^{1+\alpha}}=\Gamma(-\alpha)e^{-i\pi\alpha/2}\qquad (0<\alpha<1)$$

$$(6.4)\qquad \int_0^\infty (e^{iu}-1-iu)\frac{du}{u^{1+\alpha}}=\Gamma(-\alpha)e^{-i\pi\alpha/2}\qquad (1<\alpha<2)$$

$$(6.5)\qquad \int_0^\infty \left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2}=-\frac{\pi}{2}z-iz\log z+i\delta z\qquad (z>0)$$

ただし

$$\delta=\int_0^\infty\left(\frac{\sin u}{u^2}-\frac{1}{u(1+u^2)}\right)du\,.$$



証明（主として [GK] による）．$0<\alpha<1$ とし，複素平面における右のような閉曲線に沿っての線積分を考えると，Cauchy の定理により

$$\oint (e^{iz}-1)\frac{dz}{z^{1+\alpha}}=0$$

である．C_4 では $|e^{iz}-1|\leqq r$ であるから，$r\downarrow 0$ のとき $\int_{C_4}\to 0$ である．C_2 では $|e^{iz}-1|\leqq 2$ を用いて $R\uparrow\infty$ のとき $\int_{C_2}\to 0$ である．故に

$$\int_0^\infty (e^{iu}-1)\frac{du}{u^{1+\alpha}}=\int_0^\infty (e^{-u}-1)\frac{du}{(iu)^{1+\alpha}}$$

主枝であるから $(iu)^{1+\alpha}=u^{1+\alpha}e^{i\pi(1+\alpha)/2}$ であることを用いて

$$=-e^{-i\pi\alpha/2}\int_0^\infty\frac{du}{u^{1+\alpha}}\int_0^u e^{-v}dv=-e^{-i\pi\alpha/2}\int_0^\infty e^{-v}dv\int_v^\infty\frac{du}{u^{1+\alpha}}$$

$$= -e^{-i\pi\alpha/2}\alpha^{-1}\Gamma(1-\alpha) = e^{-i\pi\alpha/2}\Gamma(-\alpha).$$

ゆえに (6,3) がいえた。 次に $1<\alpha<2$ とする. 上と同じ積分路で

$$\oint (e^{iz}-1-iz)\frac{dz}{z^{1+\alpha}} = 0$$

から同様にして

$$\int_0^\infty (e^{iu}-1-iu)\frac{du}{u^{1+\alpha}} = \int_0^\infty (e^{-u}-1+u)\frac{i\,du}{(iu)^{1+\alpha}}$$

が分る. これは

$$= e^{-i\pi\alpha/2}\int_0^\infty (e^{-u}-1+u)\frac{du}{u^{1+\alpha}} = e^{-i\pi\alpha/2}\int_0^\infty \frac{du}{u^{1+\alpha}}\int_0^u (u-v)e^{-v}dv$$

$$= e^{-i\pi\alpha/2}\int_0^\infty e^{-v}dv\int_v^\infty \frac{u-v}{u^{1+\alpha}}du = e^{-i\pi\alpha/2}\alpha^{-1}(\alpha-1)^{-1}\Gamma(2-\alpha)$$

$$= e^{-i\pi\alpha/2}\Gamma(-\alpha).$$

ゆえに (6,4) がいえた. (6,5) をいうには,

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^2}du = \frac{\pi}{2}$$

を用いて, $z>0$ に対し

$$\int_0^\infty \left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2} = \int_0^\infty \frac{\cos zu-1}{u^2}du + i\int_0^\infty\left(\sin zu-\frac{zu}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{\pi}{2}z + i\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin zu}{u^2}du - z\int_\varepsilon^\infty \frac{du}{u(1+u^2)}\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2}z + i\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[-z\int_\varepsilon^{\varepsilon z}\frac{\sin u}{u^2}du + z\int_\varepsilon^\infty\left(\frac{\sin u}{u^2}-\frac{1}{u(1+u^2)}\right)du\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2}z - iz\log z + i\delta z$$

となる. 最後の変形には

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^{\varepsilon z}\frac{\sin u}{u^2}du = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^{\varepsilon z}\frac{du}{u} = \log z$$

を用いた. δ は有限な値である. □

定理 6.1 の証明. $\mu \in S_\alpha(R^d)$ とする. $0<\alpha<1$ のときを考えよう. 定理 5.5 の (5.13) は

$$\hat{\mu}(z) = \exp\left[i\gamma_0 z + c' \int_{S^{d-1}} \lambda(d\xi) \int_0^\infty (e^{iu\xi z} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \right]$$

とかける. (6.3) と, それの共役複素数を考えて得られる

$$\int_0^\infty (e^{-iu} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = \Gamma(-\alpha) e^{i\pi\alpha/2}$$

という式から

$$\int_0^\infty (e^{iu\xi z} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = |\xi z|^\alpha \Gamma(-\alpha) e^{-i\frac{\pi\alpha}{2} \mathrm{sgn}(\xi z)}$$

$$= \Gamma(-\alpha)\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) |z|^\alpha |\xi\zeta|^\alpha \left(1 - i\tan\frac{\pi\alpha}{2} \mathrm{sgn}(\xi\zeta)\right)$$

がいえるから (6.1) が得られる. $1<\alpha<2$ のときは, γ_0 を適当に選ぶと (5.13) が

$$\hat{\mu}(z) = \exp\left[i\gamma_0 z + c' \int_{S^{d-1}} \lambda(d\xi) \int_0^\infty (e^{iu\xi z} - 1 - iu\xi z) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \right]$$

となり, (6.4) とそれの共役から得られる式によって上と同様に

$$\int_0^\infty (e^{iu\xi z} - 1 - iu\xi z) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = |\xi z|^\alpha \Gamma(-\alpha) e^{-i\frac{\pi\alpha}{2} \mathrm{sgn}(\xi z)}$$

$$= \Gamma(-\alpha)\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) |z|^\alpha |\xi\zeta|^\alpha \left(1 - i\tan\frac{\pi\alpha}{2} \mathrm{sgn}(\xi\zeta)\right)$$

となり, (6.1) が得られる. $\alpha=1$ のときは, (6.5) とそれの共役から

$$\int_0^\infty \left(e^{iu\xi z} - 1 - \frac{iu\xi z}{1+u^2}\right) \frac{du}{u^2} = -\frac{\pi}{2}|\xi z| - i\xi z \log|\xi z| + i\delta\xi z$$

(ただし, $\xi z = 0$ のときは $\xi z \log|\xi z| = 0$ とする) であるから, γ_1, c_1 を適当にとると

$$\hat{\mu}(z) = \exp\left[i\gamma z + c' \int_{S^{d-1}} \left(-\frac{\pi}{2}|\xi z| - i\xi z \log|\xi z| + i\delta\xi z\right) \lambda(d\xi) \right]$$

$$= \exp\left[i\gamma_1 z - c_1 |z| \int_{S^{d-1}} \left(|\xi\zeta| + i\frac{2}{\pi}\xi\zeta \log|\xi z|\right) \lambda(d\xi) \right]$$

となる．逆に，γ_0, c_0, λ または γ_1, c_1, λ を任意に与えたとき，上の証明を逆にたどれば，(6.1) または (6.2) の $\varphi(z)$ が安定分布の特性関数であることがわかる．異なる γ_0, c_0, λ (または γ_1, c_1, λ) には異なる γ, c', λ が対応し，従って定理5.5によって異なる μ が対応する．□

1次元すなわち $d=1$ のときは，S^0 は $1, -1$ の2点から成るから，定理6.1が次のように書きなおせる．

<u>6.4. 定理.</u> $\varphi(z)$, $z \in R^1$, が指数 $0<\alpha<1$ または $1<\alpha<2$ の1次元安定分布の特性関数であることは，

$$\varphi(z) = \exp\left[i\gamma_0 z - c_0|z|^\alpha\left(1 - i\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}\,\mathrm{sgn}\, z\right)\right] \tag{6.6}$$

という形であることと同値である．たゞし，$\gamma_0 \in R^1$, $c_0>0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ である． $\varphi(z)$ が指数1の1次元安定分布の特性関数であることは，

$$\varphi(z) = \exp\left[i\gamma_1 z - c_1|z|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sgn}\, z \cdot \log|z|\right)\right] \tag{6.7}$$

という形であることと同値である．たゞし，$\gamma_1 \in R^1$, $c_1>0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ である． γ_0, c_0, β または γ_1, c_1, β は φ から一意的に定まる．

<u>証明.</u> $\lambda_+ = \lambda(\{1\})$, $\lambda_- = \lambda(\{-1\}) = 1-\lambda_+$ とすると，(6.1) は

$$\varphi(z) = \exp\left[i\gamma_0 z - c_0|z|^\alpha\left\{\lambda_+\left(1 - i\tan\frac{\pi\alpha}{2}\,\mathrm{sgn}\, z\right) + \lambda_-\left(1 + i\tan\frac{\pi\alpha}{2}\,\mathrm{sgn}\, z\right)\right\}\right]$$

であるから，$\beta = \lambda_+ - \lambda_-$ とすると，(6.6) のように書ける．(6.2)は

$$\varphi(z) = \exp\left[i\gamma_1 z - c_1|z|\left\{\lambda_+\left(1 + i\frac{2}{\pi}\varsigma\log|z|\right) + \lambda_-\left(1 - i\frac{2}{\pi}\varsigma\log|z|\right)\right\}\right]$$

であるから，やはり $\beta = \lambda_+ - \lambda_-$ とすると (6.7) のように書ける．□

<u>6.5. 注.</u> 表現 (6.6) または (6.7) の書き方，すなわち β の定

義等は本によって違っているから注意を要する．たとえば［L2］，［GK］，［IL］は3つとも異なっている．われわれの形はこのどれとも異なるが，Lévy 測度が $(0,\infty)$ に集中しているときが $\beta=1$，$(-\infty,0)$ に集中しているときが $\beta=-1$ になるようにしてある点は［L2］と同じである．

ここで，狭い意味の安定分布について述べる．Lévy はこれを loi stable と呼んでいる．

6.6. 定義： $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ が狭い意味の安定分布であるとは，任意の $b_1>0$ と $b_2>0$ に対し $b>0$ が存在して

$$(6.8)\qquad \hat{\mu}(b_1z)\,\hat{\mu}(b_2z)=\hat{\mu}(bz),\qquad z\in R^d$$

となることである．

狭い意味の安定分布が安定分布であることは，定理3.2から明かである。従って，μ が狭い意味の安定分布であって，δ 分布ではないならば，定理3.9によって，b は b_1 と b_2 から1通りに定まり，しかも，$0<\alpha\leq 2$ をみたす α が μ からただ1つ定まって

$$b=(b_1^\alpha+b_2^\alpha)^{1/\alpha}$$

となる。γ における δ 分布は，特性関数が $e^{i\gamma z}$ であるから，

$$b=b_1+b_2$$

とすれば (6.8) をみたし，従って狭い意味の安定分布である（この場合は，$\gamma\neq 0$ ならば b が b_1,b_2 から1通りに定まる）。

6.7. 定義： $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ が狭い意味の安定分布であるとし，δ_0（原点における δ 分布）ではないとする．このとき，上に注意した通り，$0<\alpha\leq 2$ をみたす α がただ1つ存在して，

(6.8) の b は b_1, b_2 から

(6.9) $$b = (b_1^\alpha + b_2^\alpha)^{1/\alpha}$$

として定まる。この α を，μ の狭い意味の安定分布としての指数という．

<u>6.8. 注.</u> 定理3.9から分る通り，狭い意味の安定分布としての指数は，δ 分布以外の狭い意味の安定分布では，3.10で定義した安定分布の指数と一致する．δ_0 ではない δ 分布の場合は，安定分布としての指数は定義されていないが，狭い意味の安定分布としての指数は 1 である．故に $\alpha \neq 1$ では，狭い意味の安定分布としての指数を，安定分布の指数と区別しなくてよい．

<u>6.9 定理.</u> $\varphi(z)$ を R^d で定義された複素数値関数で，恒等的に 1 ではないとする．

I. $0<\alpha<1$ または $1<\alpha<2$ とするとき，次の3つは同値である．

(i) $\varphi(z)$ が指数 α の狭い意味の安定分布の特性関数．

(ii)
$$\varphi(z) = \exp\left[-c_0|z|^\alpha \int_{S^{d-1}} \left(1 - i \tan\frac{\pi\alpha}{2}\, \mathrm{sgn}(\zeta\xi)\right)|\zeta\xi|^\alpha \lambda(d\xi)\right],$$
$$z = |z|\zeta \in R^d,$$
と表わされる．たゞし $c_0 > 0$ で λ は S^{d-1} の上の確率測度．

(iii)
$$\varphi(z) = \exp\left[c' \int_{S^{d-1}} \lambda(d\xi) \int_0^\infty \left(e^{iu\xi z} - 1\right) \frac{du}{u^{1+\alpha}}\right] \qquad (0<\alpha<1)$$

または

$$\varphi(z) = \exp\left[c' \int_{S^{d-1}} \lambda(d\xi) \int_0^\infty \left(e^{iu\xi z} - 1 - iu\xi z\right) \frac{du}{u^{1+\alpha}}\right] \qquad (1<\alpha<2)$$

と表わされる．たゞし $c' > 0$ で λ は S^{d-1} の上の確率測度．

II. 次の3つは同値である．

(i) $\varphi(z)$ が狭い意味の安定分布の特性関数で，その狭い意味の安定分布としての指数が1．

(ii)

$$\varphi(z) = \exp\left[i\gamma_1 z - c_1 |z| \int_{S^{d-1}} \left(|\zeta\xi| + i\frac{2}{\pi}\zeta\xi \log|z\xi| \right) \lambda(d\xi) \right],$$

$$z = |z|\zeta \in R^d,$$

と表わされる．こゝで $\gamma_1 \in R^d$, $c_1 \geqq 0$, λ は S^{d-1} の上の確率測度で

$$(6.10) \qquad \int_{S^{d-1}} \xi_j \, \lambda(d\xi) = 0 \qquad (j=1,\cdots,d)$$

をみたすもの．たゞし $c_1=0$ のときは $\gamma_1 \neq 0$ とする．

(iii)

$$\varphi(z) = \exp\left[i\gamma z + c' \int_{S^{d-1}} \lambda(d\xi) \int_0^\infty \left(e^{iu\xi z} - 1 - \frac{iu\xi z}{1+u^2} \right) \frac{du}{u^2} \right].$$

こゝで $\gamma \in R^d$, $c' \geqq 0$, λ は S^{d-1} の上の確率測度で (6.10) をみたすもの．たゞし $c'=0$ のときは $\gamma \neq 0$ とする．

III. 次の2つは同値である．

(i) $\varphi(z)$ が指数2の狭い意味の安定分布の特性関数．

(ii)

$$\varphi(z) = \exp\left(-\frac{1}{2} A(z) \right)$$

で，A は0でない非負2次形式．

<u>証明</u>. $0<\alpha<1$ または $1<\alpha<2$ としよう．I(i) がみたされるとする．$\varphi(z)$ は指数 α の安定分布の特性関数であるから定理6.1によって (6.1) のように書ける．故に

$$\varphi(bz) = \exp\left[ib\gamma_0 z - c_0 b^\alpha |z|^\alpha \int_{S^{d-1}} \left(1 - i\tan\frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}(\zeta\xi) \right) |\zeta\xi|^\alpha \lambda(d\xi) \right]$$

である．表現の一意性（定理6.1）と $\varphi(b_1 z)\varphi(b_2 z) = \varphi(bz)$ によって $b\gamma_0 = b_1\gamma_0 + b_2\gamma_0$ である．$\gamma_0 \neq 0$ とすると，$b_1 = b_2 = 1$

にとるとき $b=2$ となり $b=(b_1^{\alpha}+b_2^{\alpha})^{1/\alpha}=2^{1/\alpha}$ に矛盾する．故に $\gamma_0=0$ となり，Ⅰ(ii) がいえた．逆に Ⅰ(ii) がみたされれば，定理6.1 によって $\varphi(z)$ は分布の特性関数であり，その分布が指数 α の狭い意味の安定分布であることは明かであるから，Ⅰ(i) がいえる．Ⅰ(ii) と Ⅰ(iii) の同値は，定理6.1 の証明を見れば容易に分る．

Ⅱ(i) がみたされるとしよう．$\varphi(z)$ は δ分布かまたは指数1の安定分布の特性関数であるから，定理6.1 により，(6.2) のように書ける．ただし $c_1=0$ を許す．故に

$$\varphi(bz)=\exp\left[ib\gamma_1 z-c_1 b|z|\int_{S^{d-1}}\left(|z\xi|+i\frac{2}{\pi}z\xi\left(\log b+\log|z\xi|\right)\right)\lambda(d\xi)\right]$$

である．$b=b_1+b_2$ のとき，$\varphi(b_1z)\varphi(b_2z)=\varphi(bz)$ であるから，z を第 j 成分が 1 で他の成分は 0 にとることにより

$$c_1(b_1\log b_1+b_2\log b_2)\int_{S^{d-1}}\xi_j\lambda(d\xi)=c_1 b\log b\cdot\int_{S^{d-1}}\xi_j\lambda(d\xi)$$

を得る．故に $c_1=0$ かまたは (6.10) が成り立つ．故に Ⅱ(ii) がいえた．逆に，Ⅱ(ii) がみたされれば，定理6.1 によって $\varphi(z)$ は分布の特性関数であり，さらに Ⅱ(i) がみたされることは容易に分る．Ⅱ(ii) と Ⅱ(iii) の同値は，定理6.1 の証明を見れば容易にいえる．

Ⅲ(i) がみたされれば，定理5.5 によって，$\varphi(z)$ は δ分布でない Gauss 分布の特性関数である．故に

$$\varphi(bz)=\exp\left(ib\gamma z-\frac{1}{2}b^2A(z)\right)$$

となり，$b\gamma=b_1\gamma+b_2\gamma$ となる．$\gamma=0$ でなければ，$b=(b_1^2+b_2^2)^{1/2}$ に矛盾する．故に Ⅲ(ii) がいえる．逆は明かである．□

特に $d=1$ の場合は次のようになっている．

6.10. 定理. $\varphi(z)$, $z\in R^1$, が指数 $0<\alpha<1$ または $1<\alpha<2$ の狭い意味の1次元安定分布の特性関数であることは

$$\varphi(z)=\exp\left[-c_0|z|^\alpha\left(1-i\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}\,\mathrm{sgn}\,z\right)\right] \tag{6.11}$$

という形であることと同値である. ここで $c_0>0$, $-1\leq\beta\leq1$ である. 恒等的には1でない関数 $\varphi(z)$ が狭い意味の1次元安定分布の特性関数で, その狭い意味の安定分布としての指数が1であることは,

$$\varphi(z)=\exp\left[i\gamma_1 z-c_1|z|\right] \tag{6.12}$$

という形であることと同値である. ここで $\gamma\in R^1$, $c_1\geqq0$ であり, $c_1=0$ のときは $\gamma_1\neq0$ である.

証明. 定理6.9を, 定理6.4の証明のように書きなおせばよい. □

次に, isotropic な安定分布を決めよう. 結果は [L2] にある.

6.11. 定義. $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ が isotropic であるとは, R^d の上のすべての直交変換 T に対し $T\mu=\mu$ であることとする ($T\mu$ の定義は 1.16). $d\geqq2$ ではこれを回転不変 (rotation invariant) ともいう. 次の補題により T を行列式1の直交変換に限ってもよいからである.

6.12. 補題. $d\geqq1$ のとき $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ に対し次の (i), (ii), (iii) は同値である. $d\geqq2$ のときは (iv) もこれらと同値である.

(i) μ は isotropic.

(ii) $\hat{\mu}(z)$ が $|z|$ のみの関数.

(iii) $\hat{\mu}(z)$ が $|z|$ のみの関数でしかも実数値.

(iv) T が $\det T=1$ の直交変換ならば $T\mu=\mu$.

<u>証明</u>. $d=1$ のときは isotropic は対称と同じであり，この補題は問3Eにほかならない. $d\geqq 2$ とし，(iv)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(iv) および (i)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii) をいおう. このうち (i)$\Rightarrow$(iv) と (iii)$\Rightarrow$(ii) は自明である.

(iv)$\Rightarrow$(ii) の証. T の共役を T' で表わす. 補題1.17により $\widehat{T\mu}(z)=\hat{\mu}(T'z)$ である. $z^{(1)}, z^{(2)}\in R^d$ が $|z^{(1)}|=|z^{(2)}|=c>0$ であるとき $\hat{\mu}(z^{(1)})=\hat{\mu}(z^{(2)})$ をいおう. $z^{(\ell)}=c\zeta^{(\ell)}$, $\ell=1,2$, とし，行列式1の直交変換 T_1, T_2 を $T_\ell\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\zeta^{(\ell)}$, $\ell=1,2$, に選び $T=T_1T_2'$ とする. T は行列式1の直交変換で $T'z^{(1)}=z^{(2)}$ であるから，$\hat{\mu}(z^{(1)})=\hat{\mu}(z^{(2)})$ がいえる.

(ii)$\Rightarrow$(i) の証. $\hat{\mu}(z)=f(|z|)$ とする. 任意の直交変換 T に対し $\hat{\mu}(T'z)=f(|T'z|)=f(|z|)=\hat{\mu}(z)$ である.

(i)$\Rightarrow$(iii) の証. $\hat{\mu}(z)$ が $|z|$ のみの関数になることは (iv)$\Rightarrow$(ii) と同じ. I を恒等変換とすると，$T=-I$ は直交変換であるから $\hat{\mu}(-z)=\hat{\mu}(z)$ である. 故に $\overline{\hat{\mu}(z)}=\hat{\mu}(z)$ である. □

<u>6.13. 定理</u>. $d\geqq 1$, $0<\alpha\leqq 2$ とする. $\varphi(z)$ が指数 α の isotropic な安定分布の特性関数であることは，

(6.13) $$\varphi(z)=\exp(-c|z|^{\alpha})$$

と表わされることと同値である. ただし $c>0$.

<u>証明</u>. $0<\alpha<1$ または $1<\alpha<2$ としよう. $\varphi(z)$ が指数 α の isotropic な安定分布の特性関数とする. 定理6.1により $\varphi(z)$ は (6.1) の形になり，補題6.12により実数値だから

$$\varphi(z)=\exp\left[-c_1|z|^{\alpha}\int_{S^{d-1}}|\zeta\xi|^{\alpha}\lambda(d\xi)\right]$$

となる. さらに補題6.12により $|z|$ のみの関数で ζ によらな

いから，(6.13) となる．逆は同じ補題から明かである．$\alpha=1$ のときの証明も同じである．

$\varphi(z)$ が指数 2 の isotropic な安定分布の特性関数ならば，定理 5.5 と実数値によって

$$\varphi(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}A(z)\right)$$

となり，しかも，任意の直交変換 T に対し $A(T'z)=A(z)$ である．T を適当にとって A を対角化すると

$$A(z) = A(T'z) = (TAT')(z) = \sum_{j=1}^{d} c_j z_j^2$$

であり，$A(z)$ が 0 ではなく，$|z|$ のみの関数だから $c_1=\cdots=c_d>0$ である．$\alpha=2$ のときの逆も明かである．□

問6A（多次元の isotropic Cauchy 分布）．$\hat{\mu}(z)=e^{-|z|}$ となる $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ は

$$f(x) = \pi^{-\frac{d+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)(1+|x|^2)^{-\frac{d+1}{2}}$$

を密度とする分布であることを示せ．（たとえば [L3] p.176）

問6B. $\mu\in I(R^d)$ でその3要素を γ, A, ν とする．μ が isotropic であることは，$\gamma=0$，$A(z)=c\sum_{j=1}^{d} z_j^2$ $(c\geq 0)$ かつ ν が isotropic であることと同値である．これを示せ．（系1.18 を用いよ．）

問6C. $0<\alpha<1$ または $1<\alpha<2$ とするとき，次の3つは同値である

(i) $\varphi(z)$ が R^d の上の指数 α の isotropic な安定分布の特性関数．

(ii) 表現 (6.1) において，$\gamma_0=0$ で λ が S^{d-1} の上の一様分布．

(iii) 表現 (5.13) において，$\gamma=0$ で λ が S^{d-1} の上の一様分布．

$\alpha=1$ のときは，(6.1) を (6.2) に，γ_0 を γ_1 にかえれば同じことが成り立つ．これを示せ．（問6B または 定理6.13 を用いよ．）

問6D. $X_1,\cdots,X_d$ が実数値の独立同分布の確率変数で，分布は指数 α の1次元安定分布であるとする．$X=(X_1,\cdots,X_d)$ の分布が指数 α の d 次元安定分布であることを示せ．この X の分布が isotropic であるのは $\alpha=2$ のときに限ることを示せ．（定理6.13 または 問6C による．）

問6E. $0<\alpha\leq 2$ とする．X が R^d の値をとる確率変数とする．任意の $z\in R^d$ に対し zX の分布が指数 α の狭い意味の1次元安定分布または δ_0 であるとする．このとき X の分布が指数 α の狭い意味の d 次元安定分布または δ_0 であることを示せ．（定義6.6, 6.7 から直接いえる．）

問6F. $\mu\in\mathbb{P}(R^d)$ が isotropic, $\hat{\mu}(z)=\psi(|z|)$ とする．$B_u=\{x\in R^d : |x|\leq u\}$ とする．μ が $\mu(B_u)$, $u\geq 0$, によって定まることを示せ．ある $\varepsilon>0$ に対し $\psi(u)=O(u^{-\frac{d-1}{2}-\varepsilon})$, $u\to\infty$, であるならば

$$\mu(B_u)=\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{d-2}{2}}J_{\frac{d}{2}}(v)\,\psi\!\left(\frac{v}{u}\right)dv$$

であることを示せ．ただし $J_{\frac{d}{2}}$ は order $\frac{d}{2}$ の Bessel 関数である．（$\alpha\geq-\frac{1}{2}$ に対し $J_\alpha(v)=O(v^{-\frac{1}{2}})$, $v\to\infty$, であるから，上の積分が有限になる．）（たとえば [PR] p.154）

§7. 成分が独立であるための条件

R^d の値をとる確率変数 $X=(X_1,\cdots,X_d)$ の分布が無限分解可能であるとき，成分が独立であるための条件を述べる．X が Gauss 分布に従う場合には（Gauss 分布では独立と，平均を引いたもの直交が同値であるから）成分が pairwise に独立であれば全体として独立であることがよく知られている．この性質は，X が無限分解可能分布に従うときにまで拡張される．これは，X の 4 次 moment が有限のときは Pierre (1971) が注意しているが，一般に記しているものは今までないようである．

7.1. 定義. $X_1,\cdots,X_d$ が pairwise に独立であるとは，任意の j_1, j_2 $(1\le j_1\le d,\ 1\le j_2\le d,\ j_1\ne j_2)$ に対し X_{j_1}, X_{j_2} が独立であること．

7.2. 定理. R^{n+m} の値をとる確率変数 $X=(X_1,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+m})$ の分布が無限分解可能で，その 3 要素を γ, A, ν とし，$A(z)=\sum_{j,k=1}^{n+m} a_{jk}z_j z_k$ とする．$X^{(1)}=(X_1,\cdots,X_n)$, $X^{(2)}=(X_{n+1},\cdots,X_{n+m})$ とする．このとき，次の (i), (ii) は同値である．

(i) $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ が独立．

(ii) $a_{jk}=0$ $(1\le j\le n,\ n+1\le k\le n+m)$ で，ν が $E^{(1)}\cup E^{(2)}$ に集中．ただし $E^{(1)}=\{y\in R^{n+m}:(y_{n+1},\cdots,y_{n+m})=(0,\cdots,0)\}$, $E^{(2)}=\{y\in R^{n+m}:(y_1,\cdots,y_n)=(0,\cdots,0)\}$．

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) をいおう．$X^{(1)}$, $X^{(2)}$ の分布は系 1.18 によって無限分解可能であるから，その 3 要素を $\gamma^{(1)}$, $A^{(1)}$, $\nu^{(1)}$ と

$\gamma^{(2)}, A^{(2)}, \nu^{(2)}$ とする．$z=(z_1,\cdots,z_{n+m})$ に対し $z^{(1)}=(z_1,\cdots,z_n)$, $z^{(2)}=(z_{n+1},\cdots,z_{n+m})$ とすると，(i) から

$$\hat{\mu}_X(z)=\hat{\mu}_{X^{(1)}}(z)\,\hat{\mu}_{X^{(2)}}(z)$$

$$=\exp\sum_{\ell=1}^{2}\left[i\gamma^{(\ell)}z^{(\ell)}-\frac{1}{2}A^{(\ell)}(z^{(\ell)})+\int_{R^{(\ell)}}\left(e^{iz^{(\ell)}y^{(\ell)}}-1-\frac{iz^{(\ell)}y^{(\ell)}}{1+|y^{(\ell)}|^2}\right)\nu^{(\ell)}(dy^{(\ell)})\right]$$

である．ただし，$R^{(1)}=R^n$, $R^{(2)}=R^m$ とする．故に，Lévy の表現の一意性により

$$\gamma=(\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}),$$

$$A(z)=A^{(1)}(z^{(1)})+A^{(2)}(z^{(2)}),$$

かつ，任意の非負可測の f に対し

$$\int_{R^{n+m}}f(y_1,\cdots,y_{n+m})\,\nu(dy)$$

$$=\int_{R^n}f(y_1^{(1)},\cdots,y_n^{(1)},0,\cdots,0)\,\nu^{(1)}(dy^{(1)})+\int_{R^m}f(0,\cdots,0,y_1^{(2)},\cdots,y_m^{(2)})\,\nu^{(2)}(dy^{(2)})$$

となる．故に (ii) がいえた．

(ii)$\Rightarrow$(i) をいおう．z に対し $z^{(1)}, z^{(2)}$ を上と同様すなわち $z=(z^{(1)},z^{(2)})$ とし，同様に $y=(y^{(1)},y^{(2)})$, $\gamma=(\gamma^{(1)},\gamma^{(2)})$ とする．(ii) から

$$\hat{\mu}(z)=\exp\left[\sum_{\ell=1}^{2}i\gamma^{(\ell)}z^{(\ell)}-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}z_jz_k-\frac{1}{2}\sum_{j,k=n+1}^{n+m}a_{jk}z_jz_k\right.$$
$$\left.+\sum_{\ell=1}^{2}\int_{E^{(\ell)}}\left(e^{iz^{(\ell)}y^{(\ell)}}-1-\frac{iz^{(\ell)}y^{(\ell)}}{1+|y^{(\ell)}|^2}\right)\nu(dy)\right]$$

である．一方，$X^{(1)}, X^{(2)}$ の分布の特性関数は

$$\hat{\mu}_{X^{(1)}}(z^{(1)})=\hat{\mu}_X(z_1,\cdots,z_n,0,\cdots,0),\quad \hat{\mu}_{X^{(2)}}(z^{(2)})=\hat{\mu}_X(0,\cdots,0,z_{n+1},\cdots,z_{n+m})$$

であるから，$\hat{\mu}_X(z)=\hat{\mu}_{X^{(1)}}(z^{(1)})\,\hat{\mu}_{X^{(2)}}(z^{(2)})$ となり，(ii) がいえる．□

7.3. 定理. $X=(X_1,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+m})$ を R^{n+m} の値をとる確率変数で，その分布が無限分解可能であるとし，$X^{(1)}=(X_1,\cdots,X_n)$, $X^{(2)}=(X_{n+1},\cdots,X_{n+m})$ とするとき，次の (i), (ii) は同値である.

(i) $X^{(1)}, X^{(2)}$ が独立.

(ii) 任意の $1\leq j\leq n$, $n+1\leq k\leq n+m$ に対し X_j, X_k が独立.

証明. (i) ⇒ (ii) は明かだから，(ii) ⇒ (i) を示そう.

第1段. $n=1$ の場合を，m についての帰納法で証明する. $m=1$ ならば自明である. $m\geqq 2$ とし，$m-1$ までいえたとする. X の分布の3要素を γ, A, ν とする.

$$B=\{y\in R^{1+m}:\ y_1\neq 0,\ (y_2,\cdots,y_{1+m})\neq(0,\cdots,0)\},$$
$$C=\{y\in R^{m}:\ y_1\neq 0,\ (y_2,\cdots,y_m)\neq(0,\cdots,0)\}$$

とする. さらに

$$B_1=\{y\in R^{1+m}:\ y_1\neq 0,\ (y_2,\cdots,y_m)\neq(0,\cdots,0)\},$$
$$B_2=\{y\in R^{1+m}:\ y_1\neq 0,\ (y_3,\cdots,y_{1+m})\neq(0,\cdots,0)\}$$

とする. $B=B_1\cup B_2$ である. 帰納法の仮定から X_1, $(X_2,\cdots,X_m)$ は独立であるから，系 1.18 と定理 7.2 によって

$$\nu(B_1)=\int_{R^{1+m}}\chi_C(y_1,\cdots,y_m)\,\nu(dy)=0$$

かつ $a_{1k}=0$ $(2\leq k\leq m)$ である. 同様に $\nu(B_2)=0$ かつ $a_{1k}=0$ $(3\leq k\leq 1+m)$ である. 故に，$\nu(B)=0$ かつ $a_{1k}=0$ $(2\leq k\leq 1+m)$ となり，定理 7.2 によって X_1, $(X_2,\cdots,X_{1+m})$ が独立である.

第2段. 一般の場合を n についての帰納法で証明する. $n=1$ のときは第1段で証明した. $n\geqq 2$ とし，$n-1$ までいえたとする. X の分布の3要素を γ, A, ν とする.

$$B=\{y\in R^{n+m}:\ (y_1,\cdots,y_m)\neq(0,\cdots,0),\ (y_{m+1},\cdots,y_{n+m})\neq(0,\cdots,0)\},$$

$$B_1 = \{ y \in R^{n+m} : (y_1, \cdots, y_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0),\ (y_{n+1}, \cdots, y_{n+m}) \neq (0, \cdots, 0) \},$$

$$B_2 = \{ y \in R^{n+m} : (y_2, \cdots, y_n) \neq (0, \cdots, 0),\ (y_{n+1}, \cdots, y_{n+m}) \neq (0, \cdots, 0) \},$$

$$C = \{ y = (y_1, \cdots, y_{n-1}, y_{n+1}, \cdots, y_{n+m}) \in R^{n-1+m} : (y_1, \cdots, y_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0),\ (y_{n+1}, \cdots, y_{n+m}) \neq (0, \cdots, 0) \}$$

とする．$B = B_1 \cup B_2$ である．帰納法の仮定から $(X_1, \cdots, X_{n-1})$, $(X_{n+1}, \cdots, X_{n+m})$ は独立であるから，系 1.18 と定理 7.2 によって

$$\nu(B_1) = \int_{R^{n+m}} \chi_C(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_{n+1}, \cdots, y_{n+m}) \nu(dy) = 0,$$

$$a_{jk} = 0 \qquad (1 \leq j \leq n-1,\ n+1 \leq k \leq n+m)$$

である．同様に

$$\nu(B_2) = 0$$

$$a_{jk} = 0 \qquad (2 \leq j \leq n,\ n+1 \leq k \leq n+m)$$

である．故に定理 7.2 によって $(X_1, \cdots, X_n)$, $(X_{n+1}, \cdots, X_{n+m})$ が独立である．□

7.4. 定理. $d \geqq 2$ とする．$X = (X_1, \cdots, X_d)$ を R^d に値をとる確率変数でその分布が無限分解可能とする．このとき次の (i), (ii) は同値である．

(i) $X_1, \cdots, X_d$ が独立.

(ii) $X_1, \cdots, X_d$ が pairwise に独立.

証明. (i) ⇒ (ii) は明かだから，(ii) ⇒ (i) を d についての帰納法で示そう．$d = 2$ のときは自明である．$d-1$ までいえたとする．$X_1, \cdots, X_d$ が pairwise に独立ならば，$X_1, \cdots, X_{d-1}$ は独立になり，しかも定理 7.3 から $(X_1, \cdots, X_{d-1})$, X_d は独立だから，$X_1, \cdots, X_d$ も独立であることが分る．□

7.5. 定理. $d \geqq 2$ とする. $X=(X_1,\cdots,X_d)$ が R^d に値をとる確率変数でその分布が無限分解可能, その3要素が γ, A, ν であるとする. このとき次の(i), (ii)は同値である.

(i) $X_1,\cdots,X_d$ が独立.

(ii) $a_{jk}=0$ $(j\neq k)$ で, ν が座標軸の上に集中.

証明. 系1.18と定理7.2からわかる. □

定理7.5の X に対し $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ を, $X=X^{(1)}+X^{(2)}$ で, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ は独立で無限分解可能分布をもち, $X^{(1)}$ の分布の3要素は $0, A, 0$, $X^{(2)}$ の分布の3要素は $\gamma, 0, \nu$ に定める. $X^{(1)}$ を X の Gauss 部分, $X^{(2)}$ を X の非Gauss部分と呼ぶことにする. このとき次のことがいえる.

7.6. 系. 次の(iii)も定理7.5の(i)と同値である.

(iii) X の Gauss 部分 $X^{(1)}$ の成分が独立で, かつ, 非Gauss 部分 $X^{(2)}$ の成分が独立.

証明. $X^{(1)}$ の成分が独立であることは $a_{jk}=0$ $(j\neq k)$ と同値, $X^{(2)}$ の成分が独立であることは ν が座標軸の上に集中していることと同値である. □

7.7. 補足. Dwass-Teicher (1957) の示している次のことは定理7.5で X の Gauss 部分が 0 の場合を拡張していることになる. $d \geqq 2$ とし, $X=(X_1,\cdots,X_d)$ の分布が $I(R^d)$ に属し, その3要素が $0, 0, \nu$ であるとする. n を正の整数とする. このとき次の(i), (ii)は同値である.

(i) $Y_1,\cdots,Y_n$ という独立な確率変数で各々の分布が $I(R^1)$ に属するものと, 実数 c_{jk} $(1\leq j\leq d,\ 1\leq k\leq n)$ が存在して, 各 j に対し, X_j と $\sum c_{jk}Y_k$ が同分布である.

(ii) ν が原点を通る n 本の直線の上に集中している.

問7A. $d \geqq 2$ とし, $X=(X_1,\cdots,X_d)$ の分布が d 次元L分布であるとする. λ をその Lévy 測度の球面成分とする. λ が S^{d-1} と座標軸との交点(2d個)に集中しているとき, かつこのときに限って, $X_1,\cdots,X_d$ が独立である. これを示せ. (定理7.5による. 安定分布のときは Paulauskas (1976))

問7B. $d \geqq 2$, $X=(X_1,\cdots,X_d)$ の分布が無限分解可能で, その3要素を γ, A, ν とする. $E|X|^2<\infty$ とする. X_j, X_k の共分散を m_{jk} とかく. このとき次のことを示せ.

(i)
$$m_{jk} = a_{jk} + \int_{R^d} y_j y_k \nu(dy)$$

(ii) $m_{jk}=0$ でも, X_j, X_k は独立とは限らない.

(iii) X_j, X_k が下に有界のときは, $m_{jk}=0$ ならば X_j, X_k は独立である (Pierre (1971)).

(定理11.3により $\int_{R^d} |y|^2 \nu(dy) < \infty$ となる. (i) は問11C, 11D から分る. (ii) は (i) から明か. (iii) は定理10.5, 系1.18 によって定理7.5 から分る.)

問7C. $d \geqq 2$ とし, $X=(X_1,\cdots,X_d)$ を任意の d 次元確率変数で $E|X|^4<\infty$ とするとき, X_j, X_k に対する (2, 2) 次の product cumulant ([KS] p.85 で定義されている κ_{22}) を π_{jk} と書く.

(7.1)
$$\pi_{jk} = m_{jjkk} - m_{jj} m_{kk} - 2(m_{jk})^2$$

を示せ. ただし, $m_{j_1\cdots j_n}$ は平均値の周りの moment

$$m_{j_1\cdots j_n} = E[(X_{j_1} - EX_{j_1}) \cdots (X_{j_n} - EX_{j_n})]$$

を表わす. 従って, $EX_j = EX_k = 0$ のときは

$$\pi_{jk} = EX_j^2 X_k^2 - (EX_j^2)(EX_k^2) - 2(EX_j X_k)^2$$

である．（ X の分布の特性関数 $\hat{\mu}(z)$ によって

(7.2) $$\pi_{jk} = \frac{\partial^4}{\partial z_j^2 \partial z_k^2}\left(\log \hat{\mu}(z)\right)\Big|_{z=0}$$

と表わされることから計算できる．[KS] p.86）

<u>問7D</u> (Pierre (1971)). $d \geqq 2$, $X=(X_1,\cdots,X_d)$ の分布が無限分解可能，その3要素が γ, A, ν とする． $E|X|^4<\infty$ とし，m_{jk}, π_{jk} などを問7B,C の通りとする．次のことを示せ．

(i) $$\pi_{jk} = \int_{R^d} y_j^2 y_k^2 \,\nu(dy).$$

(ii) $X_1,\cdots,X_d$ が独立

⟺ 任意の相異なる j,k に対し $m_{jjkk}-m_{jj}m_{kk}=0$

⟺ 任意の相異なる j,k に対し $\pi_{jk}=0$ かつ $m_{jk}=0$

(iii) X の非Gauss部分の成分が独立

⟺ 任意の相異なる j,k に対し $\pi_{jk}=0$

（定理11.3により $\int_{R^d}|y|^4\nu(dy)<\infty$ となる．(i) は (7.2) から分る．(i) により $\pi_{jk}\geqq 0$ であることと (7.1) と定理7.5 から (ii) が分る．(iii) は系7.6の証明を見よ．）

§8. 連続，絶対連続などの性質

$(R^d, \mathcal{B}(R^d))$ の上の測度を考えよう．Leb(·) で Lebesgue 測度をあらわそう．

測度 ν が離散 (discrete) であるとは，ある可算集合 D に対し $\nu(R^d \setminus D) = 0$ であること．

ν が絶対連続 (absolutely continuous) であるとは，$B \in \mathcal{B}(R^d)$, $\mathrm{Leb}(B) = 0$ ならば $\nu(B) = 0$ であること．

ν が特異 (singular) であるとは，ある $B \in \mathcal{B}(R^d)$ に対し $\mathrm{Leb}(B) = 0$ かつ $\nu(R^d \setminus B) = 0$ であり，任意の $x \in R^d$ に対し $\nu(\{x\}) = 0$ であることである．これを連続特異 (continuous singular) ともいう．

ν が σ 有限な測度であるとき，離散な測度 ν_d，絶対連続な測度 ν_a，特異な測度 ν_s によって

$$\nu = \nu_d + \nu_a + \nu_s$$

とあらわされる．ν_d, ν_a, ν_s は ν から1通りに定まる (Lebesgue 分解)．ν_d を ν の離散部分，ν_a を ν の絶対連続部分，ν_s を ν の特異部分という．

ν_d (または ν_a, ν_s) が 0 でないとき，ν が離散 (または絶対連続，特異) 部分をもつという．ν が離散または絶対連続または特異であるとき，ν は純粋 (pure) であるという．純粋でないことを，混合 (mixed) であるという．

ν が離散部分をもたないことを，ν が連続であるともいう．$\nu_c = \nu_a + \nu_s$ とかくと，ν_c は連続で $\nu = \nu_d + \nu_c$ である．

ν_1, ν_2 が測度であるとき (確率測度でなくても)，そのたたみこみ $\nu_1 * \nu_2$ を定義1.1 と同じに定義する．

ν_1 が ν の factor であるとは，ある測度 ν_2 によって

$\nu = \nu_1 * \nu_2$ とあらわされることである．

ν が測度であるとき

$$D(\nu) = \sup_{x \in R^d} \nu(\{x\})$$

と定義する．

われわれは，無限分解可能分布 $\mu \in I(R^d)$ の離散，絶対連続，特異などの性質と，μ の Lévy の表現における 3 要素 γ, A, ν の性質との関係を調べる．一般に確率分布 $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ の離散，絶対連続，特異などの性質は，特性関数 $\hat{\mu}(z)$ の $|z| \to \infty$ における状態に反映する（問 8D — 8G）．これを使って μ の性質を決めることができることがしばしばある（たとえば 9.8 — 9.10）．しかし，両者の性質の対応は必要十分ではないことが多いためこれを使えない場合もかなりあり，われわれのこの節の議論でもこれを用いない．

たゝみこみに関する 2 つの補題から始める．

8.1. 補題. ν_1, ν_2 を 0 でない測度，$\nu = \nu_1 * \nu_2$ とする．

(i) ν_1 または ν_2 が連続 $\Longleftrightarrow$ ν が連続

(ii) ν_1 および ν_2 が離散 $\Longleftrightarrow$ ν が離散

(iii) ν_1 または ν_2 が絶対連続 $\Longrightarrow$ ν が絶対連続

(iv) ν_1 または ν_2 が特異 $\Longleftarrow$ ν が特異

注. ν_1, ν_2 が共に特異であるとき，ν が特異になる例も，絶対連続になる例も，特異と絶対連続の混合になる例もある．もっと強く，特異な ν で ν^{2*} が絶対連続になるものがあり，また，特異な ν で，すべての正の整数 n に対し ν^{n*} が特異のものがある（問 8G）．

証明. (i) の ($\Rightarrow$): ν_1 が連続とすると，

$$\nu(\{x\})=\int_{R^d}\nu_1(\{x-y\})\nu_2(dy)=0$$

であるから ν は連続である.

(ii) の (⇒): 可算集合 D_1, D_2 が存在して $\nu_1(R^d\setminus D_1)=\nu_2(R^d\setminus D_2)=0$ である. $D=D_1+D_2$ とする. (ただし $D_1+D_2=\{x_1+x_2 : x_1\in D_1, x_2\in D_2\}$.) D は可算である. $y\in D_2$ ならば $((R^d\setminus D)-y)\cap D_1=\emptyset$ であるから

$$\nu(R^d\setminus D)=\int_{D_2}\nu_1((R^d\setminus D)-y)\nu_2(dy)=0.$$

(i) の (⇐): ν_1 および ν_2 が離散部分をもてば, (ii) の (⇒) によって ν が離散部分をもつ.

(ii) の (⇐): ν_1 または ν_2 が連続部分をもてば, (i) の (⇒) によって ν が連続部分をもつ.

(iii): $B\in\mathcal{B}(R^d)$, $\mathrm{Leb}(B)=0$ ならば, $\mathrm{Leb}(B-y)=0$ であるから

$$\nu(B)=\int_{R^d}\nu_1(B-y)\nu_2(dy)=0.$$

(iv): ν_1 も ν_2 も特異でないとする. $\nu_1=\nu_{1d}+\nu_{1a}+\nu_{1s}$, $\nu_2=\nu_{2d}+\nu_{2a}+\nu_{2s}$ において $\nu_{1d}+\nu_{1a}\neq 0$, $\nu_{2d}+\nu_{2a}\neq 0$ である. $(\nu_{1d}+\nu_{1a})*(\nu_{2d}+\nu_{2a})$ は (ii), (iii) によって離散部分または絶対連続部分をもつ. □

8.2. 補題. μ, μ_1 が確率分布で μ_1 が μ の factor ならば, $D(\mu)\leq D(\mu_1)$ である.

証明. $\mu=\mu_1*\mu_2$ とすると

$$\mu(\{x\})=\int_{R^d}\mu_1(\{x-y\})\mu_2(dy)\leq D(\mu_1)$$

である. □

次の定理は，$d=1$ の場合には，Hartman-Wintner (1942) を書きなおしたものである．

8.3 定理. $\mu \in I(R^d)$ とし，その3要素 γ, A, ν に対し $A=0$, $\nu(R^d)<\infty$ とする．(1.9) における γ_0 を用い，$R^d \setminus \{\gamma_0\}$ への μ の制限 $[\mu]_{R^d\setminus\{\gamma_0\}}$ を μ' とあらわす．このとき次のことがいえる．

(i) μ はいつでも離散部分をもつ．特に $\mu(\{\gamma_0\})>0$.
(ii) μ' が離散 $\Leftrightarrow$ ν が離散
(iii) μ' が連続 $\Leftrightarrow$ ν が連続
(iv) μ' が絶対連続 $\Leftrightarrow$ ν が絶対連続
(v) μ' が特異 $\Rightarrow$ ν が特異
(vi) μ' が絶対連続部分をもつ $\Leftarrow$ ν が絶対連続部分をもつ
(vii) μ' が特異部分をもつ $\Leftrightarrow$ ν が特異部分をもつ

注. ν が特異のとき，μ' は特異の例も絶対連続成分をもつ例もある（補題 8.1 の注による）．

証明. $\nu=0$ のとき定理は自明だから $\nu\neq0$ とする．γ_0 は translation をあらわすから，$\gamma_0=0$ としてよい．すると μ は例 1.8 の複合 Poisson 分布になり，$c=\nu(R^d)$, $\nu_0=\frac{1}{c}\nu$ とするとき

(8.1) $$\mu=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-c}\frac{c^n}{n!}\nu_0^{n*}$$

である．すなわち

(8.2) $$\mu=e^{-c}\delta_0+e^{-c}\nu+\sum_{n=2}^{\infty} e^{-c}\frac{c^n}{n!}\nu_0^{n*}$$

である．故に (i), (vi) と，(vii) の ($\Leftarrow$) が分る．(ii) の ($\Leftarrow$) も補題 8.1 (ii) によって分る．ν が連続部分をもてば (8.2) により

μ ももつから，(ii) の (⇒) がいえる．同様に (iii), (iv), (v) が (8.2) と補題 8.1 の (i), (iii) から分る．ν が特異部分をもたないならば，補題 8.1 によって ν^{n*} が特異部分をもたないから，(8.2) により μ も特異部分をもたない．故に (vii) の (⇒) がいえる．□

無限分解可能分布の連続になるための必要十分条件を与える次の定理は，Dœblin (1939) による．Hartman-Wintner (1942), Blum-Rosenblatt (1959), Esseen (1968) などの証明もある．以下の証明の第1段は Ito [I2] による．

8.4. 定理. $\mu \in I(R^d)$ とし，その3要素を γ, A, ν とする．μ が連続になるための必要十分条件は，$A \neq 0$ または $\nu(R^d)=\infty$ となることである．

（$A\neq 0$ とは $A(z)$ が「恒等的に 0」ではないこと，すなわち A の rank が少くとも 1 であることである．）

証明. $A=0$ かつ $\nu(R^d)<\infty$ ならば，定理 8.3 によって，μ は連続でない．$A\neq 0$ ならば，A の rank を r とするとき，μ の Gauss 部分は連続である（問 1H により，support が r 次元超平面で，r 次元 Lebesgue 測度に関し絶対連続）から，補題 8.1 (i) によって μ は連続である．残っているのは，$\nu(R^d)=\infty$ のときに μ が連続になるということの証明である．

第1段. $\nu(R^d)=\infty$，かつ ν が離散のときの証明．ν の mass をもつ点を $x_1, x_2, \cdots$ とし，$\nu(\{x_j\})=m_j$ とする．$\sum_{j=1}^{\infty} m_j=\infty$ である．$m_j'=m_j\wedge 1$ とする．明らかに $\sum_{j=1}^{\infty} m_j'=\infty$ である．$\nu_n=\sum_{j=1}^{n} m_j'\delta_{x_j}$ とし，μ_n を

$$\hat{\mu}_n(z)=\exp\int_{R^d}\left(e^{izy}-1\right)\nu_n(dy) \qquad (8.3)$$

という複合 Poisson 分布とする. μ_n は μ の factor である.

$\nu_n(R^d)=c_n$, $\overline{\nu_n}=\frac{1}{c_n}\nu_n$ とすると,

(8.4) $$\mu_n=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-c_n}\frac{c_n^{k}}{k!}\overline{\nu_n}^{k*}$$

である. $D(\mu_n)$ を評価しよう.

$$D(\overline{\nu_n})=\max_{j=1,\cdots,n}\frac{m_j'}{c_n}\leq\frac{1}{c_n}$$

であるから補題8.2により, $k\geq 1$ に対しては

$$D(\overline{\nu_n}^{k*})\leq\frac{1}{c_n}$$

である. 故に

$$\mu(\{x\})\leq e^{-c_n}+\frac{1}{c_n}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-c_n}\frac{c_n^{k}}{k!}\leq e^{-c_n}+\frac{1}{c_n},$$

故に $D(\mu_n)\to 0$ $(n\to\infty)$ である. 補題8.2により $D(\mu)\leq D(\mu_n)$ であるから $D(\mu)=0$, すなわち μ は連続である.

第2段. $\nu(R^d)=\infty$, かつ ν が連続のときの証明. ν の $\{x:\ |x|\geq 1/n\}$ への制限を ν_n とし, $\nu_n(R^d)=c_n$ とする. $c_n\to\infty$ である. ν_n から μ_n を (8.3) で定義する. μ_n は μ の factor である. $\overline{\nu_n}=\frac{1}{c_n}\nu_n$ によって μ_n は (8.4) のように表わされる. 補題8.1 (i) により, $k\geq 1$ に対し $\overline{\nu_n}^{k*}$ は連続であるから, μ_n の point mass は 0 にだけあり, $D(\mu_n)=\mu_n(\{0\})=e^{-c_n}$ である. 故に補題8.2により $D(\mu)=0$ である.

第3段. 一般に $\nu(R^d)=\infty$ のときの証明. ν を離散部分と連続部分に分解し $\nu=\nu_d+\nu_c$ とする. $\nu_d(R^d)=\infty$ または $\nu_c(R^d)=\infty$ である. $\mu^{(d)}$ を

$$\widehat{\mu^{(d)}}(z)=\exp\left[\int_{R^d}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu_d(dy)\right]$$

によって定義し, 同様に ν_c から $\mu^{(c)}$ を定義する. 第1段, 第2段によって, $\mu^{(d)}$ または $\mu^{(c)}$ が連続である. $\mu^{(d)}$ も

$\mu^{(c)}$ も μ の factor であるから，補題 8.1 (i) によって μ は連続である．□

8.5.系． $\mu \in I(R^d)$ とする． μ が離散部分をもつための必要十分条件は，μ が複合 Poisson 分布の平行移動であることである．

証明． 定理8.4のいいかえである．

8.6.系． $\mu \in I(R^d)$ としその3要素を γ, A, ν とする． μ が離散であるための必要十分条件は，$A=0$，$\nu(R^d)<\infty$，かつ ν が離散であること．

証明． 十分条件であることは，定理8.3で示した．必要条件であることは，定理8.4と8.3からわかる．□

次に，$\mu \in I(R^d)$ が絶対連続になるための十分条件を与える．

8.7.定理． $\mu \in I(R^d)$，その3要素を γ, A, ν とする． A の rank が d ならば，μ は絶対連続である．

証明． μ の Gauss 部分が非退化 Gauss 分布であるから絶対連続である(問16)． 故に補題 8.1 (iii) によって μ も絶対連続である．□

次の十分条件は Sato (提出中) によるが，$d=1$ かつ $n=1$ のとき，Tucker (1962)，Fisz-Varadarajan (1963)，Zolotarev (1963) が示したものである．この形にすることにより，§9 で使うことができる．

8.8. 定理. $\mu\in I(R^d)$, その3要素を γ, A, ν とし, $\nu(R^d)=\infty$ とする. ある正の整数 ℓ に対し $\nu^{\ell *}$ が絶対連続であるならば, μ は絶対連続である.

証明. μ_n, ν_n, $\bar{\nu}_n$, c_n を定理8.4の証明の第2段のように定義する. (8.4) から得られる

$$\mu_n=\sum_{k=0}^{\ell-1} e^{-c_n}\frac{c_n^k}{k!}\bar{\nu}_n^{k*}+\sum_{k=\ell}^{\infty} e^{-c_n}\frac{c_n^k}{k!}\bar{\nu}_n^{k*}$$

において, 右辺第2項は仮定と補題8.1 (iii) により絶対連続である. 故に, μ_n の Lebesgue 分解を $\mu_n=\mu_{nd}+\mu_{na}+\mu_{ns}$ とすると,

$$\mu_{nd}(R^d)+\mu_{ns}(R^d)\leq\sum_{k=0}^{\ell-1}e^{-c_n}\frac{c_n^k}{k!}$$

である. $n\to\infty$ のときこれは 0 に近づく($c_n\to\infty$ であるから). μ_n は μ の factor であるから, ある μ_n' によって $\mu=\mu_n*\mu_n'$ である. 故に

$$\mu=(\mu_{nd}+\mu_{ns})*\mu_n'+\mu_{na}*\mu_n'$$

であり, 右辺の第2項は絶対連続, 第1項の total mass は $\mu_{nd}(R^d)+\mu_{ns}(R^d)$ でおさえられる. 故に, μ の絶対連続部分 μ_a に対し $\mu_a(R^d)=1$ でなければならない. □

最後に, Hartman-Wintner (1942) による次の結果を示しておく.

8.9. 定理. $\mu\in I(R^d)$ とし, その3要素を γ, A, ν とする. $A=0$, $\nu(R^d)=\infty$ で ν が離散であれば, μ は絶対連続であるか特異であるかである.

証明. $\gamma=0$ としてよい. ν の $\{|x|\geq 1\}$ への制限を ν_1, $\{\frac{1}{n-1}>|x|\geq\frac{1}{n}\}$ への制限を ν_n とし, μ_n を

$$\hat{\mu}_n(z)=\exp\left[\int_{R^d}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu_n(dy)\right]$$

によって定義する．定理8.3によって μ_n は離散である．X_n を分布 μ_n をもつ確率変数とし，$X_1, X_2, \cdots$ が独立とする．

$$\prod_{n=1}^{\infty}\hat{\mu}_n(z)=\hat{\mu}(z)$$

であるから，$n\to\infty$ のとき $\sum_{k=1}^{n}X_k$ の分布は μ に収束する．故に，独立確率変数を項とする級数に関するLévyの定理（たとえば［I1］p. 102，［Lo］p. 251）を各成分に適用することによって，$n\to\infty$ のとき $\sum_{k=1}^{n}X_k$ がある X に概収束することが分る．X の分布が μ である．ゆえにJessen-Wintnerの純粋定理（問8H）によって μ は純粋である．定理8.4により μ は連続であるから，絶対連続または特異である．□

8.10. 補足． 1次元の場合には，以上に述べたよりもさらに進んだ研究がある．$\mu\in I(R^1)$ とし，その3要素 γ, A, ν に対し $\gamma=0$，$A=0$ としよう．ν が離散で $\nu(R^1)=\infty$ のとき，μ は絶対連続になる例も特異になる例もある．各々に対する十分条件をTucker (1964)，Orey (1968) などが与えている．ν が特異で $\nu(R^1)=\infty$ のとき，μ が絶対連続になる例とならない例をTucker (1965) が与えている．しかし，いずれも，ν のexplicitな性質であらわされる必要十分条件は見出されていない．さらにRubin (1967) は，ν が離散または特異で μ が特異になる場合における，$\mu(B)=1$ となるBorel集合 B の大きさを精細に研究している．

問8A． $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ の分布関数 $F(x)$，$x=(x_1,\cdots,x_d)\in R^d$，を $F(x)=\mu(B_x)$，$B_x=\{y=(y_1,\cdots,y_d)\in R^d : y_1\leq x_1,\cdots,y_d\leq x_d\}$，によって定義する．$d\geqq 2$ のとき，μ が連続

であることと $F(x)$ が連続関数であることとは同値でない. これを示せ. (たとえば x_1 軸上の $0\leq x_1\leq 1$ に1次元の Lebesgue 測度があるとき.)

<u>問8B.</u> δ分布でない R^d の上の L分布は　連続であることを示せ. (定理5.1と定理8.4から分る.)

<u>問8C.</u> δ分布でない R^1 の上のL分布は絶対連続であることを示せ. (問5Cと定理8.7から分る. Sato-Yamazato (1978) p.281 に別証明がある.)

<u>問8D</u> (Riemann-Lebesgue の補題). $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ が絶対連続ならば, $\lim_{|z|\to\infty}\hat{\mu}(z)=0$ である. これを示せ. (たとえば [BC] p.57)

<u>問8E.</u> $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ とする. $\hat{\mu}(z)$ が R^d において可積分ならば, μ は絶対連続でその密度関数 $f(x)$ は

$$(8.5)\qquad f(x)=(2\pi)^{-d}\int_{R^d}e^{-izx}\hat{\mu}(z)\,dz$$

と表わされる. さらに, $f(x)$ は有界, 連続で, $\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$ である. これを示せ. (前半は直接証明してもよいが, Lévy の反転公式(問1N)から分る. 後半は(8.5)と問8Dから分る.)

<u>問8F.</u> $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ とする. $|z|^n|\hat{\mu}(z)|$ が R^d において可積分ならば, μ の密度関数 $f(x)$ は C^n 級で, $f(x)$ の高々 n 階の偏導関数は, $|x|\to\infty$ において 0 に近づく. これを示せ. ((8.5)を n 回まで積分記号下で微分できる.)

<u>問8G.</u> $d=1$, $\mu\in\mathcal{P}(R^1)$ のとき, 次のことを示せ.

(i) $1\leq p\leq 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とする. $\hat{\mu}(z)$ が

(8.6) $$\int_{R^1} |\hat{\mu}(z)|^p dx < \infty$$

をみたせば，μ は絶対連続でその密度関数 $f(x)$ は $1 \leq r \leq q$ のすべての r に対し $\int_{R^1} f(x)^r dx < \infty$ をみたす．（たとえば [K1] p.437, [K2] p.198, 288）

注．$\mu \in I(R^1)$ のとき (8.6) をみたすための Lévy 測度 ν の条件を Kawata-Maejima (1977) が調べている．

(ii) 任意の $x \in R^1$ に対し

$$\mu(\{x\}) = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{2u} \int_{-u}^{u} e^{-izx} \hat{\mu}(z) dz$$

である．（[Lu] p.35）

(iii) μ が離散ならば

(8.7) $$\limsup_{|z| \to \infty} |\hat{\mu}(z)| = 1$$

である．（たとえば [Bo]）

(iv) 特異な μ で (8.7) をみたすものがある．従って，特異な μ で，何回自分自身とたゝみこみをしても特異であるようなものがある．（Jessen-Wintner による．[Lu] p.20, [PR] p.156）

(v) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，特異な μ で

$$|\hat{\mu}(z)| = O(|z|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad (|z| \to \infty)$$

をみたすものがある．従って，特異な μ で，$\mu * \mu$ が絶対連続になるものがある．（Wiener-Wintner による．[K1] p.558）

問8H (Jessen-Wintner の純粋定理)．$X_1, X_2, \cdots$ を独立な R^d 値の確率変数列で，和が $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ に概収束するとする．各 k に対し X_k の分布が離散であるならば，X の分布は純粋である．これを示せ．（Kolmogorov の 0-1 法則による．たとえば [Br] p.49）

問8Ⅰ. $\mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(R^d)$ で $\mu = \mu_1 * \mu_2$ とし, μ_1 が絶対連続で μ_1 の密度が $f_1(x)$ とする. このとき次のことを示せ.

(i) μ は密度 $f(x) = \int_{R^d} f_1(x-y)\,\mu_2(dy)$ をもつ.

(ii) f_1 が C_b^n 級ならば, $f(x)$ も C_b^n 級である. (C_b^n 級であるとは, C^n 級であって, その高々 n 階の偏導関数がすべて有界であること.)

(iii) f_1 が R^d で正ならば f も R^d で正である.

((i) は直接たしかめられる. (ii), (iii) は (i) から分る.)

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

§9. L分布の絶対連続などの性質

非退化の d 次元L分布が絶対連続であることを示そう．さらに，Lévy 測度の原点の近くにおける大きさをある意味で示す量 β を定義し，これを用いて，密度関数のなめらかさに対する十分条件を与えよう．定理 9.2 は Sato (提出中)，定義 9.4 以下は Sato (1980) による．

9.1. 定義. $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ が非退化 (non-degenerate) であるとは，R^d 内のどのような $d-1$ 次元超平面 H (すなわちある $\gamma \in R^d$ と $d-1$ 次元部分空間 V によって $H=V+\gamma$ とあらわされるもの) にも μ が集中していないこと．($d=1$ のときには，非退化とは δ 分布でないことである．)

9.2. 定理. μ が R^d の上の非退化の L 分布ならば，絶対連続である．

9.3. 補題. ν が，ある $\mu \in L(R^d)$ の Lévy 測度で，どんな $d-1$ 次元部分空間 V に対しても $\nu(V)=0$ であるとする．このとき，ν^{d*} は絶対連続になる．

証明. $\nu=0$ ならば自明である．$\nu \neq 0$ とし，ν の球面成分を λ とする．仮定により，$\lambda(V \cap S^{d-1})=0$ である．$F \in \mathcal{B}(R^d)$ を $\mathrm{Leb}(F)=0$ とする．ν は定理 5.1 にあるように表現されるから

$$
\begin{aligned}
\nu^{d*}(F) &= \int_{(R^d)^d} \chi_F(x_1+\cdots+x_d)\prod_{\ell=1}^{d}\nu(dx_\ell) \\
&= \int_{(S^{d-1})^d}\prod_{\ell=1}^{d}\lambda(d\xi_\ell)\int_{(0,\infty)^d}\chi_F(u_1\xi_1+\cdots+u_d\xi_d)\prod_{\ell=1}^{d}\left(k_{\xi_\ell}(u_\ell)\frac{du_\ell}{u_\ell}\right)
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

である．$\xi_1, \cdots, \xi_d$ が R^d 内のベクトルとして1次独立ならば，重積分の変数変換 $u \longmapsto v = u_1\xi_1 + \cdots + u_d\xi_d$ によって

$$\int_{(0,\infty)^d} \chi_F(u_1\xi_1 + \cdots + u_d\xi_d)\, du_1 \cdots du_d = 0$$

が分る．

$$K_r = \{ (\xi_1, \cdots, \xi_d) \in (S^{d-1})^d : \text{rank}\,(\xi_1, \cdots, \xi_d) = r \}$$

$$K_r(i_1, \cdots, i_r) = \{ (\xi_1, \cdots, \xi_d) \in K_r : \xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_r} \text{ が1次独立} \}$$

とする．$K_r = \bigcup_{(i_1, \cdots, i_r)} K_r(i_1, \cdots, i_r)$ である．(9.1) における積分領域 $(S^{d-1})^d$ を $\bigcup_{r=1}^{d-1} K_r$ におきかえてよい．$1 \leq r \leq d-1$ ならば，$i_0 \neq i_1, \cdots, i_r$ を選ぶと，仮定 $\lambda(V \cap S^{d-1}) = 0$ によって

$$\int_{K_r(i_1, \cdots, i_r)} \prod_{\ell=1}^{d} \lambda(d\xi_\ell) \leqq \int_{(S^{d-1})^{d-1}} \lambda(S^{d-1} \cap V(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_r})) \prod_{\ell \neq i_0} \lambda(d\xi_\ell)$$
$$= 0$$

が得られる．(9.1) と合せれば，$\nu^{d*}(F) = 0$ を得る．□

<u>定理9.2の証明</u>．d に関する帰納法で証明する．$d=1$ ならばいえている（問8C）．$d \geqq 2$ とし，それより低次元では定理がいえたとする．μ が R^d の上の非退化の L 分布であるとし，その3要素を γ, A, ν とする．もし A の rank が d ならば μ は絶対連続である（定理8.7）．もし $\nu = 0$ ならば，μ が非退化であるから A が rank d でなければならない（系1.20）．もし $\nu \neq 0$ で補題9.3の条件をみたすならば，定理8.8によって（定理5.1によって $\nu(R^d) = \infty$ であることに注意），μ は絶対連続である．故に，A の rank が d でなく，しかも，ある $d-1$ 次元部分空間 V に対し $\nu(V) > 0$ である場合を考えればよい．この場合は，部分空間 V_1 と V_1 の上の分布 μ_1 を次のように定義する．もし $A \neq 0$ ならば，μ の，$\hat{\mu}_1(z) = \exp(-\frac{1}{2}A(z))$ で定まる Gauss 部分を μ_1 とし，μ_1

の support を V_1 とする．もし $A=0$ ならば，$[\nu]_V$ の support を含む最小の部分空間を V_1 とし，μ_1 を

$$\hat{\mu}_1(z)=\exp\left[\int_{V_1}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\nu(dy)\right]$$

とする．系1.21によって μ_1 の support は V_1 内にある．$\ell=\dim V_1$ とする．$1\leq \ell\leq d-1$ である．V_1 の直交補空間を V_2 とし，V_1，V_2 への射影をそれぞれ T_1，T_2 とする．$x\in R^d$ に対し，$x_1=T_1x$，$x_2=T_2x$ とおく．分布 μ_2 を $\mu=\mu_1*\mu_2$ によって定義する．特性関数に対する定理5.1から分るように，μ_1，μ_2 は L 分布である．μ_1 は V_1 の上の非退化の ℓ 次元 L 分布と見なすことができる（問10による）．故に帰納法の仮定によって，μ_1 は V_1 の上の ℓ 次元 Lebesgue 測度 dx_1 に関し絶対連続である．$\mu_1(dx)=f(x_1)dx_1$ とする．$F\in\mathcal{B}(R^d)$ に対し

(9.2) $$\mu(F)=\int_{R^d}\mu_2(dy)\int_{R^\ell}\chi_F(x_1+y_1,\,y_2)f(x_1)dx_1$$

である．F の d 次元 Lebesgue 測度 Leb(F) が 0 とし，$\mu(F)=0$ を証明しよう．

$$g(y_1,y_2)=\int_{R^\ell}\chi_F(x_1+y_1,\,y_2)f(x_1)dx_1$$

とする．これは (y_1,y_2) に関し Borel 可測である．

$$\int_{R^{d-\ell}}dy_2\int_{R^\ell}\chi_F(x_1,y_2)dx_1=\mathrm{Leb}(F)=0$$

であるから，$d-\ell$ 次元 Lebesgue 測度 0 の集合 $F_2\in\mathcal{B}(R^{d-\ell})$ が存在して，すべての $y_2\notin F_2$ に対し $\int_{R^\ell}\chi_F(x_1,y_2)dx_1=0$ である．$y_2\notin F_2$ ならば，すべての $y_1\in R^\ell$ に対し $\int_{R^\ell}\chi_F(x_1+y_1,\,y_2)dx_1=0$ である．故に，$g(y_1,y_2)=\chi_{F_2}(y_2)g(y_1,y_2)$ である．さて，Y を R^d に値をとる確率変数でその分布が μ_2 であるものとし，$Y_1=T_1Y$，$Y_2=T_2Y$ としよう．Y_2 の

分布を $p_2(\cdot)$ とし，$Y_2=y_2$ という条件の下での Y_1 の条件付分布を $p_1(\cdot\,|\,y_2)$ とする．$p_1(\cdot\,|\,y_2)$ は，p_2 測度 0 の y_2 を除いて定まる．(9.2) にこれらを使うと

$$\mu(F)=\int_{R^d}\chi_{F_2}(y_2)g(y_1,y_2)\mu_2(dy)$$

(9.3)

$$=\int_{F_2}p_2(dy_2)\int_{R^l}g(y_1,y_2)\,p_1(dy_1|y_2)$$

となる．p_2 は L 分布 μ_2 の射影であるから，やはり L 分布である（問4C）．p_2 が R^{d-l} の分布として非退化であることを示そう．μ_2 の Lévy 測度を ν_2 とする．μ_2 の定義により，μ_2 は（従って p_2 も）Gauss 部分をもたない．p_2 の Lévy 測度は $[T_2\nu_2]_{V_2\setminus\{0\}}$ であるから，これが V_2 の真部分空間 V_2^0 内に support をもつとすると，ν_2 が $V_2^0\oplus V_1$ に support をもつことになり，従って ν が $V_2^0\oplus V_1$ に support をもつことになって，μ が非退化という仮定に反する（問10）．故に，p_2 が非退化の $d-l$ 次元分布であることがいえた。帰納法の仮定をもう1度用いると，p_2 が $d-l$ 次元 Lebesgue 測度に関して絶対連続である．故に $p_2(F_2)=0$ である．故に (9.3) から $\mu(F)=0$ になり，証明を終る．□

9.4. 定義: $\mu\in L(R^d)$ とし，その特性関数を表現する要素を γ, A, λ, $k_\xi(u)$ とする．μ に対し $0\leq\beta\leq+\infty$ をみたす数 β を次のように定義し，Lévy 測度の原点への集まり方の位数 (order of concentration) あるいは単に Lévy 測度の位数という．$\hat{\mu}_1(z)=\exp\left(-\frac{1}{2}A(z)\right)$ によって μ の Gauss 部分 μ_1 を定義し，μ_1 の support をなす部分空間を V_1 とし，V_1 への射影を T_1 とする．$\zeta\in S^{d-1}$ と $\varepsilon>0$ に対し

$$\beta(\zeta,\varepsilon)=\begin{cases}\displaystyle\int_{|\xi\zeta|\geqq\varepsilon}k_\xi(0+)\lambda(d\xi) & (|T_1\zeta|<\varepsilon \text{ のとき})\\ +\infty & (|T_1\zeta|\geqq\varepsilon \text{ のとき})\end{cases}$$

とし,

$$\beta = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{\zeta\in S^{d-1}} \beta(\zeta,\varepsilon)$$

とする.

9.5. 注. $d=1$ のときは, $\hat{\mu}$ を例5C のように表現するとき,

$$\beta = \begin{cases} k(0+)+k(0-) & (a=0 \text{ のとき}) \\ +\infty & (a>0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

になる. たとえば μ が Γ分布のときは, β は例5D の β と一致する.

9.6. 補題. $\mu\in L(R^d)$ とする. μ が非退化である必要十分条件は $\beta>0$ である.

証明. V_1 を定義 9.4 のものとし, $V_1\cup \operatorname{Supp}\lambda$ を含む最小の部分空間を V とする. μ が退化していれば, 例10 によって, V が R^d に一致しない. V に直交する $\zeta\in S^{d-1}$ に対しては $\beta(\zeta,\varepsilon)=0$ であるから, $\beta=0$ がいえる. 逆に, $\beta=0$ としよう. $\varepsilon>0$ に対し $\zeta_n^\varepsilon\in S^{d-1}$ という列を $\beta(\zeta_n^\varepsilon,\varepsilon)\to 0$ に選ぶ. $\{\zeta_n^\varepsilon\}$ の集積点の1つを ζ^ε とする.

$$\int_{|\xi\zeta^\varepsilon|\geq 2\varepsilon} k_\xi(0+)\lambda(d\xi)=0$$

である. なぜならば, n が大きいとき左辺は

$$\leq \int_{|\xi\zeta_n^\varepsilon|\geq\varepsilon} k_\xi(0+)\lambda(d\xi) = \beta(\zeta_n^\varepsilon,\varepsilon)$$

であるから. $\varepsilon_m\downarrow 0$ を ζ^{ε_m} がある点 ζ^0 に収束するように選ぶ.

(9.4) $$\int_{|\xi\zeta^0|>0} k_\xi(0+)\lambda(d\xi)=0$$

になっている．$|T_1\zeta^0|>0$ とすると，m が大きいとき $|T_1\zeta^{\varepsilon_m}|>\varepsilon_m$，さらに，$n$ が大きいとき $|T_1\zeta_n^{\varepsilon_m}|>\varepsilon_m$ となり $\beta(\zeta_n^{\varepsilon_m},\varepsilon_m)\to 0$ $(n\to\infty)$ に矛盾する．故に $T_1\zeta^0=0$ である．これと (9.4) によって ζ^0 は V に直交している．故に V が R^d に一致せず，問10 によって μ は退化している．□

次の定理は $d=1$ では Sato-Yamazato (1978) による．

<u>9.7. 定理.</u> μ を R^d の上の非退化の L 分布とし，β をその Lévy 測度の位数とする．$0<\beta'<\beta$ の任意の β' に対し定数 M が存在して

(9.5) $$|\hat{\mu}(z)|\leqq M|z|^{-\beta'} \qquad (z\neq 0 \text{ に対し})$$

である．

<u>証明.</u> $|z|\geqq 1$ を考えればよい．A, λ, $k_\xi(u)$, μ_1, T_1 は上の通りとする．

<u>第1段.</u> $\int_{S^{d-1}} k_\xi(0+)\lambda(d\xi)<\infty$ の場合．まず

$$K(t)=\exp\left[\int_t^1\frac{du}{u}\int_{S^{d-1}}(k_\xi(0+)-k_\xi(u))\lambda(d\xi)\right]$$

と定義する．$\varepsilon>0$ に対し M_ε が存在して，$\zeta=\frac{1}{|z|}z$, $|T_1\zeta|<\varepsilon$ ならば

(9.6) $$|\hat{\mu}(z)|\leqq M_\varepsilon|z|^{-\beta(\zeta,\varepsilon)}K\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

であることを示そう．

$$|\hat{\mu}(z)|\leqq \exp\left[\int_{S^{d-1}}\lambda(d\xi)\int_0^\infty(\cos u\xi z-1)\frac{k_\xi(u)}{u}du\right]$$

$$\leqq \exp\left[\int_{|\xi\zeta|\geqq\varepsilon}\lambda(d\xi)\int_{1/|z|}^1(\cos u\xi z-1)\frac{k_\xi(u)}{u}du\right]$$

$$\leqq \exp(I_1+I_2)$$

たゞし

$$I_1 = -\int_{1/|z|}^{1} \frac{du}{u}\int_{|\xi\varsigma|\geqq\varepsilon} k_\xi(u)\lambda(d\xi),\quad I_2=\int_{|\xi\varsigma|\geqq\varepsilon}\lambda(d\xi)\int_{1/|z|}^{1} \frac{\cos u\xi z}{u}k_\xi(u)du$$

である。

$$I_1 = -\int_{1/|z|}^{1}\frac{du}{u}\int_{|\xi\varsigma|\geqq\varepsilon} k_\xi(0+)\lambda(d\xi)+\int_{1/|z|}^{1}\frac{du}{u}\int_{|\xi\varsigma|\geqq\varepsilon}\bigl(k_\xi(0+)-k_\xi(u)\bigr)\lambda(d\xi)$$

$$\leqq \beta(\varsigma,\varepsilon)\log\frac{1}{|z|}+\log K\Bigl(\frac{1}{|z|}\Bigr)$$

であるから

$$\exp I_1 \leqq |z|^{-\beta(\varsigma,\varepsilon)}K\Bigl(\frac{1}{|z|}\Bigr)$$

である．部分積分によって

$$I_2=\int_{|\xi\varsigma|\geqq\varepsilon}\lambda(d\xi)\Bigl\{k_\xi\Bigl(\frac{1}{|z|}\Bigr)\int_{\xi\varsigma}^{\xi z}\frac{\cos v}{v}dv+\int_{1/|z|}^{1}dk_\xi(u)\int_{u\xi z}^{\xi z}\frac{\cos v}{v}dv\Bigr\}$$

であるから， $\exp I_2$ はある M_ε でおさえられる．(9.6) が示された． β'' を $\beta'<\beta''<\beta$ にとり， ε を $\inf_{\varsigma\in S^{d-1}}\beta(\varsigma,\varepsilon)>\beta''$ になるように選ぶ．(9.6) から，$|T_1\varsigma|<\varepsilon$ のとき

$$|\hat{F}(z)|\leqq M_\varepsilon|z|^{-\beta''}K\Bigl(\frac{1}{|z|}\Bigr)$$

である． $t\downarrow 0$ において $K(t)$ は slowly varying，すなわち，任意の $0<a<1$ に対し

$$\frac{K(at)}{K(t)}=\exp\Bigl[\int_{at}^{t}\frac{du}{u}\int_{S^{d-1}}\bigl(k_\xi(0+)-k_\xi(u)\bigr)\lambda(d\xi)\Bigr]$$

$$=\exp\Bigl[\int_{a}^{1}\frac{du}{u}\int_{S^{d-1}}\bigl(k_\xi(0+)-k_\xi(tu)\bigr)\lambda(d\xi)\Bigr]\longrightarrow 1,\quad t\downarrow 0$$

である．故に

$$K\Bigl(\frac{1}{|z|}\Bigr)=o\bigl(|z|^{\beta''-\beta'}\bigr),\qquad |z|\to\infty$$

である（問9A）．故に，M'_ε が存在して，$|T_1\zeta|<\varepsilon$ のとき

$$|\hat{\mu}(z)|\leq M'_\varepsilon\,|z|^{-\beta'}$$

である．$A=0$ ならば，これで (9.5) がいえた．$A\neq 0$ ならば，A の正の固有値のうち最小のものを α とすると，$\varepsilon>0$ に対し M''_ε が存在して，$|T_1\zeta|\geqq\varepsilon$ ならば

$$|\hat{\mu}(z)|\leq \hat{\mu}_1(z)\leq e^{-\alpha|T_1 z|^2}\leq e^{-\alpha\varepsilon^2|z|^2}\leq M''_\varepsilon\,|z|^{-\beta'}$$

である．故に，$A\neq 0$ のときも (9.5) がいえた．

第2段．$\int_{S^{d-1}}k_\xi(0+)\lambda(d\xi)=\infty$ の場合．正の整数 n に対し μ の factor μ_n を

$$\hat{\mu}_n(z)=\exp\left[i\gamma z-\frac{1}{2}A(z)+\int_{S^{d-1}}\lambda(d\xi)\int_0^\infty\left(e^{iu\xi z}-1-\frac{iu\xi z}{1+u^2}\right)\frac{k_\xi(u)\wedge n}{u}du\right]$$

によって定義する．μ_n は L 分布で，ある $b_n(\xi)>0$ によって，その Lévy 測度の球面成分は $b_n(\xi)\lambda(d\xi)$，k 関数は $\frac{1}{b_n(\xi)}(k_\xi(u)\wedge n)$ と表わされる．故に第1段が適用できる．μ_n の Lévy 測度の位数を β_n とする．$n\to\infty$ のとき $\beta_n\to\beta$ であることを示そう．そうでないとする．すると，ある β' に対し $\lim_{n\to\infty}\beta_n<\beta'<\beta$ である．任意の $\varepsilon>0$ に対し $\zeta_n\in S^{d-1}$ を $\beta_n(\zeta_n,\varepsilon)<\beta'$ に選ぶ．ただし $\beta_n(\cdot,\varepsilon)$ は μ_n に対する $\beta(\cdot,\varepsilon)$ である．ζ_n の部分列 ζ_{n_ℓ} を，ある ζ_∞ に収束するように選ぶ．$|T_1\zeta_{n_\ell}|<\varepsilon$ であるから $|T_1\zeta_\infty|\leq\varepsilon$ である．また，n_ℓ が大きいとき

$$\int_{|\xi\zeta_\infty|\geqq 2\varepsilon}(k_\xi(0+)\wedge n_\ell)\lambda(d\xi)\leq\int_{|\xi\zeta_{n_\ell}|\geqq\varepsilon}(k_\xi(0+)\wedge n_\ell)\lambda(d\xi)<\beta'$$

である．故に $\beta(\zeta_\infty,2\varepsilon)\leq\beta'$ となり，ε は任意だから

$\beta \leqq \beta'$ となって矛盾を生じた．これで $\beta_n \to \beta$ がいえた．$|\hat{\mu}(z)| \leqq |\hat{\mu}_n(z)|$ だから (9.5) がいえたことになる．□

9.8. 系. $\mu \in L(R^d)$ とし，μ の Lévy 測度の位数を β とする．$\beta > \frac{d}{2}$ ならば，μ は絶対連続で，その密度 $f(x)$ は 2 乗可積分である．$\beta > d$ ならば，$f(x)$ は R^d で連続な version をもち，$|x| \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ である．$\beta > d+n$ ならば $f(x)$ は R^d で C^n 級の version をもち，$f(x)$ の高々 n 階の偏導関数は $|x| \to \infty$ において 0 に近づく．

証明. $\beta > 0$ ならば補題 9.6 と定理 9.2 によって μ は絶対連続であることが分るが，こゝではそれを用いる必要はなく，定理 9.7 を用いればよい．$\beta > d/2$ のときは R^d の上の L^2 空間における Fourier 変換（たとえば [BC]）を使う（問 8G(i) 参照）．$\beta > d$ のときは問 8E，$\beta > d+n$ のときは問 8F を使う．□

9.9. 定理. $\mu \in L_1(R^d)$ で非退化ならば，μ は C^∞ 級の密度 $f(x)$ をもち，$f(x)$ を何回偏微分したものも $|x| \to \infty$ において 0 に近づく．

証明. 定理 5.8 によって，μ の k 関数 $k_\xi(s)$ は λ-a.e. の ξ に対し s の関数として 2 位の単調である．故に $k_\xi(s)$ は非減少かつ convex である．しかも (5.10) をみたすから，$s \to \infty$ のとき $k_\xi(s) \to \infty$ である．すなわち，λ-a.e. の ξ に対し $k_\xi(0+) = \infty$ である．故に $\beta(\xi, \varepsilon)$ は 0 または ∞ であり，従って Lévy 測度の位数 β は 0 または ∞ である．ところが，μ は非退化だから，補題 9.6 によって $\beta = 0$ ではあり得ない．故に系 9.8 をつかうと定理がいえる．□

9.10. 系. μ が R^d の上の非退化の安定分布ならば，μ は C^∞ 級の密度 $f(x)$ をもち，$f(x)$ を何回偏微分したものも $|x|\to\infty$ において 0 に近づく．

証明. 定理9.9 と系4.9 から明らか．□

9.11. 補足. 1次元の場合，L分布の密度 $f(x)$ の性質はかなりくわしく調べられている．それが unimodal であるかどうかは 1950年代からの未解決の問題であったが，Yamazato (1978) が unimodal であることを一般に証明した．strictly unimodal にはならない場合があり，その必要十分条件を Sato-Yamazato (1978) が与えた．$f(x)$ のなめらかさは β によって決まる．$n<\beta\leqq n+1$ のとき $f(x)$ は $R^1\setminus\{\gamma_0\}$ において C^n 級であるが R^1 においては C^n 級でなく C^{n-1} 級であることを Zolotarev (1963), Wolfe (1971 b) が示した．さらに Sato-Yamazato (1978) および（提出中）は，$f(x)$ の n 階導関数の $x\to\gamma_0$ における挙動を調べている．$d\geqq 2$ の場合のL分布は，対称の場合におけるある意味の unimodality を Wolfe (1978) が云っているが，それ以外の $f(x)$ の性質はまだ分っていない．安定分布の密度関数に関しては，$d=1$ では多くの研究があり（たとえば [IL] の第2章），$d\geqq 2$ では Pruitt-Taylor (1969) がある．

問9A. $(0,c)$ の形の区間の上で定義された関数 $K(t)$ が $t\downarrow 0$ において slowly varying であるとは，$K(t)>0$ で，任意の $a>0$ に対し $\lim_{t\downarrow 0}\frac{K(at)}{K(t)}=1$ であることである．$t\downarrow 0$ において slowly varying であるとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$t\downarrow 0$ において $K(t)=o(t^{-\varepsilon})$ かつ $\frac{1}{K(t)}=o(t^{-\varepsilon})$ であることを示せ．（たとえば [F2] p.282）

問9B. ν がある $\mu\in L(R^d)$ の Lévy 測度で，その球面成分 λ が球面上の一様分布に関し特異ならば，ν は R^d 上の Lebesgue 測度に関し特異であることを示せ．（球面成分と動径成分を R^{d-1} の成分と R^1 の成分にうつす変換を局所的に考えればよい．）

注．自分自身とたゝみこみをすると絶対連続になるような特異測度の存在は，$d=1$ では問8G にあるが，$d\geqq 2$ ではその例が簡単に得られることが [PR] p.156 に注意してある．問9B の ν は，$d=2$ のときはこのような例になる．補題 9.3 により，$\nu*\nu$ が R^2 上で絶対連続になるからである．

§10. 台に関する性質

ν が $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ の上の測度であるとき,

$$\mathrm{Supp}\,\nu = \{ x\in \mathbf{R}^d : x\text{ を含む任意の開集合 }G\text{ に対し }\nu(G)>0 \}$$

によって定義される集合 $\mathrm{Supp}\,\nu$ を ν の台 (support) と呼ぶ. $\mathrm{Supp}\,\nu$ を S_ν とかくこともある. これは閉集合である. 無限分解可能分布の台は, 1次元では複合 Poisson 分布の場合を除けば簡単な形になり, 複合 Poisson 分布の場合は例1.8の形から具体的に調べることができる. 多次元でも, 各成分を考えて1次元の結果を適用すればかなりのことが分る.

まず, 基本的な補題から始める.

<u>10.1. 補題.</u> $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ に対し $\mu_1 * \mu_2$ の台は $\{x_1+x_2 : x_1\in S_{\mu_1},\ x_2\in S_{\mu_2}\}$ の閉包である. すなわち

$$S_{\mu_1*\mu_2} = \overline{S_{\mu_1}+S_{\mu_2}} \tag{10.1}$$

<u>証明.</u> $\mu_1, \mu_2, \mu_1*\mu_2$ の台を F_1, F_2, F とする. X_1, X_2 を μ_1, μ_2 を分布とする確率変数で独立とする. $x_1\in F_1$, $x_2\in F_2$ ならば, 任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$P(|X_1+X_2-(x_1+x_2)|<\varepsilon) \geqq P\left(|X_1-x_1|<\frac{\varepsilon}{2}\right) P\left(|X_2-x_2|<\frac{\varepsilon}{2}\right)>0$$

であるから, $x_1+x_2\in F$ である. 故に $F\supset\overline{F_1+F_2}$ が分る. K_1, K_2 が compact 集合ならば K_1+K_2 も compact 集合である. 故に, F_1+F_2 は F_σ 集合, 従って Borel 集合である.

$$P(X_1+X_2\in F_1+F_2) \geqq P(X_1\in F_1)\,P(X_2\in F_2)=1$$

であるから, $\overline{F_1+F_2}\supset F$ である. □

10.2. 系. $\mu, \mu_1 \in \mathcal{P}(R^d)$ で μ_1 が μ の factor であるとする. μ_1 の台が非有界ならば, μ の台も非有界である.

証明. 補題10.1から明らか.

10.3. 定理. $\mu \in I(R^d)$ であって, δ分布でないならば, $\mathrm{Supp}\,\mu$ は非有界である.

証明. μ の表現の3要素を γ, A, ν とする. $A \neq 0$ ならば問1G, 1H によって μ の Gauss 部分の台は非有界であるから, 系10.2 によって μ の台も非有界である. $\nu \neq 0$ ならば, $\varepsilon > 0$ を $\int_{|y|>\varepsilon} \nu(dy) = c > 0$ に選び, μ_1 を

$$\hat{\mu}_1(z) = \exp\left[\int_{|y|>\varepsilon} (e^{izy} - 1)\,\nu(dy)\right]$$

によって定義する. $\nu_1(dy) = \frac{1}{c}\chi_{\{|y|>\varepsilon\}}(y)\,\nu(dy)$ とすると,

$$\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-c} \frac{c^n}{n!} \nu_1^{n*}$$

である. $x \in \mathrm{Supp}\,\nu_1$ とすると, 任意の n に対し $nx \in \mathrm{Supp}\,\nu_1^{n*} \subset \mathrm{Supp}\,\mu_1$ である(補題10.1による). 故に μ_1 の台は非有界である. μ_1 は μ の factor であるから, 系10.2 によって μ の台も非有界である. □

10.4. 注. 定理10.3は, 与えられた分布が無限分解可能でないことの証明に使えることがある. たとえば, これによって, 一様分布, 2項分布は無限分解可能でない.

1次元の無限分解可能分布が片側に有界になる条件, そのときの台の下限または上限は, 簡単にあらわされる. これは

Baxter-Shapiro (1960) と Tucker (1961) による．こゝではこれを d 次元で述べる．

$$R_+^d = [0,\infty)^d = \{x=(x_1,\cdots,x_d)\in R^d : x_1\geqq 0,\cdots,x_d\geqq 0\}$$

とする．すなわち R_+^d は第1象限，$a+R_+^d$ はそれを a だけずらしたものである．

10.5. 定理． $\mu\in I(R^d)$ で，その表現の3要素を γ, A, ν とする．このとき，次の (i), (ii) は同値である．

(i) ある $a\in R^d$ に対し $\mathrm{Supp}\,\mu\subset a+R_+^d$．

(ii) $A=0$, $\mathrm{Supp}\,\nu\subset R_+^d$, $\int_{|y|<1}|y|\,\nu(dy)<\infty$．

(i) が成り立つとき，$\mathrm{Supp}\,\mu\subset\gamma_0+R_+^d$ であり，$\gamma_0+R_+^d$ は，$\mathrm{Supp}\,\mu\subset a+R_+^d$ をみたすすべての $a+R_+^d$ の交わりである．たゞし γ_0 は (1.10) で定義したもの．

証明． (ii) ⇒ (i) をいおう．

$$\hat\mu(z)=\exp\left[i\gamma_0 z+\int_{R_+^d}(e^{izy}-1)\,\nu(dy)\right] \tag{10.2}$$

であるから，

$$\hat\mu_n(z)=\exp\left[i\gamma_0 z+\int_{R_+^d\cap\{|y|>1/n\}}(e^{izy}-1)\,\nu(dy)\right] \tag{10.3}$$

と定義すると $\mu_n\to\mu$ である．μ_n は複合 Poisson 分布を γ_0 だけ平行移動したものであるから，複合 Poisson の (1.5) の形の表現によって，$\mathrm{Supp}\,\mu_n\subset\gamma_0+R_+^d$ である．故に $\mathrm{Supp}\,\mu\subset\gamma_0+R_+^d$ である．

(i) ⇒ (ii) をいおう．$A\neq 0$ とすると，μ の Gauss 部分の台が問14 によって次元 $\geqq 1$ の部分空間になるから，補題 10.1 に

よって μ の台は $a+R_+^d$ の形の集合には含まれないことになり，矛盾を生じる．故に $A=0$ である． μ を平行移動しても Lévy 測度 ν は変らないから， $\mathrm{Supp}\,\mu \subset R_+^d$ としよう．補題10.1 によって $\mathrm{Supp}\,\mu^{\frac{1}{n}*} \subset R_+^d$ となる． μ_n を

$$\hat{\mu}_n(z) = \exp\left[n\int_{R_+^d}(e^{izy}-1)\,\mu^{\frac{1}{n}*}(dy)\right]$$

$$= \exp\left[i\gamma^{(n)}z + n\int_{R_+^d}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+|y|^2}\right)\mu^{\frac{1}{n}*}(dy)\right],$$

$$\gamma_j^{(n)} = n\int_{R_+^d}\frac{y_j}{1+|y|^2}\,\mu^{\frac{1}{n}*}(dy)$$

によって定義する．16ページに述べたように $\mu_n \to \mu$ $(n\to\infty)$ がいえるから，定理1.14によって

$$(10.4)\quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ が有界連続で原点の近傍で } 0 \text{ ならば} \\ \qquad n\int_{R^d} f(y)\,\mu^{\frac{1}{n}*}(dy) \to \int_{R^d} f(y)\,\nu(dy), \end{array}\right.$$

$$(10.5)\qquad \gamma^{(n)} \to \gamma$$

である．(10.4) から $\mathrm{Supp}\,\nu \subset R_+^d$ が分る． $b=(b_1,\cdots,b_d)$， $b_j>0$ $(j=1,\cdots,d)$ を $b+R_+^d$ が ν に関し連続集合であるようにとると，(10.4) によって

$$n\int_{b+R_+^d}\frac{y_j}{1+|y|^2}\,\mu^{\frac{1}{n}*}(dy) \longrightarrow \int_{b+R_+^d}\frac{y_j}{1+|y|^2}\,\nu(dy)$$

であるから，(10.5) によって

$$\gamma_j \geq \int_{b+R_+^d}\frac{y_j}{1+|y|^2}\,\nu(dy)$$

である． b はいくらでも 0 に近くとれるから，

$$\gamma_j \geq \int_{R_+^d}\frac{y_j}{1+|y|^2}\,\nu(dy)$$

がいえる．故に

$$\int_{R_+^d \cap \{|y|<1\}} y_j \, \nu(dy) < \infty$$

である．

(i) が成り立つときは，(ii) が成り立つから，(ii)⇒(i) の証明で示したように $\mathrm{Supp}\,\mu \subset \gamma_0 + R_+^d$ である．(i) が成り立つとき，$\mathrm{Supp}\,\mu \subset a + R_+^d$ をみたすすべての $a + R_+^d$ の交わりを B とする．明かに，ある b によって $B = b + R_+^d$ となり，$b_j \geq (\gamma_0)_j$ $(j=1,\cdots,d)$ である．μ を $-b$ だけ平行移動したものを μ_{-b} とする．すなわち $\widehat{\mu}_{-b}(z) = e^{-ibz}\hat{\mu}(z)$ である．$\mathrm{Supp}\,\mu_{-b} \subset R_+^d$ であるから，(i)⇒(ii) の証明により，

$$\gamma_j - b_j \geq \int_{R_+^d} \frac{y_j}{1+|y|^2} \nu(dy)$$

である．故に (1.10) によって $b_j \leq (\gamma_0)_j$ である．故に $b = \gamma_0$ である．□

1次元の場合は，次のことを Tucker (1975) が示した．

10.6. 定理. $\mu \in I(R^1)$ とし，その3要素を γ, A, ν とするとき，次のことがいえる．

(i) $A \neq 0$ ならば $S_\mu = R^1$ である．

(ii) $A = 0$, $S_\nu \subset [0, \infty)$, $0 \in S_\nu$, $\int_{(0,1)} y \, \nu(dy) < \infty$ ならば $S_\mu = [\gamma_0, \infty)$ である．

(ii)' $A = 0$, $S_\nu \subset (-\infty, 0]$, $0 \in S_\nu$, $\int_{(-1,0)} |y| \, \nu(dy) < \infty$ ならば $S_\mu = (-\infty, \gamma_0]$ である．

(iii) $\int_{(-1,1)} |y| \, \nu(dy) = \infty$ ならば $S_\mu = R^1$ である．

(iv) $S_\nu \cap (0, \infty) \neq \emptyset$, $S_\nu \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$, $0 \in S_\nu$ ならば

$S_\mu = R^1$ である。

(v) $0 \in S_\nu$ ならば，S_μ は非有界の閉区間（すなわち，$[a,\infty)$，$(-\infty,a]$，または $(-\infty,\infty)$ の形）である。

証明. (i) Gauss 分布を factor にもつから，補題 10.1 によって $S_\mu = R^1$。

(ii) $\gamma_0 = 0$ とし，$S_\mu = [0,\infty)$ をいえば十分である。定理 10.5 によって $S_\mu \subset [0,\infty)$ は分っている。$S_\mu = [0,\infty)$ をいうには，任意の $0 \leqslant a < b < \infty$ に対し $\mu((a,b)) > 0$ をいえばよい。$0 \in S_\nu$ で $\nu(\{0\}) = 0$ であるから，0 は S_ν の集積点である。故に $\varepsilon \in S_\nu$ を $0 < \varepsilon < b-a$ に選べる。μ_1，μ_2 を

$$\hat{\mu}_1(z) = \exp\left[\int_{(\varepsilon/2,\infty)} (e^{izy}-1)\,\nu(dy)\right],\quad \hat{\mu}_2(z) = \exp\left[\int_{(0,\varepsilon/2]} (e^{izy}-1)\,\nu(dy)\right]$$

によって定める。$\mu = \mu_1 * \mu_2$ である。$c_\varepsilon = \int_{(\varepsilon/2,\infty)} \nu(dy)$，

$\nu_\varepsilon(dy) = \frac{1}{c_\varepsilon}\chi_{(\varepsilon/2,\infty)}(y)\,\nu(dy)$ とすると

$$\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-c_\varepsilon}\frac{c_\varepsilon^{\,n}}{n!}\nu_\varepsilon^{\,n*}$$

である。補題 10.1 によって $n\varepsilon \in \mathrm{Supp}\,\nu_\varepsilon^{\,n*}$ であるから，$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し $n\varepsilon \in S_{\mu_1}$ である。また，定理 10.5 によって $S_{\mu_2} \subset [0,\infty)$ でしかも $0 \in S_{\mu_2}$ である。故に補題 10.1 によって $n\varepsilon \in S_\mu$ である。整数 n を $a < n\varepsilon < b$ に選べるから，$\mu((a,b)) > 0$ がいえる。

(ii)′ μ を折り返したものを考えれば (ii) に帰着する。

(iii) 仮定によって，$\int_{(0,1)} y\,\nu(dy) = \infty$ または $\int_{(-1,0)} |y|\,\nu(dy) = \infty$ である。前者の場合を考えよう（後者は折り返しにより

前者に帰着する). $\nu_1(dy)=y\chi_{(0,1)}(y)\nu(dy)$, $\nu_2=\nu-\nu_1$ とする. $\int_{(0,1)} y\nu_1(dy)<\infty$, $\int_{(0,1)} y\nu_2(dy)=\infty$ である.

$$\hat{\mu}_1(z)=\exp\left[\int_{(0,1)}(e^{izy}-1)\nu_1(dy)\right],$$

$$\hat{\mu}_2(z)=\exp\left[i\gamma z-\frac{1}{2}A(z)+\int_{R^1}\left(e^{izy}-1-\frac{izy}{1+y^2}\right)\nu_2(dy)-iz\int_{(0,1)}\frac{y}{1+y^2}\nu_1(dy)\right]$$

によって μ_1, μ_2 を定義する. $\mu=\mu_1*\mu_2$ である. $0\in S_{\nu_1}$ は明かであるから, (ii) によって $S_{\mu_1}=[0,\infty)$ である. 一方, 定理10.5によって S_{μ_2} は両側に非有界である. 故に, 補題10.1によって $S_\mu=R^1$ となる.

(iv) $A=0$, $\int_{(-1,1)}|y|\nu(dy)<\infty$ という付加条件の下で考えれば十分である(他の場合は (i), (iii) で扱った). ν の $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$ への制限をそれぞれ ν_1, ν_2 とし

$$\hat{\mu}_l(z)=\exp\left[\int(e^{izy}-1)\nu_l(dy)\right],\qquad l=1,2$$

とする. $\hat{\mu}(z)=e^{i\gamma_0 z}\hat{\mu}_1(z)\hat{\mu}_2(z)$ である. $0\in S_\nu$ という仮定から, $0\in S_{\nu_1}$ または $0\in S_{\nu_2}$ である. $0\in S_{\nu_1}$ のときは, (ii) によって $S_{\mu_1}=[0,\infty)$ であり, 定理10.3, 10.5によって S_{μ_2} は左に非有界であるから, 補題10.1によって $S_\mu=R^1$ となる. $0\in S_{\nu_2}$ のときも同様に $S_\mu=R^1$ となる.

(v) は (i) から (iv) までの帰結である. □

10.7. 系. $\mu\in I(R^1)$ が複合Poisson分布の平行移動でないならば, S_μ は非有界の閉区間である.

証明. $A\neq 0$ または $\nu(R^1)=\infty$ になるから, $A\neq 0$ または

$0 \in S_\nu$ である．□

10.8. 系． $\mu \in I(R^1)$ が連続な分布ならば，S_μ は非有界の閉区間である．

証明． 系8.5 によって系10.7 をいいかえただけである．□

ここで，§1 で例としてあげた compounding と subordination によって得られる無限分解可能分布を調べることにしよう．

10.9. (compounding). 例1.22 のように $\mu_0 \in \mathcal{P}(R^d)$ と $\lambda \in I(R^1)$ から compounding によって得られた $\mu \in I(R^d)$ を考える． λ は非負の整数に集中していて $\lambda(\{0\}) > 0$ であるとするから，例10C によって，

$$\hat{\lambda}(z) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}(e^{inz}-1)\nu_\lambda(\{n\})\right]$$

とあらわされ，ν_λ は正の整数に集中した有限測度である．μ の特性関数は

$$\nu(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_0^{n*}(\cdot)\nu_\lambda(\{n\})$$

によって

$$\hat{\mu}(z) = \exp\left[\int_{R^d}(e^{izx}-1)\nu(dx)\right]$$

とあらわされることを示そう． これによって，μ は ν を Lévy 測度とする複合 Poisson 分布であることが分る． $\mathrm{Re}\, w \geq 0$ の複素数 w に対し

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nw}\lambda(\{n\})$$

と定義する．

$$\Psi(w) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-nw} - 1)\, \nu_\lambda(\{n\})\right]$$

がいえる．なぜならば両辺とも $\mathrm{Re}\, w > 0$ において正則，$\mathrm{Re}\, w \geqq 0$ において連続であり，$w = -iz$ においては一致しているから．故に，(1.24) によって

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(z) &= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\mu}_0(z)^n - 1)\, \nu_\lambda(\{n\})\right] \\ &= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{R^d} (e^{izx} - 1)\, \mu_0^{n*}(dx)\right) \nu_\lambda(\{n\})\right] \\ &= \exp\left[\int_{R^d} (e^{izx} - 1)\, \nu(dx)\right]\end{aligned}$$

である．

10.10. (subordination) 例1.24 のように $\mu_0 \in I(R^d)$ と $\lambda \in I(R^1)$ から $\mu \in I(R^d)$ を作ったとする．λ は $[0,\infty)$ に集中しているとするから，定理10.5 によって λ の Lévy 測度 ν_λ は $(0,\infty)$ に集中していて $\int_{(0,1)} s\, \nu_\lambda(ds) < \infty$ であり，

$$\hat{\lambda}(z) = \exp\left[i\gamma_\lambda z + \int_{(0,\infty)} (e^{izs} - 1)\, \nu_\lambda(ds)\right]$$

で $\gamma_\lambda \geqq 0$ である．$\mathrm{Re}\, w \geqq 0$ の複素数 w に対し

$$\Psi(w) = \int_{[0,\infty)} e^{-ws}\, \lambda(ds)$$

と定義すると

(10.6) $$\hat{\mu}(z) = \Psi(-\log \hat{\mu}_0(z))$$

である．μ_0 の3要素を $\gamma^{(0)}$, $A^{(0)}$, $\nu^{(0)}$ とすると，μ の3要素 γ, A, ν は

(10.7) $$\gamma_j = \gamma_\lambda \gamma_j^{(0)} + \int_{(0,\infty)} \nu_\lambda(ds) \int_{R^d} \frac{x_j}{1+|x|^2}\, \mu_0^{s*}(dx),$$

$$(10.8)\qquad A=\gamma_\lambda A^{(0)}$$

$$(10.9)\qquad \nu(\cdot)=\gamma_\lambda\nu^{(0)}(\cdot)+\Big[\int_{(0,\infty)}\mu_0^{s*}(\cdot)\,\nu_\lambda(ds)\Big]_{R^d\setminus\{0\}}$$

である．この結果は Phillips (1952), Zolotarev (1958), Rogozin (1965) による．

<u>証明.</u> (10.6) は (1.29) から明かである．$\psi(w)$ の具体的な形は問10A の (10.14) により

$$\psi(w)=\exp\Big[-\gamma_\lambda w+\int_{(0,\infty)}(e^{-ws}-1)\,\nu_\lambda(ds)\Big]$$

であるから，(10.6) によって

$$\hat{\mu}(z)=\exp\Big[\gamma_\lambda\log\hat{\mu}_0(z)+\int_{(0,\infty)}(\hat{\mu}_0(z)^s-1)\,\nu_\lambda(ds)\Big]$$

である．

$$\exp\Big[\frac{1}{s}(\hat{\mu}_0(z)^s-1)\Big]=\exp\Big[\frac{1}{s}(e^{s\log\hat{\mu}_0(z)}-1)\Big]$$

$$=\exp\Big[\frac{1}{s}\big(s\log\hat{\mu}_0(z)+o(s)\big)\Big]=\hat{\mu}_0(z)\big(1+o(1)\big),\qquad s\downarrow 0$$

であり，$\exp\Big[\frac{1}{s}(\hat{\mu}_0(z)^s-1)\Big]$ を特性関数とする分布の3要素は $\frac{1}{s}\int\frac{x}{1+|x|^2}\mu_0^{s*}(dx)$, 0, $\frac{1}{s}\mu_0^{s*}$ であるから，定理1.4 によって

(10.10) 原点の任意の近傍の外で $\frac{1}{s}\mu_0^{s*}\to\nu^{(0)}\quad(s\downarrow 0)$

(10.11) 任意の $s_n\downarrow 0$ に対し $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{s_n}\int_{|x|<\varepsilon}(zx)^2\mu_0^{s_n*}(dx)=A^{(0)}(z)$

$$(10.12)\qquad \frac{1}{s}\int_{R^d}\frac{x}{1+|x|^2}\mu_0^{s*}(dx)\longrightarrow\gamma^{(0)}\qquad(s\downarrow 0)$$

である．(10.10)―(10.12) から

$$\int_{R^d} \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\mu_0^{s*}(dx) \le \text{const}\ s,$$

$$\left|\int_{R^d}\frac{x}{1+|x|^2}\mu_0^{s*}(dx)\right| \le \text{const}\ s$$

が分る．故に，(10.7) の右辺が定義可能であること，(10.9) によって ν を定義するとき $\int\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\nu(dx)<\infty$ であることが分る．故に，

$$\left|e^{izx}-1-\frac{izx}{1+|x|^2}\right|\le \text{const}\ \frac{|x|^2}{1+|x|^2} \qquad (\text{固定した } z \text{ に対し})$$

に注意すると，

$$\int(\hat{\mu}_0(z)^s-1)\nu_\lambda(ds) = \int\nu_\lambda(ds)\int(e^{izx}-1)\mu_0^{s*}(dx)$$

$$=\int\nu_\lambda(ds)\int\left(e^{izx}-1-\frac{izx}{1+|x|^2}\right)\mu_0^{s*}(dx)+\int\nu_\lambda(ds)\int\frac{izx}{1+|x|^2}\mu_0^{s*}(dx)$$

$$=\int\left(e^{izx}-1-\frac{izx}{1+|x|^2}\right)(\nu-\gamma_\lambda\nu^{(0)})(dx)+\int\nu_\lambda(ds)\int\frac{izx}{1+|x|^2}\mu_0^{s*}(dx)$$

となり証明を終る．□

10.11. 補足. $\mu\in I(R^1)$ が $\text{Supp}\,\mu=[0,\infty)$ であって，絶対連続で，その密度関数 $f(x)$ が $(0,\infty)$ において連続であるとき，$f(x)$ は $(0,\infty)$ において零点をもたないことがいえる([St] p.87)．同じことが，$[0,\infty)$，$(0,\infty)$ のかわりに $(-\infty,\infty)$ としてもいえるかどうかは分っていない（ある付加条件があればいえることを Sharpe (1969 b) が示している）．Hudson-Tucker (1975) は，$\mu\in I(R^1)$ が絶対連続ならば，その密度関数 $f(x)$ は μ の台（系10.8により非有界の閉区間）の上のほとんど到る所で正であることを示した．Hudson-Mason (1975) はこの結果の一部の $d\geq 2$ への拡張を扱っている．$d\geq 2$ のとき $\text{Supp}\,\mu\subset R_+^d$，絶対連続で密度関

数 $f(x)$ が連続である場合の $f(x)$ の零点について Horn-Steutel (1978) が調べている．また，$d\geqq 2$ の安定分布の台について Taylor (1967), Horie (1976) が調べている．

<u>問10A.</u> $\mathrm{Supp}\,\mu\subset R_+^d$ の $\mu\in\mathcal{P}(R^d)$ に対し，その Laplace 変換を

$$\check{\mu}(z)=\int_{R_+^d}e^{-sx}\mu(dx),\qquad s\in R_+^d$$

と定義する．$\mu\in I(R^d)$, $\mathrm{Supp}\,\mu\subset R_+^d$ ならば，$\gamma_0\in R_+^d$ と R_+^d の上の測度 ν で $\int_{R_+^d}\frac{|y|}{1+|y|}\nu(dy)<\infty$ をみたすものが一意的に存在して

$$(10.13)\qquad \check{\mu}(s)=\exp\left[-\gamma_0 s+\int_{R_+^d}(e^{-sy}-1)\nu(dy)\right]$$

と表わされる．逆に，このような γ_0, ν に対しては (10.13) をみたす $\mu\in I(R^d)$, $\mathrm{Supp}\,\mu\subset R_+^d$ がただ1つ存在する．これを示せ．（γ_0, ν は μ の特性関数の表現におけるそれと同じものである．μ が複合 Poisson 分布の平行移動のときは，(10.13) は容易に確かめられ，定理10.5 によりその極限としてそれ以外の場合も (10.13) がいえる．$\check{\mu}$ から μ がきまることはたとえば [B] p.86. γ_0 と ν の一意性は 7ページ以下のようにいえる．特性関数の表現と定理10.5 を使わず，全部を直接に証明することもできる．それには，定理1.9 の証明のようにすればよい．なお，$d=1$ のときは，$\mathrm{Re}\,w\geqq 0$ の複素数 w に対し

$$(10.14)\qquad \int_{R_+}e^{-wx}\mu(dx)=\exp\left[-\gamma_0 w+\int_{R_+}(e^{-wy}-1)\nu(dy)\right]$$

をいうのが最も簡単であろう．両辺とも $\mathrm{Re}\,w>0$ で正則，

$\mathrm{Re}\, w \geq 0$ で連続で，$w=-iz$ のとき両辺は一致する．）

問10B. $\mu\in\mathcal{P}(R^1)$，$\mathrm{Supp}\,\mu\subset[0,\infty)$ とする．$\mu\in I(R^1)$ となる必要十分条件は，$(-\log\check{\mu}(z))'$ が $z>0$ において完全単調になることである．これを示せ．（問5A，10A による．たとえば [F2] p.450）

問10C. $\mu\in I(R^1)$ とする．μ が非負の整数に集中しているための必要十分条件は，γ_0 が非負の整数，$A=0$ で，ν が正の整数に集中していることである．これを示せ．（定理8.4, 10.5 を用いればよい．問15 を使えば，[F1] p.271 のように直接に示すこともできる．）

問10D. $\mu\in\mathcal{P}(R^1)$ に対し，次の3つが同値であることを示せ．

(i) μ が，$\mathrm{Supp}\,\mu\subset[0,\infty)$ の安定分布（これを片側安定分布という）．

(ii) μ は，$\gamma_0\geq 0$ における δ 分布であるか，または，指数 $0<\alpha<1$ で表現 (6.6) における $\gamma_0\geq 0$，$\beta=1$ の安定分布である．

(iii) $\mathrm{Supp}\,\mu\subset[0,\infty)$ で μ の Laplace 変換が

$$\check{\mu}(s) = \exp\left(-\gamma_0 s - c_0' s^{\alpha}\right), \qquad s\geq 0$$

である．ただし，$0<\alpha<1$，$\gamma_0\geq 0$，$c_0'\geq 0$．

なお，c_0 と c_0' の関係は $c_0 = c_0'\cos\frac{\pi\alpha}{2}$ である．

（(i) ⇔ (ii) は定理6.4，定理10.5 による．(ii) ⇒ (iii) は $\mathrm{Re}\, w \geq 0$ の複素数 w に対し

$$\int e^{-wx}\mu(dx) = \exp\left[-\gamma_0 w - c_0' w^{\alpha}\right]$$
$$= \exp\left[-\gamma_0 w - c_0'|w|^{\alpha} e^{i\alpha \arg w}\right], \quad -\frac{\pi}{2}\leq \arg w \leq \frac{\pi}{2}$$

といえばよい．両辺が，$\mathrm{Re}\, w > 0$ で正則，$\mathrm{Re}\, w \geq 0$ で連続で，

$w=-iz$ では一致する．(iii)$\Rightarrow$(ii) も同様．)

問10E．μ_0 が R^d の上の isotropic な Gauss 分布で，δ_0 ではないとし，λ が $[0,\infty)$ に集中した指数 $0<\alpha<1$ の狭い意味の安定分布とする．λ による subordination で μ_0 から得られる分布 μ が R^d の上の指数 2α の isotropic な安定分布であることを示せ．（ $\check{\lambda}(s)=\exp(-c_0' s^\alpha)$ と (10.6) と定理6.13 を用いるのが最も簡単であるが，(10.9) を用いてもよい．）

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

§11. moment に関する性質

$\mu \in I(R^d)$ とすると，μ の α 次の絶対 moment が有限であるための必要十分条件は，μ の Lévy 測度 ν の $\{x \in R^d : |x| > 1\}$ への制限 ν_1 の α 次の絶対moment が有限であることである．これを特別な場合として含む事実として，広い範囲の関数 $g(x)$ に対し，μ に関し可積分であることと ν_1 に関し可積分であることが同値であることをこの節で示そう．これは $g(x)$ がある方向でのみ増加する関数の場合もいえるので，粗い言い方をすれば，1つの方向における μ の挙動は，同じ方向における ν_1 の挙動とほゞ同じである．関連した性質として，$\int_{|x|>u} \mu(dx)$ の $u \to \infty$ における減少の程度の評価を与える．この節の結果は Sato (1973) による．しかし定理 11.3 の $d=1$ の場合は Kruglov (1970) が示し，さらに $d=1$ で $g(x)$ が特別の場合はそれ以前に Lévy [L2] p.176 (複合Poisson の場合)，Shapiro (1956)，Ramachandran (1967)，Wolfe (1971a) の結果がある．定理 11.9 の $d=1$ の場合の一部分も Kruglov (1970) が得ている．

11.1. 定義. 測度 ν による Borel 可測関数 $g(x)$ の積分 $\int_{R^d} g(x)\nu(dx)$ を，ν の g-moment と呼ぶこととする．

11.2. 定義. R^d 上の関数 $g(x)$ が劣乗法的 (submultiplicative) であるとは，定数 a が存在して

(11.1) $$g(x+y) \leq a\, g(x) g(y), \qquad x, y \in R^d$$

が成り立つこととする．

11.3. 定理. $\mu \in I(R^d)$ とし，μ の Lévy 測度 ν の $\{x \in R^d : |x| > 1\}$ への制限を ν_1 とする．$g(x)$ を R^d の上の非負，局所有界，Borel 可測な劣乗法的関数とする．このとき，μ の g-moment が有限であるための必要十分条件は，ν_1 の g-moment が有限であることである．

11.4. 補題. $g(x)$ が上の定理における条件をみたせば，定数 b, c が存在して

$$(11.2) \qquad g(x+y) \leq b e^{c|x|} g(y), \qquad x, y \in R^d$$

である．

証明. $g(x) \leq \text{const}\, e^{c|x|}$ をいえばよい．b を $\sup_{|x| \leq 1} g(x) \leq b$ かつ $ab \geq 1$ に選ぶ．(11.1) から，正の整数 n に対し

$$g(nx) \leq a^{n-1} g(x)^n$$

であるから，x に対し n を $n-1 < |x| \leq n$ に選ぶと

$$g(x) \leq a^{n-1} g\left(\frac{x}{n}\right)^n \leq a^{n-1} b^n \leq b(ab)^{|x|}$$

である．□

11.5. 補題. $\mu \in I(R^1)$ でその Lévy 測度 ν が有界な台をもつならば，$\hat{\mu}(z)$, $z \in R^1$, は複素平面上の整関数に拡張できる．

証明. $\operatorname{Supp} \nu \subset [-M, M]$ とすると

$$\hat{\mu}(z) = \exp\left[i\gamma z - \frac{\sigma^2}{2} z^2 + \int_{[-M,M]} \left(e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+y^2}\right) \nu(dy)\right]$$

である．右辺は z が複素数でも意味をもつので，これを $\varphi(z)$ と定義する．$\varphi(z)$ は整関数で

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varphi(z)\left[i\gamma - \sigma^2 z + \int_{[-M,M]} \left(iye^{izy} - \frac{iy}{1+y^2}\right)\nu(dy)\right]$$

であることが容易に分る．□

定理11.3の証明．　μ の3要素を γ, A, ν とする．
$\mu_1, \mu_0 \in I(R^d)$ を $\hat{\mu}_1(z) = \exp\left[\int_{R^d}(e^{izy}-1)\nu_1(dy)\right]$，$\mu=\mu_1*\mu_0$ によって定める．μ の g-moment が有限とする．

$$(11.3) \qquad \int g(x)\mu(dx) = \iint g(x+y)\mu_0(dx)\mu_1(dy)$$

であるから，Fubini の定理により，ある x に対し（実は μ_2-a.e. の x に対し）

$$\int g(x+y)\mu_1(dy) < \infty$$

である．μ_1 は複合 Poisson 分布であるから，これは

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int g(x+y)\nu_1^{n*}(dy) < \infty$$

を意味する．(11.2) から

$$(11.4) \qquad g(y) \leq be^{c|x|}g(x+y), \qquad x, y \in R^d$$

であるから

$$(11.5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int g(y)\nu_1^{n*}(dy) < \infty$$

となる．$n=1$ の項を見れば，ν_1 の g-moment が有限であることが分る．

逆に，ν_1 の g-moment が有限としよう．すると劣乗法性から

$$\int_{R^d} g(y)\nu_1^{n*}(dy) = \int_{(R^d)^n} g(y_1+\cdots+y_n)\nu_1(dy_1)\cdots\nu_1(dy_n) \leq a^{n-1}\left(\int_{R^d} g(y)\nu_1(dy)\right)^n$$

となり，従って (11.5) が成り立ち，μ_1 の g-moment は有限である．(11.2)，(11.3) から

$$\int g(x)\mu(dx) \leqq b\int e^{c|x|}\mu_0(dx)\int g(y)\mu_1(dy)$$

である．μ_0 の $e^{c|x|}$-moment が有限であることをいおう．μ_0 を分布とする確率変数を $X=(X_1,\cdots,X_d)$ とすると

$$\int e^{c|x|}\mu_0(dx)=Ee^{c|X|}\leqq Ee^{c(|X_1|+\cdots+|X_d|)}\leqq \sum Ee^{c(\varepsilon_1X_1+\cdots+\varepsilon_dX_d)}$$

である．たゞし $\sum$ はすべての $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d\in\{-1,1\}$ についてとる．$\varepsilon_1X_1+\cdots+\varepsilon_dX_d$ の分布（1次元）は無限分解可能でその Lévy 測度は有界な台をもつことが系1.18から分るから，補題11.5によって特性関数が整関数に拡張できる．故に問11Aによって $\varepsilon_1X_1+\cdots+\varepsilon_dX_d$ は $e^{c|x|}$-moment 有限である．故に μ_0 の $e^{c|x|}$-moment 有限が分った．従って μ の g-moment は有限である．□

定理11.3がどの程度の内容をもっているかを見るために，どのような関数が $g(x)$ の条件をみたすかを調べることにしよう．定理11.3における条件をみたす関数 $g(x)$ の全体を $G(R^d)$ とかこう．すなわち $G(R^d)$ は，R^d の上の非負，局所有界，Borel 可測な劣乗法的関数の全体である．いつもの通り，$a\vee b=\max\{a,b\}$ とする．

<u>11.6. 補題.</u>　(i)　$g\in G(R^d)$，$\alpha>0$，$b\in R^d$ ならば，$g(\alpha x+b)$，$g(-x)$，$\alpha g(x)$，$g(x)^\alpha$ も $G(R^d)$ に属す．

(ii)　g_1，$g_2\in G(R^d)$ ならば $g_1(x)g_2(x)$，$g_1(x)\vee g_2(x)\in G(R^d)$

(iii)　$h(x_1,\cdots,x_n)$ が $G(R^n)$ に属し各 x_j に関し非減少とする．ある x_j が $-\infty$ のときは $h=0$ とする．$g_1,\cdots,g_n\in G(R^d)$ ならば，$h(\log g_1,\cdots,\log g_n)\in G(R^d)$ である．（$h(x_1,\cdots,x_n)$ が $x_1,\cdots,x_n\geqq 0$ のみで定義されていて，そこで非負，局所有界，Borel 可測，劣乗法的，各 x_j に関し非減少のときも，

$g_1, \cdots, g_n \geq 1$ という付加条件があれば同じことがいえる.)

(iv) h が R^1 の上の関数で正かつ非減少で, ある $a \geq 0$ が存在して $[a, \infty)$ において $\log h$ が concave, $(-\infty, a]$ において flat (すなわち $h(x) = \text{const.}$) とする. このとき $h(x)$, $h(-x)$ は $G(R^1)$ に属す.

(v) h が (iv) の条件をみたせば, $\alpha > 0$, $b \in R^1$ に対し $h(\alpha x + b)$, $h(x)^\alpha$ も (iv) の条件をみたす. h_1, h_2 が (iv) の条件をみたせば, $h_1(x) h_2(x)$, $h_1(\log h_2(x))$ も (iv) の条件をみたす. ただし $h_1(\log h_2(x))$ の場合は, $h_2(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ を仮定する.

(vi) $x = (x_1, \cdots, x_d)$, $\alpha \geq 1$, $J \subset \{1, 2, \cdots, d\}$ に対し, 関数 e^{x_j}, e^{-x_j}, $\exp[(\sum_{j \in J} |x_j|^\alpha)^{1/\alpha}]$ は $G(R^d)$ に属す.

(vii) 適当な $[a, \infty)$ に制限し $(-\infty, a]$ では flat にすることにより, 次の関数は (iv) の条件をみたす.

$\alpha > 0$ のとき x^α, $(\log x)^\alpha$, $(\log\log x)^\alpha$, $\exp[(\log x)^\alpha]$,
$\exp[(\log\log x)^\alpha]$, $\exp[(\log\log\log x)^\alpha]$, 等.
$0 < \alpha \leq 1$ のとき $\exp(x^\alpha)$.
$0 < \alpha < 1$, $\beta \in R^1$ のとき $\exp[x^\alpha (\log x)^\beta]$.
$\beta < 0$ のとき $\exp[x(\log x)^\beta]$.

証明. 非負, 局所有界, Borel 可測はどれでも容易に分るから, 劣乗法的をたしかめよう.

(i)
$$g(\alpha(x+y)+b) = g((\alpha x+b)+(\alpha y+b)-b) \leq a^2 g(\alpha x+b)\, g(\alpha y+b)\, g(-b)$$
である. $g(-x)$, $\alpha g(x)$, $g(x)^\alpha$ の場合も明らか.

(ii)
$$g_1(x+y)\, g_2(x+y) \leq a_1 a_2\, g_1(x)\, g_1(y)\, g_2(x)\, g_2(y),$$
$$g_1(x+y) \vee g_2(x+y) \leq (a_1 g_1(x) g_1(y)) \vee (a_2 g_2(x) g_2(y)) \leq (a_1 \vee a_2)(g_1(x) \vee g_2(x))(g_1(y) \vee g_2(y)).$$

(iii) $$h(\log g_1(x+y),\cdots,\log g_n(x+y)) \leqslant h(\log a_1+\log g_1(x)+\log g_1(y),\cdots\cdots)$$
$$\leqslant a_h^2\, h(\log a_1,\cdots,\log a_n)\, h(\log g_1(x),\cdots,\log g_n(x))\, h(\log g_1(y),\cdots,\log g_n(y))$$

(iv) $f(x)=\log h(x)$ とする. $x, y \geqslant a$ ならば
$$f(x+a)-f(x) \leqslant f(2a)-f(a)$$
$$f(x+y)-f(y) \leqslant f(x+a)-f(a)$$
であるから
$$f(x+y) \leqslant f(x+a)-f(a)+f(y) \leqslant f(2a)-2f(a)+f(x)+f(y)$$
である. 故に, すべての $x, y \in R^1$ に対し
$$f(x+y) \leqslant f(2a)-2f(a)+f(x)+f(y)$$
である. 故に $h(x) \in G(R^1)$ である. 故に (i) により $h(-x) \in G(R^1)$.

(v) 前半は明らか. $h_1(x)\,h_2(x)$ についても明らか. $f_1=\log h_1$, $f_2=\log h_2$ とすると, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$ と十分大きい x, y に対し,
$$f_1(f_2(\alpha x+\beta y)) \geqslant f_1(\alpha f_2(x)+\beta f_2(y))$$
$$\geqslant \alpha f_1(f_2(x))+\beta f_1(f_2(y)).$$

(vi) e^{x_j}, $e^{-x_j} \in G(R^d)$ は明らか. $\exp[(\sum_{j\in J}|x_j|^\alpha)^{1/\alpha}]$ $(\alpha\geqslant 1)$ の場合は, Minkowski の不等式
$$\Big(\sum_{j\in J}|x_j+y_j|^\alpha\Big)^{1/\alpha} \leqslant \Big(\sum_{j\in J}|x_j|^\alpha\Big)^{1/\alpha}+\Big(\sum_{j\in J}|y_j|^\alpha\Big)^{1/\alpha}$$
から明か.

(vii) x が (iv) の条件をみたすから, (v) によって, $\alpha>0$ のとき x^α, $(\log x)^\alpha$, $(\log\log x)^\alpha$ も (iv) の条件をみたす. その他については, 2階導関数を計算してたしかめればよい. □

11.7. 例. 上の補題によって, $G(R^d)$ に属する多数の関数を得ることが出来る. たとえば, $\alpha\geqslant 0$, $\alpha_j\geqslant 0$ のとき, 次の関数は $G(R^d)$ に属す.

$1\vee|x|^\alpha$ ((iv) により $h(u)=1\vee u \in G(R^1)$, (vi) により $e^{|x|}\in G(R^d)$ であるから, (i), (iii) による.)

$(1\vee\log|x|)^{\alpha}$ （(iv) により $h(u)=1\vee\log u\in G(R^1)$ であるから上と同様.）

$\prod_{j=1}^{d}(1\vee|x_j|^{\alpha_j})$ （(vi) により $e^{|x_j|}\in G(R^d)$ だから, $1\vee|x|^{\alpha}$ と同様に $1\vee|x_j|^{\alpha_j}\in G(R^d)$. 故に (ii) による.）

$\prod_{j=1}^{d}(1\vee x_j)^{\alpha_j}$ （上と同様.）

$e^{\alpha|x|}$, $\prod_{j=1}^{d}e^{\alpha_j|x_j|}$, $\prod_{j=1}^{d}e^{\alpha_j x_j}$ （(i), (ii), (vi) による.）

M を十分大きい定数としたとき, (vii) に挙げた関数の x に $M\vee|x|$ を代入したもの, および $M\vee x_j$ を代入したもの （(iii), (iv), (vi) による）

11.8. 注意. $g(x)$ が非負, Borel 可測で $g(x)\leq c_1e^{c_2|x|}$ (c_1, c_2 は const.) であっても, 定理11.3 の g-moment に関する主張は必ずしもいえないことは, 次の例で Kruglov (1970) の示した通りである. $d=1$ で, μ を指数分布すなわち $\mu(dx)=e^{-x}dx$, $x>0$, とする. $\mu\in I(R^1)$ で, $\nu(dx)=x^{-1}e^{-x}dx$, $x>0$, である (例5D) から, $g(x)=(x^{-\alpha}e^{x})\vee 1$, $0<\alpha<1$, とすると, ν_1 の g-moment は有限であるが μ の g-moment は ∞ である. また, 次の意味で, $g(x)\leq c_1e^{c_2|x|}$ という評価の成り立つ関数の外には定理11.3 は拡張できない (Sato (1973)). すなわち, $h(u)$ を $[0,\infty)$ の上の非負の非減少関数で $h(u)\to\infty$ $(u\to\infty)$ とし, $g(x)=e^{|x|h(|x|)}$, $x\in R^d$, とすると, $\mu\in I(R^d)$ でその ν_1 の g-moment は有限であるが μ の g-moment が ∞ であるものが存在する. それを見るには, 有限測度 ν を, $\{x\in R^d:\ x_1\geq 1,\ x_2=\cdots=x_d=0\}$ に集中していて $\int g(x)\nu(dx)<\infty$ かつ $\int g(x)e^{h(|x|)}\nu(dx)=\infty$ になるように作り,

$$\int g(x)\nu^{2*}(dx)=\iint e^{(x_1+y_1)h(x_1+y_1)}\nu(dx)\nu(dy)$$

$$\geq\int\nu(dy)\int g(x)e^{y_1h(x_1)}\nu(dx)=\infty$$

に注意すれば，ν を Lévy 測度とする複合 Poisson 分布 μ がその性質をもっていることが分る．

11.9. 定理. $\mu \in I(R^d)$ とし，その Lévy 測度 ν に対し $\mathrm{Supp}\,\nu \subset \{x \in R^d : |x| \leqq a\}$ であるような $a \geqq 0$ の下限を ρ とする．このとき次のことがいえる．

(i) 任意の $0 < \alpha < \frac{1}{\rho}$ に対し μ の $|x|^{\alpha|x|}$-moment は有限で

$$(11.6) \qquad \frac{\int_{|x|>u} \mu(dx)}{u^{-\alpha u}} \to 0 \qquad (u \to \infty)$$

が成り立つ．

(ii) 任意の $\alpha > \frac{1}{\rho}$ に対し μ の $|x|^{\alpha|x|}$-moment は無限大で

$$(11.7) \qquad \frac{\int_{|x|>u} \mu(dx)}{u^{-\alpha u}} \to \infty \qquad (u \to \infty)$$

が成り立つ．

（$\nu = 0$ のときは $\rho = 0$，$\mathrm{Supp}\,\nu$ が非有界のときは $\rho = \infty$ とし，$\frac{1}{0} = \infty$，$\frac{1}{\infty} = 0$ とする．）

11.10. 注意. μ が R^d の上の Gauss 分布（退化を許す）のときには，A を定める行列の最大固有値を α_0 とすると，$0 < \alpha < \frac{1}{2\alpha_0}$ に対しては

$$\frac{\int_{|x|>u} \mu(dx)}{e^{-\alpha u^2}} \to 0 \qquad (u \to \infty)$$

となり，$\alpha > \frac{1}{2\alpha_0}$ に対しては

$$\frac{\int_{|x|>u} \mu(dx)}{e^{-\alpha u^2}} \to \infty \qquad (u \to \infty)$$

となる．これは，μ の具体的な形（問1G, 1H）から分る．μ が Gauss 分布でない無限分解可能分布のときは，$0 < \rho \leqq \infty$

であるから，$\int_{|x|>u}\mu(dx)$ の減少の速さが Gauss 分布よりはるかにおそくなることを定理11.9は示している．Gauss分布がとびぬけて減少が速く，減少の速さに，その中間のものがないのである．これは，$d=1$ の場合にもっと粗い形で Ruegg (1970) が示したことである．このことや定理11.9は，与えられた分布が無限分解可能でないという証明に使えることがある．

4つの補題を示してから，定理11.9を証明する．

11.11. 補題 (Zolotarev (1965)).　$\mu\in I(R^1)$，その3要素を γ,σ^2,ν とし，δ分布ではないとする．ある b $(0<b\leqq+\infty)$ が存在して，任意の $0<s<b$ に対し

(11.8) $$\int_{R^1}e^{sx}\mu(dx)<\infty$$

とする．このとき，次のことがいえる．

(i)　$0<s<b$ において

(11.9) $$\psi(s)=\gamma s+\frac{\sigma^2}{2}s^2+\int_{R^1}\left(e^{sy}-1-\frac{sy}{1+y^2}\right)\nu(dy)$$

が存在し，C^∞ 級で，かつ $\psi''(s)>0$ である．

(ii)　$\lim_{s\downarrow 0}\psi'(s)=\xi_0\geqq-\infty$ とし，区間 $(\xi_0,\psi'(b-))$ で定義される，$\psi'(s)$ の逆関数を $\theta(\xi)$ とすると，$\xi_0<x<\psi'(b-)$ に対し

(11.10) $$\mu((x,\infty))\leqq\exp\left[-\int_{\xi_0}^{x}\theta(\xi)d\xi\right].$$

証明. この証明の方法は，Cramér (1938) の導入した associated distribution の手法と本質的には同じである．仮定(11.8)から，定理11.3によって，$0<s<b$ において

$$\int_{(1,\infty)}e^{sy}\nu(dy)<\infty$$

である．故に (11.9) の右辺が存在する．複素平面内の帯 D $=\{w=s+it:\ 0\leq s<b,\ t\in R^1\}$ における w を (11.9) の右辺の s に代入したもの $\psi(w)=\psi(s+it)$ も存在し，D で連続である．しかも $\psi(w)$ は D の内部で正則であることが容易に確かめられる．一方，$\int_{R^1} e^{wx}\mu(dx)$ も $w\in D$ で定義されて連続，D の内部で正則である．これは $w=it$ のとき特性関数 $e^{\psi(it)}$ に等しいから，一致の定理によって

$$\int_{R^1} e^{sx}\mu(dx) = e^{\psi(s)}, \qquad 0<s<b$$

である．さて，

$$\psi'(s) = \gamma + \sigma^2 s + \int_{R^1}\left(y e^{sy} - \frac{y}{1+y^2}\right)\nu(dy),$$

$$\psi''(s) = \sigma^2 + \int_{R^1} y^2 e^{sy}\,\nu(dy) > 0$$

であるから，(i) はいえている．(ii) をいうには，

$$\mu((x,\infty)) \leq \int_{R^1} e^{s(y-x)}\mu(dy) = e^{\psi(s)-sx}$$

に注目し，s を動かしてこの右辺をできるだけ小さくしよう．s が増加しつゝ $\theta(x)$ を通るとき，$\frac{d}{ds}(\psi(s)-sx) = \psi'(s)-x$ は負から正に変るから

$$\min_{0<s<b}(\psi(s)-sx) = \psi(\theta(x)) - x\theta(x)$$

である．$\psi(0)=0$ であるから，

$$\psi(\theta(x)) - x\theta(x) = \int_0^{\theta(x)} \psi'(s)ds - x\theta(x) = \int_{\xi_0}^{x} \psi'(\theta(\xi))d\theta(\xi) - x\theta(x)$$

$$= \int_{\xi_0}^{x} \xi\, d\theta(\xi) - x\theta(x) = -\lim_{\xi\downarrow\xi_0} \xi\theta(\xi) - \int_{\xi_0}^{x}\theta(\xi)d\xi$$

である．さらに

$$\lim_{\xi\downarrow\xi_0} \xi\theta(\xi) = \lim_{s\downarrow 0}\psi'(s)s = \lim_{s\downarrow 0} s\int_{R^1}\left(ye^{sy} - \frac{y}{1+y^2}\right)\nu(dy)$$

$$= \lim_{s\downarrow 0} s\int_{(-\infty,-1)} y e^{sy}\,\nu(dy) = 0$$

であるから証明を終る．最後は，te^t の $t<0$ における有界性と Lebesgue の定理を用いた．□

11.12. 補題． $\mu\in I(R^d)$ であって μ に対する $\rho<\infty$ とする．$0<\alpha<\dfrac{1}{\rho\sqrt{d}}$ に対し (11.6) が成り立つ．

証明． まず $d=1$ の場合を考えよう．この場合は本質的には Kruglov (1970) による．$\nu=0$ ならば μ は Gauss 分布で (11.6) は明らかであるから，$\nu\neq 0$ とする．

$$\frac{\mu((x,\infty))}{x^{-\alpha x}}\to 0 \qquad (x\to\infty) \tag{11.11}$$

をいおう．$\rho<\infty$ から，定理 11.3 により $0<s<\infty$ に対し (11.8) が成り立つから，$b=\infty$ として補題 11.11 を適用する．$\psi'(\infty)<\infty$ となるのは $\sigma^2=0$，$\nu((0,\rho])=0$，$\int_{[-\rho,0)}|y|\,\nu(dy)<\infty$ の時だけである（このとき $\psi'(\infty)=\gamma+\int_{[-\rho,0)}\frac{|y|}{1+y^2}\nu(dy)$）．

故に，$\psi'(\infty)<\infty$ ならば $\mathrm{Supp}\,\mu\subset(-\infty,\gamma_0]$ となり，(11.11) は自明となる．故に，$\psi'(\infty)=\infty$ としてよい．$\xi_0<x<\infty$ に対し (11.10) が成り立つ．$\theta(\xi)$ を評価しよう．$\xi_0<\xi<\infty$ に対し

$$\xi = \gamma+\sigma^2\theta(\xi)+\int_{[-\rho,\rho]}\left(ye^{\theta(\xi)y}-\frac{y}{1+y^2}\right)\nu(dy)$$

$$= \gamma'+\sigma^2\theta(\xi)+\int_{[-\rho,\rho]}\left(e^{\theta(\xi)y}-1\right)y\,\nu(dy)$$

である．ただし γ' はある const. である．$0<y\le\rho$ では

$$\left(e^{\theta(\xi)y}-1\right)y = e^{\theta(\xi)y}\left(1-e^{-\theta(\xi)y}\right)y \le e^{\theta(\xi)y}\,\theta(\xi)\,y^2$$

であり，$-\rho\le y<0$ では

$$(e^{\theta(\xi)y}-1)\,y \leqq \theta(\xi)\,y^2$$

である．故に

$$\xi \leqq \gamma' + \sigma^2\theta(\xi) + e^{\theta(\xi)\rho}\,\theta(\xi)\int_{[-\rho,\rho]} y^2\,\nu(dy)$$

である．故に $0<\alpha<\alpha'<\frac{1}{\rho}$ に対し

$$\xi e^{-\frac{\theta(\xi)}{\alpha'}} \longrightarrow 0 \qquad (\xi\to\infty).$$

故に $\xi_1>0$ が存在して，$\xi>\xi_1$ において

$$-\frac{\theta(\xi)}{\alpha'} < -\log\xi$$

である．故に (11.10) から

$$\mu((x,\infty)) \leqq C_1\exp\left[-\alpha'\int_{\xi_1}^{x}\log\xi\,d\xi\right] \leqq C_2\exp[-\alpha' x\,(\log x-1)]$$

であり，(11.11) が分る．同様に

$$\frac{\mu((-\infty,-x))}{x^{-\alpha x}} \longrightarrow 0 \qquad (x\to\infty)$$

がいえるから，(11.6) が成り立つ．

次に $d\geqq 2$ の場合を考えよう．$X=(X_1,\cdots,X_d)$ を μ に従う確率変数とする．X_j の分布は1次元の無限分解可能分布で，やはり Lévy 測度の台が $[-\rho,\rho]$ の中にあるから，$0<\alpha<\alpha'<\frac{1}{\rho\sqrt{d}}$ に対し

$$P(|X|>u) \leqq \sum_{j=1}^{d} P\left(|X_j|>\frac{u}{\sqrt{d}}\right) = o\left(\left(\frac{u}{\sqrt{d}}\right)^{-\alpha'\sqrt{d}\left(\frac{u}{\sqrt{d}}\right)}\right) = o\left(u^{-\alpha u}\right)$$

である．□

11.13. 補題. $\mu\in I(R^d)$ が複合 Poisson 分布であるとき，$0<\alpha<\frac{1}{\rho}$ に対しては (11.6) が成り立ち，$\alpha>\frac{1}{\rho}$ に対しては (11.7) が成り立つ．

証明. μ の Lévy 測度 ν の全測度を c とする. $\rho<\infty$, $0<\alpha<\frac{1}{\rho}$ のときを考えよう. ν^{n*} の台は $\{|x|\leq n\rho\}$ の中にあるから

$$\int_{|x|>u}\mu(dx)=e^{-c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{|x|>u}\nu^{n*}(dx)=e^{-c}\sum_{n\geq\frac{u}{\rho}}\frac{c^n}{n!}\leq e^{-c}\int_{\frac{u}{\rho}}^{\infty}\frac{(c\vee 1)^v}{\Gamma(v)}dv$$

である. l'Hôpital の定理と Stirling の公式によって

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\int_{u/\rho}^{\infty}\frac{(c\vee 1)^v}{\Gamma(v)}dv}{u^{-\alpha u}}=\lim_{u\to\infty}\frac{(c\vee 1)^{u/\rho}}{-\alpha\rho u^{-\alpha u}(\log u+1)\Gamma(\frac{u}{\rho})}$$

$$=\lim_{u\to\infty}\frac{(c\vee 1)^{u/\rho}}{-\alpha\rho\sqrt{2\pi}\,u^{-\alpha u}(\log u+1)e^{-u/\rho}\left(\frac{u}{\rho}\right)^{\frac{u}{\rho}-\frac{1}{2}}}=0$$

であるから, (11.6) がいえる. 次に $\alpha>\frac{1}{\rho}$ のときを考えよう. $\frac{1}{\alpha}<\rho'<\rho$ に ρ' をとる. 必要ならば適当な直交変換を R^d に施すことにより, $\nu(\{x\in R^d:\ x_1>\rho'\})>0$ としてよい. u から整数 n を $n\leq\frac{u}{\rho'}<n+1$ と定めると

$$\int_{|x|>u}\mu(dx)\geq\frac{e^{-c}}{n!}\int_{|x|>u}\nu^{n*}(dx)\geq\frac{e^{-c}}{n!}\left(\int_{\{x_1>\frac{u}{n}\}}\nu(dx)\right)^n$$

である. 故に, $0<c_1\leq 1$ が存在して, u が大きいとき

$$\int_{|x|>u}\mu(dx)\geq\frac{e^{-c}}{n!}c_1^{\,n}\geq\frac{e^{-c}}{\Gamma(\frac{u}{\rho'}+1)}c_1^{\,u/\rho'}$$

である. Stirling の公式によって

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{\Gamma(\frac{u}{\rho'}+1)}c_1^{\,u/\rho'}}{u^{-\alpha u}}=\lim_{u\to\infty}\frac{c_1^{\,u/\rho'}}{\sqrt{2\pi}\,u^{-\alpha u}e^{-\frac{u}{\rho'}}\left(\frac{u}{\rho'}\right)^{\frac{u}{\rho'}+\frac{1}{2}}}=\infty$$

であるから, (11.7) がいえた. □

11.14. 補題. μ を $(0,\infty)$ の上の有限測度とする.

(i) $g(x)$ が正かつ非減少の関数とする. μ の g-moment が

有限ならば, $\mu((x,\infty)) = o\left(\frac{1}{g(x)}\right)$, $x\to\infty$.

(ii) $\alpha>0$ に対し $g_\alpha(x) = x^{\alpha x}$ とする. $\mu((x,\infty)) = O\left(\frac{1}{g_\alpha(x)}\right)$, $x\to\infty$, ならば, $0<\beta<\alpha$ をみたす任意の β に対し μ の g_β-moment が有限である.

(注. (ii) は $g_\alpha(x) = e^{\alpha x}$ のときも, $g_\alpha(x) = x^{\alpha}$ のときもいえる.)

証明. (i) は

$$g(x)\mu((x,\infty)) \leq \int_{(x,\infty)} g(y)\mu(dy) \to 0$$

による. (ii) は $G(x) = \mu((x,\infty))$ とするとき

$$\int_{(0,\infty)} x^{\beta x}\mu(dx) = -\int_0^\infty x^{\beta x} dG(x) = G(0) + \beta\int_0^\infty x^{\beta x}(\log x + 1)G(x)dx < \infty$$

による. □

定理11.9の証明. $\nu = 0$ すなわち μ がGauss分布のときは, $\rho = 0$ だから補題11.12によっていえている. $\nu \neq 0$ すなわち $\rho > 0$ としよう. $0<\rho'<\rho$ の ρ' に対し

$$\hat{\mu}_1(z) = \exp\left[\int_{\rho'<|x|\leq\rho}(e^{izy}-1)\nu(dy)\right], \quad \mu = \mu_0 * \mu_1$$

とする. X_0, X_1 を μ_0, μ_1 に従う確率変数で独立とする. $X = X_0 + X_1$ が μ に従う.

$0<\alpha<\frac{1}{\rho}$ のとき, $0<\delta<1$ を $\alpha<\frac{1-\delta}{\rho}$ に選び, 次に ρ' を $0<\rho'<\rho\wedge\left(\frac{\delta}{\sqrt{d}\,\alpha}\right)$ に選ぶ.

$$P(|X|>u) \leq P(|X_0|+|X_1|>u) \leq P(|X_0|>u\delta) + P(|X_1|>u(1-\delta))$$

である. α' と α'' を $\alpha<\alpha'<\frac{\delta}{\sqrt{d}\,\rho'}$, $\alpha<\alpha''<\frac{1-\delta}{\rho}$ とする. μ_0 の Lévy 測度は $\{|x|\leq\rho'\}$ にあるから, 補題11.12によって

$$P(|X_0|>u\delta) = o\left((u\delta)^{-\frac{\alpha'}{\delta}u\delta}\right) = o(u^{-\alpha u}), \qquad u\to\infty$$

である. μ_1 は複合 Poisson であるから補題 11.13 によって

$$P(|X_1|>u(1-\delta)) = o\left((u-u\delta)^{-\frac{\alpha''}{1-\delta}(u-u\delta)}\right) = o(u^{-\alpha u}), \quad u\to\infty$$

であった. 故に (11.6) がいえた.

$\alpha > \frac{1}{p}$ のときは, α' を $\alpha>\alpha'>\frac{1}{p}$ に選び, 次に $c>1$ を $\alpha' c<\alpha$ に選ぶ.

$$P(|X|>u) \geqslant P(|X_1|>uc)\,P(|X_0|\leqslant u(c-1))$$

を使う. 補題 11.13 によって

$$\frac{P(|X_1|>uc)}{u^{-\alpha u}} = \frac{P(|X_1|>uc)}{(uc)^{-\alpha' uc}}\,\frac{1}{u^{\alpha' uc-\alpha u}\,c^{\alpha' uc}} \to \infty$$

であり,

$$P(|X_0|\leqslant u(c-1))\to 1$$

は明らかであるから, (11.7) がいえた.

μ の $|x|^{\alpha|x|}$-moment に関する定理の主張は, 補題 11.14 によって (11.6) と (11.7) から導かれる. これで定理 11.9 の証明を終った. □

定理 11.9 は原点を中心とする球の外の測度を評価したものであるが, ν の台の1つの方向への大きさが, その方向における μ の減少の程度を決めることが同様にいえることを示そう.

11.15. 定理. $\mu\in I(R^d)$, ν をその Lévy 測度とする. T を $R^d\to R^1$ の線形写像で「恒等的に 0」ではないとする. μ の $\{x\in R^d:\ Tx>0\}$ への制限を μ' とする. Supp ν $\subset\{x\in R^d:\ Tx\leqslant a\}$ であるような $a\geqslant 0$ の下限を p_T とする. このとき次のことがいえる.

(i) 任意の $0<\alpha<\frac{1}{p_T}$ に対し μ' の $(Tx)^{\alpha Tx}$-moment は有限で

$$(11.12) \qquad \frac{\int_{\{Tx>u\}}\mu(dx)}{u^{-\alpha u}} \to 0 \qquad (u\to\infty)$$

が成り立つ．

（ii） 任意の $\alpha > \frac{1}{\rho_T}$ に対し μ' の $(Tx)^{\alpha Tx}$-moment は無限大で

$$(11.13) \qquad \frac{\int_{\{Tx>u\}}\mu(dx)}{u^{-\alpha u}} \to \infty \qquad (u\to\infty)$$

が成り立つ．

証明． μ' の $(Tx)^{\alpha Tx}$-moment に関する主張は，補題 11.14 によって (11.12) と (11.13) からいえるから，(11.12)，(11.13) をいえば十分である．まず，$d=1$，$Tx=x$ のときを扱う．$0<\alpha<\frac{1}{\rho_T}$ に対しては，$\rho_1>0$ を $\alpha<\frac{1}{\rho_1}<\frac{1}{\rho_T}$ に選び

$$\hat{\mu}_1(z)=\exp\left[\int_{(-\infty,-\rho_1)}(e^{izy}-1)\nu(dy)\right], \qquad \mu=\mu_0*\mu_1$$

とし，X_0，X_1 を μ_0，μ_1 に従う独立な確率変数，$X=X_0+X_1$ とする．$P(X_1\leq 0)=1$ であるから，μ_0 に定理 11.9 を用いると，

$$P(X>u)\leq P(X_0>u)\leq P(|X_0|>u)=o(u^{-\alpha u}), \qquad u\to\infty,$$

すなわち (11.12) である．$\rho_T>0$，$\alpha>\frac{1}{\rho_T}$ に対しては，まず

$$\hat{\mu}_1'(z)=\exp\left[\int_{(\rho',\rho_T]}(e^{izy}-1)\nu(dy)\right], \qquad \mu=\mu_0'*\mu_1'$$

とし，X_0'，X_1' を μ_0'，μ_1' に従う独立な確率変数，$X'=X_0'+X_1'$ とすると，$P(X_1'\geq 0)=1$ であり，$c>1$ に対し

$$P(X'>u)\geq P(X_1'>uc)P(|X_0'|\leq u(c-1))$$

である．α' と c を $\alpha>\alpha'>\frac{1}{\rho_T}$，$\frac{\alpha}{\alpha'}>c>1$ に選ぶ．μ_1' に

定理11.9を用いると

$$\frac{P(X_1'>uc)}{(uc)^{-\alpha' uc}} \to \infty \qquad (u\to\infty)$$

であるから

$$\frac{P(X'>u)}{u^{-\alpha u}} \geqslant \frac{P(X'>uc)}{(uc)^{-\alpha' uc}} \frac{1}{u^{-\alpha u}\,(uc)^{\alpha' uc}} P(|X_0'|\leqslant u(c-1)) \to \infty,$$

すなわち(11.13)がいえる.

次に，$d\geqslant 1$ で一般の T のときを扱おう．系1.18によって $T\mu$ は $I(R^1)$ に属し，そのLévy測度 $\nu_{T\mu}$ は $\nu_{T\mu}=[T\nu]_{R^1\setminus\{0\}}$ である．μ に対する ρ_T は $\mathrm{Supp}\,\nu_{T\mu}\subset\{x\in R^1 : x\leqslant a\}$ であるような $a\geqslant 0$ の下限に一致するから，上で証明した場合に帰着する．□

11.16. 補足. $d=1$ で $\mu\in I(R^1)$ の Lévy測度 ν の tail の形に条件をつけた場合には，μ の tail も評価できるというような型の結果を Zolotarev (1961), Wolfe (1971 a), Ohkubo (1979) などが得ている．Zolotarev (1965) は1次元の加法過程で t と $|x|$ を同時に無限大にする場合を考察して，補題11.11より強い種々の結果を得ている．Kruglov (1974) は1971の論文の Hilbert 空間上の無限分解可能分布への拡張を扱っている．

問11A. $\mu\in\mathcal{P}(R^1)$ の特性関数 $\hat{\mu}(z)$, $z\in R^1$, が複素平面上の整関数に拡張できるための必要十分条件は，すべての c に対し μ の $e^{c|x|}$-moment が有限であることである．これを示せ．（たとえば [Lu] Chap. 7）

問11B. $g(x)$ が R^d の上の有限値の関数で非負，Borel可測かつ劣乗法的ならば局所有界である．これを示せ．（清水

良一の注意による。 Sato (1973))

問11C. $\mu \in \mathcal{P}(R^d)$ とする。 $n_1, \cdot, n_d \in N$ （Nは非負の整数の全体）に対し

$$\alpha_{n_1,\cdots,n_d} = \int_{R^d} x_1^{n_1} \cdot\cdot x_d^{n_d} \mu(dx)$$

を μ の次数 $(n_1, \cdots, n_d)$ の moment といい，

$$\beta_{n_1,\cdots,n_d} = \int_{R^d} |x_1|^{n_1} \cdots |x_d|^{n_d} \mu(dx)$$

を μ の次数 $(n_1, \cdots, n_d)$ の絶対 moment という。次のことを示せ。

(i) $n \in N$ とする。 $\beta_{n,0,\cdot\cdot,0}$, $\beta_{0,n,0,\cdot\cdot,0}$, $\cdots$, $\beta_{0,\cdot\cdot,0,n}$ が有限とする。このとき，特性関数 $\hat{\mu}(z)$ が C^n 級であり，$\sum_{j=1}^{d} n_j \leq n$ をみたす任意の $n_1, \cdot\cdot, n_d \in N$ に対し $\beta_{n_1,\cdots,n_d}$ が有限で

$$\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_d}}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_d^{n_d}} \hat{\mu}(z) = \int (ix_1)^{n_1} \cdots (ix_d)^{n_d} e^{izx} \mu(dx),$$

$$\alpha_{n_1,\cdot\cdot,n_d} = (-i)^{n_1+\cdots+n_d} \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_d} \hat{\mu}}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_d^{n_d}}(0)$$

である。

(ii) n を正の偶数とする。 $\hat{\mu}(z)$ が $z=0$ の近傍で C^n 級ならば， $\sum_{j=1}^{d} n_j \leq n$ をみたす任意の $n_1, \cdots, n_d \in N$ に対し $\beta_{n_1,\cdots,n_d}$ が有限である。（たとえば [C] p.52-54）

問11D. $\mu \in I(R^d)$，その3要素を γ, A, ν とし， $\int_{R^d} |x| \mu(dx) < \infty$ とする。 $\int_{R^d} x_j \mu(dx) = \gamma_j + \int_{R^d} \frac{y_j |y|^2}{1+|y|^2} \nu(dy)$ ， $j=1,\cdot\cdot,d$， を示せ。（定理11.3により $\int_{|x|>1} |x| \nu(dx) < \infty$ だから，問11Cによる。）

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

あとがき

無限分解可能分布については，以上でまったく触れなかった問題がまだ沢山ある．そのいくつかを，大小を問わず並べよう．

1．無限分解可能分布を explicit に構成する方法．たとえば，密度 $f(x)$ をもつ $(0,\infty)$ の上の絶対連続分布で $\log f(x)$ が convex のものは無限分解可能である．無限分解可能分布を mixing したとき無限分解可能性が保たれるのはどのような場合かという問題もこれに関連する．これには Steutel の [St] と (1973) がある．

2．特殊な分布の無限分解可能であるかどうかの判定．最近，Ismail-Kelker (1979) などいろいろな結果があり，たとえば F 分布，Student 分布が無限分解可能であることが示された．

3．unimodal，strongly unimodal になる条件．9.11 にあげた Yamazato (1978) のほか，Medgyessy (1967)，Yamazato (提出中) などがある．

4．安定分布は独立同分布の確率変数列の和を normalize したものの極限分布であるが，この「同分布」という条件を弱めて「異なる分布は高々 k 個」とすることによって，安定分布のクラスの1つの拡張が得られる．これについて Zinger (1965) の興味深い論文がある．

5．確率分布の分解に関する諸問題．これは，Lévy が確率分布の arithmetic と呼んでいる分野で，Khintchine，Lévy，Linnik など多くの結果があり，本として [Li]，[Lu]，[LiO]，[C] がある．

6．無限分解可能分布は加法過程の有限次元分布であるから，加法過程の研究と無限分解可能分布の研究は密接な関係にある．加法過程に関しては，Skorohod の本 [Sk]，Fristedt の総合報告 (1974) をはじめ多数の文献がある．

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

無限分解可能分布に関する結果のまとめを含むものとして，引用文献の中の単行本のほかに Fisz (1962)，Lukacs (1972)，Horn-Steutel (1978) があるが，近年までの結果を含めた全般的なものはない．L分布に関しては佐藤(1977)，山里(1980)がある．

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

引用文献

1. 単行本

[B] Bochner, S., Harmonic analysis and the theory of probability. Univ. Calif. Press, Berkeley-Los Angeles, 1960.

[BC] Bochner, S., and Chandrasekharan, K., Fourier transforms. (Annals of Mathematical Studies No. 19). Princeton Univ. Press, Princeton, 1949.

[Bo] Bohr, H., Almost periodic functions. (英訳). Chelsea, New York, 1947.

[Br] Breiman, L., Probability. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

[C] Cuppens, R., Decomposition of multivariate probabilities. Academic Press, New York, 1975.

[F1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, Vol. I, 3rd ed. John Wiley, New York, 1968.

[F2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, Vol. II, 2nd ed. John Wiley, New York, 1971.

[G] グネジェンコ, B. V., (鳥居一雄訳), 確率論教程 I, II. 森北出版, 東京, 1971－72.

[GK] Gnedenko, B. V., and Kolmogorov, A. N., Limit distributions for sums of independent random variables. (英訳). 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968. (ロシア語原書 1949).

[IL] Ibragimov, I. A., and Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables. (英訳). Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.

[I1] 伊藤清, 確率論. 岩波, 東京, 1953.

[I2] Ito, K., Stochastic processes. (Lecture Notes Series No. 16) Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 1969.

[K1] Kawata, T., Fourier analysis in probability theory. Academic Press, New York, 1972.

[K2] 河田龍夫, Fourier 解析. 産業図書, 東京, 1975.

[KS] Kendall, M., and Stuart, A., The advanced theory of statistics. Vol I, 4th ed. Griffin, London, 1977.

[L1] Lévy, P., Calcul des probabilités. Gauthier-Villars, Paris, 1925.

[L2] Lévy, P., Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, Paris, 1937. (2^e édition, 1954).

[L3] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars, Paris, 1948. (2^e édition, 1965).

[Li] Linnik, Y. V., Decomposition of probability distributions. (英訳). Oliver & Boyd, Edinburgh-London, 1964.

[LiO] Linnik, Ju. V., and Ostrovskii, I. V., Decomposition of random variables and vectors. (英訳). (Translations of Mathematical Monographs Vol. 48). Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[Lo] Loève, M., Probability theory, 3rd ed. Van Nostrand, Princeton, 1963.

[Lu] Lukacs, E., Characteristic functions, 2nd ed. Griffin, London, 1970.

[P] Parthasarathy, K. R., Probability measures on metric spaces. Academic Press, New York, 1967.

[Pe] Petrov, V. V., Sums of independent random variables. (英訳). Springer, Berlin, 1975.

[PR] Prokhorov, Yu. V., and Rozanov, Yu. A., Probability theory. Basic concepts. Limit theorems. Random processes.

(英訳). Springer, Berlin, 1969.

[Sh] 清水良一, 中心極限定理. 教育出版, 東京, 1976.

[Sk] Skorohod, A.V., Random processes with independent increments. (ロシア語). Nauka, Moscow, 1964.

[St] Steutel, F.W., Preservation of infinite divisibility under mixing and related topics. (Mathematical Centre Tracts No. 33). Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1970.

[vH] van Harn, K., Classifying infinitely divisible distributions by functional equations. (Mathematical Centre Tracts No. 103). Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.

[W] Widder, D.V., The Laplace transforms. Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

2. 雑誌論文

[ ] の中は, その論文を引用しているページである.

Baxter, G., and Shapiro, J.M. (1960). On bounded infinitely divisible random variables. Sankhyā, 22, 253-260. [131]

Blum, J.R., and Rosenblatt, M. (1959). On the structure of infinitely divisible distribution functions. Pacific J. Math. 9, 1-7. [110]

Cramér, H. (1938). Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabitités. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 736 (Les sommes et les fonctions de varialbes aléatoires. Hermann, Paris) 5-23. [151]

de Acosta, A., and Samur, J.D. (1979). Infinitely divisible probability measures and the converse Kolmogorov inequality in Banach spaces. Studia Math. 66, 143-160. [22]

Dœblin, W. (1939). Sur les sommes d'un grand nombre des variables aléatoires independentes. Bull. Sci. Math. 63, 23-32, 35-64. [110]

Dwass, M., and Teicher, H. (1957). On infinitely divisible random vectors. Ann. Math. Stat. 28, 461-470. [26, 103]

Esseen, C.G. (1968). On the concentration function of a sum of independent random variables. Zeit. Wahrschein. Verw. Geb. 9, 290–308. [110]

Fisz, M. (1962). Infinitely divisible distributions: Recent results and applications. Ann. Math. Stat. 33, 68–84. [162]

Fisz, M., and Varadarajan, V.S. (1963). A condition for absolute continuity of infinitely divisible distribution function. Zeit. Wahrschein. Verw. Geb. 1, 335–339. [112]

Fristedt, B. (1974). Sample functions of stochastic processes with stationary, independent increments. Advances in Probability and Related Topics. Vol. 3 (ed. by P. Ney and S. Port), 241–396. [161]

Getoor, R.K. (1961). Infinitely divisible probabilities on the hyperbolic plane. Pacific J. Math. 11, 1287–1308 [22]

Hartman, P., and Wintner, A. (1942). On the infinitesimal generators of integral convolutions. Amer. J. Math. 64, 273–298. [109, 110, 113]

Horie, M. (1976). On the supports of the transition densities for certain stable processes. Hiroshima Math. J. 6, 359–363. [140]

Horn, R.A., and Steutel, F.W. (1978). On multivarite infinitely divisible distributions. Stoch. Proc. Appl. 6, 139–151. [140, 162]

Hudson, W.N., and Mason, J.D. (1975). More on equivalence of infinitely divisible distributions. Ann. Probab. 3, 536–568. [140]

Hudson, W.N., and Tucker, H.G. (1975). On admissible translates of infinitely divisible distributions. Zeit. Wahrschein. Verw. Geb. 32, 65–72. [139]

Ibragimov, I.A. (1972). On a problem of C. R. Rao on i.d. laws. Sankhyā, A, 34, 447–448. [26]

Ismail, M.E.H., and Kelker, D.H. (1979). Special functions, Stieltjes transforms and infinite divisibility. SIAM J. Math. Anal. 10, 884–901. [161]

Johansen, S. (1966). An application of extreme point methods to the representation of infinitely divisible distributions. Zeit. Wahrschein. Verw. Geb. 5, 304-316. [6]

Kawata, T., and Maejima, M. (1977) Remarks on an infinitely divisible characteristic function. Sankhyā, A, 39, 130-137. [116]

Kruglov, V. M. (1970). A note on infinitely divisible distributions. (英訳). Th. Probab. Appl. 15, 319-324. [143, 143, 149, 153]

Kruglov, V. M. (1974). On unboundedly divisible distributions on Hilbert space. (英訳) Math. Notes 16, 940-946. [159]

Kumar, A., and Schreiber, B. M. (1979). Representation of certain infinitely divisible probability measures on Banach spaces. J. Multivariate Anal. 9, 288-303. [51]

Lévy, P. (1948). The arithmetical character of the Wishart distribution. Proc. Camb. Phil. Soc. 44, 295-297. [25]

Lukacs, E. (1972) A survey of the theory of characteristic functions. Adv. Appl. Prob. 4, 1-38. [162]

Maruyama, G. (1970). Infinitely divisible processes. Th. Probab. Appl. 15, 1-22. [17]

Medgyessy, P. (1967). On a new class of unimodal infinitely divisible distribution functions and related topics. Studia Sci. Math. Hungar. 2, 441-446. [161]

Ohkubo, H. (1979) On the asymptotic tail behaviors of infinitely divisible distributions. Yokohama Math. J. 27, 77-89. [159]

Orey, S. (1968). On continuity properties of infinitely divisible distribution functions. Ann. Math. Stat. 39, 936-937. [114]

Paulauskas, V. J. (1976). Some remarks on multivariate stable distributions. J. Multivariate Anal. 6, 356-368. [104]

Phillips, R. S. (1952). On the generation of semigroups of linear operators. Pacific J. Math. 2, 343-369. [138]

Pierre, P. A. (1971). Infinitely divisible distributions, conditions for independence, and central limit theorems. J. Math. Anal. Appl. 33, 341-354. [99, 104, 105]

Pruitt, W.E., and Taylor, S.J. (1969) The potential kernel and hitting probabilities for the general stable processes in R^N. Trans. Amer. Math. Soc. 146, 299-321. [127]

Ramachandran, B. (1967). On characteristic functions and moments. Sankhyā, A, 31, 1-12. [143]

Rogozin, B.A. (1965). On some classes of processes with independent increments. (英訳). Th. Probab. Appl. 10, 479-483. [138]

Rubin, H. (1967). Support of convolutions of identical distributions. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. Vol. 2, Part 1, 415-422. [114]

Ruegg, A. (1970). A characterization of certain infinitely divisible laws. Ann. Math. Stat. 41, 1354-1356. [151]

Rvačeva, E.L. (1954). On domains of attraction of multi-dimensional distributions. (英訳) Selected Translations Math. Stat. Probab. 2, 183-205 (L'vov. Gos. Univ. Uč. Zap. 29, Ser. Meh-Mat. No.6, 5-44) [39, 48]

Sato, K. (1973). A note on infinitely divisible distributions and their Lévy measures. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A, 12, 101-109. [143, 149]

佐藤健一 (1977). クラスLの分布について. Seminar on Probability 44 (Markov過程の研究), 147-162. [162]

Sato, K. (1980). Class L of multivariate distributions and its subclasses. J. Multivariate Anal. 10, 207-232. [51, 62, 82, 118]

Sato, K. (提出中). Absolute continuity of multivariate distributions of class L. [112, 118]

Sato, K., and Yamazato, M. (1978) On distribution functions of class L. Zeit. Wahrschein. Verw. Geb. 43, 273-308. [115, 123, 127, 127]

Sato, K., and Yamazato, M. (提出中) On higher derivatives of distribution functions of class L. [127]

Semovskii, S.V. (1979). Operator-stable laws of distributions.

(英訳). Soviet Math. Dokl. 20, 139-142. [48]

Shapiro, J. M. (1956). A condition for existence of moments of infinitely divisible distributions. Canad. J. Math. 8, 69-71. [143]

Sharpe, M. (1969a). Operator-stable probability distributions on vector groups. Trans. Amer. Math. Soc. 136, 51-65. [48]

Sharpe, M. (1969b). Zeroes of infinitely divisible densities. Ann. Math. Stat. 40, 1503-1505. [139]

Steutel, F. W. (1973). Some recent results in infinite divisibility. Stoch. Proc. Appl. 1, 125-143. [161]

Taylor, S. J. (1967). Sample path properties of a transient stable process. J. Math. Mech. 16, 1229-1246. [140]

Tucker, H. G. (1961). Best one-sided bounds for infinitely divisible random variables. Sahkhyā, A, 23, 387-396. [131]

Tucker, H. G. (1962). Absolute continuity of infinite divisible distributions. Pacific J. Math. 12, 1125-1129. [112]

Tucker, H. G. (1964). On continuous singular infinitely divisible distribution functions. Ann. Math. Stat. 35, 330-335. [114]

Tucker, H. G. (1965). On a necessary and sufficient condition that an infinitely divisible distribution be absolutely continuous. Trans. Amer. Math. Soc. 118, 316-330. [114]

Tucker, H. G. (1975) The supports of infinitely divisible distribution functions. Proc. Amer. Math. Soc. 49, 436-440. [133]

Urbanik, K. (1969). Self-decomposable probability distributions on R^m. Zastos. Mat. 10, 91-97. [78]

Urbanik, K. (1972a) Lévy's probability measures on Euclidean spaces. Studia Math. 44, 119-148. [84]

Urbanik, K. (1972b) Slowly varying sequences of random variables. Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20, 679 - 682. [51, 58, 77]

Urbanik, K. (1973). Limit laws for sequences of normed sums satisfying some stability conditions. Multivariate Analysis III (ed.

by P. R. Krishnaiah), 225-237 [51, 58]

Wolfe, S. J. (1971a). On moments of infinitely divisible distribution functions. Ann. Math. Stat. 42, 2036-2043. [143, 159]

Wolfe, S. J. (1971b) On the continuity properties of L functions. Ann. Math. Stat. 42, 2064-2073. [127]

Wolfe, S. J. (1978). On the unimodality of multivariate symmetric distribution functions of class L. J. Multivariate Anal. 8, 141-145. [62, 127]

Wolfe, S. J. (1980). A characterization of Lévy probability distributions on Euclidean spaces. J. Multivariate Anal. 10, 379-384. [84]

Yamazato, M. (1978). Unimodality of infinitely divisible distributions of class L. Ann. Probab. 6, 523-531. [127, 161]

山里真 (1980). L分布とその周辺. 数学 32, 323-338. [162]

Yamazato, M. (提出中). On strongly unimodal infinitely divisible distributions. [161]

Zinger, A. A. (1965). On a class of limit distributions for normalized sums of independent random variables. (英訳). Th. Probab. Appl. 10, 607-626. [161]

Zolotarev, V. M. (1958) Distribution of the superposition of infinitely divisible processes. (英訳). Th. Probab. Appl. 3, 185-188. [138]

Zolotarev, V. M. (1961) On the asymptotic behavior of a class of infinitely divisible laws. (英訳). Th. Probab. Appl. 6, 304-307. [159]

Zolotarev, V. M. (1963). The analytic structure of infinitely divisible laws of class L. (ロシア語). Litovsk. Mat. Sb. 3, 123-140. [112, 127]

Zolotarev, V. M. (1965). Asymptotic behavior of the distributions of processes with independent increments. (英訳). Th. Probab. Appl. 10, 28-44. [151, 159]

Sem. on Probab.
Vol.52 1981年
P1-170

１９８１年5月 確率論セミナー発行