Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

SEMINAR ON PROBABILITY

Vol. 54

二次元 Ising model の Gibbs 分布

樋口保成

1982

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

二次元 Ising model の Gibbs 分布

樋口保成

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

はじめに

このノートは二次元Ising modelに関するAizenman〔1〕と筆者〔19〕の結果の紹介を主な目的としている。Ferromagneticな二次元Ising modelにおいては、任意のGibbs分布はμ_+とμ_-という二つの特別なGibbs分布の重ね合わせ；$\lambda\mu_+ + (1-\lambda)\mu_-$（$0 \leq \lambda \leq 1$）で表わすことができる。Dobrushin〔8〕, Lanford & Ruelle〔25〕等によって相転移の確率論的意味づけが与えられた頃から既にこの事実は予想されてはいたが（Dobrushin〔9〕, Gallavotti〔14〕）1979年Russoが〔35〕によってpercolationとこの問題の関係を明らかにするまでは解けそうで解けない問題として関係者をイライラさせていた。〔35〕から半年も経たずにして〔1〕,〔19〕が出て、この問題は解決されたのだが、Aizenmanは更に〔1〕の中でこの事実は二次元とferromagneticという二つのことが本質的なはずで、Ising modelだけではなくより一般のsystemについて成り立つのではないかと予想している。

このノートでは、二次元の特殊性を意識して〔1〕,〔19〕よりもpercolationを前面におし出して整理してみた。書き終わってみてもはや終わってしまった問題のみを扱っているような感じで気がひけるのだが、percolation, Ising modelともにまだまだ面白い問題は残っており、また最近の物理、数学の発展に応じて新しい問題も生まれてきていて、依然として面白い対象であるとは言えると思う。いくつかのopen problemsについてはそういう意味でChapter IIの最後にとりあげてみた。最近の物理学者達（数理物理学者達と呼ぶべきか？）による確率論的研究はFröhlich, Aizenman, Spencer等をはじめ驚くほどの質的、量的な結果を生み出している。そろそろ確率論の方からもこれらの刺激に対する反応が出てきてよい頃なのではなかろうか？　いくぶんもどかしい気持ちでこれらの結果を横目で見ながらなかなか手がつかない自分自身を情けなく思いつつ、誰か新しくこの分野に興味を持つ人は現われぬものかなどと甘い

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

ことを考える今日このごろである。

最後に、このノートを書くよう勧めて下さった方々、面白い話題だと励まして下さった方々に厚く御礼申し上げたい。

1982年 4月　　神戸にて

樋口保成

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

目 次

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

Chapter I. Ising model の一般論

§0. Hamiltonian から Gibbs 分布へ

$\mathbb{Z}^d$ を d 次元格子、Λ をその有限部分集合とする。 Λ の各格子点上に二種のスピン変数 +1, −1 のどちらかが対応しており、これらは互に作用を及ぼし合っているものとする。 このとき、この相互作用によって得られるエネルギーが

$$H_\Lambda(\sigma) = -\sum_{\langle x,y\rangle\subset\Lambda}\sigma(x)\sigma(y) - \sum_{x\in\Lambda} h\,\sigma(x),$$

$$\sigma\in\Omega_\Lambda \equiv \{+1,-1\}^\Lambda,\quad h\in\mathbb{R},$$

によって与えられているモデルを考える。 ただし、記号 $\langle x,y\rangle$ は、 $x = (x^1,\cdots,x^d)$, $y = (y^1,\cdots,y^d)$ とかくとき、

$$\sum_{i=1}^{d}|x^i - y^i| = 1$$

であることを示す。 つまり、x と y は $\mathbb{Z}^d$ の中で隣接している。これを「x と y は nearest neighbour である。」という。 また、σ は Λ 上 +1, −1 の配置を指定している Λ から $\{+1,-1\}$ への関数である。 H_Λ を外部磁場 h の Ising model の Λ 上の Hamiltonian と呼ぶ。 この相互作用を持つ系の物理量は Ω_Λ 上の関数 f として考えられ、観測値には

$$\langle f\rangle_\Lambda = Z_\Lambda^{-1}\cdot\sum_{\sigma\in\Omega_\Lambda} f(\sigma)\,e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)},$$

$$Z_\Lambda = \sum_{\sigma\in\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

が対応する。 ここでβは温度によるゆらぎを表わすパラメーターで、

$$\beta = 1/kT, \quad k:\text{Boltzmann 定数}, \quad T:\text{絶対温度}$$

によって与えられる。

相転移現象として知られている現象は、これらの物理量の観測値がβ, hの関数と見たときあるところで非常に急激に変化することである。（例：水が温度0°C、一気圧で氷になる）この転移点を正確に求めようと思うと、Λが有限な限り $\langle f \rangle_\Lambda$ の値もなめらかで、計算は一般にできない。 しかし、Λが大きくなれば転移点のまわりでの変化はそれだけ急になっていくことがわかる。 従って当然 $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ としたときの $\langle f \rangle_\Lambda$ の挙動を調べてみたらどうかということになる。 ところが、$\Lambda = \mathbb{Z}^d$ のとき、対応する Hamiltonian は

$$H(\omega) = -\sum_{\langle x,y\rangle \subset \mathbb{Z}^d} \omega(x)\omega(y) - \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} h\,\omega(x)$$

$$\omega \in \Omega = \{+1,-1\}^{\mathbb{Z}^d}$$

となり、発散してしまう。

従って直接 Hamiltonian を考えることはできない。 しかし観測値 $\langle f \rangle_\Lambda$ としては $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ のとき極限をもつ。 この極限の意味を別の言葉で述べてみる。

今、Ω_Λ 上の確率 P_Λ を

$$P_\Lambda(\sigma) = Z_\Lambda^{-1} \exp\{-\beta H_\Lambda(\sigma)\}$$

によって与え、これから Ω 上の確率 $\widetilde{P}_\Lambda$ を $\sigma \in \Omega_\Lambda$, $\zeta \in \Omega_{\Lambda'}$（$\Lambda' \cap \Lambda = \phi$）に対して

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\tilde{P}_\Lambda(\omega\in\Omega;\ \omega(x)=\sigma(x)\ \forall x\in\Lambda,\ \omega(y)=\eta(y)\ \forall y\in\Lambda')$$

$$=P_\Lambda(\sigma)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{|\Lambda'|}$$

で定義するとき、

$$\langle f\rangle_\Lambda=\int_\Omega f(\omega)\,\tilde{P}_\Lambda(d\omega)$$

とかけるから、$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d}\langle f\rangle_\Lambda$ の存在はΩ上で$\tilde{P}_\Lambda$が$\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d$のとき何かある確率分布に収束することを示唆している。そこでΩ上のこの確率分布を調べることによって相転移現象は説明できるのではないかと期待される。こうして出てきたのがΩ上のGibbs分布という概念である。

§1. 定義と基本的な性質

$\Omega=\{+1,-1\}^{\mathbb{Z}^d}$ を Configuration space と呼ぶ。Ωの位相は$\{+1,-1\}$の二点集合の直積位相で与える。$x\in\mathbb{Z}^d$に対し

$$X_x(\omega)\equiv\omega(x)$$

とし、$\omega\in\Omega$のx座標と呼ぶ。$\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$に対し$\mathcal{B}_\Lambda$を$\{X_x;\ x\in\Lambda\}$を可測にする最小の$\sigma$-field ($\mathcal{B}_\Lambda=\sigma\{X_x;\ x\in\Lambda\}$)とする。

$$\mathcal{B}_0=\bigcup_{|\Lambda|<\infty}\mathcal{B}_\Lambda$$

の元を <u>cylinder set</u> と呼び、$\mathcal{B}_0$-可測な関数を <u>tame ft.</u> と呼ぶことにする。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$\omega \in \Omega$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ ($|\Lambda| < \infty$) に対し、外部条件 ω の Λ 上の Hamiltonian H_Λ^ω を $\sigma \in \Omega_\Lambda$ に対し

$$(1.1) \quad H_\Lambda^\omega(\sigma) = H_\Lambda(\sigma) - \sum_{\substack{\langle x, y\rangle \\ x\in\Lambda,\, y\in\partial\Lambda}} \sigma(x)\,\omega(y)$$

で定義し、更に、外部条件 ω の Λ 上の有限 Gibbs 分布 P_Λ^ω を

$$(1.2) \quad P_\Lambda^\omega(\sigma) = [\, Z_\Lambda^\omega\,]^{-1} \exp[-\beta H_\Lambda^\omega(\sigma)\,],$$

$$Z_\Lambda^\omega = \sum_{\sigma\in\Omega_\Lambda} \exp[-\beta H_\Lambda^\omega(\sigma)\,]$$

と定義する。 P_Λ^ω の Ω 上への拡張 $\tilde{P}_\Lambda^\omega$ を

$$(1.3) \quad \begin{cases} \tilde{P}_\Lambda^\omega(\omega'\in\Omega;\ \omega'(x)=\omega(x)\ \ \forall x\in\Lambda^c) = 1 \\[2ex] \tilde{P}_\Lambda^\omega(\omega'\in\Omega;\ \omega'(x)=\sigma(x)\ \ \forall x\in\Lambda) = P_\Lambda^\omega(\sigma),\ \sigma\in\Omega_\Lambda \end{cases}$$

によって定義する。

定義 1.1 (Ω, $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^d}$) 上の確率測度 μ がパラメーター (β, h) の Gibbs 分布であるとは、任意の $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ ($|\Lambda| < \infty$), 及び任意の $A \in \mathcal{B}_\Lambda$ に対して

$$(1.4) \quad \mu(A \mid \mathcal{B}_{\Lambda^c})(\omega) = \tilde{P}_\Lambda^\omega(A) \qquad \mu\text{-a.s.}$$

が成り立つことをいう。 ここに $\mu(\cdot \mid \mathcal{B}_{\Lambda^c})(\cdot)$ は、μ の $\mathcal{B}_{\Lambda^c}$ に関する regular conditional probability distribution である。

注意 (1.4) が成り立つ様な μ が存在するためには、系 $\{ P_\Lambda^\omega ;\ \Lambda \subset \mathbb{Z}^d\ (|\Lambda| < \infty),\ \omega \in \Omega \}$ が consistent; i.e.

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$\Lambda \subset \Lambda'$ のとき、任意の $A \in \mathcal{B}_\Lambda$, $B \in \mathcal{B}_{\Lambda' \setminus \Lambda}$ に対して

$$(1.5) \quad \tilde{P}_{\Lambda'}^{\omega}(A \cap B) = \int_B \tilde{P}_{\Lambda}^{\omega'}(A)\, \tilde{P}_{\Lambda'}^{\omega}(d\omega') \qquad \forall \omega \in \Omega$$

が成り立っていなくてはならない。 今の場合(1.5)は簡単に確かめることができる。

$\mathcal{G}(\beta, h)$ をパラメーター (β, h) の Gibbs 分布の全体とする。§0で述べたことと定義1.1の関係は次の Proposition によって説明される。

<u>Proposition 1.1.</u> §0の $\{\tilde{P}_\Lambda\}_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d}$ の集積点はすべて $\mathcal{G}(\beta, h)$ の元となる。 すなわち、$\mathcal{G}(\beta, h)$ は任意の (β, h) に対して空でない。

<u>証明</u> $\Lambda \cup \partial\Lambda \subset \Lambda'$ とする。 このとき

$$H_{\Lambda'}(\sigma) = H_{\Lambda}^{\sigma_2}(\sigma_1) + H_{\Lambda' \setminus \Lambda}(\sigma_2),$$

ただし、$\sigma_1 = \sigma|_\Lambda$, $\sigma_2 = \sigma|_{\Lambda' \setminus \Lambda}$ とする。 これより、

$$\begin{aligned}
P_{\Lambda'}(\sigma) &= Z_{\Lambda'}^{-1} \cdot \exp\{-\beta H_{\Lambda}^{\sigma_2}(\sigma_1) - \beta H_{\Lambda' \setminus \Lambda}(\sigma_2)\} \\
&= P_{\Lambda}^{\sigma_2}(\sigma_1) \cdot Z_{\Lambda'}^{-1} \cdot Z_{\Lambda}^{\sigma_2} \cdot \exp\{-\beta H_{\Lambda' \setminus \Lambda}(\sigma_2)\} \\
&= P_{\Lambda}^{\sigma_2}(\sigma_1) \cdot P_{\Lambda'}(\tilde{\sigma} \in \Omega_{\Lambda'};\ \tilde{\sigma}|_{\Lambda' \setminus \Lambda} = \sigma_2) \\
&= \int_{[\sigma_2]} P_{\Lambda}^{\tilde{\sigma}}(\sigma_1)\, \tilde{P}_{\Lambda'}(d\tilde{\sigma})
\end{aligned}$$

ただし、$[\sigma_2] = \{\tilde{\sigma} \in \Omega;\ \tilde{\sigma}|_{\Lambda' \setminus \Lambda} = \sigma_2\}$ とする。 Λ をとめるとき、$P_{\Lambda}^{\tilde{\sigma}}$ は $\tilde{\sigma}$ について連続(実は tame ft.) だから

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$\tilde{P}_\Lambda$ の $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ での集積点（測度の弱収束の意味で）の一つを μ とすると、$\hat{\Lambda} \supset \Lambda \cup \partial\Lambda$ に対して

$$\mu(\omega \in \Omega;\ \omega|_{\hat{\Lambda}} = \sigma)$$

$$= \int_{[\sigma|_{\hat{\Lambda}\setminus\Lambda}]} P_\Lambda^\omega(\sigma_1)\ \mu(d\omega)$$

が任意の $\sigma \in \Omega_{\hat{\Lambda}}$ について成り立つ。 これは $\mu \in \mathcal{G}(\beta, h)$ であることを示している。 (Q.E.D.)

<u>注意</u> Griffiths の不等式を使うと $\tilde{P}_\Lambda$ は $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ のときある Ω 上の確率測度に収束することが示せる。 しかし、ここでは必要ではないので省略する。 Griffiths の不等式については後述する。

<u>Proposition 1.2.</u> 任意の (β, h) に対して次の二つのことが成り立つ。

(i) $\mathcal{G}(\beta, h)$ は Compact かつ Convex。 従って Choquét の意味で simplex 。

(ii) $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \cdots \subset \Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ $(n \to \infty)$ を勝手に与えたとき

$$\mathcal{G}(\beta, h) = \overline{\mathrm{Conv.}\{\mu;\ \mu \text{ はある } \omega \in \Omega \text{ に対し } \{\tilde{P}_{\Lambda_n}^\omega\} \text{ の集積点}\}},$$

ただし、Conv. A は A の凸包，$\bar{A}$ は測度の弱収束の意味での A の閉包。

<u>証明</u> (i) は (1.4) 式を $A \in \mathcal{B}_\Lambda$, $B \in \mathcal{B}_{\Lambda^c}$ に対し

$$\mu(A \cap B) = \int_B P_\Lambda^\omega(A)\ \mu(d\omega)$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

と書き直すと、$P_\Lambda^\omega(A)$ は ω に関して連続だから、$\mu_n \in \mathcal{G}(\beta,h)$ $\mu_n \Rightarrow \mu$ (weakly) ならば、$B \in \mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}_{\Lambda^c}$ に対して μ に関して上式が成立。よって $\mu \in \mathcal{G}(\beta,h)$。すなわち $\mathcal{G}(\beta,h)$ は closed。Ω 上の確率測度の全体はこの位相で compact だから $\mathcal{G}(\beta,h)$ も compact。$\mathcal{G}(\beta,h)$ が convex なのは明らか。これにより、Choquet の意味で $\mathcal{G}(\beta,h)$ は simplex。つまり、$\mathcal{G}(\beta,h)$ の元の端点による表現は一意的。

(ii) は、まず Prop. 1.1 と同様にして 左辺 $\supset$ 右辺 は示せる。逆を示す。$\mathcal{G}(\beta,h)$ は convex だから、その端点がある $\omega \in \Omega$ に対して $\{\tilde{P}_{\Lambda_n}^\omega\}$ の集積点となっていることを示せば十分。

μ^* を $\mathcal{G}(\beta,h)$ の端点とすると、定義より

$$(1.6) \qquad \mu^*(\cdot \mid \mathcal{B}_{\Lambda_n^c})(\omega) = \tilde{P}_{\Lambda_n}^\omega(\cdot) \qquad \mu^*\text{-a.s.} \quad \forall n \geq 1.$$

一方、$\{\mathcal{B}_{\Lambda_n^c}\}_{n=1}^\infty$ は単調に減少する σ-field の列だから、条件付確率の収束定理 (Doob の定理の一部) により

$$(1.7) \qquad \mu^*(\cdot \mid \mathcal{B}_{\Lambda_n^c})(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu^*(\cdot \mid \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{B}_{\Lambda_n^c})(\omega)$$

が μ^*-a.s. で成り立つ。右辺を μ_ω^* とかくことにする。このとき、(1.6), (1.7) により

$$\tilde{P}_{\Lambda_n}^\omega \longrightarrow \mu_\omega^* \qquad \mu^*\text{-a.s.}$$

だから、$\mu_\omega^* \in \mathcal{G}(\beta,h)$ μ^*-a.s.。ところが、任意の $A \in \mathcal{B}_0$ に対して

$$\mu^*(A) = \int \mu_\omega^*(A)\, \mu^*(d\omega)$$

が成り立つから、これより、この式は勝手な $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}^d}$ に対して成り立つ。μ^* は $\mathcal{G}(\beta,h)$ の端点だったから、このとき

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\mu^*_\omega = \mu^* \quad (\mu^*\text{-a.s.})$$

でなくてはならない。 よってとくに

$$\exists \omega \in \Omega \quad \text{s.t.} \quad \mu^* = \lim_{n\to\infty} \tilde{P}^\omega_{\Lambda_n}$$

が成り立つ。 (Q.E.D.)

Proposition 1.2 により $\mathcal{G}(\beta, h)$ の勝手な元は端点によって一意的に表現されてしまうことがわかる。 そこでまず $\mathcal{G}(\beta, h)$ の端点の特徴づけが必要となる。 これは、宮本 [31], Dynkin [11] 等によって明らかにされた。 (宮本 [30], [31] 参照)

記号として

$$\mathcal{B}_\infty \equiv \bigcap_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d,\ |\Lambda| < \infty} \mathcal{B}_{\Lambda^c}$$

を準備しておく。

<u>Proposition 1.3.</u> $\mu \in \mathcal{G}(\beta, h)$ について次の三つは同値。

(i) μ は $\mathcal{G}(\beta, h)$ の端点

(ii) $\mathcal{B}_\infty$ は μ に関して trivial, i.e.

$$\mu(A) = 0 \text{ or } 1 \qquad \forall A \in \mathcal{B}_\infty$$

(iii) μ-a.a. ω に対して、$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \cdots \subset \Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda_n| < \infty$ ($\forall n \geq 1$) なる列に対して

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \tilde{P}^\omega_{\Lambda_n}$$

が測度の弱収束の意味で成り立つ。

<u>証明</u> (i) ⇒ (iii) は Prop. 1.2 (ii) で証明した。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

(iii) ⇒ (ii) を示す。 $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda|, |\Lambda'| < \infty$, $\Lambda \cap \Lambda' = \phi$ とする。 $A \in \mathcal{B}_\Lambda$, $B \in \mathcal{B}_{\Lambda'}$ に対して

$$\mu(A \cap B) = \int_B P_\Lambda^\omega(A)\,\mu(d\omega)$$

とかける。いま、$\overline{B} \in \mathcal{B}_\infty$ をとってくる。 $\forall n \geq 1$, $\forall \varepsilon > 0$ に対して $m \geq n$, $B \in \mathcal{B}_{\Lambda_m \setminus \Lambda_n}$ をとって

$$\mu(B \triangle \overline{B}) < \varepsilon$$

とできる。ただし、$B \triangle \overline{B} = (B \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus B)$ は B と $\overline{B}$ との対称差。そこで、$\Lambda_n \supset \Lambda$ なる n を 1 つ fix して $A \in \mathcal{B}_\Lambda$ のとき

$$\mu(A \cap B) = \int_B \widetilde{P}_{\Lambda_n}^\omega(A)\,\mu(d\omega)$$

だから、

$$\left| \mu(A \cap \overline{B}) - \int_{\overline{B}} \widetilde{P}_{\Lambda_n}^\omega(A)\,\mu(d\omega) \right| < 2\varepsilon$$

となる。 $\varepsilon > 0$ は任意だから結局 $\Lambda_n \supset \Lambda$ となる任意の n で

$$\mu(A \cap \overline{B}) = \int_{\overline{B}} \widetilde{P}_{\Lambda_n}^\omega(A)\,\mu(d\omega)$$

が成り立つ。 $n \to \infty$ のとき $\widetilde{P}_{\Lambda_n}^\omega \Rightarrow \mu$ (μ-a.s.) だから有界収束定理により

$$\mu(A \cap \overline{B}) = \int_{\overline{B}} \mu(A)\,\mu(d\omega) = \mu(A)\,\mu(\overline{B})。$$

この式は $A \in \mathcal{B}_0$, $\overline{B} \in \mathcal{B}_\infty$ ならいつでも成り立つから、A は更に $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^d}$ の勝手な元にとれる。とくに $A = \overline{B}$ ととれば

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\mu(\overline{B}) = \mu(\overline{B})^2, \quad \text{i.e.} \quad \mu(\overline{B}) = 0 \text{ or } 1.$$

(ii)⇒(i) を示す。

$$\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 \ , \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}(\beta, h),$$

($0 \leq \lambda \leq 1$)とする。条件付確率の収束定理により、μ－a.s. で

$$\tilde{P}^{\omega}_{\Lambda_n} \Rightarrow \mu(\cdot \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega) \qquad (n \to \infty)\ 。$$

ところがいま $\mathcal{B}_\infty$ は μ で trivial だから $\mu(\cdot \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)$ は定数, i.e. $\mu(\cdot \mid \mathcal{B}_\infty) = \mu$ (μ－a.s.)。また、μ_1－a.s.で

$$\tilde{P}^{\omega}_{\Lambda_n} \Rightarrow \mu_1(\cdot \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega) \qquad (n \to \infty)$$

だが、μ_1 は μ に絶対連続だから、$\mu_1(\cdot \mid \mathcal{B}_\infty) = \mu$ (μ_1-a.s.) すなわち

$$\mu_1(A) = \int \mu_1(A \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)\, \mu_1(d\omega) = \mu(A)$$

が任意の $A \in \mathcal{B}_0$ に対して成り立つ。ゆえに $\mu_1 = \mu$。同様に $\mu_2 = \mu$。つまり μ は $\mathcal{G}(\beta, h)$ の端点である。

(Q.E.D.)

§2. 相関不等式

この節では統計力学でよく使われているFKG、GKSの二つの相関不等式を紹介する。証明は付録で与える。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

(A) FKG不等式 (Fortuin, Kasteleyn, Ginibre, Holley)

FKG不等式ははじめ上の最初の3人によって発見されたが、のちにHolleyによって一般化された。ここではHolleyの結果の形で紹介する。([12],[21])

Iを有限な全順序集合、Fを有限集合とするとき、$X = I^F$ 上に順序 $\leq$ を次の様に入れる。$x = (x_f \,;\, f \in F)$, $y = (y_f \,;\, f \in F)$ とかくとき

$$x \leq y \iff x_f \leq y_f \quad \forall f \in F .$$

更に $x, y \in X$ に対して $x \vee y$, $x \wedge y$ をそれぞれ

$$(x \vee y)_f = x_f \vee y_f , \quad (x \wedge y)_f = x_f \wedge y_f$$

によって定義する。X上の関数hが increasing (decreasing) であるとは

$$x \leq y \Rightarrow h(x) \leq h(y) \quad (h(x) \geq h(y))$$

となるときに言う。

<u>Theorem 1.1</u> (FKG不等式)
X上の確率測度Pが次の性質をみたすとする。

(1.8a) $\quad P(x) > 0 \qquad \forall x \in X$,

(1.8b) $\quad P(x \vee y) P(x \wedge y) \geq P(x) P(y) \qquad \forall x, y \in X$,

このとき、h_1, h_2を increasing ft.'s とすると

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$(1.9)\quad \langle h_1 h_2 \rangle_P - \langle h_1 \rangle_P \langle h_2 \rangle_P \geq 0$$

ただし、$\langle h \rangle_P = \int h(x)\, P(dx)$ とする。

<u>Proposition 1.4.</u> $\omega \in \Omega$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$ のとき、P_Λ^ωは Ω_Λ 上で(1.8)をみたす。

<u>証明</u> P_Λ^ω について(1.8)を証明するには、両辺の分母を払って証明すればよいから

$$(1.10)\quad H_\Lambda^\omega(\sigma \vee \sigma') + H_\Lambda^\omega(\sigma \wedge \sigma') \leq H_\Lambda^\omega(\sigma) + H_\Lambda^\omega(\sigma')$$

を示せばよい。$(\sigma \vee \sigma')(x) + (\sigma \wedge \sigma')(x) = \sigma(x) + \sigma'(x)$ だから、(1.10)で σ, σ' に関する一次の項は右辺と左辺で等しい。二次の項については次のことを示せばよい。

任意の $\langle x, y \rangle \subset \Lambda$ に対して

(イ) $(\sigma \vee \sigma')(x)(\sigma \vee \sigma')(y) = -1$ or $(\sigma \wedge \sigma')(x)(\sigma \wedge \sigma')(y) = -1$
ならば $\sigma(x)\sigma(y) = -1$ or $\sigma'(x)\sigma'(y) = -1$。

(ロ) $(\sigma \vee \sigma')(x)(\sigma \vee \sigma')(y) = -1$ and $(\sigma \wedge \sigma')(x)(\sigma \wedge \sigma')(y) = -1$
ならば $\sigma(x)\sigma(y) = -1$ and $\sigma'(x)\sigma'(y) = -1$。

(イ), (ロ)は簡単に確かめることができる。 (Q.E.D.)

<u>Corollary 1.1</u> $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$, h を increasing かつ $\mathcal{B}_\Lambda$ − m'ble とする。このとき

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

(1.11) $\omega \le \omega' \Rightarrow \langle h \rangle_\Lambda^{\omega} \le \langle h \rangle_\Lambda^{\omega'}$

ただし，$\langle h \rangle_\Lambda^{\omega} = \int_{\Omega_\Lambda} h(\sigma)\, P_\Lambda^{\omega}(d\sigma)$。

<u>証明</u>

$$\langle h \rangle_\Lambda^{\omega} = \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} h(\sigma) g(\sigma) P_\Lambda^{\omega'}(\sigma) = \langle h g \rangle_\Lambda^{\omega'}$$

とかける。 ただし，

$$g(\sigma) = P_\Lambda^{\omega}(\sigma) \,/\, P_\Lambda^{\omega'}(\sigma)$$

とおく。 このとき g が σ について decreasing なことを示せば Th. 1.1 及び Prop. 1.4 により

$$\langle h \rangle_\Lambda^{\omega} = \langle h g \rangle_\Lambda^{\omega'} \le \langle h \rangle_\Lambda^{\omega'} \langle g \rangle_\Lambda^{\omega'} = \langle h \rangle_\Lambda^{\omega'}$$

が得られる。 g が decreasing なことを示そう。 $\sigma, \sigma' \in \Omega$, $\sigma \le \sigma'$ とする。

$$g(\sigma) \,/\, g(\sigma')$$

$$= [\, P_\Lambda^{\omega}(\sigma) P_\Lambda^{\omega'}(\sigma') \,] \,/\, [\, P_\Lambda^{\omega}(\sigma') P_\Lambda^{\omega'}(\sigma) \,]$$

$$= \exp\{-\beta [\, H_\Lambda^{\omega}(\sigma) + H_\Lambda^{\omega'}(\sigma') - H_\Lambda^{\omega}(\sigma') - H_\Lambda^{\omega'}(\sigma) \,]\}$$

ここで

$$H_\Lambda^{\omega}(\sigma) - H_\Lambda^{\omega'}(\sigma) = - \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x \in \Lambda,\, y \in \partial\Lambda}} \sigma(x) (\omega(y) - \omega'(y))$$

$$H_\Lambda^{\omega'}(\sigma') - H_\Lambda^{\omega}(\sigma') = - \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x \in \Lambda,\, y \in \partial\Lambda}} \sigma'(x) (\omega'(y) - \omega(y))$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

だから、二つの式を加えることにより、

$$H_\Lambda^{\omega}(\sigma) + H_\Lambda^{\omega'}(\sigma') - H_\Lambda^{\omega}(\sigma') - H_\Lambda^{\omega'}(\sigma) \leq 0$$

よって $g(\sigma) \geq g(\sigma')$ となり、g は decreasing。

(Q.E.D.)

(B) GKS不等式 (Griffiths, Kelly, Sherman)

この不等式は最初 Griffiths によって発見されたため、Griffiths の不等式と呼ばれることも多い。ここでは Ginibre [17] による formulation に従う。

X を Compact set, $C(X)$ を X 上の連続関数の全体とし、sup. norm を入れて考える。いま、X 上に prob. meas. μ が与えられたとき、$C(X)$ の部分集合 Q に対して次の三つの条件を考える。

(Q.1) Q は convex cone, $Q \ni 1$, Q は $C(X)$ で closed,

$$f, g \in Q \Rightarrow f \cdot g \in Q,$$

(Q.2) 任意の $f_1, \cdots, f_n \in Q$ に対して

$$\int_X \prod_{j=1}^{n} f_j(x)\,\mu(dx) \geq 0,$$

(Q.3) 任意の $f_1, \cdots, f_n \in Q$ に対して

$$\int \prod_{j=1}^{n} \{ f_j(x) \pm f_j(y) \}\,\mu(dx)\mu(dy) \geq 0$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

ここに ± の符号は各 j ごとに勝手にとるものとする。

$S \subset C(X)$ に対し、

$$Q(S) \equiv \overline{\{ S \text{ の元から生成される正係数多項式} \}}$$

とおく。 closure は $C(X)$ の位相で考える。 更に、$h \in C(X)$ に対して、記号として

$$Z(h) \equiv \int_X e^{-h(x)} \mu(dx),$$

及び、$Z(h) \neq 0$ なる h に対しては、任意の $f \in C(X)$ に対して

$$\langle f \rangle_h \equiv Z(h)^{-1} \int_X f(x) e^{-h(x)} \mu(dx)$$

と定義する。

<u>Theorem 1.2.</u> (GKS不等式)

(i) S が (Q.2) をみたすとき、$e^{-h} \in Q(S)$, $Z(h) \neq 0$ なる $h \in C(X)$ に対して

$$\langle f \rangle_h \geq 0 \qquad {}^\forall f \in Q(S)$$

(ii) S が (Q.2) をみたすとき $-h \in Q(S)$ ならば $e^{-h} \in Q(S)$, $Z(h) \geq 1$。

(iii) S が (Q.3) をみたすとき任意の $f, g, -h \in Q(S)$ に対して

$$\langle fg \rangle_h - \langle f \rangle_h \langle g \rangle_h \geq 0 。$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

<u>Proposition 1.5.</u> $|\Lambda| < \infty$, $S = \{\sigma(x),\ x \in \Lambda\}$ とする。このとき、S は (Q.2), (Q.3) をみたす。ただし、μ としては Ω_Λ 上の $\frac{1}{2}$-Bernoulli prob. meas. をとる。

<u>証明</u> 付録で示すが、実は (Q.3) ⇒ (Q.2) が言えるので、(Q.3) のみ確かめればよい。μ が直積測度だから、結局一つの座標について

$$\int \{\sigma(x)+\omega(x)\}^k \{\sigma(x)-\omega(x)\}^\ell \mu(d\sigma)\mu(d\omega) \geq 0$$

が任意の $k \geq 0$, $\ell \geq 0$ に対して成り立つことを示せば十分。

1°) $k \geq 1$, $\ell \geq 1$ のとき

$$\text{左辺} = \int \{\sigma(x)^2 - \omega(x)^2\}\{\sigma(x)+\omega(x)\}^{k-1}\{\sigma(x)-\omega(x)\}^{\ell-1}\mu(d\omega)\mu(d\sigma)$$

$$= 0$$

2°) $\displaystyle\int \{\sigma(x) \pm \omega(x)\}^{2k} \mu(d\sigma)\mu(d\omega) \geq 0$

は trivial。一方、μ が $\frac{1}{2}$-Bernoulli だから

$$\int \{\sigma(x) \pm \omega(x)\}^{2k+1} \mu(d\sigma)\mu(d\omega)$$

$$= \int \{-\sigma(x) \pm (-\omega(x))\}^{2k+1} \mu(d\sigma)\mu(d\omega)$$

$$= -\int \{\sigma(x) \pm \omega(x)\}^{2k+1} \mu(d\sigma)\mu(d\omega)$$

$$= 0$$

よって (Q.3) は成立する。 (Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

いま、

$$H_\Lambda(\sigma) \equiv -\sum_{\langle x,y\rangle\subset\Lambda}\sigma(x)\sigma(y) - \sum_{x\in\Lambda} h_x\,\sigma(x)$$

ただし、$h_x \geq 0$, $\forall x \in \Lambda$。

とおくと、明らかに $-H_\Lambda \in Q(S)$ であるから、この H_Λ について、$A, B \subset \Lambda$ のとき

(1.12) $\quad \langle \sigma_A \rangle_{H_\Lambda} \langle \sigma_B \rangle_{H_\Lambda} \leq \langle \sigma_{A\triangle B} \rangle_{H_\Lambda}$

が成り立つ。ただし、

$$\sigma_A \equiv \prod_{x\in A}\sigma(x) \;, \qquad A\triangle B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$$

とする。また、(1.12) の右辺は $\langle \sigma_A\,\sigma_B \rangle_{H_\Lambda}$ と書いてもよい。

§3. 相転移

定義1.1 で与えた Gibbs 分布は $(\Omega, \mathcal{B}_{Z^d})$ 上一意的に定まるとは限らない。しかし、パラメーター (β, h) の値によっては一意的な場合もある。$\mathcal{G}(\beta, h)$ が二つ以上の元を持つとき、(β, h) において相転移(相の共存)がおこっているという。$\mathcal{G}(\beta, h)$ がただ一つの元から成るときは (β, h) において相は一つである(相転移はおこっていない)という。この節では相転移がどの様なパラメーターの値 (β, h) に対しておこっているかを調べる。

$\omega^+, \omega^- \in \Omega$ をそれぞれ

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\omega^+(x) = +1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d, \quad \omega^-(x) = -1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

として定義する。このとき次の結果が成り立つ。

Lemma 1.1. $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$ とする。h が $\mathcal{B}_\Lambda$-m'ble, increasing のとき,

(i) $\langle h \rangle_\Lambda^{\omega^-} \leq \langle h \rangle_\Lambda^{\omega} \leq \langle h \rangle_\Lambda^{\omega^+} \quad \forall \omega \in \Omega$,

(ii) $\Lambda' \supset \Lambda$, $|\Lambda'| < \infty$ のとき

(1.13a) $\langle h \rangle_\Lambda^{\omega^-} \leq \langle h \rangle_{\Lambda'}^{\omega^-}$

(1.13b) $\langle h \rangle_\Lambda^{\omega^+} \geq \langle h \rangle_{\Lambda'}^{\omega^+}$

証明 (i) は Cor. 1.1 の (1.11) により明らか。(ii) については (1.5) により

$$\langle h \rangle_{\Lambda'}^{\omega^+} = \int \langle h \rangle_\Lambda^{\omega} P_{\Lambda'}^{\omega^+}(d\omega)$$

とかけることに注意して (i) を使うと明らか。ω^- についても同様。(Q.E.D.)

いま，勝手に $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \cdots \subset \Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ なる列を固定しておく。($|\Lambda_n| < \infty \quad \forall n \geq 1$ とする。) このとき上の lemma により次のことが成り立つ。

Proposition 1.6.
(i) $\mu_+ = \lim_{n\to\infty} P_{\Lambda_n}^{\omega^+}$, $\mu_- = \lim_{n\to\infty} P_{\Lambda_n}^{\omega^-}$ が存在。これらは $\{\Lambda_n\}_{n\geq 1}$ のとり方によらない。
(ii) μ_+, μ_- は $\mathcal{G}(\beta, h)$ の端点。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

(iii) $\mu_+ \neq \mu_- \iff$ (β, h) において相転移がある。

証明　(i) は (1.13) によりほぼ明らか。tame increasing functions 全体は (Ω, $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^d}$) 上の確率測度を決定する。(i. e. 勝手な tame ft. は tame increasing ft.'s の一次結合で書け、tame functions 全体は $C(\Omega)$ で dense 。) (1.13) の単調性により、μ_+, μ_- が $\{\Lambda_n\}_{n\geq 1}$ の列のとり方によらないことがわかる。

(ii) は μ を $\mathcal{G}(\beta, h)$ の勝手な端点とすると、Prop. 1.3 により、ある $\omega \in \Omega$ に対して

$$\mu = \lim_{n\to\infty} P^{\omega}_{\Lambda_n}$$

となる。ここで勝手な tame increasing ft. h に対して lemma1.1 の (i) により

$$\langle h \rangle^{\omega^-}_{\Lambda_n} \leq \langle h \rangle^{\omega}_{\Lambda_n} \leq \langle h \rangle^{\omega^+}_{\Lambda_n}$$

が成り立つ。$n \to \infty$ として

$$(1.14) \quad E_{\mu_-}(h) \leq E_{\mu}(h) \leq E_{\mu_+}(h)$$

が成り立つ。ただし、$E_\mu(h) = \int h(\omega)\,\mu(d\omega)$ とする。
μ_+, μ_- が端点であることは、例えばもし $0 \leq \alpha \leq 1$ に対し

$$\mu_+ = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_- \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}(\beta, h)$$

とすると、(1.14) より $E_{\mu_i}(h) \leq E_{\mu_+}(h)$ $i=1,2$ が任意の tame, increasing ft. h について成り立つ。上の式とあわせてこのとき $\mu_1 = \mu_2 = \mu_+$ である。すなわち μ_+ は端点。μ_- についても同じ。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

(iii) についても (1.14) により、もしも $\mu_+ = \mu_-$ ならば

$$E_{\mu_+}(h) = E_\mu(h) \qquad \forall \mu \in \mathcal{G}(\beta, h)$$

となるから $\mathcal{G}(\beta, h)$ は唯一点から成る。逆は明らか。

(Q.E.D.)

<u>Lemma 1.2</u>. (β, h) で相転移がおこっているとすると、ある $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$$\mu_+(\omega(x) = +1) \neq \mu_-(\omega(x) = +1)。$$

<u>証明</u> $|\Lambda| < \infty$ のとき

$$f_\Lambda(\omega) \equiv \prod_{x \in \Lambda} \{(1 + \omega(x))/2\},$$

$$h_\Lambda(\omega) \equiv \sum_{x \in \Lambda} f_{\{x\}}(\omega) - f_\Lambda(\omega)$$

とおくと、h_Λ は tame increasing。FKG不等式 (1.14) を使うと

$$E_{\mu_-}(h_\Lambda) \leq E_{\mu_+}(h_\Lambda)$$

$$\therefore \quad E_{\mu_+}(f_\Lambda) - E_{\mu_-}(f_\Lambda) \leq \sum_{x \in \Lambda} \{ E_{\mu_+}(f_{\{x\}}) - E_{\mu_-}(f_{\{x\}}) \}$$

右辺は $\sum_{x \in \Lambda} \{\mu_+(\omega(x) = +1) - \mu_-(\omega(x) = +1)\}$ と等しいから、lemma の結論が正しくなければ任意の $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$ に対し、

$$\mu_+(\omega(x) = +1 \quad \forall x \in \Lambda) = \mu_-(\omega(x) = +1 \quad \forall x \in \Lambda)$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

が成り立ち、これは $\mu_+ = \mu_-$ と同値。 (Q.E.D.)

Theorem 1.3.

$h \neq 0$ ならば $\mathcal{G}(\beta, h)$ は唯一点より成る。

この証明は基本的に Lee-Yang の定理によって得られるが、なおいくつかのステップを必要とするため、ここでは省略する。([30], 第3章 §4,5 を参照のこと。そこでは更に、熱力学的極限関数の解析性の破れという古典的な相転移の定義とここでの定義($\mathcal{G}(\beta, h)$ が二つ以上の元をもつということ)との同値性も示されている。)

Theorem 1.4.

$h = 0$ とする。このとき $\forall x \in \mathbb{Z}^d$ に対し

$$\mu_+(\omega(x) = +1) - \mu_-(\omega(x) = +1)$$

は β に関し increasing 。

証明　$X_x(\omega) = \omega(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d$ に対して、

$$E_{\mu_+}(X_x) - E_{\mu_-}(X_x)$$

$$= 2\left[\mu_+(\omega(x) = +1) - \mu_-(\omega(x) = +1)\right]$$

だから、$E_{\mu_+}(X_x) - E_{\mu_-}(X_x)$ が β に関して increasing なことを示せばよい。

$$\langle X_x \rangle_\Lambda^{\omega_-} = \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \sigma(x) P_\Lambda^{\omega_-}(\sigma)$$

$$= \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} (-\sigma(x)) P_\Lambda^{\omega_-}(-\sigma)$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$= - \langle X_x \rangle_\Lambda^{\omega_+}$$

だから、

$$\langle X_x \rangle_\Lambda^{\omega_+} - \langle X_x \rangle_\Lambda^{\omega_-} = 2 \langle X_x \rangle_\Lambda^{\omega_+} 。$$

右辺を β で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta} 2\langle X_x \rangle_\Lambda^{\omega_+} &= 2 \sum_{\langle y,z\rangle \subset \Lambda} \left\{ \langle X_x X_y X_z \rangle_\Lambda^{\omega^+} - \langle X_x \rangle_\Lambda^{\omega_+} \langle X_y X_z \rangle_\Lambda^{\omega_+} \right\} \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{\langle y,z \rangle \\ y\in\Lambda,\, z\in\partial\Lambda}} \left\{ \langle X_x X_y \rangle_\Lambda^{\omega^+} - \langle X_x \rangle_\Lambda^{\omega_+} \langle X_y \rangle_\Lambda^{\omega_+} \right\} \\ &\geq 0 。\end{aligned}$$

最後の不等式は (1.12) で $h_y = \#\{ z \in \partial\Lambda \,;\, \langle y,z \rangle \}$ とおいて得られる。 従って $\langle X_x \rangle_\Lambda^{\omega_+}$ は β に関し increasing。 $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ とすると、これより

$$E_{\mu_+}(X_x) - E_{\mu_-}(X_x) \text{ は increasing}$$

が出てくる。 (Q.E.D.)

Th.1.4. により、いま、ある β_0 で $\mathcal{G}(\beta_0, 0)$ が2点以上から成るとすると、$\beta > \beta_0$ ででも $\mathcal{G}(\beta, 0)$ は2点以上から成ることがわかる。 よって次の Cor. を得る。

<u>Corollary 1.2.</u> $\exists \beta_c \in [0, \infty]$ s.t.

$\beta > \beta_c$ ならば $\mathcal{G}(\beta, 0)$ は二点以上、

$\beta < \beta_c$ ならば $\mathcal{G}(\beta, 0)$ は唯一点よりなる。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

実際にはβ_cの値は$d \geq 2$で有限で、特に$d = 2$のとき

$$(1.15) \qquad \tanh \beta_c = e^{-2\beta_c} \qquad \left(\beta_c = \tfrac{1}{2} \sinh^{-1} 1 \right)$$

によって与えられることがわかっている。（[15], [22], [33] etc.）β_c の d に関する dependence は付録でもう少し詳しく述べることにする。

最後に、よく使う事実として μ_+, μ_- の translation 及び reflection に関する不変性がある。これを紹介しておく。

<u>定義 1.2.</u> $x \in \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$ に対して $\tau_x \omega \in \Omega$ を

$$(\tau_x \omega)(y) = \omega(x+y) \qquad \forall y \in \mathbb{Z}^d$$

によって定義する。特に $e_i \in \mathbb{Z}^d$ を $e_i = (0,0,\cdots 0,\overset{i}{\check{1}},0,\cdots,0)$ なる単位ベクトルとするとき $\tau_i \equiv \tau_{e_i}$ とかくことにする。$\tau_x \omega$ を ω の x-<u>translation</u> と呼ぶ。

<u>定義 1.3.</u> $1 \leq i \leq d$, $k \in \mathbb{Z}$ に対して、i 番目の軸で高さ $\frac{k}{2}$ の reflection $U_i(k)$ を

$$[U_i(k)\omega](x) = \omega(x^1, \cdots, x^{i-1}, k-x^i, x^{i+1}, \cdots, x^d)$$

で定義する。ただし、$x = (x^1, \cdots, x^d) \in \mathbb{Z}^d$ とする。

<u>注意</u> $\tau_i = U_i(k) \circ U_i(k-1) \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1 \leq i \leq d)$ が成り立つ。

<u>Proposition 1.7.</u> μ_+, μ_- は translation 及び reflection に関して不変。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

証明　上の注意により、μ_+, μ_- が reflection で不変なことを示せばよい。$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$ に対して

$$\hat{\Lambda} \equiv U_i(k)\Lambda \equiv \{(x^1, \cdots, x^{i-1}, k-x^i, x^{i+1}, \cdots, x^d) ; x \in \Lambda\}$$

とかくことにする。$\omega \in \Omega$ に対し $\hat{\omega} \equiv U_i(k)\,\omega$ とすると、

$$P_\Lambda^\omega(\sigma) = P_{\hat{\Lambda}}^{\hat{\omega}}(\hat{\sigma}), \quad \text{ただし} \quad \hat{\sigma}(x) = \sigma(\hat{x})$$

と定義する。（$\hat{\hat{x}} = x$ である。）いま、$\{\Lambda_n\}_{n\geq 1}$, $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ $(n\to\infty)$ をそれぞれ

$$\hat{\Lambda}_n = \Lambda_n \qquad (n \geq 1)$$

となるようにとっておく。$\hat{\omega}_+ = \omega_+$ だから

$$P_{\Lambda_n}^{\omega^+}(\sigma) = P_{\Lambda_n}^{\omega^+}(\hat{\sigma}) \qquad \forall \sigma \in \Omega_{\Lambda_n}$$

が成り立つ。f を勝手な tame ft. $\mathcal{B}_{\Lambda_n}$-m'ble とすると、

$$\begin{aligned}
\langle f \rangle_{\Lambda_n}^{\omega^+} &= \sum_{\sigma\in\Omega_{\Lambda_n}} f(\sigma)\, P_{\Lambda_n}^{\omega^+}(\sigma) \\
&= \sum_{\sigma\in\Omega_{\Lambda_n}} f(\sigma)\, P_{\Lambda_n}^{\omega^+}(\hat{\sigma}) \\
&= \langle f \circ U_i(k) \rangle_{\Lambda_n}^{\omega^+}
\end{aligned}$$

$f\circ U_i(k)$ も tame ft. だから、$n\to\infty$ とすると

$$E_{\mu_+}(f) = E_{\mu_+}(f\circ U_i(k)) \qquad 1\leq i\leq d,\ k\in\mathbb{Z}$$

（Q. E. D.）

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

Chapter II. Percolation の方法

§1. Percolation と相転移

第一章 §3で (β, h) の値による相の共存の状態の変化を調べた。 特に二次元では $\beta_c = \frac{1}{2}\sinh^{-1}1$ によって、$h \neq 0$ or $h=0, \beta<\beta_c$ のとき相はただ一つ（実は $d=2$ のとき $\beta = \beta_c$ においても相はただ一つであることが知られている。; [26]参照）、$h=0$, $\beta>\beta_c$ のとき相転移がおこっている。相転移がおこっているとき $\mu_+ \neq \mu_-$ で、これらはともに $\mathcal{G}(\beta, 0)$ の元だが、その外にどの様な元が $\mathcal{G}(\beta, 0)$ に含まれているのだろうか？ この問題に答えるためには Russo の提案した percolation の方法が必要である。 そして、この方法は二次元特有の議論を含んでおり、今のところ $d \geq 3$ には有効でない。 三次元以上と二次元で結果が異なってくるのはこのためである。以下、この章では常に $d=2$ を仮定する。 まず、用語の準備から始める。

$\mathbb{Z}^2$ を平面格子とし、これをグラフと見たとき二つの連結性を考える。

（イ） $x, y \in \mathbb{Z}^2$ が nearest neighbour のとき。 （$\langle x, y\rangle$ とかく。）

（ロ） $x, y \in \mathbb{Z}^2$ が $(*)$nearest neighbour のとき、i.e.

$$\max_i |x^i - y^i| = 1$$ のとき。（$\langle x, y\rangle^*$ とかくことにする。）

<u>定義 2.1.</u> $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ と $x, y \in \Lambda$ に対して、x と y が Λ で <u>connected</u>（<u>$(*)$connected</u>）とは、Λ の中に点列 $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ がとれて、

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

(i) $x_0 = x$, $x_n = y$,

(ii) $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ ($\langle x_{k-1}, x_k \rangle^*$) $k = 1, 2, \cdots, n$

が成り立つことを言う。更に $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ が <u>connected</u> ((*)<u>connected</u>) とは、Λ に属する勝手な二点 x, y が Λ で connected ((*)connected) であるときにいう。

<u>定義 2.2</u>. $\omega \in \Omega$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ (connected) とする。このとき $\omega^{-1}(+1) \cap \Lambda$ の maximal connected components をそれぞれ (Λ 内の) ω の $+$<u>cluster</u> と呼ぶ。$+$(*)<u>cluster</u> は maximal (*)connected components に対して使う。$-$ <u>cluster</u>, $-$(*)<u>cluster</u> も同様に定義する。

<u>定義 2.3</u>. $\gamma = \{x_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{Z}^2$ が $\omega \in \Omega$ に対して、$+$<u>chain</u> であるとは

(i) $\omega(x_k) = +1$ $k = 1, 2, \cdots, n$,

(ii) $\langle x_k, x_j \rangle \Longleftrightarrow |k - j| = 1$

の二条件が成り立つときにいう。更に γ が $+$<u>circuit</u> であるというのは、$x_1 = x_{n+1}$ とおいて $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ が $+$chain になっているときにいう。

$+$(*) <u>chain</u>, $+$(*) <u>circuit</u>, $-$ <u>chain</u>, $-$(*)<u>chain</u>, $-$<u>circuit</u> $-$(*) <u>circuit</u> も同様に定義する。

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ (connected), $\omega \in \Omega$ のとき、(Λ 内での) ω の $+$cluster のうち、とくに無限個の点を含むものがあるとき、それらを $\infty+$clusters と呼び、その和集合 ($\infty+$clusters 全部の和) を $I_+(\Lambda)$ とかく。$I_+^{(*)}(\Lambda)$, $I_-(\Lambda)$, $I_-^{(*)}(\Lambda)$ の意味は明らかだろう。percolation の方法とは、この $I_+(\Lambda)$ の存在する確率を調べることである。$I_+(\Lambda)$ と相転移の関係は次の proposition によって示されている。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

<u>Proposition 2.1.</u> $\mu_+ \neq \mu_-$ とする。このとき、

$$\mu_+ \left(I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi,\ I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2) = \phi \right) = 1,$$

$$\mu_- \left(I_-(\mathbb{Z}^2) \neq \phi,\ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) = \phi \right) = 1.$$

この節では Prop. 2.1 の証明を目標とする。

<u>Lemma 2.1.</u> $\mu \in \mathcal{G}(\beta, h)$ が

$$(2.1) \qquad \mu \left(I_-(\mathbb{Z}^2) = \phi \right) = 1$$

をみたすならば $\mu = \mu_+$ である。

<u>証明.</u> (2.1) が成り立っているとすると、μ-a.s. で任意の $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, $|\Lambda| < \infty$ に対して、Λ を囲む $+(*)$circuit が存在しなくてはいけない。$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, $|\Lambda| < \infty$ を任意に一つ固定して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\Lambda' \supset \Lambda$, $|\Lambda'| < \infty$ を十分大にとると、上のことから

$$\mu\left(\Lambda' \text{内に} \Lambda \text{を囲む} +(*)\text{circuit が存在} \right) > 1 - \varepsilon$$

とできる。いま Λ' 内で Λ を囲む $(*)$ circuit C を勝手にとってくる。

$$A_C \equiv \left\{ \omega \in \Omega ;\ \begin{array}{l} C \text{ が } \Lambda' \text{ 内で } \Lambda \text{ を囲む maximal な} \\ +(*)\text{circuit。} \end{array} \right\}$$

とおくと、

$$\sum_C{}^{*} \mu(A_C) > 1 - \varepsilon$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

ただし、$\sum_C^*$ はΛ'内Λを囲む(*)circuits についての和とする。
fを$\mathcal{B}_\Lambda$-m'ble increasing ft. とすると

$$E_\mu(f) \geq \sum_C^* E_\mu(f \cdot I_{A_C}) - \|f\| \cdot \varepsilon$$

ただし、$\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$ とする。

$\Lambda(C)$をCによって囲まれる点の全体、ただし、$\Lambda(C) \cap C = \phi$ とする。明らかに $\Lambda(C) \supset \Lambda$ だから、Gibbs 分布の定義により

$$E_\mu(f \cdot I_{A_C}) = \int_{A_C} \langle f \rangle^{\omega}_{\Lambda(C)} \mu(d\omega)$$

となる。（$A_C \in \mathcal{B}_{\Lambda^c}$ であることに注意！）$\omega \in A_C$ のとき、$\partial \Lambda(C) = C$ 上では $\omega(x) = +1$ だから、

$$\langle f \rangle^{\omega}_{\Lambda(C)} = \langle f \rangle^{\omega^+}_{\Lambda(C)}$$

である。従ってFKG不等式を使うと

$$\begin{aligned} E_\mu(f \cdot I_{A_C}) &= \langle f \rangle^{\omega^+}_{\Lambda(C)} \cdot \mu(A_C) \\ &\geq E_{\mu_+}(f) \cdot \mu(A_C)。\end{aligned}$$

もとの式にこれを代入して、

$$E_\mu(f) \geq (1-\varepsilon) E_{\mu_+}(f) - \|f\| \cdot \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ として $\mu = \mu_+$ を得る。（Q.E.D.）

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$\mathbb{Z}^2$ の connected subsets として次のものを考える。

$$\mathbb{Z}^2_u \equiv \{ x \in \mathbb{Z}^2 ;\ x^2 \geq 0 \}, \qquad \mathbb{Z}^2_d \equiv \{ x \in \mathbb{Z}^2 ;\ x^2 \leq 0 \}$$

$$\mathbb{Z}^2_r \equiv \{ x \in \mathbb{Z}^2 ;\ x^1 \geq 0 \}, \qquad \mathbb{Z}^2_\ell \equiv \{ x \in \mathbb{Z}^2 ;\ x^1 \leq 0 \}.$$

<u>Lemma 2.2.</u> $h = 0$ とする。このとき $\mu \in \mathcal{G}(\beta, 0)$ が

$$\mu (I_+ (\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) = 0$$

をみたすならば、任意の tame increasing ft. f に対して

$$(2.2) \qquad E_\mu(f) \leq E_\mu (f \circ (-U_2(0))),$$

ただし、$(-U_2(0))\omega = -(U_2(0)\omega)$ とする。とくに (2.2) で f として $f = I_{\{\omega(0) = +1\}}$ とおくと、

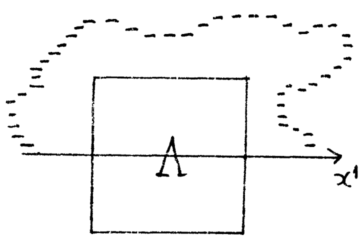
$$\mu (\omega(0) = +1) \leq \mu (\omega(0) = -1)$$

すなわち、$\mu(\omega(0) = +1) \leq \frac{1}{2}$ が成り立つ。

<u>証明</u> f は $\mathcal{B}_\Lambda$ − m'ble ($|\Lambda| < \infty$) とする。Λ としては

$$\hat{\Lambda} \equiv U_2(0)\Lambda = \Lambda$$

となるものをとっておく。$\mu (I_+ (\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) = 0$ だから μ − a.s. で x^1 軸から出て Λ を $\mathbb{Z}^2_u$ 内で囲み x^1 軸にもどる −(*)chain (これを Λ を囲む $\mathbb{Z}^2_u$ − (*) <u>half circuit</u> と呼ぶことにする。) が存在する。



再び任意の $\varepsilon > 0$ に対し Λ' を

$$\hat{\Lambda'} = \Lambda'$$

として十分大にとっておくと、

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\mu(\Lambda' \text{の中で} \Lambda \text{を囲む} \mathbb{Z}_u^2 \text{ の } -(*) \text{half circuit が存在})$$

$$> 1 - \varepsilon$$

とできる。 $\mathcal{S}$ を Λ' 内で Λ を囲む $\mathbb{Z}_u^2$ の勝手な (*) half circuit として、

$$A_{\mathcal{S}} \equiv \left\{ \omega \in \Omega;\ \begin{array}{l} \mathcal{S} \text{ が } \Lambda' \text{ の中で } \Lambda \text{ を囲む maximal な } \mathbb{Z}_u^2 \\ \text{の } -(*) \text{ half circuit} \end{array} \right\},$$

$$\omega_1(x) \equiv \begin{cases} +1 & \text{if } x^1 \geq 0, \\ -1 & \text{if } x^1 < 0, \end{cases} \qquad \omega_2(x) \equiv \begin{cases} +1 & \text{if } x^1 > 0, \\ -1 & \text{if } x^1 \leq 0, \end{cases}$$

とおくと、

$$E_\mu(f) \leq \sum_{\mathcal{S}}^{*} E_\mu(f \cdot I_{A_{\mathcal{S}}}) + \|f\| \cdot \varepsilon,$$

かつ、

$$E_\mu(f \cdot I_{A_{\mathcal{S}}}) = \int_{A_{\mathcal{S}}} \langle f \rangle_{\Lambda(\mathcal{S} \cup \hat{\mathcal{S}})}^{\omega} \mu(d\omega)$$

である。 明らかに $\omega \in A_{\mathcal{S}}$ のとき $\omega(x) = -1 \quad {}^\forall x \in \mathcal{S}$ だから、FKG 不等式 (1.11) により

$$(2.3) \qquad \int_{A_{\mathcal{S}}} \langle f \rangle_{\Lambda(\mathcal{S} \cup \hat{\mathcal{S}})}^{\omega} \mu(d\omega) \leq \int_{A_{\mathcal{S}}} \langle f \rangle_{\Lambda(\mathcal{S} \cup \hat{\mathcal{S}})}^{\omega_2} \mu(d\omega).$$

ところが、

$$\langle f \rangle_{\Lambda(\mathcal{S} \cup \hat{\mathcal{S}})}^{\omega_2} = \langle f \circ (-U_2(0)) \rangle_{\Lambda(\mathcal{S} \cup \hat{\mathcal{S}})}^{\omega_1}$$

であることに注意して再び (1.11) を使うと、

$$\int_{A_S} \langle f \rangle^{\omega}_{\Lambda(S \cup \hat{S})} \mu(d\omega) \leq \int_{A_S} \langle f \circ (-U_2(0)) \rangle^{\omega_2}_{\Lambda(S \cup \hat{S})} \mu(d\omega)$$

$$\leq E_\mu [(f \circ (-U_2(0)) \cdot I_{A_S}] 。$$

よって

$$E_\mu (f) \leq E_\mu [f \circ (-U_2(0))]$$

(Q. E. D.)

<u>Lemma 2.3.</u> μ は $\mathcal{G}(\beta, h)$ の端点とする。このとき、次の二条件は同値である。

(i) $\mu (I_+(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) = 1$,

(ii) $\mu (I_+(\mathbb{Z}^2_u) \ni (0,0)) > 0$,

$\mathbb{Z}^2_u$ のかわりに $|\Lambda| = \infty$ なる勝手な connected subset $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ をとっても結果は正しい。

<u>証明</u> Prop. 1.3 により $\{ I_+(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi \} \in \mathcal{B}_\infty$ だから (ii) ⇒ (i) は明らか。(i) ⇒ (ii) を示せばよい。

$$\mu (I_+(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) \leqq \sum_{x \in \mathbb{Z}^2_u} \mu (I_+(\mathbb{Z}^2_u) \ni x)$$

だから、少くとも一つは $\mu (I_+(\mathbb{Z}^2_u) \ni x) > 0$ となる $x \in \mathbb{Z}^2_u$ が存在する。このような点 x を一つ固定しておく。γ_1 を $(0,0)$ から $(x^1, 0)$ までの線分、γ_2 を $(x^1, 0)$ から x までの線分とし、$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ とする。γ は $\mathbb{Z}^2_u$ で x と $(0,0)$ を結ぶ chain である。

$$D_\gamma^+ \equiv \{ \omega \in \Omega ; \quad \omega(y) = +1 \qquad \forall y \in \gamma \}$$

とおくと、Prop.1.4 と Th.1.1 を使うことにより

$$\mu((I_+(\mathbb{Z}_u^2) \ni x) \cap D_\gamma^+) \geq \mu[I_+(\mathbb{Z}_u^2) \ni x] \mu(D_\gamma^+)$$

Gibbs 分布の定義により、任意の $z \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$$(2.4) \quad P_{\{z\}}^{\omega}(\omega(z) = +1) \geq \frac{e^{\beta(h-4)}}{e^{\beta(4-h)} + e^{\beta(h-4)}} \equiv a(\beta, h) > 0$$

が成り立つから、

$$\mu(D_\gamma^+) \geq a(\beta, h)^{|\gamma|} > 0$$

これより $\quad \mu(I_+(\mathbb{Z}_u^2) \ni (0,0)) > 0 \quad$ を得る。

(Q.E.D.)

<u>Lemma 2.4.</u> $\quad \mu_+ \neq \mu_- \quad (\beta > \beta_c, \ h = 0)$ とする。
このとき、

$$\mu_+(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \neq \phi) = \mu_-(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \neq \phi) = 0$$

<u>証明</u> まず、μ_+, μ_- の translation invariance と Lemma 1.2 及び FKG 不等式により、

$$\mu_+(\omega(x) = +1) > \mu_-(\omega(x) = +1) \qquad \forall x \in \mathbb{Z}^2 .$$

また、x を含む勝手な Λ $(|\Lambda| < \infty)$ に対して

$$P_\Lambda^{\omega^+}(\sigma(x) = +1) = P_\Lambda^{\omega^-}(\sigma(x) = -1)$$

が (1.1), (1.2) より出てくる。 これより $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2$ として

$$\mu_+(\omega(x)=+1)+\mu_-(\omega(x)=+1)=1。$$

すなわち、 $\mu_+(\omega(x)=+1)>\frac{1}{2}$ を得る。 Lemma 2.2 により、このとき

$$\mu_+(I_+(\mathbb{Z}_u^2)\neq\phi)=1$$

でなくてはならない。 Prop. 1.7 より μ_+ は reflection で不変だから

$$\mu_+(I_+(\mathbb{Z}_d^2)\neq\phi)=1。$$

いま、 $b(\beta)\equiv\mu_+(I_+(\mathbb{Z}_u^2)\ni(0,0))$ とおくと、勝手な $j\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\mu_+(I_+(\mathbb{Z}_d^2)\cap I_+(\mathbb{Z}_u^2)\ni(j,0))\geq b(\beta)^2>0$$

が、FKG不等式と μ_+ の translation invariance から出てくる。

(イ) $\mu_+(I_+(\mathbb{Z}_u^2\cap\mathbb{Z}_r^2)\neq\phi)=0$ のとき、

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\{I_+(\mathbb{Z}_u^2)\cap I_+(\mathbb{Z}_d^2)\ni(j,0)\}\in\mathcal{B}_\infty$$

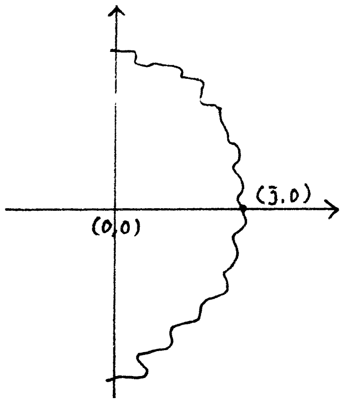
であることに注意すると、この事象は μ_+ で測って確率は0か1である。 明らかに

$$\mu_+\left(\overline{\lim_{j\to\infty}}\{I_+(\mathbb{Z}_u^2)\cap I_+(\mathbb{Z}_d^2)\ni(j,0)\}\right)\geq b(\beta)^2>0$$

だから、この確率は1。 一方、(イ)の仮定により μ_+ − a.s. で $(j,0)\in I_+(\mathbb{Z}_u^2)\cap I_+(\mathbb{Z}_d^2)$ のとき、$I_+(\mathbb{Z}_u^2)$ の $(j,0)$ を含む $\infty+$cluster 及び $I_+(\mathbb{Z}_d^2)$ の $(j,0)$ を含む $\infty+$cluster は、それ

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

ぞれ x^2 軸と $\mathbb{Z}^2_u$, $\mathbb{Z}^2_d$ の中で交わる。従ってこのとき、μ_+-a.s. でこの様な $(j,0)$ は存在するのだから



$$\mu_+\left(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2_r)\ni(0,0)\right)=0$$

でなくてはならない。Lemma 2.3. により、これは

$$\mu_+\left(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2_r)\neq\phi\right)=0$$

と同値。同様にして

$$\mu_+\left(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2_\ell)\neq\phi\right)=0。$$

ここで、いままでの議論で、$\mathbb{Z}^2_u$, $\mathbb{Z}^2_d$ と $\mathbb{Z}^2_r$, $\mathbb{Z}^2_\ell$ の役割を入れかえると、

$$\mu_+\left(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2_u)\neq\phi\right)=0$$

を得る。

（ロ）　$\mu_+\left(I_+(\mathbb{Z}^2_u\cap\mathbb{Z}^2_r)\neq\phi\right)=1$ のとき。

$$\mu_+\left(I_+(\mathbb{Z}^2_u\cap\mathbb{Z}^2_r)\ni(0,0)\right)\equiv\sigma(\beta)$$

とおくと、

$$\mu_+\left(I_+(\mathbb{Z}^2_u\cap\mathbb{Z}^2_r(j))\cap I_+(\mathbb{Z}^2_d\cap\mathbb{Z}^2_r(j))\ni(j,0)\right)$$

$$=\sigma(\beta)^2>0$$

が、μ_+ の reflection 及び translation に関する不変性とFKG不等式によって得られる。ここで再び

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\left\{I_+(\mathbb{Z}^2_u\cap\mathbb{Z}^2_r(j))\cap I_+(\mathbb{Z}^2_d\cap\mathbb{Z}^2_r(j))\ni(j,0)\right\}\in\mathcal{B}_\infty$$

に注意すると、 μ_+ −a.s. で無限個の $j>0$ に対して $(-j,0)$ は $I_+(\mathbb{Z}^2_u \cap \mathbb{Z}^2_r(-j))$ 及び $I_+(\mathbb{Z}^2_d \cap \mathbb{Z}^2_r(-j))$ に含まれる。 ところが、任意の $\mu \in \mathcal{G}(\beta,0)$ に対して

$$\mu\left(\{-j \leq x^1 \leq 0\} \text{ で } \infty\text{-}(*)\text{cluster が存在} \right) = 0$$

が任意の $j>0$ に対して成り立つことが (2.4) より言える。よって μ_+ −a.s. で無限個の j に対して $(-j,0)$ を含む $\mathbb{Z}^2_u \cap \mathbb{Z}^2_r(j)$ 及び $\mathbb{Z}^2_d \cap \mathbb{Z}^2_r(j)$ の ∞ + clusters はそれぞれ $\mathbb{Z}^2_u$, $\mathbb{Z}^2_d$ で x^2 軸と交わる。 すなわち、

$$\mu_+(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2_\ell) \ni (0,0)) = 0 \ , \quad \text{i.e.}$$

$$\mu_+(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2_\ell) \neq \phi) = 0 \text{。}$$

(イ) と同じ論法により、このとき

$$\mu_+(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) = 0$$

(Q.E.D.)

Proposition 2.1 の証明

$\mu_+(I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 0$ とすると、Lemma 2.1 と同じ議論により、$\mu_+ = \mu_-$ となって仮定に反する。 $\{I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi\} \in \mathcal{B}_\infty$ だから、このとき $\mu_+(I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 1$ となる。 一方、Lemma 2.4 により、

$$\mu_+(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) = 0 \ , \ \mu_+(I_+(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) = 1$$

である。 従って μ_+ −a.s. で $\mathbb{Z}^2_u$ の ∞ + cluster は唯一つである。 更に Lemma 2.4. で示した様に、

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\mu_+ \left(\overline{\lim_{j\to\infty}} \{ I_+ (\mathbb{Z}_u^2) \cap I_+ (\mathbb{Z}_d^2) \ni (j,0) \} \right) = 1,$$

$$\mu_+ \left(\overline{\lim_{k\to\infty}} \{ I_+ (\mathbb{Z}_u^2) \cap I_+ (\mathbb{Z}_d^2) \ni (-k,0) \} \right) = 1$$

だから、この二つをあわせて

$$\mu_+ \left(\bigcup_{j>0} \bigcup_{k>0} \{ I_+ (\mathbb{Z}_u^2) \cap I_+ (\mathbb{Z}_d^2) \ni (j,0), (-k,0) \} \right) = 1.$$

を得る。　このとき、μ_+ − a.s. で、ある $k>0$ と $j>0$ に対して $(j,0)$ と $(-k,0)$ を含む $\mathbb{Z}_u^2$ と $\mathbb{Z}_d^2$ の原点を囲む + half circuits が存在。　この二つの + half circuits をあわせると、原点を囲む + circuit となる。　すなわち、

$$\mu_+ (\text{原点を囲む} + \text{circuit が存在}) = 1, \quad \text{i.e.}$$

$$\mu_+ (I_-^{(*)} (\mathbb{Z}^2) = \phi) = 0。$$

μ_- についても同様。　(Q.E.D.)

§2. Semi-infinite states

前節で μ_+ と μ_- に対しての $I_\pm(\mathbb{Z}^2)$, $I_\pm^{(*)}(\mathbb{Z}^2)$ の現われ方を見たが、外に $\mathcal{G}(\beta, 0)$ $(\beta > \beta_c)$ の元があったとして、どの様なものがあるのだろうか？　この問に答えるために、この節では予備的に半平面上での Gibbs 分布 (semi-infinite states) を考える。　$\hat{\omega} \in \Omega$ を

$$\hat{\omega}(x) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad x^2 \geq 0 \\ +1 & \text{if} \quad x^2 < 0 \end{cases}$$

と定義しておく。 別に、

$$\Lambda_n \equiv \{ x \in \mathbb{Z}^2 ;\ \max(|x^1|, |x^2|) \le n \},$$

$$\Lambda_{n,u} \equiv \Lambda_n \cap \mathbb{Z}^2_u ,$$

及び、$\Omega_{n,u} \equiv \Omega_{\Lambda_{n,u}}$ 上の確率測度 $\hat{\mu}_n^+$, $\hat{\mu}_n^-$ を

$$\hat{\mu}_n^+ = P_{\Lambda_{n,u}}^{\omega^+}, \qquad \hat{\mu}_n^- \equiv P_{\Lambda_{n,u}}^{\hat{\omega}}$$

で定義する。 この節の目標は次の Proposition である。

<u>Proposition 2.2.</u> $h=0$, $\beta > \beta_c$ のとき

$$(2.5) \quad \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n^+ = \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n^-$$

等号の意味は、「$n \to \infty$ のとき (2.5) の両辺の極限が存在して等しい」と理解する。

最初に極限の存在から示す。

<u>Lemma 2.5.</u> $\hat{\mu}_+ = \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n^+$, $\hat{\mu}_- = \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n^-$ はともに存在して、

(i) x^2軸に関して reflection invariant,

(ii) x^1軸に関して translation invariant,

(iii) $\hat{\mu}_+$, $\hat{\mu}_-$ は $\mathcal{B}_\infty |_{\Omega_{\mathbb{Z}^2_u}}$ 上 trivial。

<u>証明.</u> $\hat{\mu}_+$ の存在は μ_+ の存在と全く同じに証明でき、(i)〜(iii) も $\hat{\mu}_+$ については μ_+ と同様。 $\hat{\mu}_-$ の存在を示す。 $\tilde{\omega}_n \in \Omega$ を

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\widetilde{\omega}_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad x^2 = 0,\ x^1 = \pm(n+1), \\ \hat{\omega}(x) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とおくと、$\hat{\omega} \geq \widetilde{\omega}_n$ で、f を $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}^2_u}$-m'ble, tame increasing とすると、n が十分大のときFKG不等式により

$$<f>^{\hat{\omega}}_{\Lambda_{n,u}} \leq <f>^{\widetilde{\omega}_n}_{\Lambda_{n+1,u}} \leq <f>^{\hat{\omega}}_{\Lambda_{n+1,u}}$$

となり、$<f>^{\hat{\omega}}_{\Lambda_{n,u}}$ は n に関し単調に増加。これにより (i), (ii) は Prop. 1.7 と同様に示すことができる。(iii) も μ_- が $\mathcal{B}_\infty$ 上 trivial なのと同じ。(Q. E. D.)

次に示す lemma は一見 $\hat{\mu}_+$, $\hat{\mu}_-$ には関係ないが、以下の議論で本質的な役割を果たす。

<u>Lemma 2.6.</u> $\mu \in \mathcal{G}(\beta, 0)$ $(\beta > \beta_c)$ とする。$|\Lambda| < \infty$ に対して $\Lambda_u \equiv \Lambda \cap \mathbb{Z}^2_u$ とかくことにする。このとき、

$$\mu(\Lambda_u \text{ で原点を囲む } +(*) \text{half circuit が存在}) = \delta > 0$$

とすると、

$$\mu\begin{pmatrix} \Lambda_u \text{ で原点が原点を囲む maximal な } +(*) \text{ half} \\ \text{circuit と } +(*) \text{ connected} \end{pmatrix}$$

$$\geq \frac{\delta}{2} \mu_+ (I^{(*)}_+(\mathbb{Z}^2_u) \ni (0,0)) = \frac{\delta}{2} b(\beta)$$

<u>証明</u> S を Λ_u 内原点を囲む勝手な (*) half circuit として

$$A_S \equiv \{\omega \in \Omega : S \text{ が } \Lambda \text{ 内で原点を囲む maximal } +(*) \text{ half circuit}\},$$

$$B_S \equiv \{ \omega \in \Omega ;\ \text{原点は } \mathbb{Z}_u^2 \cap \Lambda(S \cup \hat{S}) \text{ で } S \text{ と } +(*) \text{ connected} \}$$

（ただし，$\hat{S} = U_2(0) S$，$\Lambda(S \cup \hat{S})$ は $S \cup \hat{S}$ によって囲まれる図形）とおく。このとき，

$$\sum_S^* \mu (A_S \cap B_S) \geq \frac{\delta}{2} b(\beta)$$

を証明すればよい。ただし $\sum_S^*$ は Λ_u 内で原点を囲む (*) half circults についての和とする。更に，$\omega_1 \in \Omega$ を Lemma 2.2 の証明の中で与えたものとする。（$\omega_1 = -\hat{\omega}$）FKG不等式により，このとき

$$\mu (B_S \mid A_S) \geq P^{\omega_1}_{\Lambda(S \cup \hat{S})} (B_S)$$

が成り立つ。一方，

$$C_S^+ \equiv \left\{ \omega \in \Omega ;\ \begin{array}{l} \Lambda(S \cup \hat{S}) \text{ で原点は } S \text{ と } +(*) \text{connected} \\ \text{な } +(*) \text{ circuit によって囲まれる。} \end{array} \right\},$$

$$C_S^- \equiv \left\{ \omega \in \Omega ;\ \begin{array}{l} \Lambda(S \cup \hat{S}) \text{ で原点は } \hat{S} \setminus S \text{ と } -(*) \text{connected} \\ \text{な } -(*) \text{ circuit によって囲まれる。} \end{array} \right\}$$

とおくと，

$$P^{\omega_1}_{\Lambda(S \cup \hat{S})} (C_S^+ \cup C_S^-) = 1,$$

また，

$$P^{\omega_1}_{\Lambda(S \cup \hat{S})} (C_S^+) = P^{-U_2(0)\omega_1}_{\Lambda(S \cup \hat{S})} (-U_2(0)\, C_S^+),$$

及び

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$-U_2(0)\,C_S^+ = \left\{ \omega\in\Omega;\ \begin{array}{l}\Lambda(S\cup\hat{S})\ \text{で原点は}\ \hat{S}\ \text{に}\ -(*) \\ \text{connected な}\ -(*)\ \text{circuit に囲まれる} \end{array} \right\}$$

$$\supset C_S^-$$

だから、

$$P^{-U_2(0)\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(-U_2(0)\,C_S^+) \geq P^{-U_2(0)\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(C_S^-)。$$

$I_{C_S^-}$ は decreasing で $-U_2(0)\omega_1 \leq \omega_1$ だから

$$P^{-U_2(0)\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(C_S^-) \geq P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(C_S^-)。$$

以上をあわせると、

$$P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(C_S^+) \geq \frac{1}{2}。$$

ゆえに、

$$\mu(B_S \mid A_S) \geq P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(B_S) \geq \frac{1}{2} P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(B_S \mid C_S^+)$$

を得る。 γ を $\Lambda(S\cup\hat{S})$ 内の原点を囲む $(*)$circuit,

$$D_\gamma \equiv \left\{ \omega\in\Omega;\ \begin{array}{l}\gamma\ \text{が原点を囲み}\ S\ \text{と}\ +(*)\ \text{connected な} \\ \Lambda(S\cup\hat{S})\ \text{で maximal な}\ +(*)\ \text{circuit。} \end{array} \right\}$$

とおくと、

$$C_S = \sum_{\gamma\subset\Lambda(S\cup\hat{S})} D_\gamma$$

とかける。 よって

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(B_S \mid C_S^+)$$

$$= \sum_{\gamma\subset\Lambda(S\cup\hat{S})} P^{\omega^+}_{\Lambda(\gamma)}(\text{原点は}\ \gamma\ \text{と}\ +(*)\text{connected})\, P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(D_\gamma) \Big/ P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(C_S^+)。$$

ところがＦＫＧ不等式により

$$P^{\omega^+}_{\Lambda(\gamma)}(\text{原点は}\ \gamma\ \text{と}\ +(*)\text{connected}) \geq \mu_+(I_+(\mathbb{Z}^2_u) \ni (0,0))$$

よって

$$(2.6)\quad P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(B_S \mid C_S^+) \geq b(\beta)$$

すなわち.

$$\sum_S{}^* \mu(A_S \cap B_S)$$

$$\geq \frac{1}{2}\, b(\beta) \sum_S{}^* \mu(A_S) = \frac{\delta}{2} b(\beta).$$

(Q.E.D.)

$k \geq 0$ に対し.

$$E_k \equiv \{\omega \in \Omega;\ (0,k)\ \text{が}\ x^1\text{軸と}\ +(*)\ \text{connected}\}$$

とおく。 このとき次の lemma が成り立つ。

<u>Lemma 2.7.</u> $h=0$, $\beta > \beta_c$ のとき

$$\hat{\mu}_-(E_k) \geq \frac{1}{2}\, b(\beta).$$

<u>証明</u> 任意の $\xi \in \mathbb{Z}$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$F_{j,k} \equiv \{\omega \in \Omega ;\ \omega(j,\ell) = +1 ,\ \ell = 0,1,2,\cdots,k\}$$

とおく。 Gibbs分布の評価 (2.4) を使うことにより

$$\hat{\mu}_-\Big(\bigcup_{j,j'>0} \{ F_{j,k} \cap F_{-j',k} \} \Big) = 1$$

が得られる。 従って任意の $\varepsilon > 0$ に対し N を十分大にとると

$$\hat{\mu}_-\Big(\bigcup_{0<j,j'<N} \{ F_{j,k} \cap F_{-j',k} \} \Big) > 1-\varepsilon$$

とできる。 このとき $\hat{\mu}_-$-a.s. $\omega \in \bigcup_{0<j,j'<N} \{F_{j,k} \cap F_{-j',k}\}$

に対して $(0,k)$ を囲む $\mathbb{Z}^2_d(k)$ $(= \mathbb{Z}^2_d + (0,k))$ の $+(*)$ half circuit が存在し、これは x^1軸と $+(*)$connected。 よって Lemma 2.6 により、

$$\hat{\mu}_-(E_k) \geq \frac{1-\varepsilon}{2}\, b(\beta)$$

ここで ε は任意だから求める不等式を得る。 (Q.E.D.)

<u>Lemma 2.8.</u> $h=0$, $\beta > \beta_c$ とする。 このとき

$$\hat{\mu}_-\big(I^{(*)}_+(\mathbb{Z}^2_u) \ni (0,0) \big) > \frac{1}{16}\, b(\beta)^3 .$$

<u>証明</u>.

$$E_k(r) \equiv \{ \omega \in \Omega ; (0,k) \text{ は } x^1\text{軸の } \{x^1 \geq 0\} \text{ と } +(*) \text{ connected} \},$$

$$E_k(\ell) \equiv \{ \omega \in \Omega ; (0,k) \text{ は } x^1\text{軸の } \{x^1 \leq 0\} \text{ と } +(*) \text{ connected} \},$$

とおく。 $E_k(r) \cup E_k(\ell) = E_k$ であり、$\hat{\mu}_-$ は x^2軸に関

し reflection で不変だから.

$$\hat{\mu}_-(E_k(r)) = \hat{\mu}_-(U_1(0)E_k(r)) = \hat{\mu}_-(E_k(\ell))$$

とあわせると

$$\hat{\mu}_-(E_k(r)) = \hat{\mu}_-(E_k(\ell)) \geq \frac{1}{2}\hat{\mu}_-(E_k).$$

$I_{E_k(r)}$, $I_{E_k(\ell)}$ はそれぞれ increasing なので FKG 不等式により

$$\hat{\mu}_-(E_k(r) \cap E_k(\ell)) \geq \frac{1}{4}\hat{\mu}_-(E_k)^2 \geq \frac{1}{16}b(\beta)^2$$

最後の不等式は Lemma 2.7 による。一方, $\hat{\mu}_-$ -a.s. $\omega \in E_k(r) \cap E_k(\ell)$ において、原点を囲む +(*)circuit が存在するから

$$G_k^{+*} \equiv \left\{ \omega \in \Omega;\ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_u^2 \text{ で原点を含む size } k \text{ 以上の} \\ +(*)\text{chain が存在。} \end{array} \right\}$$

とおくと.

$$\hat{\mu}_-(G_k^{+*}) \geq \hat{\mu}_-(G_k^{+*} \cap E_k(r) \cap E_k(\ell))$$

$$= \hat{\mu}_-(G_k^{+*} \mid E_k(r) \cap E_k(\ell)) \cdot \frac{1}{16}b(\beta)^2.$$

(2.6) を導いたのと同じようにして

$$\hat{\mu}_-(G_k^{+*} \mid E_k(r) \cap E_k(\ell)) \geq \mu_+(G_k^{+*}) \geq b(\beta)$$

とできる。よって

$$\hat{\mu}_-(G_k^{+*}) \geq \frac{1}{16} b(\beta)^3.$$

右辺はkに無関係だから $k\to\infty$ として Lemma の主張が証明できる。 (Q. E. D.)

<u>Lemma 2.9.</u> $h=0$, $\beta>\beta_c$ とする。 このとき

$$\hat{\mu}_-(I_-(\mathbb{Z}^2_u\cap\mathbb{Z}^2_r)\neq\phi)=0$$

<u>証明</u> Lemma 2.8 及び $\hat{\mu}_-$ の reflection, translation に関する不変性により、Lemma 2.4 と同様に証明することができる。 (Q. E. D.)

<u>Lemma 2.10.</u> $h=0$, $\beta>\beta_c$ のとき

$$\hat{\mu}_-(I_-(\mathbb{Z}^2_u)\neq\phi)=0$$

<u>証明</u> $0\in\Lambda\subset\mathbb{Z}^2_u$, $|\Lambda|<\infty$ を勝手に固定。 $\Lambda_n\equiv\{|x^1|,|x^2|\leq n\}$ とおくことにして、任意の $\varepsilon>0$ に対して $k\leq N$ をともに十分大にとって $\Lambda_{N,u}\setminus\Lambda_{k,u}$, $\Lambda_{k,u}\setminus\Lambda$ でそれぞれ $\mathbb{Z}^2_u\cap\mathbb{Z}^2_r$ に x^1軸と x^2軸を結ぶ $+(*)$ chain が存在する $\hat{\mu}_-$–確率が $1-\varepsilon$ よりも大きくできる。

S を $(\Lambda_{N,u}\setminus\Lambda_{k,u})\cap\mathbb{Z}^2_r$ の, s を $(\Lambda_{k,u}\setminus\Lambda)\cap\mathbb{Z}^2_r$ の x^1軸と x^2軸を結ぶ $(*)$ chains とするとき、

$$A_{S,s}\equiv\left\{\omega\in\Omega;\ \begin{array}{l} S\text{ が }(\Lambda_{N,u}\setminus\Lambda_{k,u})\cap\mathbb{Z}^2_r\text{ で maximal, } s\text{ が}\\ (\Lambda_{k,u}\setminus\Lambda)\cap\mathbb{Z}^2_r\text{ で minimal な }+(*)\text{chains}\end{array}\right\}$$

とおくと、明らかに

$$\sum_{S\subset(\Lambda_{N,u}\setminus\Lambda_{k,u})\cap\mathbb{Z}^2_r}\ \sum_{s\subset(\Lambda_{k,u}\setminus\Lambda)\cap\mathbb{Z}^2_r}\hat{\mu}_-(A_{S,s})>1-\varepsilon.$$

一方、$\hat{\mu}_-$-a.s. $\omega \in A_{S,s}$ においては $(0,k)$ を囲む x 軸と $\mathbb{Z}_u^2 \cap \mathbb{Z}_r^2$ で $+(*)$connected な $\mathbb{Z}_r^2$ の $+(*)$half circuit が存在する。これより Lemma 2.6 が使えて

$$\hat{\mu}_-\left((0,k) \text{ が } x \text{ 軸と } \mathbb{Z}_u^2 \cap \mathbb{Z}_r^2 \text{ で } +(*)\text{connected} \right)$$

$$> \frac{1-\varepsilon}{2}\, b(\beta)$$

を得る。$\hat{\mu}_-$ の reflection に関する不変性とFKG不等式を使うと

$$\hat{\mu}_-\left(\mathbb{Z}_u^2 \text{ で } \Lambda \text{ を囲む } +(*)\text{half circuit が存在} \right) > \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\, b(\beta)\right)^2$$

左辺は ε に無関係だから

$$\hat{\mu}_-\left(\mathbb{Z}_u^2 \text{ で } \Lambda \text{ を囲む } +(*)\text{ half circuit が存在} \right) > \frac{1}{4}\, b(\beta)^2$$

Λ は任意だったので $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}_u^2$ とすることにより、

$$\hat{\mu}_-\left(I_-(\mathbb{Z}_u^2) = \phi \right) \geq \frac{1}{4}\, b(\beta)^2 > 0 .$$

左辺は $\hat{\mu}_-$ が $\mathcal{B}_\infty |\Omega_{\mathbb{Z}_u^2}$ 上 trivial だから 0 か 1。従って

$$\hat{\mu}_-\left(I_-(\mathbb{Z}_u^2) = \phi \right) = 1$$

(Q.E.D.)

<u>Proposition 2.2 の証明</u>

$\Lambda \subset \mathbb{Z}_u^2$, $|\Lambda| < \infty$ を勝手にとり、f を $\mathcal{B}_\Lambda$-m'ble, increasing とする。いま任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$N > 0$ を十分大にとり

$$\hat{\mu}_-\left(\Lambda_{N,u} \text{ 内で } \Lambda \text{ を囲む } +(*)\text{half circuit がある} \right) > 1-\varepsilon$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

ととる。 こうできることは Lemma 2.10 によって保証されている。 S を $\Lambda_{N,u}$ で Λ を囲む $\mathbb{Z}_u^2$ の (*) half circuit とするとき、

$$A_S \equiv \left\{ \omega \in \Omega ; \begin{array}{l} S \text{ が } \Lambda_{N,u} \text{ で } \Lambda \text{ を囲む maximal な} \\ +(*) \text{ half circuit.} \end{array} \right\}$$

とおくと、

$$E_{\hat{\mu}_-}(f) \geq \sum_S{}^{*} E_{\hat{\mu}_-}(f \cdot I_{A_S}) - \varepsilon \| f \|$$

が成り立つ。 ところが $\hat{\mu}_-$ の定義から

$$E_{\hat{\mu}_-}(f \mid A_S) = \lim_{n \to \infty} \langle f \cdot I_{A_S} \rangle_{\Lambda_{n,u}}^{\hat{\omega}} \Big/ P_{\Lambda_{n,u}}^{\hat{\omega}}(A_S)$$

で、Gibbs 分布の定義により右辺は極限をとる以前に $\langle f \rangle_{\Lambda_u(S)}^{\omega^+}$ に等しい。 ただし、$\Lambda_u(S)$ は S と $\{x^2 = -1\}$ とによって囲まれる図形とする。 よってFKG不等式 (1.13b) により

$$\langle f \rangle_{\Lambda_u(S)}^{\omega^+} \geq \langle f \rangle_{\Lambda_{N,u}}^{\omega^+}$$

が成り立つ。 右辺は $E_{\hat{\mu}_+}(f)$ よりも大だから、結局、

$$\begin{aligned} E_{\hat{\mu}_-}(f) &\geq \sum_S{}^{*} \hat{\mu}_-(A_S) \cdot E_{\hat{\mu}_+}(f) - \varepsilon \| f \| \\ &\geq E_{\hat{\mu}_+}(f) - 2\varepsilon \| f \| \end{aligned}$$

$\varepsilon \to 0$ とやって、$\mu_+ = \mu_-$ を得る。

(Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

§3. Russoの定理(1)

この節の目標はRussoによる次の定理である。

Theorem 2.1. (Russo [35])
$h=0$, $\beta>\beta_c$ とする。 μ が $\mathcal{G}(\beta,0)$ の端点で τ_1 か τ_2 の一方について

$$\mu\circ\tau_i=\mu \qquad (i=1 \text{ or } 2)$$

をみたす(x^1 軸か x^2 軸に沿ったtranslation で不変)ならば、

$$\mu=\mu_+ \text{ or } \mu_-$$

Chapter IIのここまでの結果はほとんどすべて[35]に出てくる。Russo 自身は上の結果までしか出すことができなかったが、$\mathcal{G}(\beta,0)$ ($\beta>\beta_c$) の構造を決めるための議論の骨格はすでにこのとき彼によって与えられてしまったといってよく、[35] の約半年後に出た最終的な結果 [1], [19] も Russo のひいたレールの上を走ったものといえる。
最初に、前節の結果から導かれる重要な事実を述べる。

Proposition 2.3. $h=0$, $\beta>\beta_c$ とする。任意の $\mu\in\mathcal{G}(\beta,0)$ に対し、μ-a.s. で $I_\pm(\mathbb{Z}^2_u)$ ($I^{(*)}_\pm(\mathbb{Z}^2_u)$) はそれぞれもしも存在するとすると connected ((*)connected) であり、無限回 x^1 軸と intersect する。

証明 いま、$I_+(\mathbb{Z}^2_u)\neq\phi$ μ-a.s. と仮定する。(外の場合も同様) $k\geq 0$, $x\in\mathbb{Z}^2_u$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$G_k^+(x) \equiv \left\{ \omega \in \Omega;\ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_u^2 \text{ で } x \text{ を含む size が } k \text{ 以上の} \\ +\text{cluster が存在する。} \end{array} \right\},$$

$$H_-^*(x) \equiv \left\{ \omega \in \Omega;\ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_u^2 \text{ に } x \text{ と } x^1\text{軸を separate する} \\ \infty\text{-}(*)\ \text{cluster が存在する。} \end{array} \right\}$$

とおく。このとき、

$$(2.7) \quad \lim_{k\to\infty} \mu\left(G_k^+(x) \cap H_-^*(x) \right) = 0$$

を証明する。いま、ある $x \in \mathbb{Z}_u^2$ について $\mu(H_-^*(x)) > 0$ と仮定するとき、この x について

$$(2.7') \quad \lim_{k\to\infty} \mu\left(G_k^+(x) \mid H_-^*(x) \right) = 0$$

を証明しておけばよい。n を十分大として、$G_k^+(x) \in \mathfrak{B}_{\Lambda_n}$ とする。ただし Λ_n は

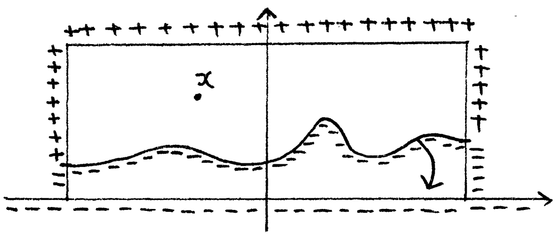
$$\Lambda_n = \{ y \in \mathbb{Z}^2;\ |y^1|, |y^2| \le n \}$$

とする。FKG不等式により、

$$\mu\left(G_k^+(x) \mid H_-^*(x) \right)$$

$$\le \mu\left(G_k^+(x) \mid H_-^*(x) \cap \{ \omega(x) = +1,\ x \in \partial\Lambda_n \} \right)$$

$$\le P_{\Lambda_{n,u}}^{-\widehat{(1)}} \left(G_k^+(x) \right)$$



よって

$$\mu (G_k^+(x) \mid H_-^*(x)) \le \lim_{n\to\infty} P_{\Lambda_{n,u}}^{-\hat{\omega}} (G_k^+(x))$$

右辺は Prop. 2.2 と同様にして

$$\lim_{n\to\infty} P_{\Lambda_{n,u}}^{-\hat{\omega}} (G_k^+(x)) = \lim_{n\to\infty} P_{\Lambda_{n,u}}^{\omega-} (G_k^+(x))$$

$$\le \mu_- (G_k^+(x))$$

ここで $k \to \infty$ とすると

$$\mu_-(G_k^+(x)) \longrightarrow \mu_-(I_+(\mathbb{Z}_u^2) \ni x) = 0$$

ゆえに、

$$\lim_{k\to\infty} \mu (G_k^+(x) \mid H_-^*(x)) = 0$$

これで (2.7) は証明された。 (2.7) から

$$(2.8) \quad \mu (\{ I_+(\mathbb{Z}_u^2) \ni x \} \cap H_-^*(x)) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}_u^2 .$$

を得る。 いま、$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ に対して $I_+(\Lambda ; x)$ を x を含む Λ 内の ∞ + cluster とする。 このとき

$$(2.9) \quad \mu (\# [I_+(\mathbb{Z}_u^2 ; x) \cap \{x^1 軸\}] < \infty) = 0$$

を証明する。 x は任意にとっているから、(2.9) が示せれば μ-a.s. で $\mathbb{Z}_u^2$ の勝手な ∞+cluster は x^1 軸と無限回 intersect することになる。

いま、(2.9) が成り立たないとすると、$n > 0$ がとれて

$$(2.10) \quad \mu (I_+(\mathbb{Z}_u^2 ; x) \cap \{ y^2 = 0 \} \subset \{ y^2 = 0 , |y^1| \le n \}) > 0$$

とできる。 (2.10)の事象をKとかくことにする。 いま、$x=(x^1, x^2)$ とかくとき $x^2 \geq 3$ と仮定する。 ($x^2 \leq 2$ のときも同じようにして証明できるので、ここでは $x^2 \geq 3$ のときのみ示すことにする。)

$$\Lambda = \{ y \in \mathbb{Z}^2 ; \ 0 \leq y^2 \leq 2, \ |y^1| \leq n \}$$

とし、$K_\sigma \in \mathcal{B}_{\Lambda^c}$ を

$$K_\sigma \cap \{ \omega(y) = \sigma(y) \ \forall y \in \Lambda \} = K \cap \{ \omega(y) = \sigma(y) \ \forall y \in \Lambda \}$$

によって定義する。 このとき、

$$K = \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} K_\sigma \cap \{ \omega(y) = \sigma(y) \quad \forall y \in \Lambda \}$$

だから、

$$\sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \mu(K_\sigma) \geq \mu(K)$$

が成り立ち、

$$\max_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \mu(K_\sigma) \geq 2^{-|\Lambda|} \mu(K)$$

となる。 左辺の maximum を attain する $\sigma \in \Omega_\Lambda$ を $\bar{\sigma}$ とかく。 また、

$$\Lambda_1 \equiv \{ y \in \Lambda ; \ y^2 = 2, \ \bar{\sigma}(y) = +1 \}$$

とおくことにする。 このとき、任意の $\Delta \subset \Lambda_1$ に対して

$K_{\bar{\sigma}}(\Delta) \equiv \{ \omega \in K_{\bar{\sigma}} ; \ \Delta = \{ y \in \Lambda_1 ; \ y + e_2 \in I_+(\mathbb{Z}^2_u \setminus \Lambda)$ 又は y は

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

x と $\mathbb{Z}^2_u \setminus \Lambda$ で $+$connected $\} \}$

及び

$$\sigma_\Delta(y) = \begin{cases} +1 & \text{if } \ y \in \Delta \ \text{ or } \ y^2 = 1, \ |y^1| \leq n-1 \\ \\ -1 & \text{if } \ y^2 = 2, \ y \notin \Delta, \ \text{ or } \ y^2 = 1, \ |y^1| = n-1 \\ & \qquad \text{or } \ y^2 = 0, \ |y^1| \leq n \end{cases}$$

とおくと.

$$\bigcup_{\phi \neq \Delta \subset \Lambda_1} K_{\bar{\sigma}}(\Delta) = K_{\bar{\sigma}}, \qquad K_{\bar{\sigma}}(\Delta) \cap K_{\bar{\sigma}}(\Delta') = \phi \quad (\Delta \neq \Delta')$$

であり、また.

$$K_{\bar{\sigma}}(\Delta) \cap \{ \omega(y) = \sigma_\Delta(y) \quad \forall y \in \Lambda \} \subset \{ I_+(\mathbb{Z}^2_u) \ni x \}$$

であり、更に左辺は

$$\{ I_+(\mathbb{Z}^2_u ; x) \cap \{ y_2 = 0 \} = \phi \}$$

の部分集合となる。 故にこのとき

$$\mu (I_+(\mathbb{Z}^2_u ; x) \cap \{ y^2 = 0 \} = \phi)$$

$$\geq \sum_{\Delta \subset \Lambda_1} \mu (K_{\bar{\sigma}}(\Delta) \cap \{ \omega(y) = \sigma_\Delta(y) \quad \forall y \in \Lambda \})$$

$$\geq a(\beta, 0)^{|\Lambda|} \ \mu(K_{\bar{\sigma}})$$

$$\geq \left(\frac{a(\beta, 0)}{2} \right)^{|\Lambda|} \mu(K) \quad > 0$$

ただし、$a(\beta, 0)$ は (2.4) で与えたもの。この式は (2.8) と両立できない。従って (2.9) が成り立たなくてはいけない。

最後に、$I_+(\mathbb{Z}^2_u)$ が connected なことについて示そう。いま、$I_+(\mathbb{Z}^2_u)$ が二つの connected components C_1, C_2 をもっていたとする。このとき、上のことから C_1, C_2 はそれぞれ無限回 x^1 軸と intersect。これらが disjoint だとすると、例えば C_1 は x^1 軸の正の部分と、C_2 は x^1 軸の負の部分と無限回 intersect し、C_1 と C_2 の間は ∞ −(*) cluster によって separate されている。ところが上の議論をこの ∞ −(*) cluster に適用すると、x^1 軸の正の部分か負の部分とこの ∞ −(*) cluster は無限回 intersect しなくてはならないが、C_1 と C_2 が存在しているとこれは不可能。すなわち、C_1 と C_2 は + connected。すなわち、$I_+(\mathbb{Z}^2_u)$ は connected。

(Q.E.D.)

Proposition 2.3 によって任意の $\mu \in \mathcal{G}(\beta, 0)$ に対して各半平面上それぞれの符号の ∞ cluster, ∞ (*) cluster はそれぞれ高々一つであることが μ-a.s. でいえる。従って Th.2.1. の仮定のように μ が例えば τ_1-不変であるとすると $\mathbb{Z}^2_u$, $\mathbb{Z}^2_d$ ではどちらかの符号の ∞ cluster しか存在しないことになる。次にこの事実をきちんと言っておく。

<u>Lemma 2.11</u>　$h = 0$, $\beta > \beta_c$ とする。μ は $\mathcal{G}(\beta, 0)$ の端点でさらに $\mu \circ \tau_1 = \mu$ i.e. μ は τ_1 で不変とする。このとき、μ-a.s. で

$$I_+(\mathbb{Z}^2_u) = \phi \quad \text{or} \quad I_-(\mathbb{Z}^2_u) = \phi$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　いま、μ-a.s. で $I_+(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi$ かつ、$I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2_u)$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$\neq \phi$ とする。このとき、Prop. 2.3によって $I_-^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2)$ は x^1軸と無限回intersect。従って x^1軸の正の部分あるいは負の部分と無限回intersect。いま、x^1軸の正の部分と無限回intersectするものとする。このとき、この $I_-^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2)$ にさえぎられるから $I_+(\mathbb{Z}_u^2)$ は x^1軸の正の部分とは高々有限回しかintersectしない。よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し $N > 0$ を十分大にとると

$$\mu\left(I_+(\mathbb{Z}_u^2) \cap \{x^1\text{軸}\} \cap \{x^1 \geq N\} \neq \phi \right) < \varepsilon$$

とできる。とくに任意の $n \geq N$ について

$$\mu\left(I_+(\mathbb{Z}_u^2) \ni (n, 0) \right) < \varepsilon.$$

μ の τ_1-不変性により、

$$\mu\left(I_+(\mathbb{Z}_u^2) \ni (0,0) \right) < \varepsilon$$

左辺は ε に無関係だから、

$$\mu\left(I_+(\mathbb{Z}_u^2) \ni (0,0) \right) = 0$$

これは矛盾。よって $I_+(\mathbb{Z}_u^2) \neq \phi$ ならば $I_-^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) = \phi$ μ-a.s. $I_-^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) = \phi$ ならば $I_-(\mathbb{Z}_u^2) = \phi$ である。あとも同様。(Q.E.D.)

<u>Lemma 2.12.</u> $h = 0$, $\beta > \beta_c$, μ は $\mathcal{G}(\beta, 0)$ の端点とする。このとき、

$$\mu\left(I_-(\mathbb{Z}_u^2) \neq \phi \right) = 0 \Rightarrow \mu\left(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \neq \phi \right) = 1$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

証明. 任意の $k \geq 0$ に対して

$$(2.11) \qquad \mu(G_k^{+*}) \geq \frac{1}{2} b(\beta)$$

が成り立つことを示せばよい。 $\mu(I_-(\mathbb{Z}_u^2) \neq \phi) = 0$ とすると、$n \geq k$ に対して

$$\mu(\mathbb{Z}_u^2 \text{ で } \Lambda_{n,u} \text{ を囲む } +(*) \text{ half circuit が存在}) = 1.$$

従って任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N > 0$ を十分大にとると、

$$\mu(\Lambda_{N,u} \text{ で } \Lambda_{n,u} \text{ を囲む } +(*) \text{ half circuit が存在}) \geq 1 - \varepsilon$$

とでき、Lemma 2.6 により

$$\mu\left(\begin{array}{l} \Lambda_{N,u} \setminus \Lambda_{n,u} \text{ で原点が原点を囲む maximal} \\ +(*) \text{ half circuit と } +(*) \text{ connected} \end{array}\right) \geq \frac{1-\varepsilon}{2} b(\beta).$$

明らかに左辺は $\mu(G_k^{+*})$ よりも小さいので

$$\mu(G_k^{+*}) \geq \frac{1-\varepsilon}{2} b(\beta)$$

$\varepsilon \downarrow 0$ として (2.11) を得る。 (Q.E.D.)

Lemma 2.13. $h = 0$, $\beta > \beta_c$, μ は $\mathcal{G}(\beta, 0)$ の端点,

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}_u^2) = \phi) = 0$$

とする。 このとき、任意の $n \geq 0$ に対しある $k_0 \geq n$ がとれて $k \geq k_0$ なる任意の k に対して次の式が成り立つ;

$$(2.12)\quad \mu\left(\begin{array}{l}\mathbb{Z}^2_u \text{ で } \Lambda_{n,u} \text{ を囲む } +(*)\text{half circuit が} \\ (\pm k, 0) \text{ を通る。}\end{array}\right) > \frac{1}{2^8} b(\beta)^2.$$

証明. Lemma 2.12 により $\mu(I_-(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) = 0$ から $\mu(I^{(*)}_+(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) = 1$ を得る。そこで $n_0 > 0$ を

$$(2.13)\quad \mu(I^{(*)}_+(\mathbb{Z}^2_u) \cap \Lambda_{n_0,u} \neq \phi) > \frac{1}{2}$$

ととっておく。このとき、(2.12) は $\forall n \geq n_0$ について証明すれば十分。$n \geq n_0$ を勝手に与え、$k_0 \geq n$ を

$$(2.14)\quad \mu\left(\begin{array}{l}\Lambda_{k_0,u} \setminus \Lambda_{n,u} \text{ で原点を囲む } +(*)\text{ half} \\ \text{circuit が存在。}\end{array}\right) > \frac{1}{2}$$

となるようにとる。$k \geq k_0$ ならば明らかに (2.14) は $\Lambda_{k,u} \setminus \Lambda_{n,u}$ に対しても成立。いま $k \geq k_0$ を任意にとってきて固定する。これに対して $N > k$ を十分大にとって

$$(2.15)\quad \mu\left(\begin{array}{l}\Lambda_{N,u} \setminus \Lambda_{k,u} \text{ で原点を囲む } +(*)\text{half} \\ \text{circuit が存在。}\end{array}\right) > \frac{1}{2}$$

とする。((2.14), (2.15) は $\mu(I_-(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi) = 0$ より出てくる。) (2.13), (2.14), (2.15) の事象の共通部分を L とかくと、FKG不等式により

$$\mu(L) > \frac{1}{8}.$$

ところが、$\omega \in L$ のとき $(k, 0)$ を囲む $+(*)$ half circuit 及び $(-k, 0)$ を囲む $+(*)$ half circuit が $\Lambda_{N,u} \setminus \Lambda_{n,u}$ でそれぞれ存在し、しかもそれらは $I^{(*)}_+(\mathbb{Z}^2_u \setminus \Lambda_{n,u})$ に含まれる。従って Lemma

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

2.6 を使うと、

$$\mu((k,0)\ \text{が}\ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2\setminus\Lambda_{n,u})\ \text{に含まれる}) \geq \frac{1}{16}b(\beta),$$

$$\mu((-k,0)\ \text{が}\ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2\setminus\Lambda_{n,u})\ \text{に含まれる}) \geq \frac{1}{16}b(\beta).$$

再びこの二つの事象にFKG不等式を使うと、

$$\mu\left(\begin{array}{l}(k,0)\ \text{と}\ (-k,0)\ \text{を含む}\ \mathbb{Z}_u^2\setminus\Lambda_{n,u}\ \text{の}\ +(*) \\ \text{half circuit が存在する。}\end{array}\right) > \frac{1}{2^8}b(\beta)^2.$$

(Q.E.D.)

<u>Lemma 2.14.</u> $h=0$, $\beta>\beta_c$, μ は $\mathcal{G}(\beta,0)$ の端点, $\mu(I_-(\mathbb{Z}_u^2)\neq\phi)=0$ とする。このとき、任意の $j\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}_u^2(j))\neq\phi)=0$$

<u>証明</u>. $j\geq 0$ のときは trivial。 $j<0$ について示せばよいが、$j=-1$ のとき成り立つことをいう。 $\mu(I_-(\mathbb{Z}_u^2)\neq\phi)=0$ だから、任意の $n\geq 0$ に対して、$N\geq n$ を十分大きくとって、

$$\mu\left(\begin{array}{l}\Lambda_{N,u}\setminus\Lambda_{n,u}\ \text{で原点を囲む}\ +(*)\ \text{half} \\ \text{circuit が存在}\end{array}\right) > \frac{1}{2}$$

とる。 S を勝手な $\Lambda_{N,u}\setminus\Lambda_{n,u}$ 内で原点を囲む $(*)$ half circuit とすると、

$$A_S=\left\{\omega\in\Omega;\ \begin{array}{l}S\ \text{が}\ \Lambda_{N,u}\setminus\Lambda_{n,u}\ \text{で原点を囲む} \\ \text{maximal}\ +(*)\ \text{half circuit}\end{array}\right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

に対して $A_{\mathcal{S}} \in \mathcal{B}_{\Lambda_{N,u}\setminus\Lambda_{n,u}}$ であり，

$$\sum_{\mathcal{S}}{}^{*} \mu(A_{\mathcal{S}}) > \frac{1}{2}。$$

$\mathcal{S} \cap \{x^1\text{軸}\} = \{(k,0), (\ell,0)\} \quad (-N, \leq k \leq -n,\ n \leq \ell \leq N)$
とおくと (2.4) により

$$\mu\left(A_{\mathcal{S}} \cap \{\omega(k,-1) = \omega(\ell,-1) = +1\}\right) \geq a(\beta,0)^2 \mu(A_{\mathcal{S}})。$$

左辺の事象を $A'_{\mathcal{S}}$ とかくと

$$A'_{\mathcal{S}} \cap A'_{\tilde{\mathcal{S}}} = \phi \qquad \text{if } \mathcal{S} \neq \tilde{\mathcal{S}}$$

だから、

$$\mu\begin{pmatrix} \Lambda_n \cap \mathbb{Z}^2_u(-1) \text{ を } \mathbb{Z}^2_u(-1) \text{で囲む} \\ +(*) \text{ half circuit が存在} \end{pmatrix} \geq \sum_{\mathcal{S}}{}^{*} \mu(A'_{\mathcal{S}}) \geq \frac{a(\beta,0)^2}{2}.$$

右辺は n-independent だから $n \to \infty$ とすると．左辺は

$$\mu(\ I_-(\mathbb{Z}^2_u(-1)) = \phi\ )$$

に収束。　これは μ が $\mathcal{G}(\beta,0)$ の端点だから 0 か 1 の値しか取らない。　よって Lemma の主張を得る。

(Q.E.D.)

<u>Theorem 2.1 の証明</u>.

μ は τ_1-不変だとする。　このとき Lemma 2.11 により $I_+(\mathbb{Z}^2_u) = \phi$ or $I_-(\mathbb{Z}^2_u) = \phi$。　いま. $I_-(\mathbb{Z}^2_u) = \phi$ としておく。
同じ議論により $I_+(\mathbb{Z}^2_d) = \phi$ or $I\ (\mathbb{Z}^2_d) = \phi$ となる。
(イ) $I_-(\mathbb{Z}^2_d) = \phi$ のとき。　このとき Lemma 2.13 により

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

任意の $n\geq 0$ に対して $k_0\geq n$ がとれて $k\geq k_0$ のとき (2.12) が $\mathbb{Z}^2_u$ 及び $\mathbb{Z}^2_d$ について成り立つ。 これらの事象は increasing なので FKG不等式により

$$\mu(\Lambda_n\text{を囲み}(\pm k,0)\text{を通る}+(*)\text{circuit が存在}) > \frac{1}{2^{16}}b(\beta)^4$$

すなわち、任意の $n\geq 0$ に対し

$$\mu(\Lambda_n\text{を囲む}+(*)\text{circuit が存在}) > \frac{1}{2^{16}}b(\beta)^4 > 0.$$

$n\to\infty$ とやると、μ が $\mathcal{B}_\infty$ 上 trivial なことより

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}^2)=\phi)=1$$

を得る。 Lemma 2.1 により、このとき $\mu=\mu_+$。

(ロ) $I_+(\mathbb{Z}^2_d)=\phi$ のとき。 Lemma 2.2 を $I_-(\mathbb{Z}^2_u)=\phi$ (μ-a.s.) に使うと、f を tame increasing ft. とすると、

$$E_\mu(f) \geq E_\mu(f\circ(-\mathcal{T}_2(0))).$$

$I_+(\mathbb{Z}^2_d)=\phi$ にこれを使うと逆の不等式を得、結局 $\mu=\mu\circ(-\mathcal{T}_2(0))$ を得る。 Lemma 2.2 と同じ議論は $\mathcal{T}_2(1)$ についても成り立つ。さらに Lemma 2.14 により

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}^2_u(j))\neq\phi)=0,\quad \mu(I_+(\mathbb{Z}^2_d(j))\neq\phi)=0$$

が任意の $j\in\mathbb{Z}$ に対して成り立つから、上の議論により、$\mu=\mu\circ(-\mathcal{T}_2(2j))$, $\mu=\mu\circ(-\mathcal{T}_2(2j-1))$ ($j\in\mathbb{Z}$)。 従って とくに $\mu=\mu\circ\tau_2$ ($=\mu\circ(-\mathcal{T}_2(2j))\circ(-\mathcal{T}_2(2j-1))$) が成り立つ。 すなわち、このとき Lemma 2.11 により $I_+(\mathbb{Z}^2_r)=\phi$ or

$I_-(\mathbb{Z}^2_r)=\phi$。 いま、$I_+(\mathbb{Z}^2_r)=\phi$ μ-a.s. とする。 このとき $\mu=\mu\circ(-\mathcal{V}_2(0))$ より

$$1=\mu(I_+(\mathbb{Z}^2_r)=\phi)=\mu\circ(-\mathcal{V}_2(0))(I_+(\mathbb{Z}^2_r)=\phi)$$

$$=\mu(I_-(\mathbb{Z}^2_r)=\phi)。$$

ところがこれは Lemma 2.12 に矛盾する。 すなわち(ロ)の仮定が成り立たない。 よって μ が τ_1-不変な $\mathcal{G}(\beta,0)$ の端点ならば

$$\mu=\mu_+ \text{ or } \mu_-$$

(Q.E.D.)

Russo による結果は Theorem 2.1 よりもう少し強いことを言っている。 彼は $\mu\in\mathcal{G}(\beta,0)$ が τ_1-不変なら $\mu=\alpha\mu_++(1-\alpha)\mu_-$ とかけることを証明した。 しかし、ここでは Th. 2.1 の形であとの議論はすべてできるので簡単のために端点についてのみ述べることにした。

§4. Russo の定理(2)

§3では一方向に関する translation invariance を仮定したが、Russo は [35] で更に強力な結果を証明している。 §3でも半平面における解析が重要な役割を果たしたが、もう少しこれをつきつめると次の結果が得られる。

<u>Theorem 2.2</u> (Russo [35])

$h=0$, $\beta>\beta_c$, μ は $\mathcal{G}(\beta,0)$ の端点とする。 このとき、もし、$\mu(I_-(\mathbb{Z}^2_u)\neq\phi)=0$ ならば $\mu=\mu_+$ である。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

Russoはこの結果を証明するのに新しいいくつかの相関不等式を使ったが（[27],[28],[29]参照）、ここでは今までに示した結果のみを使って証明する。

Lemma 2.15. Th. 2.2 と同じ仮定の下で、任意の $k \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\mu\left((j,0)\ と\ (j,-k)\ は\ \mathbb{Z}_d^2\ で\ +(*)\ \text{connected}\right) \geq \frac{1}{2^{13}} b(\beta)^5 > 0.$$

証明. $\mu(I_-(\mathbb{Z}_u^2) \neq \phi) = 0$ より Lemma 2.14 を使うと $\mu(I_-(\mathbb{Z}_u^2(-k)) \neq \phi) = 0$。 ここで $\Lambda_n + (j,-k) \equiv \Lambda_n(j,-k)$ を $n > k$ となるように勝手にとっておく。 Lemma 2.13 により $\ell_0 > 0$ がとれて $\ell \geq \ell_0$ のとき

$$\mu\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_u^2(-k)\ で\ \Lambda_n(j,-k) \cap \mathbb{Z}_u^2(-k)\ を囲む\ +(*) \\ \text{half circuit}\ で\ (j\pm\ell,-k)\ を含むものがある \end{pmatrix} > \frac{1}{2^8} b(\beta)^2$$

となり、更に $N > \ell$ を十分大にとると

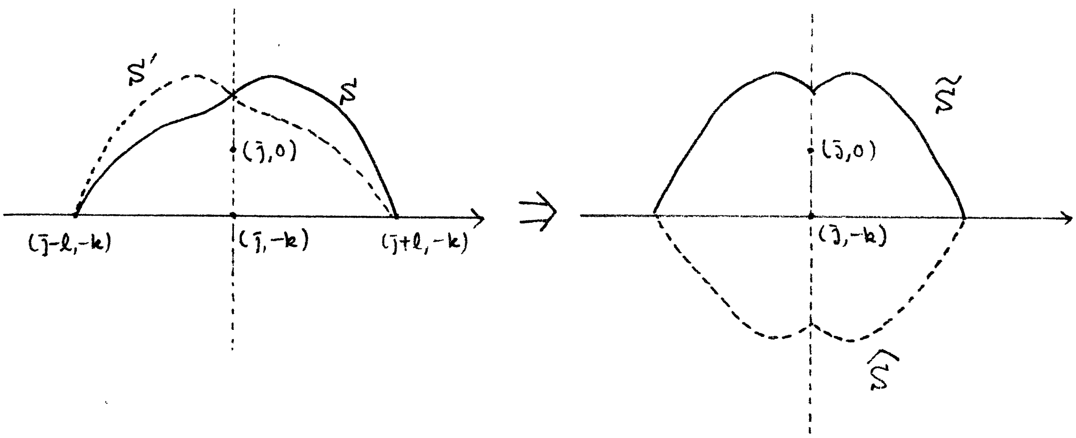
$$\mu\begin{pmatrix} \Lambda_N(j,-k) \cap \mathbb{Z}_u^2(-k)\ で\ \Lambda_n(j,-k) \cap \mathbb{Z}_u^2(-k)\ を囲む \\ +(*)\ \text{half circuit}\ で\ (j\pm\ell,-k)\ を含むものがある \end{pmatrix} > \frac{1}{2^9} b(\beta)^2$$

とできる。 S を $\Lambda_N(j,-k) \cap \mathbb{Z}_u^2$ で $(j\pm\ell,-k)$ を通り、$\Lambda_n(j,-k) \cap \mathbb{Z}_u^2$ を囲む $(*)$ half circuit とし、

$$A_S \equiv \left\{\omega \in \Omega\,;\ S\ が\ (j\pm\ell,-k)\ を通る\ \text{maximal}\ +(*)\ \text{half circuit}\right\}$$

とおく。 更に $S' \equiv U_1(2j)S$ （$x^1 = j$ について S を対称に移した図形）とし、$\tilde{S}$ は $S \cup S'$ でできる $(j\pm\ell,-k)$ を通る $(*)$ half circuits のうち maximal なものとする。 このとき、$\tilde{S}$ は $U_1(2j)$ で不変。 また、$\hat{S} \equiv U_2(-2k)\tilde{S}$ とおく。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126



$$E_{\mathcal{S}} \equiv \{\omega \in \Omega;\ (j,-k) \text{ が } \Lambda(\mathcal{S} \cup \hat{\mathcal{S}}) \cap \mathbb{Z}^2_u(-k) \text{ で } \mathcal{S} \text{ と } +(*)\text{connected}\},$$

$$E_{\tilde{\mathcal{S}}} \equiv \{\omega \in \Omega;\ (j,-k) \text{ が } \Lambda(\tilde{\mathcal{S}} \cup \hat{\mathcal{S}}) \cap \mathbb{Z}^2_u(-k) \text{ で } \tilde{\mathcal{S}} \text{ と } +(*)\text{connected}\}$$

として、FKG不等式を使うと、

$$\mu(E_{\mathcal{S}} / A_{\mathcal{S}}) \ge P^{\omega_k}_{\Lambda(\mathcal{S} \cup \hat{\mathcal{S}})}(E_{\mathcal{S}}) \ge P^{\omega_k}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{S}} \cup \hat{\mathcal{S}})}(E_{\mathcal{S}})$$

ただし、

$$\omega_k(x) \equiv \begin{cases} +1 & \text{if} \quad x^2 \ge -k, \\ -1 & \text{if} \quad x^2 < -k, \end{cases}$$

とおく。 $E_{\mathcal{S}} \supset E_{\tilde{\mathcal{S}}}$ だから、Lemma 2.6 と同様に

$$\mu(E_{\mathcal{S}} | A_{\mathcal{S}}) \ge P^{\omega_k}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{S}} \cup \hat{\mathcal{S}})}(E_{\tilde{\mathcal{S}}}) \ge \frac{1}{2} b(\beta)$$

を得る。

$$E_{\mathcal{S}}(r) \equiv \left\{ \omega \in E_{\mathcal{S}} \ ;\ \begin{array}{l} (j,-k) \text{ と } \mathcal{S} \text{ を結ぶ } +(*)\text{chain が } (j,0) \text{ の} \\ \text{右側を通る。} \end{array} \right\},$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$E_{\mathcal{S}}(\ell) \equiv \left\{ \omega \in E_{\mathcal{S}} ;\ \begin{array}{l} (j,-k) \text{ と } \mathcal{S} \text{ を結ぶ} + (*) \text{ chain が } (j,0) \text{ の} \\ \text{左側を通る。} \end{array} \right\}$$

とおき，$\mathcal{S}$ のかわりに $\hat{\mathcal{S}}$ としたものをそれぞれ $E_{\hat{\mathcal{S}}}(r)$, $E_{\hat{\mathcal{S}}}(\ell)$ とする。 このとき，

$$P^{\omega_k}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{S}} \cup \hat{\mathcal{S}})}(E_{\hat{\mathcal{S}}}(r)) = P^{\omega_k}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{S}} \cup \hat{\mathcal{S}})}(E_{\hat{\mathcal{S}}}(\ell)),$$

$$E_{\hat{\mathcal{S}}}(\ell) \cup E_{\hat{\mathcal{S}}}(r) = E_{\hat{\mathcal{S}}},$$

$$E_{\mathcal{S}}(\ell) \supset E_{\hat{\mathcal{S}}}(\ell), \quad E_{\mathcal{S}}(r) \supset E_{\hat{\mathcal{S}}}(r)$$

に気をつけるとFKG不等式によって

$$\mu\left(E_{\mathcal{S}}(r) \cap E_{\mathcal{S}}(\ell) \mid A_{\mathcal{S}} \right) \geq P^{\omega_k}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{S}} \cup \hat{\mathcal{S}})}(E_{\mathcal{S}}(r) \cap E_{\mathcal{S}}(\ell))$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} P^{\omega_k}_{\Lambda(\tilde{\mathcal{S}} \cup \hat{\mathcal{S}})}(E_{\mathcal{S}}) \right)^2 \geq \frac{1}{2^4} b(\beta)^2 .$$

ところが，$\mu(\cdot \mid A_{\mathcal{S}})$ − a.s. $\omega \in E_{\mathcal{S}}(r) \cap E_{\mathcal{S}}(\ell)$ に対しては $(j,0)$ を囲む $+(*)$circuit が $\Lambda(\mathcal{S} \cup \hat{\mathcal{S}})$ に存在する。 しかもこれは $(j,-k)$ と $+(*)$connected。 従って最終的に

$$E_k \equiv \{ \omega \in \Omega ;\ (j,0) \text{ と } (j,-k) \text{ が } \mathbb{Z}^2_d \text{ で } +(*) \text{connected} \}$$

とおくと，

$$\mu(E_k) \geq \sum_{\mathcal{S}}{}^{*} \mu(E_k \cap A_{\mathcal{S}} \cap E_{\mathcal{S}}(r) \cap E_{\mathcal{S}}(\ell))$$

$$\geq \sum_{\mathcal{S}}{}^{*} \mu(E_k \mid A_{\mathcal{S}} \cap E_{\mathcal{S}}(r) \cap E_{\mathcal{S}}(\ell))\, \mu(E_{\mathcal{S}}(r) \cap E_{\mathcal{S}}(\ell) \mid A_{\mathcal{S}}) \times \mu(A_{\mathcal{S}})$$

$$\mu(E_k \mid A_S \cap E_S(r) \cap E_S(\ell)) \geq \mu_+(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_d^2) \ni (0,0))$$

$$= b(\beta),$$

$$\mu(E_S(r) \cap E_S(\ell) \mid A_S) \geq \frac{1}{2^4} b(\beta)^2$$

だから.

$$\mu(E_k) \geq \frac{1}{2^4} b(\beta)^3 \cdot \sum_S{}^* \mu(A_S)$$

$$\geq \frac{1}{2^4} b(\beta)^3 \cdot \frac{1}{2^9} b(\beta)^2$$

$$= \frac{1}{2^{13}} b(\beta)^5 \quad > 0$$

(Q.E.D.)

<u>Theorem 2.2 の証明</u>.

Th.2.1 の証明(イ)の部分と同様に $\mu(I_-(\mathbb{Z}_d^2) \neq \phi) = 0$ を証明すればよい。 任意の $k \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$G_k^{+*} \equiv \left\{ \omega \in \Omega ; \begin{array}{l} \mathbb{Z}_d^2 \text{で} (j,0) \text{を含む size } k \text{ 以上の} \\ +(*)\text{cluster が存在。} \end{array} \right\}$$

とおくと、Lemma 2.15 により.

$$\mu(G_k^{+*}) \geq \mu(E_k) \geq \frac{1}{2^{13}} b(\beta)^5 > 0$$

右辺は k に無関係だから $k \to \infty$ として

$$\mu(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_d^2) \ni (j,0)) \geq \frac{1}{2^{13}} b(\beta)^5 > 0$$

これより.

$$\mu\left(\overline{\lim_{j\to-\infty}}\left\{ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_d^2) \ni (j,0) \right\}\right) = 1$$

及び

$$\mu\left(\overline{\lim_{j\to+\infty}}\left\{ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_d^2) \ni (j,0) \right\}\right) = 1$$

を得．μ－a.s. で $I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_d^2)$ は x^1軸の両側と無限回 intersect。このとき $\mathbb{Z}_d^2$ に ∞－cluster は存在できない。（ Prop. 2.3. ）
よって

$$\mu\left(I_-(\mathbb{Z}_d^2) \neq \phi \right) = 0$$

（Q.E.D.）

§5. Interface

この節では Aizenman [1] における議論の最も基本的な部分を紹介する。 まず用語の定義から始めよう。

$\omega\in\Omega$ に対して $\mathbb{Z}^2$ の裏格子 $\mathbb{Z}^2+(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の bond configuration $\Gamma(\omega)$ を次の様に定義する： $x,y\in\mathbb{Z}^2$, $\langle x,y\rangle$ に対してこの bond に直交する $\mathbb{Z}^2+(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の bond を $b_{\langle x,y\rangle}$ とかくとき．

$$b_{\langle x,y\rangle} \in \Gamma(\omega) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \omega(x)\omega(y) = -1$$

すなわち．$\Gamma(\omega)$ は $\omega^{-1}(+1)$ と $\omega^{-1}(-1)$ とを分離するのに必要な最小限な数の $\mathbb{Z}^2+(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の bonds の全体である。 $\Gamma(\omega)$ はいくつかの（一般に無限個の）connected components に分かれるが．とくに $\Gamma(\omega)$ を次の様な connected components の和と見なすことにする。 各成分 $\gamma\in\Gamma(\omega)$ はある +cluster とある −(*)cluster の境界である。 例えば次頁図１の様な configuration に対して $\Gamma(\omega)$ の connected components は図２の様に

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

なるものとする。

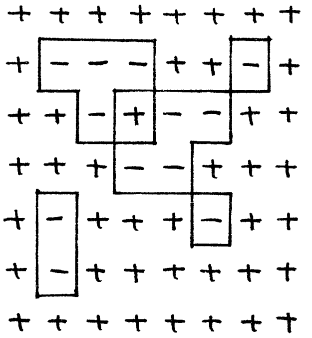


図1

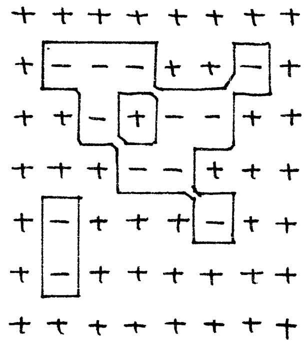


図2

この $\Gamma(\omega)$ の connected component を contour と呼び、とくにその size が ∞ のとき ∞ contour と呼ぶことにする。すぐにわかることだが、$\omega \in \Omega$ に対して ∞contour の個数を $N_\infty(\omega)$ とかくと、N_∞ は $\mathcal{B}_\infty$ − m'ble 。 いま $\Omega_1 \in \mathcal{B}_\infty$ を

$$\Omega_1 \equiv \{\ \omega \in \Omega ; \quad N_\infty(\omega) = 1\ \}$$

とおく。

<u>Proposition 2.4</u> (Aizenman [1])

$h = 0$, $\beta > \beta_c$, μ は $\mathcal{G}(\beta, 0)$ の端点とする。 このとき、$\mu(\Omega_1) = 1$ である。

<u>注意</u>. この主張は一見してはその意味がわかりにくいが、$\mathcal{G}(\beta, 0) = \{\ \alpha\mu_+ + (1-\alpha)\mu_- \ ;\ 0 \leq \alpha \leq 1\ \}$ を証明するときに最も困難な部分であ，たところであり、Aizenman の証明自身もまた非常に面白いアイデアを含んでいるため、あえて proposition とした。

以下、証明のためいくつかの Lemmas を準備する。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

<u>Lemma 2.16.</u> $h=0$, $\beta>\beta_c$, μ は $\mathcal{G}(\beta,0)$ の端点とする。更に、$\omega\in\Omega_1$ に対して ω に出てくる唯一つの ∞ contour を $\gamma(\omega)$ とかくことにする。このとき、

$$(2.16)\qquad \mu(\omega\in\Omega_1\,;\ \gamma(\omega)\cap\{x^1=k\}=\phi \text{ となる } k \text{ がある}) = 0$$

<u>証明.</u> 任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\Omega'_{1,k}\equiv\{\omega\in\Omega_1;\ \gamma(\omega)\cap\{x^1=k\}=\phi\}$$

とおく。任意の $\omega\in\Omega'_{1,k}$ に対して $\gamma(\omega)$ は $\{x^1=k\}$ の右側か左側かにある。いま、右側にあるとすると $\gamma(\omega)$ の右側の ∞ cluster は $\{x^1=k\}$ とは一度も intersect しないが $\mathbb{Z}^2_r+(k,0)$ に入る。Prop. 2.3 により、この様なことは μ-a.s. でおこり得ない。

$$\therefore\ \mu(\Omega'_{1,k})=0.$$

よって $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Omega'_{1,k}\right)=0.$ これは (2.16) を示している。

(Q.E.D.)

<u>Lemma 2.17.</u> $h=0$, $\beta>\beta_c$, μ は $\mathcal{G}(\beta,0)$ の端点とする。

$$\Omega''_1\equiv\{\omega\in\Omega_1\,;\ \#\{\gamma(\omega)\cap\{x^1=k\}\}=\infty \text{ なる } k\in\mathbb{Z} \text{ がある}\}$$

とおくとき、$\mu(\Omega''_1)=0$.

<u>証明.</u>

$$\Omega''_{1,k}\equiv\{\omega\in\Omega''_1;\ \#\{\gamma(\omega)\cap\{x^1=k\}\}=\infty\}$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

とおくと，$\Omega''_{1,k} \in \mathcal{B}_\infty$ だから $\Omega''_1 = \bigcup_k \Omega''_{1,k}$ とあわせて，$\mu(\Omega''_{1,k}) = 0$ （$\forall k \in \mathbb{Z}$）を証明すればよい。更に，任意の $\omega \in \Omega''_{1,k}$ に対して $\gamma(\omega)$ は $\{x^1 = k\}$ の上半分か下半分と無限回 intersect。簡単のためいま μ-a.s. で $\gamma(\omega)$ は $\{x^1 = k\}$ の上半分とも下半分とも無限回 intersect するとする。（この事象も $\mathcal{B}_\infty$ に属する。）外の場合も以下と同様に議論できる。

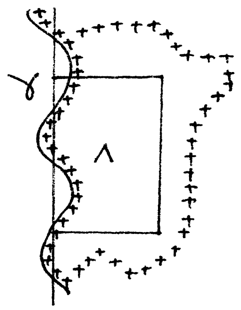
$$\Omega''_{1,k,+} \equiv \{\omega \in \Omega''_{1,k} ; \gamma(\omega) \text{ の右側には } \infty + \text{cluster がある。}\}$$

$$\Omega''_{1,k,-} \equiv \{\omega \in \Omega''_{1,k} ; \gamma(\omega) \text{ の右側には } \infty - \text{cluster がある。}\}$$

とおくと，この二つの集合は disjoint で

$$\Omega''_{1,k} = \Omega''_{1,k,+} \cup \Omega''_{1,k,-}$$

とかける。$\omega \in \Omega''_{1,k,+}$ としよう。このとき，∞+cluster は $\gamma(\omega)$ に接しているから，$\{x^1 = k\}$ と無限回 intersect。更に $\gamma(\omega)$ の右には ∞−cluster は存在しないから，任意の $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, $|\Lambda| < \infty$ に対して $\gamma(\omega)$ から出て $\gamma(\omega)$ の右側で Λ を囲み $\gamma(\omega)$ にもどる $+(*)$chain が存在。



この二つをあわせると結局，$\mathbb{Z}^2_r + (k,0)$ で任意の $\omega \in \Omega''_{1,k,+}$ に対して ∞−cluster は存存しない。
　同様，$\omega \in \Omega''_{1,k,-}$ に対しては ∞+cluster は $\mathbb{Z}^2_r + (k,0)$ には存在しない。ゆえに

$$\mu(I_+(\mathbb{Z}^2_r + (k,0)) \neq \phi) \leq 1 - \mu(\Omega''_{1,k,-})$$

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}^2_r + (k,0)) \neq \phi) \leq 1 - \mu(\Omega''_{1,k,+})$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$\mu(\Omega''_{1,k,+}) + \mu(\Omega''_{1,k,-}) = 1$ だから、μ が $\mathcal{B}_\infty$ 上 trivial なことと Th. 2.2 により

$$\mu = \mu_+ \text{ or } \mu_-$$

(Q. E. D.)

$\Omega_2 = \Omega_1 \setminus (\Omega'_1 \cup \Omega''_1)$ とする。

<u>Lemma 2.18</u>. $h=0$, $\beta > \beta_c$, μ は $\mathcal{G}(\beta, 0)$ の端点とする。もしも、$\mu(\Omega_2) = 1$ とすると、$\mu \times \mu$ − a.e. $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ に対して $\gamma(\omega)$ と $\gamma(\omega')$ は $\mathbb{Z}^2_r$ ででも $\mathbb{Z}^2_\ell$ ででも無限回 intersect する。

<u>証明</u>. $\mu \times \mu$ − a.s. (ω, ω') に対して $\mathbb{Z}^2_r$ で $\gamma(\omega)$ と $\gamma(\omega')$ が有限回しか交わらないとする。このとき、

$$A \equiv \left\{ (\omega, \omega') \in \Omega_2 \times \Omega_2 ; \begin{array}{l} \exists k \geq 0, \text{ s.t. } \mathbb{Z}^2_r + (k, 0) \text{ では } \gamma(\omega) \text{ は} \\ \gamma(\omega') \text{ の上にある。} \end{array} \right\}$$

$$B \equiv \left\{ (\omega, \omega') \in \Omega_2 \times \Omega_2 ; \begin{array}{l} \exists k \geq 0, \text{ s.t. } \mathbb{Z}^2_r + (k, 0) \text{ では } \gamma(\omega) \text{ は} \\ \gamma(\omega') \text{ の下にある。} \end{array} \right\}$$

とおくと、A, B は $\hat{\mathcal{B}}_\infty$ − m'ble。ただし、

$$\hat{\mathcal{B}}_\infty \equiv \bigcap_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^2, |\Lambda| < \infty} \mathcal{B}_{\Lambda^c} \times \mathcal{B}_{\Lambda^c} \text{ 。}$$

$\mu \times \mu$ は $\hat{\mathcal{B}}_\infty$ 上明らかに trivial で、しかも $(\omega, \omega') \longmapsto (\omega', \omega)$ の変換で不変。よって

$$\mu \times \mu(A) = \mu \times \mu(B) = 0 \text{ or } 1$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

ところが最初の仮定により

$$\mu\times\mu(A) + \mu\times\mu(B) = \mu\times\mu(A\cup B) = 1$$

となるが、上のことによりこれは不可能。よって Lemma の主張が成り立つ。

(Q.E.D.)

いま、記号として $\hat{\mu} = \mu\circ\tau_2^{-1}$ とおく。

Lemma 2.19. $h=0$. $\beta>\beta_c$. μ は $\mathcal{G}(\beta,0)$ の端点とする。このとき、$\mu(\Omega_2)=1$ ならば $\mu\times\hat{\mu}$ -a.s. (ω,ω') に対して $\gamma(\omega)$ と $\gamma(\omega')$ は $\mathbb{Z}_r^2$ 及び $\mathbb{Z}_l^2$ で無限回 intersect する。

証明. Lemma の主張が成り立たないとすると、上の事象は $\hat{\mathcal{B}}_\infty$ の元だから $\mu\times\hat{\mu}$-a.s. で $\gamma(\omega)$ と $\gamma(\omega')$ は有限回しか intersect しない。従って任意の $\varepsilon>0$ に対して $N>0$ がとれて、

$$\mu\times\mu\left((\omega,\omega')\in\Omega\times\Omega;\ \gamma(\omega)\cap\gamma(\omega')\cap\{\mathbb{Z}_r^2+(n,0)\}\neq\phi\right) < \varepsilon$$

が任意の $n>N$ に対して成り立つようにできる。この事象を G_n とかく。i.e.

$$G_n \equiv \left\{(\omega,\omega')\in\Omega\times\Omega;\ \gamma(\omega)\cap\gamma(\omega')\cap\{\mathbb{Z}_r^2+(n,0)\}\neq\phi\right\}.$$

$k\geq 0$, $x\in\mathbb{Z}^2$ に対して

$$B_k(x)\equiv\left\{y\in\mathbb{Z}^2;\ \max(|x^1-y^1|,|x^2-y^2|)\leq k\right\}$$

とおき、x_n を $\gamma(\omega)\cap B_5(x)\neq\phi$, $\gamma(\omega')\cap B_5(x)\neq\phi$ をみたす $x\in\mathbb{Z}_r^2+(n,0)$ のうち、辞書式 order で一番若い点と

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

する。 Lemma 2.18 により $\mu\times\mu$-a.s. で x_n が $\mathbb{Z}_r^2+(n,0)$ に存在する。 $B_5(x_n)$ 上の configuration だけを変える変換 R を次の様に定義することができる。

$R(\omega,\omega')=(\sigma,\sigma')$ とかくことにするとき、

(i) $\gamma(\sigma)\cap\gamma(\sigma')\cap\{\mathbb{Z}_r^2+(n,0)\}\cap B_5(x_n)\neq\phi$

(ii) $\gamma(\sigma)$ と $\gamma(\sigma')$ は $\mathbb{Z}^2\setminus B_5(x_n)$ に non-essential part をもたない。（ただし、$\gamma(\sigma)$ の $\mathbb{Z}^2\setminus B_5(x_n)$ での non-essential part とは $\gamma(\sigma)\cap\mathbb{Z}^2\setminus B_5(x_n)$ の有限な connected component のこととする。）

このとき、$x_n(\omega,\omega')-x_n(\sigma,\sigma')$ は高々 10×10 個の点しかとらないから、任意の $(\sigma,\sigma')\in\Omega\times\Omega$ に対して

$$\#\{(\omega,\omega')\,;\ R(\omega,\omega')=(\sigma,\sigma')\}\leq 10\times10\times(2^{10\times10})^2$$
$$\fallingdotseq g$$

が成り立つ。 R が local な変換で $B_5(x_n)$ の configuration しか変えないことから (2.4) を用いて Prop. 2.3 の証明に用いた議論と同様にして

$$\mu\times\hat{\mu}\,(R^{-1}(A))<\delta^{-1}\,\mu(A)\qquad \forall A\subset\Omega_2\times\Omega_2\ \ (A\in\mathcal{B})$$

ただし、$\delta^{-1}=g\cdot a(\beta,0)^{2\times10\times10}$ とできる。 一方、$\mu\times\hat{\mu}$-a.s. で R による像は G_n の中だから、

$$\mu\times\hat{\mu}\,(R^{-1}(G_n))=1$$

$$\therefore\ \mu\times\hat{\mu}\,(G_n)>\delta$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

最後の式は $\mu\times\hat{\mu}(G_n)<\varepsilon$ と両立しえない。
(Q.E.D.)

<u>Lemma 2.20.</u> $h=0,\ \beta>\beta_c$, μ は $\mathcal{G}(\beta,0)$ の端点とする。もしも $\mu(\Omega_2)=1$ ならば, $\mu\circ\tau_2=\mu$ (i.e. $\mu=\hat{\mu}$).

<u>証明</u>. $(\omega,\omega')\in\Omega\times\Omega$ に対して, ある ∞connected set $\mathcal{S}\subset\mathbb{Z}^2$ がとれて

$$\omega(x)>\omega'(x)\qquad\forall x\in\mathcal{S}$$

となったとする。(i.e. $\omega(x)=+1,\ \omega'(x)=-1\quad\forall x\in\mathcal{S}$)
　いま, μ-a.s. で $\gamma(\omega)$ の上に ∞+cluster が存在し, 下に ∞−cluster が存在するとすると, $\hat{\mu}$-a.s. で $\gamma(\omega')$ の上に ∞+cluster, 下に ∞−cluster が存在。そこで, $\mathcal{S}$ は $\gamma(\omega)$ の上にあり $\gamma(\omega')$ の下にあるはず。ところが, $\gamma(\omega)$ と $\gamma(\omega')$ は無限回 intersect するからこの様なことはあり得ない。よって $\mu\times\hat{\mu}$-a.s. で (ω,ω') がその上で $\omega>\omega'$ をみたす様な infinite cluster は存在しない。すなわち, 無限個の (*)circuits 上で $\omega\le\omega'$ が成り立つ。f を $\mathcal{B}_\Lambda$-m'ble increasing, $\Lambda\subset\mathbb{Z}^2$ は $|\Lambda|<\infty$ をみたす勝手な集合とする。このとき任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\Lambda'\supset\Lambda$ を十分大にとって

$$\mu\times\hat{\mu}\left(\begin{array}{l}\Lambda' \text{ で } \Lambda \text{ を囲む (*) circuit } C \text{ が存在して}\\ \omega(x)\le\omega'(x)\quad\forall x\in C\end{array}\right)>1-\varepsilon$$

となる。Λ を囲む勝手な Λ' 内の (*)circuit C に対して

$$A_C\equiv\left\{(\omega,\omega')\in\Omega\times\Omega;\ \begin{array}{l}C \text{ が } \omega(x)\le\omega'(x)\ \forall x\in C \text{ をみたす}\\ \Lambda' \text{ 内で } \Lambda \text{ を囲む maximal (*) circuit}\end{array}\right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

とおくと，$\mu\times\hat{\mu}$ の Markov 性により

$$
\begin{aligned}
E_\mu(f) &= \int f(\omega)\,\mu\times\hat{\mu}\,(d\omega d\omega') \\
&\leq \sum_C{}^* \int_{A_C} f(\omega)\,\mu\times\hat{\mu}(d\omega d\omega') + \varepsilon\|f\| \\
&= \sum_C{}^* \sum_{\substack{(\omega,\omega')\in A_C \\ \omega,\omega'\in\Omega_C}} \langle f\rangle_{\Lambda(C)}^{\omega}\,\mu(\omega)\hat{\mu}(\omega') + \varepsilon\|f\| \\
&\leq \sum_C{}^* \sum_{\substack{(\omega,\omega')\in A_C \\ \omega,\omega'\in\Omega_C}} \langle f\rangle_{\Lambda(C)}^{\omega'}\,\mu(\omega)\hat{\mu}(\omega') + \varepsilon\|f\| \\
&\leq \int f(\omega')\,\mu\times\hat{\mu}\,(d\omega d\omega') + 2\varepsilon\|f\| \\
&= E_{\hat{\mu}}(f) + 2\varepsilon\|f\|.
\end{aligned}
$$

$\varepsilon\to 0$ とやって

$$E_\mu(f) \leq E_{\hat{\mu}}(f)$$

逆向きの不等式も同様にできる。

(Q.E.D.)

Proposition 2.4 の証明は Lemma 2.20 及び Th.2.1 により明らかであろう。 この節の標題を Interface （相境界）としたのは $\omega\in\Omega_1$ のとき $\gamma(\omega)$ によって configuration は＋スピンの支配的な領域と－スピンの支配的な領域に分けられることから、$\gamma(\omega)$ のことを interface と呼んでもおかしくはないだろうという気持ちからである。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

§6. $\mathcal{G}(\beta,0)$の構造決定

さて、いよいよ本Chapterの最終目的である$\mathcal{G}(\beta,0)$の端点をすべて求めるという問題を考える。§5までに準備はすべて終わっているので、まず主張を先にしておく。

<u>Theorem 2.3</u> (Aizenman [1], Higuchi [19])
$h=0$, $\beta>\beta_c$, μは$\mathcal{G}(\beta,0)$の端点とする。このとき $\mu=\mu_+$ or μ_- すなわち、

$$\mathcal{G}(\beta,0)=\{\lambda\mu_+ + (1-\lambda)\mu_-;\ \lambda\in[0,1]\}$$

が成り立つ。

やはり、この定理の証明にはRussoが使った相関不等式が用いられているが、ここでは今までの結果のみを用いて証明する。証明の方針はAizenman [1] に従う。

<u>Lemma 2.21</u>. $h=0$, $\beta>\beta_c$ とする。

$$\omega_1(x)=\begin{cases}+1 & \text{if}\quad x^1\geq 0\\ -1 & \text{if}\quad x^1<0\end{cases}$$

とする。$\Lambda_1\subset\Lambda_2\subset\cdots\subset\Lambda_n\nearrow\mathbb{Z}^2$ はそれぞれx^1軸に関し対称な図形とする。このとき、μを$\{P^{\omega_1}_{\Lambda_n}\}_{n\geq1}$の勝手な極限点とすると

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}^2)=\phi)\geq\frac{1}{4}b(\beta)^2$$

<u>証明</u>. $j\in\mathbb{Z}$, $k>0$ に対しcylinder set $G_k^{+*}(j)$を次の様に定義する：

$$G_k^{+*}(j) \equiv \left\{ \omega \in \Omega;\ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_u^2 \text{ に } (j,0) \text{ を含む size } k \text{ 以上の} \\ +(*) \text{ cluster が存在。} \end{array} \right\}.$$

n が十分大のとき　$G_k^{+*}(j) \in \mathcal{B}_{\Lambda_n}$ で、更に Lemma 2.6 によって

$$P_{\Lambda_{n'}}^{\omega_1}\left(G_k^{+*}(j)\right) \geq \frac{1}{2} b(\beta) \qquad {}^\forall n' \geq n$$

が成り立つ。　よって μ を $\{P_{\Lambda_n}^{\omega_1}\}_{n \geq 1}$ の勝手な極限点とすると、

$$\mu\left(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \ni (j,0) \right) \geq \frac{1}{2} b(\beta)$$

すなわち

$$\mu\left(\overline{\lim_{j \to \infty}} \left\{ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \ni (j,0) \right\} \right) \geq \frac{1}{2} b(\beta)$$

及び

$$\mu\left(\overline{\lim_{j' \to \infty}} \left\{ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \ni (-j',0) \right\} \right) \geq \frac{1}{2} b(\beta)$$

を得る。　FKG不等式と上のことにより

$$\mu\left(\overline{\lim_{j \to \infty}} \left\{ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \ni (j,0) \right\} \cap \overline{\lim_{j' \to \infty}} \left\{ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \ni (-j',0) \right\} \right)$$
$$\geq \frac{1}{4} b(\beta)^2 .$$

$\omega \in \overline{\lim_{j \to \infty}} \left\{ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \ni (j,0) \right\} \cap \overline{\lim_{j' \to \infty}} \left\{ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \ni (-j',0) \right\}$　に

おいては Prop.2.3 により $I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2)$ は $+(*)$connected だから、$I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2)$ は x^1 軸の 正の部分とも負の部分とも無限回 intersect。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

よってこのとき $I_-(\mathbb{Z}^2_u)=\phi$。 すなわち，

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}^2_u)=\phi) \geq \frac{1}{4}b(\beta)^2$$

を得る。 $\{I_-(\mathbb{Z}^2_u)=\phi\} \in \mathcal{B}_\infty$ だから，Gibbs 分布の定義から

$$\mu(\cdot \mid \{I_-(\mathbb{Z}^2_u)=\phi\}) \in \mathcal{G}(\beta,0)$$

である。 ところが，Th. 2.2 により

$$\mu(\cdot \mid \{I_-(\mathbb{Z}^2_u)=\phi\}) = \mu_+$$

だから，

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}^2)=\phi)$$

$$= \mu(\{I_-(\mathbb{Z}^2)=\phi\} \cap \{I_-(\mathbb{Z}^2_u)=\phi\})$$

$$\geq \mu_+(I_-(\mathbb{Z}^2)=\phi)\,\mu(I_-(\mathbb{Z}^2_u)=\phi)$$

$$\geq \frac{1}{4}b(\beta)^2$$

(Q. E. D.)

<u>Lemma 2.22.</u> $h=0$，$\beta>\beta_c$，ω_1 は Lemma 2.21 で与えたものとする。 Λ_n を

$$\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^2;\ \max(|x^1|,|x^2|) \leq n\}$$

とおくとき，任意の $|\Lambda|<\infty$ なる Λ に対し，ある $k_0=k_0(\Lambda)$ が存在して，$k>k_0$ なる任意の k に対して $n_0=n_0(k,\Lambda)$ がとれて，$\Lambda'\supset\Lambda_{n_0}$ なる任意の x^1軸に対称な Λ' ($|\Lambda'|<\infty$)

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

に対して

$$P_{\Lambda'}^{\omega_1}(G_k^{-*}(\Lambda)) \leq 1 - \frac{1}{8}b(\beta)^2$$

が成り立つ。 ただし、

$$G_k^{-*}(\Lambda) \equiv \left\{ \omega \in \Omega ;\ \begin{array}{l} \Lambda \text{ に intersect する size } k \text{ 以上} \\ \text{の } -(*) \text{cluster が存在する。} \end{array} \right\}$$

とおく。

<u>証明</u>. Lemma の主張を否定してみると、ある Λ^* ($|\Lambda^*| < \infty$) と $\{k_j\}_{j\geq 1}$ が $k_j \to \infty$ ($j \to \infty$), また各 j に対して $\{n_\ell^j\}_{\ell\geq 1}$, $n_\ell^j \to \infty$ ($\ell \to \infty$) なる列と

$$\Lambda_{(\ell)}^j \supset \Lambda_{n_\ell^j} \quad , \quad |\Lambda_{(\ell)}^j| < \infty$$

なる列 $\{\Lambda_{(\ell)}^j\}$ がとれて

$$P_{\Lambda_{(\ell)}^j}^{\omega_1}(G_{k_j}^{-*}(\Lambda^*)) > 1 - \frac{1}{8}b(\beta)^2$$

が成り立つようにできる。 各 j に対して $\{P_{\Lambda_{(\ell)}^j}^{\omega_1}\}_{\ell\geq 1}$ の極限点の一つを μ_j とかくと、明らかに

$$\mu_j(G_{k_j}^{-*}(\Lambda^*)) \geq 1 - \frac{1}{8}b(\beta)^2$$

が成り立つ。 $j \geq j'$ ならば

$$G_{k_j}^{-*}(\Lambda^*) \subset G_{k_{j'}}^{-*}(\Lambda^*)$$

だから

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\mu_j (G^{-*}_{k_{j'}} (\Lambda^*)) \geq 1 - \frac{1}{8} b(\beta)^2 .$$

よって $\{\mu_j\}_{j\geq 1}$ の極限点を μ_* とかくとき、任意の $j>0$ に対して

$$\mu_* (G^{-*}_{k_j} (\Lambda^*)) \geq 1 - \frac{1}{8} b(\beta)^2$$

ここで $j \to \infty$ として

$$(2.17) \qquad \mu_* (\Lambda^* \cap I^{(*)}_{-} (\mathbb{Z}^2) \neq \phi) \geq 1 - \frac{1}{8} b(\beta)^2 .$$

ところが μ_* は明らかに $\{ P^{\omega_1}_{\Lambda} ; |\Lambda| < \infty, \Lambda$ は x' 軸に関して対称$\}$ の閉包の中に入っているから Lemma 2.21 と (2.17) は矛盾している。

(Q.E.D.)

<u>Theorem 2.3 の証明</u>.

$\Omega_3 = \{ \omega \in \Omega ; N_\infty(\omega) \neq 0 \}$ とおく。 このとき、

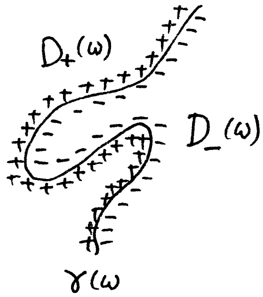
Prop. 2.4. により

$$\mu (\Omega_3 \setminus \Omega_1) = 0$$

を証明すればよい。 Th. 2.2 によって $\mu \neq \mu_+, \mu_-$ だとすれば、μ-a.s. で $I_+(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi$、$I^{(*)}_-(\mathbb{Z}^2_u) \neq \phi$。 また、Proposition 2.3 によって $I_+(\mathbb{Z}^2_u)$ は 1 つの connected component から成るし、$I^{(*)}_-(\mathbb{Z}^2_u)$ も 1 つの (*)connected component から成る。 そこで、$I_+(\mathbb{Z}^2)$ の $I_+(\mathbb{Z}^2_u)$ を含む component と $I^{(*)}_-(\mathbb{Z}^2)$ の $I^{(*)}_-(\mathbb{Z}^2_u)$ を含む component は 1 つの ∞contour によって separate される。 これを $\gamma(\omega)$ とかくことにす

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

る。 $\gamma(\omega)$ によって $\mathbb{Z}^2$ は+の領域 $D_+(\omega)$ と−の領域 $D_-(\omega)$ に分けることができる。



$\gamma(\omega)$ の位置及び $\mathcal{B}_{D_-}$ によって条件をつけた μ の条件付確率を μ_ω とかくことにする。

$D_+\cap\Lambda\neq\phi$ なる勝手な Λ ($|\Lambda|<\infty$) を固定し、任意の $k>0$ に対し

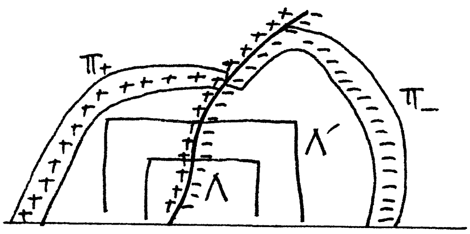
$$G_k^{-*}(\Lambda\cap D_+) \equiv \left\{\omega\in\Omega;\ \begin{array}{l} D_+ \text{ に } \Lambda \text{ と交わる size } k \text{ 以上の} \\ -(*)\text{cluster が存在する。}\end{array}\right\}$$

とおく。 $k_0=k_0(\Lambda)$ とし、任意の $k>k_0$ を固定する。Lemma 2.22 により、このとき $n_0(\Lambda,k)$ がとれて、$\Lambda'\supset\Lambda_{n_0}$ ($|\Lambda'|<\infty$, Λ'は x^1軸に関し対称) とするとき

(2.18) $\quad P_{\Lambda'}^{\omega_1}(G_k^{-*}(\Lambda)) \leq 1-\frac{1}{8}b(\beta)^2$

とできる。 この様な Λ' を一つとっておく。

一方、Prop. 2.3 により μ-a.s. ω に対し μ_ω-a.s. で Λ' の外側を通り $D_+(\omega)$ で $\gamma(\omega)$ と x^1軸を結ぶ + chain Π_+ と、$\gamma(\omega)$ と x^1軸を $D_-(\omega)$で結ぶ −(*)chain Π_- が存在する。



$$\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-$$

とする。 これは Λ' を囲む (*) half circuit としてよい。 (Π_+ と Π_- がつながっていなければ、$\gamma(\omega)$ に沿って Π_+ につながるまで Π_- を延長できる。)

任意の $\varepsilon>0$ に対し $\Lambda''\supset\Lambda'$ ($|\Lambda''|<\infty$) を十分大にとっておいて、

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\mu_\omega(\Lambda'' に \Lambda' を囲む \pi が存在) \geq 1-\varepsilon$$

とできる。 いつもの様に Λ'' で Λ' を囲む勝手な(*)half circuit S に対し、

$$A_S \equiv \{\omega\in\Omega;\ S が maximal な \pi\}$$

とおくと、

$$\sum_S{}^* \mu_\omega(A_S) \geq 1-\varepsilon。$$

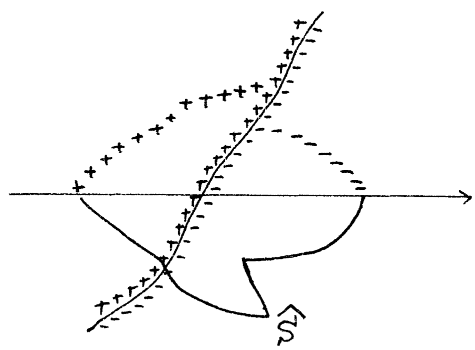
$\hat{S}$ を S を x^1 軸に関して折り返したものとするとき、FKG不等式により

$$\mu_\omega(G_k^{-*}(\Lambda\cap D_+) \mid A_S \cap \{\sigma(x);\ x\in\hat{S}\setminus S\})$$

$$\leq P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(G_k^{-*}(\Lambda\cap D_+))$$

$$\leq P^{\omega_1}_{\Lambda(S\cup\hat{S})}(G_k^{-*}(\Lambda))$$

$$\leq 1-\frac{1}{8}b(\beta)^2$$



が $k\geq k_0$, $\sigma\in\Omega_{\hat{S}\setminus S}$ に対して成立。
これより、

$$\mu_\omega(G_k^{-*}(\Lambda\cap D_+)) \leq (1-\varepsilon)(1-\frac{1}{8}b(\beta)^2)+\varepsilon。$$

左辺は ε-independent だから、

$$\mu_\omega(G_k^{-*}(\Lambda\cap D_+)) \leq 1-\frac{1}{8}b(\beta)^2 \qquad \forall k\geq k_0$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

すなわち

$$\mu\left(\gamma(\omega) \neq \phi,\ I_{-}^{(*)}(D_+) = \phi\right) \geq \frac{1}{8} b(\beta)^2$$

同様 μ'_ω を $\gamma(\omega)$ の位置と $\mathcal{B}_{D_+}$ で条件をつけた μ の条件付確率とすれば

$$\mu\left(\gamma(\omega) \neq \phi,\ I_{+}^{(*)}(D_-) = \phi,\ I_{-}^{(*)}(D_+) = \phi\right)$$

$$= \int_{\{\gamma(\omega) \neq \phi,\ I_{-}^{(*)}(D_+) = \phi\}} \mu_\omega\left(I_{+}^{(*)}(D_-) = \phi\right) \mu(d\omega)$$

$$\geq \left(\frac{1}{8} b(\beta)^2\right)^2 > 0$$

$\gamma(\omega) \neq \phi,\ I_{+}^{(*)}(D_-) = \phi,\ I_{-}^{(*)}(D_+) = \phi$ のとき $\omega \in \Omega_1$ だから、

$$\mu(\Omega_1) > 0$$

を得る。 $\Omega_1 \in \mathcal{B}_\infty$, μ は $\mathcal{B}_\infty$ 上 trivial だから、

$$\mu(\Omega_1) = 1$$

すなわち、$\mu(\Omega_3 \setminus \Omega_1) = 0$

(Q.E.D.)

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

§7. まとめと Open problems

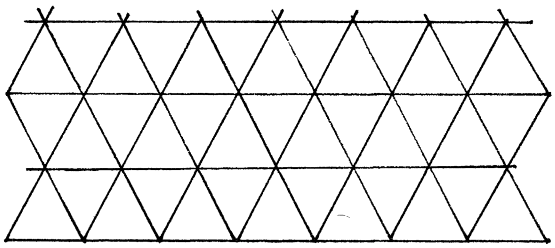
§6までで二次元 Ising model の $\mathcal{G}(\beta, h)$ の構造の決定という問題は解決されたことになる。更に、ここで行なった議論は $\mathbb{Z}^2$ に限らず $\mathbb{R}^2$ に埋め込まれた次の条件を満たす様なすべての平面グラフ $\mathcal{G}$ について今までと全く同じ議論が行なえることを注意しておく。

(1) $\mathcal{G}$ は x^1 軸、x^2 軸の両方向に periodic,

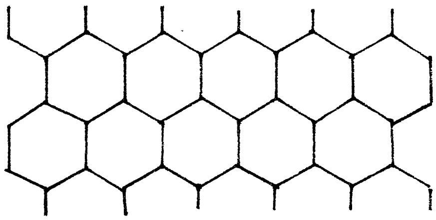
(2) $\mathcal{G}$ は x^1 軸及び x^2 軸に平行な対称軸をそれぞれ持っている。

(一本ずつでもあれば(1)から無限個有ることがわかる。)

従って $\mathcal{G}$ として例えば平面三角格子、蜂の巣格子などをとると、$\mathcal{G}$ 上の Ising model の $\mathcal{G}(\beta, h)$ は μ_+ と μ_- によって張られることが言える。



平面三角格子



平面蜂の巣格子

反面、ここで行なった議論は二次元特有のものであって、三次元以上では事情は全く異なる。例えば付録で述べるが、Bejeren は [3] で $d \geq 3$ のとき translation invariant でない Gibbs 分布の存在を示している。これは Dobrushin [9] によってもともと得られていた結果だが、β に関する条件がかなりよくなっている。証明には相関不等式が威力を発揮する。

三次元あるいは更に高次元において β_c の値と percolation の確率 $\mu(I_+(\mathbb{Z}^d) \neq \phi)$, $\mu(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^d) \neq \phi)$ との間にどの様な関係が有るかについてはまだ知られていない。(モンテカルロ法によると、Percolation がはじまる β_p が β_c よりも小さい

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

ようである。）

三次元ではβが大のとき translation invariant でない Gibbs 分布が存在するが、その様なβの下限を β_T とかくと、$\beta_c < \beta_T$ であることが予想されている。しかし、この証明に関しては何ら有効な手がかりは得られていない。一つの予想としてはこれも何らかの意味で"面の percolation"と関係が有るのではないかというのも有るが、それをどう定式化するかもまだあいまいな状態である。

もう一つの大きな問題は Hamiltonian H_Λ^ω を(1.1)で与えるかわりに

$$(1.1)' \quad \overline{H}_\Lambda^\omega(\sigma) = \sum_{\langle x,y\rangle \Lambda} \sigma(x)\sigma(y) + \sum_{\substack{\langle x,y\rangle \\ x\in\Lambda,\, y\in\partial\Lambda}} \sigma(x)\omega(y) - \sum_{x\in\Lambda} h\sigma(x)$$

で与えると、エネルギー（$\overline{H}_\Lambda^\omega$ の値）は $\sigma(x)\sigma(y) = -1$，つまり隣接したスピン同志が逆向きのとき低くなり安定となる。(1.1)で与えられる Hamiltonian を強磁性的（ferromagnetic）と呼ぶのに対し(1.1)′で与えられる Hamiltonian を反強磁性的（anti-ferromagnetic）と呼ぶ。$h = 0$ で $\mathbb{Z}^d$ 上で考えるとき $\sum_{i=1}^{d} x^i$ が even な点と odd な点とに分けて $\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}_e^d \cup \mathbb{Z}_o^d$ とかくことにする。

$T : \Omega \to \Omega$ を

$$(T\omega)(x) = \begin{cases} \omega(x) & \text{if } x \in \mathbb{Z}_e^d \\ -\omega(x) & \text{if } x \in \mathbb{Z}_o^d \end{cases}$$

と定義することにより、

$$\overline{H}_\Lambda^\omega(\sigma) = H_\Lambda^{T\omega}(T\sigma)$$

とかけ、ferromagnetic の場合に帰着する。従って $d = 2$ では $\mathcal{G}(\beta, 0)$ は μ_+ と μ_- によって張られる。しかし、$h \neq 0$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

のときの事情は全く異なる。 色々評価、予想があるが、$\mathcal{G}(\beta,h)$の構造については決定的な結果はまだ出ていない。（Slowny & Holsztynski [43] 参照）

最近、Renormalization group に関する論文が多数見うけられるが、二次元Ising model に関しては [16] に出ている結果が最も強いと思われる。 これによると $\beta \neq \beta_c$ において繰り込みによる極限は Gaussian であることがわかる。 一方、$\beta = \beta_c$ では多分極限は Gaussian ではないだろうと予想されており、今もまだ未解決である。 つい最近、Aizenman [2]、Fröhlich [13] 等によって $d \geq 5$ のとき、繰り込みによる極限は、任意の $\beta > 0$ で Gaussian であることが示されたようであるが、これも $d \leq 4$ では（$d = 1$ を除いて）open である。

二次元Ising model の厳密解（行列の方法）は佐藤－三輪－神保の一連の論文（[38]～[42]）によって研究され、$\beta \to \beta_c$ での繰り込み（Scaling limit）の結果がて関数と呼ばれる場の理論に出てくる関数とつながることが示された。 更に Palmer-Tracy [34] はこの極限は Markov field であることを示している。 これが実際にどういう性質を持つ場であるかを調べることも確率論にとって興味のある問題であろう。

その外にも $\{+1,-1\}$ のスピン系からもう少し複雑な系にしたときに $\mathcal{G}(\beta,h)$ の構造（パラメータは系によって (β,h) から別のものに変わるだろうから、正確には Gibbs分布全体のなす集合の構造といった方が正しいだろう。）がどうなるか—例えば Widom－Raulinson model（[4]～[6]），double－well potential をもつ continuous spin system（Dobrushin－Shlosman : preprint）2次元 Potts model（Kotecký－Shlosman ; Comm. Math. Phys. 83, 493－515）などについて Ising model の場合とどう違うのかを調べることは面白いと思われる。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

Appendix I. 相関不等式

まず、基本的な二つの不等式であるＦＫＧ，ＧＫＳの両不等式を証明し、更にそのいくつかの拡張について論じることにする。

§1. ＦＫＧ不等式

まず、Th.1.1の証明を行なう。　(1.9)を$|F|$に関する帰納法で証明する。

$|F|=1$ のとき：

$X=I$ となるから、I上の increasing ft.'s h_1, h_2 と I上の確率測度 P に対して、

$$\langle h_1 h_2 \rangle_P - \langle h_1 \rangle_P \langle h_2 \rangle_P$$

$$= \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \{ h_1(i)h_2(i) - h_1(i)h_2(j) \} P(i)P(j)$$

$$= \sum_{\substack{i,j\in I \\ i\geq j}} \{ h_1(i)h_2(i) - h_1(i)h_2(j) - h_1(j)h_2(i) + h_1(j)h_2(j) \} P(i)P(j)$$

$$= \sum_{\substack{i,j\in I \\ i\geq j}} (h_1(i)-h_1(j))(h_2(i)-h_2(j)) P(i)P(j)$$

$$\geq 0 .$$

$|F| \leq n$ で Th.1.1. は正しいと仮定する。

$|F| = n+1$ のとき：

$F = F' \cup \{f_0\}$ ，$|F'| = n$ とおき、更に $X = I^F$,

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$X' = I^{F'}$ とかくことにする。 記号として $i \in I$, $x' \in X'$ に対し

$$P_0(i) \equiv P(x \in X;\ x_{f_0} = i) > 0,$$

$$P_i(x') \equiv P(x' \cup i) \cdot P_0(i)^{-1} > 0$$

とおく。 ただし. $(x' \cup i) \in X$ は

$$(x' \cup i)_f = \begin{cases} i & \text{if} \quad f = f_0 \\ x'_f & \text{if} \quad f \neq f_0 \end{cases}$$

と定義する。 このとき.

$$\langle h_1 h_2 \rangle_P$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{x' \in X'} h_1(x' \cup i)\, h_2(x' \cup i)\, P_i(x')\, P_0(i)$$

とかける。 $i \in I$ をとめたとき $h_\nu(\cdot \cup i)$ $(\nu = 1, 2)$ は X' 上 increasing で、(1.8 b) により

$$P_i(x' \vee y')\, P_i(x' \wedge y') \geq P_i(x')\, P_i(y') \qquad \forall x', y' \in X'$$

だから、X', $h_\nu(\cdot \cup i)$ $(\nu = 1, 2)$, $P_i(\cdot)$ について帰納法の仮定が使えて

$$\sum_{x' \in X'} h_1(x' \cup i)\, h_2(x' \cup i)\, P_i(x')$$

$$\geq \sum_{x', y' \in X'} h_1(x' \cup i)\, h_2(y' \cup i)\, P_i(x')\, P_i(y') .$$

いま、 $g_\nu(i) \equiv \sum_{x' \in X'} h_\nu(x' \cup i)\, P_i(x')$ とおくと. 上のこと

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

から、

$$\langle h_1 h_2 \rangle_P$$

$$\geq \sum_{i \in I} g_1(i) g_2(i) P_0(i)$$

がでてくる。 最後に、$g_\nu(\cdot)$ $(\nu = 1, 2)$ が I 上 increasing なことを示せば

$$\sum_{i \in I} g_1(i) g_2(i) P_0(i) \geq \sum_{i, j \in I} g_1(i) g_2(j) P_0(i) P_0(j)$$

$$= \langle h_1 \rangle_P \langle h_2 \rangle_P$$

となり定理の主張が出てくる。 以下、g_ν が I 上 increasing であることを示す。

h_ν は increasing なので $i \geq j$ とすると

$$g_\nu(i) \geq \sum_{x' \in X'} h_\nu(x' \cup j) P_i(x').$$

$$\phi(x') \equiv P_i(x') / P_j(x')$$ とおくと、

$$g_\nu(i) \geq \sum_{x' \in X'} h_\nu(x' \cup j) \phi(x') P_j(x').$$

$x' \geq y'$ のとき

$$\phi(x') / \phi(y') = P(x' \cup i) P(y' \cup i) / P(x' \cup j) P(y' \cup j)$$

で、 $(x' \cup j) \vee (y' \cup i) = x' \cup i$,

$(x' \cup j) \wedge (y' \cup i) = y' \cup j$

だから、(1.8b.) により ϕ は X' 上 increasing。 $h_\nu(\cdot\cup j)$ もそうだから、再び帰納法の仮定により

$$\sum_{x'\in X'} h_\nu(x'\cup j)\,\phi(x')\,P_j(x')$$
$$\geq \sum_{x',y'\in X'} h_\nu(x'\cup j)\,\phi(y')\,P_j(x')\,P_j(y').$$

ところが、

$$\sum_{y'\in X'} \phi(y')\,P_j(y') = 1$$

だから、

$$g_\nu(i) \geq \sum_{x'\in X'} h_\nu(x'\cup j)\,P_j(x') = g_\nu(j)$$

ゆえに g_ν は I 上 increasing.

(Q.E.D.)

§2. GKS不等式

次は Th. 1.2. を証明する。 記号、その他の定義については Chapter I, §2 を参照のこと。

<u>Lemma A.1.</u> $Q \subset \mathcal{C}(X)$ が (Q.3) をみたすならば、Q は (Q.2) をみたす。

<u>証明</u>.

$$\int \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\,\mu(dx) = \frac{1}{2}\int\left\{\prod_{i=1}^{n} f_i(x) + \prod_{i=1}^{n} f_i(y)\right\}\mu(dx)\,\mu(dy)$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

とかける。 一方.

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(x) + \prod_{i=1}^{n} f_i(y)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[(f_n(x)+f_n(y))\Big(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x) + \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y)\Big) +$$
$$+ (f_n(x)-f_n(y))\Big(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x) - \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y)\Big)\Big]$$

及び

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(x) - \prod_{i=1}^{n} f_i(y)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[(f_n(x)+f_n(y))\Big(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x) - \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y)\Big) +$$
$$+ (f_n(x)-f_n(y))\Big(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x) + \prod_{i=1}^{n-1} f_i(y)\Big)\Big]$$

であることに注意すると帰納的に $\prod_{i=1}^{n} f_i(x) \pm \prod_{i=1}^{n} f_i(y)$ は $\prod_{i=1}^{n}\{f_i(x) \pm f_i(y)\}$ の positive linear combination によってかける。 (Q.3) があれば、このことと最初に注意したことによって (Q.2) が出てくる。

(Q.E.D.)

<u>Lemma A. 2.</u>

(i) $S \subset C(X)$ が (Q.2) をみたすならば $Q(S)$ も (Q.2) をみたす。

(ii) $S \subset C(X)$ が (Q.3) をみたすならば $Q(S)$ も (Q.3) をみたす。

<u>証明</u>. (i) については trivial。 (ii) についてのみ示す。

$$M(S) \equiv \Big\{ \prod_{i=1}^{n} g_i \ ;\ n \text{ は自然数},\ g_i \in S \quad \forall i \Big\}$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

とおく。 $\{f_i\}_{i=1}^{n} \subset M(\mathcal{S})$ とするとき、$\prod_{i=1}^{m}\{f_i(x) \pm f_i(y)\}$ は Lemma A.1 の証明により、ある $\{g_k\}_{k=1}^{\ell} \subset \mathcal{S}$ の positive linear combination によってかける。 従って $M(\mathcal{S})$ も (Q.3) をみたす。

$$h_j = \sum_{i=1}^{n_j} C_{ij}\, g_{ij} \qquad C_{ij} \geq 0 \qquad g_{ij} \in M(\mathcal{S}) \qquad j = 1, \cdots, p$$

とすると、

$$\prod_{j=1}^{p}\{h_j(x) \pm h_j(y)\} = \prod_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n_j} C_{ij}\{g_{ij}(x) \pm g_{ij}(y)\}$$

だから、 $\displaystyle\int \prod_{j=1}^{p}\{h_j(x) \pm h_j(y)\}\,\mu(dx)\mu(dy) \geq 0$.

最後にこの様な $\{h_j\}$ の形の極限となっている $\{f_j\}$ に対しては、$C(X)$ での強位相で考えているので積分の positivity は変わらない。 すなわち、$Q(\mathcal{S})$ も (Q.3) をみたす。

(Q.E.D.)

Theorem 1.2 の証明.

(i) e^{-h}, $f \in Q(\mathcal{S})$ で $\mathcal{S}$ が (Q.2) をみたすから、$Q(\mathcal{S})$ も (Q.2) をみたし、とくに

$$\int e^{-h(x)} f(x)\,\mu(dx) \geq 0, \quad Z(h) = \int e^{-h(x)}\,\mu(dx) \geq 0$$

$Z(h) \neq 0$ だから $\langle f \rangle_h \geq 0$ を得る。

(ii) $$e^{-h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-h)^n \in Q(\mathcal{S}),$$

$$Z_h = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-h)^n(x)\,\mu(dx)$$

$$\geq 1$$

(iii) $\langle fg \rangle_h - \langle f \rangle_h \langle g \rangle_h =$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$= Z(h)^{-2}\int\{f(x)g(x) - f(x)g(y)\}e^{-h(x)-h(y)}\mu(dx)\mu(dy)$$

$$= \frac{1}{2}Z(h)^{-2}\int\{f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y)\}\times$$
$$\times e^{-h(x)-h(y)}\mu(dx)\mu(dy)$$

$$= \frac{1}{2}Z(h)^{-2}\int\{f(x)-f(y)\}\{g(x)-g(y)\}e^{-h(x)-h(y)}\mu(dx)\mu(dy)$$

$$= \frac{1}{2}Z(h)^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\{f(x)-f(y)\}\{g(x)-g(y)\}\{-h(x)-h(y)\}^n\mu(dx)\mu(dy)$$

$$\geq 0$$

(Q.E.D.)

§3. Lebowitz の不等式

この節ではFKG及びGKS不等式の応用として主にLebowitzによって得られた二つの不等式とその利用について紹介する。

まず，Lebowitz不等式と呼ばれる相関不等式の方から紹介するために(1.1)よりは一般の形をしたHamiltonian H_Λ, H'_Λ を次の様に与えておく。

$$H_\Lambda(\sigma) = -\sum_{K\subset\Lambda} J_K\sigma_K,$$

$$H'_\Lambda(\sigma) = -\sum_{K\subset\Lambda} J'_K\sigma_K,$$

ただし $\sigma_K = \prod_{x\in K}\sigma(x)$ とする。

<u>Theorem A.1</u> (Lebowitz不等式 [28])

$$J_K \geq |J'_K| \qquad \forall K\subset\Lambda$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

とする。 このとき勝手な $A, B \subset \Lambda$ に対して

(i) $\langle \sigma_A \rangle \geq \langle \sigma_A \rangle'$

(ii) $\langle \sigma_A \rangle - \langle \sigma_A \rangle' \geq | \langle \sigma_A \sigma_B \rangle \langle \sigma_B \rangle' - \langle \sigma_B \rangle \langle \sigma_A \sigma_B \rangle' |$

が成り立つ。 ただし $\langle \cdot \rangle$, $\langle \cdot \rangle'$ はそれぞれ H_Λ, H'_Λ から決まる Λ 上の有限 Gibbs 分布による平均とする。

<u>証明</u>.

(i) $$Z = \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}, \quad Z' = \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta H'_\Lambda(\sigma)}$$

とおくとき、

$$\langle \sigma_A \rangle - \langle \sigma_A \rangle'$$

$$= (Z Z')^{-1} \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \sum_{\eta \in \Omega_\Lambda} (\sigma_A - \eta_A) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma) - \beta H'_\Lambda(\eta)}$$

$$= (Z Z')^{-1} \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \sum_{\eta \in \Omega_\Lambda} (\sigma_A - \eta_A) e^{\beta \sum_{K \subset \Lambda} (J_K \sigma_K + J'_K \eta_K)} .$$

$\xi \in \Omega_\Lambda$ を $\xi(x) = \sigma(x) \eta(x)$ とおき変数変換をすると

$$= (Z Z')^{-1} \sum_{\xi \in \Omega_\Lambda} \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \sigma_A (1 - \xi_A) e^{\beta \sum_{K \subset \Lambda} (J_K + J'_K \xi_K) \sigma_K}$$

ξ をとめるごとに $J_K + J'_K \xi_K \geq 0$ だから Prop. 1.5 と GKS 不等式が使えて (i) の主張が成り立つ。

(ii) $C = A \triangle B$ とおく。 このとき

$$(1 \pm \xi_B)(1 \pm \xi_C) \geq 0$$

だからこれを展開して

$$1 - \xi_A \geq \pm (\xi_B - \xi_C)$$

を得る。 このことと (i) とあわせて

$$\sum_{\xi \in \Omega_\Lambda} (1 - \xi_A) \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \sigma_A \, e^{\beta \sum_{K \subset \Lambda} (J_K + J'_K \xi_K) \sigma_K}$$

$$\geq \pm \sum_{\xi \in \Omega_\Lambda} (\xi_B - \xi_C) \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \sigma_A \, e^{\beta \sum_{K \subset \Lambda} (J_K + J'_K \xi_K) \sigma_K}$$

$$= \pm \sum_{\sigma, \eta \in \Omega_\Lambda} (\eta_B \sigma_C - \eta_C \sigma_B) \, e^{-\beta H_\Lambda(\sigma) - \beta H'_\Lambda(\eta)}$$

$$= \pm \left(\langle \sigma_C \rangle \langle \sigma_B \rangle' - \langle \sigma_B \rangle \langle \sigma_C \rangle' \right)$$

(Q.E.D.)

Corollary.

(i) $\mu \in \mathcal{G}(\beta, h)$ が

$$E_\mu (X_x) = E_{\mu_+} (X_x) \qquad \forall x \in \mathbb{Z}^2$$

をみたすならば $\mu = \mu_+$

(ii) $\mu \in \mathcal{G}(\beta, h)$ が

$$E_\mu (X_x X_y) = E_{\mu_+} (X_x X_y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}^2$$

をみたすならば $A \subset \mathbb{Z}^2$, $|A| = \text{even}$ なるすべての A に対して

$$E_\mu \Big(\prod_{x \in A} X_x \Big) = E_{\mu_+} \Big(\prod_{x \in A} X_x \Big)$$

が成り立つ。 ただし、 $X_x(\omega) = \omega(x)$ $(x \in \mathbb{Z}^2)$ とする。

証明. $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, $|\Lambda| < \infty$ を固定するごとに H_Λ^{ω} と $H_\Lambda^{\omega^+}$ をそれぞれ H'_Λ, H_Λ と思って Th.A.1 を使えば

$$\langle \sigma_A \rangle_\Lambda^{\omega^+} - \langle \sigma_A \rangle_\Lambda^{\omega}$$

$$\geq \pm \left(\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\Lambda^{\omega^+} \langle \sigma_B \rangle_\Lambda^{\omega} - \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\Lambda^{\omega} \langle \sigma_B \rangle_\Lambda^{\omega^+} \right)$$

が勝手な $A, B \subset \Lambda$ について成立している。両辺 μ で積分して

$$\langle \sigma_A \rangle_\Lambda^{\omega^+} - E_\mu\left[\prod_{x \in A} X_x \right]$$

$$\geq \pm \left[\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\Lambda^{\omega^+} E_\mu\left[\prod_{x \in B} X_x \right] - E_\mu\left[\prod_{x \in A \triangle B} X_x \right] \langle \sigma_B \rangle_\Lambda^{\omega^+} \right]$$

$\Lambda \to \infty$ として

$$E_{\mu_+}\left[\prod_{x \in A} X_x \right] - E_\mu\left[\prod_{x \in A} X_x \right]$$

$$\geq \pm \left\{ \left[E_{\mu_+}\left[\prod_{x \in A \triangle B} X_x \right] E_\mu\left[\prod_{x \in B} X_x \right] - E_\mu\left[\prod_{x \in A \triangle B} X_x \right] E_{\mu_+}\left[\prod_{x \in B} X_x \right] \right] \right\}$$

ここで、A, B を (i) では勝手, (ii) では $|A|$, $|B|$ が even となるようにとり、$A \cap B = \phi$ となるようにすると帰納的に Corollary の主張が証明できる。

(Q.E.D.)

もう一つ、スピンの重ね合わせに関する不等式として知られている不等式を紹介する。もともと Chapter II の結果 (Th. 2.2, 2.3) はこの不等式を用いて証明されていたが、この本では別の方法を採用したので、この付録にのみ出てくることになった。いろいろと応用の広い不等式の一つである。そのうち van Bejeren [3] による応用は現在でも interface に関する最

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

も sharp な結果として知られている。 その紹介のため、ここでは d-次元 Ising model で考えることにする。

$x \in \mathbb{Z}^d$ は $x = (x^1, x^2, \cdots, x^d)$ によって表わされる。 超平面 $\{x^1 = -\frac{1}{2}\}$ に関して対称な有限集合 Λ を一つ固定する。 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\{x^1 = -\frac{1}{2}\}$ に関する x の対称点を $\hat{x}$ とかくことにする。

$\Lambda_1 \equiv \{x \in \Lambda;\ x^1 \geq 0\}$ とおくと明らかに $\Lambda = \Lambda_1 \cup \hat{\Lambda}_1$, $\Lambda_1 \cap \hat{\Lambda}_1 = \phi$ である。 $\sigma \in \Omega_\Lambda$ に対して新しいスピン変数 s, t を $x \in \Lambda_1$ に対して

$$s(x) = \frac{1}{2}(\sigma(x) + \sigma(\hat{x})), \quad t(x) = \frac{1}{2}(\sigma(x) - \sigma(\hat{x}))$$

によって定める。 $\omega \in \Omega$ に対しては

$$\hat{s}(x) = \frac{1}{2}(\omega(x) + \omega(\hat{x})), \quad \hat{t}(x) = \frac{1}{2}(\omega(x) - \omega(\hat{x}))$$

と書くことにする。 H_Λ^ω から決まる有限 Gibbs 分布による平均を $\langle \cdot \rangle_\Lambda^\omega$ とかくことにする。

<u>Theorem A.2</u> (Lebowitz [27], Messager, Miracle-Sole [29])
$\hat{t}(x) \geq 0$, $\hat{s}(x) \geq 0 \quad \forall x \in (\partial\Lambda) \cap \{x^1 \geq 0\}$ とする。このとき、

(i) $A, B \subset \Lambda_1$ に対して

$$\langle s_A t_B \rangle_\Lambda^\omega \geq 0$$

(ii) $A, B \subset \Lambda_1$ に対して

$$\langle s_A s_B \rangle_\Lambda^\omega \geq \langle s_A \rangle_\Lambda^\omega \langle s_B \rangle_\Lambda^\omega$$

$$\langle t_A t_B \rangle_\Lambda^\omega \geq \langle t_A \rangle_\Lambda^\omega \langle t_B \rangle_\Lambda^\omega$$

$$\langle s_A t_B \rangle_\Lambda^\omega \leq \langle s_A \rangle_\Lambda^\omega \langle t_B \rangle_\Lambda^\omega$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

証明のために Lemma を一つ用意する。

Lemma A.3. $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$ に対して

$$H_\Lambda(\sigma) \equiv -\sum_{K \subset \Lambda} J_K \sigma_K \qquad (J_K \geq 0 \quad \forall K \subset \Lambda)$$

とおく。 $Z_\Lambda \equiv \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \exp[-\beta H_\Lambda(\sigma)]$ とするとき、

$\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda_i| < \infty$ $i = 1, 2$ ならば

$$(A.1) \qquad Z_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} \cdot Z_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} \geq Z_{\Lambda_1} \cdot Z_{\Lambda_2}$$

が成り立つ。

証明. $K \subset \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $K \cap \Lambda_1 \neq \phi$, $K \cap (\Lambda_2 \backslash \Lambda_1) \neq \phi$
なる K に対して、

$$\frac{\partial}{\partial J_K}\left\{ \log Z_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} + \log Z_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} - \log Z_{\Lambda_1} - \log Z_{\Lambda_2} \right\}$$

$$= \begin{cases} \langle \sigma_K \rangle_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} & \text{if} \quad K \not\subset \Lambda_2, \\ \langle \sigma_K \rangle_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} - \langle \sigma_K \rangle_{\Lambda_2} & \text{if } K \subset \Lambda_2, \end{cases}$$

ところが

$$\langle \sigma_K \rangle_{\Lambda_2} = \langle \sigma_K \rangle_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} \Big|_{J_A = 0 \quad \text{for} \quad \substack{A \cap \Lambda_2 \neq \phi, \\ A \cap \Lambda_1 \backslash \Lambda_2 = \phi}}$$

であり、 $A \subset \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial J_A} \langle \sigma_K \rangle_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} = \langle \sigma_K \sigma_A \rangle_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} - \langle \sigma_K \rangle_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$$

右辺はGKS不等式により non-negative だから $\langle\sigma_K\rangle_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}$ は $\{J_A\ ;\ A\subset\Lambda_1\cup\Lambda_2\}$ に対して increasing。よって

$$\frac{\partial}{\partial J_K}\left\{\log Z_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}+\log Z_{\Lambda_1\cap\Lambda_2}-\log Z_{\Lambda_1}-\log Z_{\Lambda_2}\right\}\geq 0$$

が $K\subset\Lambda_1\cup\Lambda_2$, $K\cap\Lambda_1\neq\phi$, $K\cap(\Lambda_2\setminus\Lambda_1)\neq\phi$ となるKに対して成り立つ。このようなKに対してすべて $J_K=0$ とおくと

$$Z_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}=Z_{\Lambda_1}\cdot Z_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}\ ,\qquad Z_{\Lambda_2}=Z_{\Lambda_1\cap\Lambda_2}\cdot Z_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}$$

となり、このとき

$$\log Z_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}+\log Z_{\Lambda_1\cap\Lambda_2}-\log Z_{\Lambda_1}-\log Z_{\Lambda_2}=0$$

従って $J_K\geq 0$ $\forall K\subset\Lambda_1\cup\Lambda_2$ のとき (A.1) が成り立つ。

(Q.E.D.)

Theorem A.2 の証明.

(i) まず、$S=\{s(x), t(x)\ ;\ x\in\Lambda_1\}$ とおくとき、S が (Q.2) を満たすことを言う。ただし Ω_Λ 上には $\frac{1}{2}$-Bernoulli meas. ν をおき、$s(x)$, $t(x)$ は $\sigma\in\Omega_\Lambda$ の関数と見る。

$x\in\Lambda_1$, $\sigma\in\Omega_\Lambda$ に対して

$$(\sigma(x)+\sigma(\hat{x}))(\sigma(x)-\sigma(\hat{x}))=0$$

だから、$s(x)t(x)=0$ $\forall x\in\Lambda_1$。よって $A\cap B\neq\phi$ ならば $s_A t_B=0$。また、$A\cap B=\phi$ ならば $\{s(x), t(x)\ ;\ x\in A\}$ と $\{s(x), t(x)\ ;\ x\in B\}$ は ν で独立だから、S が (Q.2) を満たすことをいうには、任意の整数 m, n に対して

$$(A.2)\qquad \int s(x)^m\, t(x)^n\, \nu(d\sigma)\ \geq\ 0\qquad \forall x\in\Lambda_1$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

を示せば十分。上の注意により $m\cdot n \neq 0$ ならば (A.2) は等号で成り立つ。m か n が 0 のとき、ν が $\frac{1}{2}$-Bernoulli であることと s, t の定義により (A.2) はすぐに出てくる。よって S は (Q.2) をみたす。次に、

$$-H_\Lambda^\omega(\sigma) = 2\Big[\sum_{\langle x,y\rangle\subset\Lambda_1}(s(x)s(y)+t(x)t(y)) + \sum_{\substack{x\in\Lambda_1\\ x^1=0}} s(x)^2 + h\sum_{x\in\Lambda_1} s(x) + \sum_{\substack{\langle x,y\rangle\\ x\in\Lambda_1,\\ y\in\partial\Lambda_1\cap\{x^1\geq 0\}}}(s(x)\tilde{s}(y)+t(x)\tilde{t}(y))\Big]$$

$$- N_\Lambda$$

が成り立つ。ただし、$N_\Lambda \equiv \#\{x\in\Lambda_1\,;\,x^1=0\}$ は Λ によって決まる定数。

$$-\mathcal{H}(\sigma) \equiv -H_\Lambda^\omega(\sigma) + N_\Lambda$$

とおくと $-\mathcal{H}\in Q(S)$ だから $e^{-\beta\mathcal{H}}\in Q(S)$。Lemma A.2, Th. 1.2 によりこのとき

$$\langle s_A t_B\rangle_\Lambda^\omega = \langle s_A t_B\rangle_{\beta\mathcal{H}} \geq 0$$

(ii) $\mathcal{H}(\sigma) = 2\mathcal{H}_1(s) + 2\mathcal{H}_2(t)$ とかける。このとき、

$$\langle s_A t_B\rangle_{-\beta\mathcal{H}}$$

$$= \sum_{\substack{A\subset C\subset\Lambda\\ C\cap B=\phi}} F_A(C)\,G_B(C)\,P(C)$$

となる。ただし、F_A, G_B, P はそれぞれ次の式によって与えられるものとする。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$F_A(C) = \sum_{\substack{s(x)=\pm 1,\ x\in C \\ s(x)=0,\ x\notin C}} s_A e^{-\beta\mathcal{H}_1(s)} \Big/ \sum_{\substack{s(x)=\pm 1,\ x\in C \\ s(x)=0,\ x\notin C}} e^{-\beta\mathcal{H}_1(s)},$$

$$G_B(C) = \sum_{\substack{t(x)=0,\ x\in C \\ t(x)=\pm 1\ x\notin C}} t_B e^{-\beta\mathcal{H}_2(t)} \Big/ \sum_{\substack{t(x)=0,\ x\in C \\ t(x)=\pm 1,\ x\notin C}} e^{-\beta\mathcal{H}_2(t)},$$

$$P(C) = \sum_{\substack{s(x)=\pm 1,\ t(x)=0\quad x\in C \\ s(x)=0,\ t(x)=\pm 1\quad x\notin C}} e^{-\beta\mathcal{H}(\sigma)} \Big/ \sum_{\sigma\in\Omega_\Lambda} e^{-\beta\mathcal{H}(\sigma)}.$$

$C\subset\Lambda_1$ に対して $\xi\in\Omega_{\Lambda_1}$ のとき

$$H_{1,C}(\xi) = -\sum_{\langle x,y\rangle\subset C}\xi(x)\xi(y) - \sum_{x\in C}\Big(h + \sum_{\substack{y\in\partial\Lambda_1\cap\{x^1\geq 0\} \\ \langle x,y\rangle}}\hat{s}(y)\Big)\xi(x)$$

$$H_{2,C}(\xi) = -\sum_{\langle x,y\rangle\subset C}\xi(x)\xi(y) - \sum_{x\in C}\Big(\sum_{\substack{y\in\partial\Lambda_1\cap\{x^1\geq 0\} \\ \langle x,y\rangle}}\hat{t}(y)\Big)\xi(x)$$

とおき、対応する Ω_C 上の Gibbs 分布による平均を $\langle\cdot\rangle_{i,C}$, $i=1,2$ とおくと、

$$F_A(C) = \langle\xi_A\rangle_{1,C},\quad G_B(C) = \langle\xi_B\rangle_{2,\Lambda_1\setminus C}$$

となる。 $\hat{s}(x)\geq 0$, $\hat{t}(x)\geq 0$ $\forall x\in(\partial\Lambda)\cap\{x^1\geq 0\}$ より、Lemma A.3 の証明と同様にして

- $F_A(C)$ は $C\ (\supset A)$ に関し increasing.
- $G_B(C)$ は $C\ (\subset B^c)$ に関し decreasing.

であることがわかる。

いま、P が $C, D\subset\Lambda_1$ に対して

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$(*) \quad P(C \cup D)P(C \cap D) \geq P(C)P(D)$$

をみたすならば、$X = \{ C \,;\, C \subset \Lambda_1 \} \simeq \{0,1\}^{\Lambda_1}$ に対して
FKG不等式が使えて

$$\sum_{\substack{C \supset A \\ C \cap B = \phi}} F_A(C) G_B(C) P(C) \geq \sum_{C \supset A} F_A(C) P(C) \sum_{C \cap B = \phi} G_B(C) P(C)$$

$$= \langle \rho_A \rangle_\Lambda^\omega \langle t_B \rangle_\Lambda^\omega$$

となり Th. A.2 の証明はおわる。

$$Z_i(C) = \sum_{\xi \in \Omega_C} e^{-\beta H_{i,C}(\xi)} \qquad i = 1, 2$$

とおくとき、

$$\frac{P(C \cup D) P(C \cap D)}{P(C)\, P(D)} = \frac{Z_1(C \cup D) Z_1(C \cap D) Z_2(\Lambda_1 \backslash (C \cup D)) Z_2(\Lambda_1 \backslash (C \cap D))}{Z_1(C)\, Z_1(D) \quad Z_2(\Lambda_1 \backslash C)\, Z_2(\Lambda_1 \backslash D)}$$

ここで、$Z_1(C)$, $Z_2(C)$ にそれぞれ Lemma A.3 を適用すればよい。 $\langle \rho_A \rho_B \rangle_\Lambda^\omega$, $\langle t_A t_B \rangle_\Lambda^\omega$ についても同様。

(Q.E.D.)

<u>Theorem A.3.</u> (van Bejeren [3])
$d \geq 3$ の d 次元 Ising model を考える。 $B_n \subset \mathbb{Z}^d$ を

$$B_n \equiv \{ x \in \mathbb{Z}^d \,;\, \max_{1 \leq i \leq d} |x^i| \leq n \}$$

で定義し、$\omega_1 \in \Omega$ は

$$\omega_1(x) = \begin{cases} +1 & \text{if} \quad x^1 \geq 0 \\ -1 & \text{if} \quad x^1 < 0 \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

とおく。 $h=0$ と仮定すると

$$\lim_{n\to\infty} \langle \sigma(x) \rangle_{B_n}^{\omega_1} \geq \langle \sigma(0) \rangle_{d-1,+} \qquad x^1 \geq 0$$

となる。 ただし、右辺は d-1次元 Ising model の μ_+ による平均。

<u>証明</u>. $\sigma \in \Omega_{B_n}$ に対し、s, t を $\{x^1=0\}$ を対称軸として作る。 $x^1=0$ においては $t(x)=0$, $s(x)=\sigma(x)$ と理解する。 前と同じように $H_{B_n}^{\omega_1}$ を書き直すと

$$H_{B_n}^{\omega_1}(\sigma) = -2\sum_{\langle x,y\rangle \subset B_n^+} (s(x)s(y)+t(x)t(y))$$
$$-2\sum_{x\in B_n^+} H_x s(x) - 2\sum_{x\in\Lambda_n} K_x t(x)$$

となる。 ただし、

$$B_n^+ \equiv B_n \cap \{x^1 \geq 0\},$$

$$H_x \equiv \sum_{\substack{y\in\partial B_n^+\cap\{x^1\geq 0\}\\ \langle x,y\rangle}} \hat{s}(y), \quad K_x \equiv \sum_{\substack{y\in\partial B_n^+\cap\{x^1\geq 0\}\\ \langle x,y\rangle}} \hat{t}(y),$$

$$\hat{s}(y) \equiv \frac{1}{2}(\omega_1(y)+\omega_1(\hat{y})), \quad \hat{t}(y) \equiv \frac{1}{2}(\omega_1(y)-\omega_1(\hat{y}))$$

とする。 ω_1 の定義により $\hat{s}(y)\geq 0$, $\hat{t}(y)\geq 0$ $\forall y\in\mathbb{Z}^d$ が成り立つ。 $\sigma\in\Omega_{B_n}$ に対して

$$H_n(\sigma) = -2\Big[\sum_{\langle x,y\rangle\subset B_n^+} J_{x,y}(s(x)s(y)+t(x)t(y))$$
$$+\sum_{x\in B_n^+} H_x s(x) + \sum_{x\in B_n^+} K_x t(x)\Big]$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

とおくとき、

$$H_{B_n}^{\omega_1}(\sigma) = H_n(\sigma)\Big|_{J_{x,y}=1,\ \forall\langle x,y\rangle\subset B_n^+}$$

である。 Th. A.2 と同様に $J_{x,y}\geq 0$ ($^\forall\langle x,y\rangle\subset B_n^+$) のとき

$$\langle s_A s_B\rangle_{H_n} - \langle s_A\rangle_{H_n}\langle s_B\rangle_{H_n} \geq 0$$

が成り立つ。 そこで $x^1=0$, $y^1\neq 0$ なる pair $\langle x,y\rangle$ に対し

$$\frac{\partial}{\partial J_{x,y}}\langle\sigma(u)\rangle_{H_n} = \langle\sigma(u)\,(s(x)s(y)+t(x)t(y))\rangle_{H_n}$$

$$-\langle\sigma(u)\rangle_{H_n}\langle s(x)s(y)+t(x)t(y)\rangle_{H_n}$$

$x^1=0$ のとき $t(x)=0$ だ、たから.

$$\frac{\partial}{\partial J_{x,y}}\langle\sigma(u)\rangle_{H_n} = \langle\sigma(u)s(x)s(y)\rangle_{H_n} - \langle\sigma(u)\rangle_{H_n}\langle s(x)s(y)\rangle_{H_n}$$

ここで、u を $u^1=0$ となるようにとると $\sigma(u)=s(u)$ で

$$\frac{\partial}{\partial J_{x,y}}\langle\sigma(u)\rangle_{H_n} \geq 0$$

すなわち $\langle\sigma(u)\rangle_{H_n}$ は $J_{x,y}$ ($\langle x,y\rangle$ は $x^1=0$, $y^1\neq 0$ をみたす) について increasing となる。

$$H_n^0(\sigma) \equiv H_n(\sigma)\Bigg|_{\substack{J_{x,y}=0 \quad \text{if } x^1=0,\ y^1\neq 0 \text{ or } x^1\neq 0,\ y^1=0 \\ J_{x,y}=1 \quad \text{otherwise}}}$$

とおくと、上のことから

$$\langle\sigma(u)\rangle_{B_n}^{\omega_1} \geq \langle\sigma(u)\rangle_{H_n^0} = \langle\sigma(u)\rangle_{d-1,+}$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

が成り立つ。

$u^1 > 0$ のとき $e_1 = (1,0,0,\cdots,0) \in \mathbb{Z}^d$ に対して、FKG不等式を使って $u^1 = k$ のとき

$$\langle \sigma(u) \rangle_{B_n}^{\omega_1} \geq \langle \sigma(u) \rangle_{B_{n,k}}^{\tau_1^k \omega_1} \geq \langle \sigma(u) \rangle_{B_n + ke_1}^{\tau_1^k \omega_1}$$

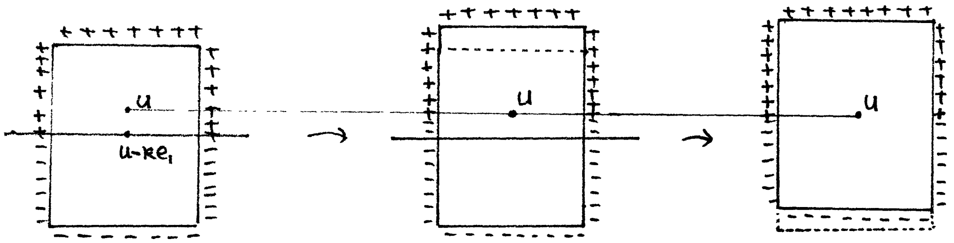
ただし、$B_{n,k} \equiv \{ x \in \mathbb{Z}^d ; -n \leq x^1 \leq n+k ,\ |x^i| \leq n \quad 2 \leq i \leq d \}$,
$\tau_1 = \tau_{e_1}$ i.e.

$$(\tau_1^k \omega)(x) = \omega(x + ke_1) \qquad \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

とする。

Gibbs 分布の条件付確率の translation 不変性によって

$$\langle \sigma(u) \rangle_{B_n + ke_1}^{\tau_1^k \omega_1} = \langle \sigma(u - ke_1) \rangle_{B_n}^{\omega_1} \geq \langle \sigma(u-ke_1) \rangle_{d-1,+}$$



あとは $\mu_{+(d-1)}$ の translation 不変性により求める不等式を得る。

(Q.E.D.)

・注意. 上の議論と同様にFKG不等式を用いることにより $\omega \mapsto -\omega$ の変換を使って

$$\langle \sigma(-e_1) \rangle_{B_n}^{\omega_1} \leq \langle \sigma(0) \rangle_{d-1,-}$$

が成り立つ。よって $\{ P_{B_n}^{\omega_1} \}$ の一つの極限点を μ とかくと、

(A.3) $\quad E_\mu [X_0] \geq \langle \sigma(0) \rangle_{d-1,+} , \quad E_\mu [X_{-e_1}] \leq \langle \sigma(0) \rangle_{d-1,-}$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

が成り立つ。 $\beta > \beta_{d-1,c}$ ならば (A.3) は μ が translation で不変でないことを示している。 すなわち $\beta_{d,c} \leq \beta_{d-1,c}$ が任意の $d \geq 3$ について成り立つ。 ($\beta_{1,c} = \infty$ と理解すると上の式は $d = 2$ でも成立。)

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

Appendix II. Percolationについての補足

Chapter IIでは$\mathcal{G}(\beta,h)$の構造の決定の手段として端点$\mu\in\mathcal{G}(\beta,h)$に関するpercolationを調べたが、ここではもう少し一般に$I_+(\mathbb{Z}^2)$, $I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2)$が(β,h)にどの様にdependして現われ消えていくかを調べてみよう。もちろん次元は二次元に限る。

§1. $\beta>\beta_c$のとき

$\beta>\beta_c$のときは$h=0$におけるpercolationについては完全に調べられているから簡単である。結論を先にかくと、

Theorem A.4.

$\beta>\beta_c$のとき、

(i) $h>0$ ならば任意の$\mu\in\mathcal{G}(\beta,h)$に対し

$$\mu(I_+(\mathbb{Z}^2)\neq\phi,\ I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2)=\phi)=1$$

(ii) $h<0$ ならば任意の$\mu\in\mathcal{G}(\beta,h)$に対し

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}^2)\neq\phi,\ I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2)=\phi)=1$$

証明には次のLemmaを使えばよい。

Lemma A.4. $h>h'$とする。$\mu\in\mathcal{G}(\beta,h)$, $\mu'\in\mathcal{G}(\beta,h')$とするとき、

(i) $\mu'(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2)\neq\phi)>0$ ならば $\mu(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2)\neq\phi)>0$

(ii) $\mu(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2)\neq\phi)>0$ ならば $\mu'(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2)\neq\phi)>0$

証明. $\omega\in\Omega$, $\Lambda\subset\mathbb{Z}^2$, $|\Lambda|<\infty$を一つ固定する。f

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

を$\mathcal{B}_\Lambda$-m'ble な increasing ft. とすると、FKG不等式により、

$$\frac{\partial}{\partial h}\langle f\rangle_\Lambda^\omega = \langle f\cdot\sum_{x\in\Lambda}\sigma(x)\rangle_\Lambda^\omega - \langle f\rangle_\Lambda^\omega\langle\sum_{x\in\Lambda}\sigma(x)\rangle_\Lambda^\omega$$

$$= \sum_{x\in\Lambda}\left\{\langle f\cdot\sigma(x)\rangle_\Lambda^\omega - \langle f\rangle_\Lambda^\omega\langle\sigma(x)\rangle_\Lambda^\omega\right\}$$

$$\geq 0$$

だから、$\langle f\rangle_\Lambda^\omega$ は h に関し increasing。 パラメータ h に関する dependence を $\langle f\rangle_{\Lambda,h}^\omega$ とかいて表わすと.

$$\langle f\rangle_{\Lambda,h}^\omega \geq \langle f\rangle_{\Lambda,h'}^\omega$$

いま $\omega=\omega^+$ とおいて上式で $\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^2$ とすると

(A.4) $\quad E_{\mu+(h)}(f) \geq E_{\mu+(h')}(f)$

ただし $\mu_+(h)$ はパラメータ h のときの μ_+。 また、$\omega=\omega^-$ とおいて $\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^2$ とすると

(A.5) $\quad E_{\mu-(h)}(f) \geq E_{\mu-(h')}(f)$

$h\neq 0$ のとき Th.1.3 により $\mathcal{G}(\beta,h)$ は唯一点から成るので、

$$E_{\mu(h)}(f) \geq E_{\mu(h')}(f) \qquad \text{if} \quad h\neq 0,\ h'\neq 0$$

$h=0$ or $h'=0$ のときは一般のパラメータ $\hat{h}$ に対して、$\hat{\mu}\in\mathcal{G}(\beta,\hat{h})$ なら

$$E_{\mu+(\hat{h})}(f) \geq E_{\hat{\mu}}(f) \geq E_{\mu-(\hat{h})}(f)$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

であることと (A.4)、(A.5) をあわせることにより、

(A.6) $\quad E_\mu(f) \geq E_{\mu'}(f)$

を得る。 $\{I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \ni (0,0)\}$ は $\Lambda_n \equiv \{x \in \mathbb{Z}^2;\ |x^1|, |x^2| \leq n\}$ とおくとき、

$$G_{n,k}^{+*} \equiv \left\{ \omega \in \Omega;\ \begin{array}{l} \Lambda_n \text{ 内で原点を含み size } k \text{ 以上の} \\ +(*)\text{cluster が存在} \end{array} \right\}$$

によって次のようにかける。

$$\{I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \ni (0,0)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} G_{n,k}^{+*} = \lim_{k\to\infty} G_{k,k}^{+*}.$$

右辺は k について単調に減少している。 $G_{k,k}^{+*} \in \mathcal{B}_{\Lambda_k}$、また $I_{G_{k,k}^{+*}}$ は increasing ft. だから (A.6) と上のことにより、

(A.7) $\quad \mu(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \ni (0,0)) \geq \mu'(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \ni (0,0))$

を得る。 Lemma 2.3 を使えば (A.7) より $I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2)$ に関する Lemma の主張が成立。 $I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2)$ に関しても同様の議論が成り立つ。

(Q.E.D.)

<u>Theorem A.4 の証明.</u>

(i) $h' = 0$ とおいて (A.7) を $\mu' = \mu_{+(0)}$ に対して使うと

$$\mu(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) \geq \mu_{+(0)}(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 1.$$

また、$\mu' = \mu_{+(0)}$ とおいて Lemma A.4 (ii) を使うと $\mu_{+(0)}(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 0$ だから $\mu(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 0$ すな

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

わち　$\mu(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2)=\phi)=1$。　(ii)も同様。
(Q.E.D.)

§2. $\beta \leq \beta_c$ の場合.

$\beta \leq \beta_c$ のとき二次元 Ising model では $\mathcal{G}(\beta, h)$ は唯一つだから、percolation の問題を考えるときにはかえって複雑である。残念ながら $h=0$ の場合ですら完全には解決されていない。ここでは Harris-Miyamoto-Russo による議論を紹介する。([7], [18], [32] 参照)　例によってまず結果をかいておく。

<u>Theorem A.5</u> (Russo et al. [7])
$h=0$、$\beta \leq \beta_c$、μ を対応する Gibbs分布とすると、

$$\mu(I_+(\mathbb{Z}^2)\neq\phi)=\mu(I_-(\mathbb{Z}^2)\neq\phi)=0$$

<u>Lemma A.5.</u>　$h=0$, $\beta<\beta_c$ のとき $\mu\in\mathcal{G}(\beta,0)$ に対して

$$\mu(I_+(\mathbb{Z}_u^2)\neq\phi)=\mu(I_-(\mathbb{Z}_u^2)\neq\phi)=0$$

<u>証明.</u>　$\mathcal{G}(\beta,0)$ は唯一点 μ から成るから $\mu_+=\mu=\mu_-$、すなわち μ は translation 及び reflection で不変, $\mathcal{B}_\infty$ 上 trivial で、更に $\omega\mapsto-\omega$ の変換で不変となる。
いま、$\mu(I_+(\mathbb{Z}_u^2)\neq\phi)=1$ と仮定してみる。Lemma 2.4 と同じ議論により、このとき

$$\mu(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}_r^2)\neq\phi)=0$$

μ の回転不変性 ($90°$ の回転のみを考える。) によって

$$\mu(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2)\neq\phi)=0$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

ところが変換 $\omega \mapsto -\omega$ に関して μ は不変だから、

$$\mu(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}_u^2) \neq \phi) = 0$$

これは仮定と矛盾する。すなわち Lemma の主張が成り立つ。
(Q.E.D.)

$$\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^2 ; |x^1|, |x^2| \leq n\},$$

$$\overline{A}_{k,n}^- \equiv \left\{ \omega \in \Omega ; \begin{array}{l} \Lambda_k \setminus \Lambda_n \text{ に } \Lambda_n \text{ を囲む } \mathbb{Z}_u^2 \text{ の } -(*) \text{ half} \\ \text{circuit で } \partial\Lambda_k \text{ と } \mathbb{Z}_u^2 \setminus \Lambda_n \text{ で } -(*) \text{ connected} \\ \text{なものが存在する。} \end{array} \right\},$$

$$\underline{A}_{k,n}^- \equiv \left\{ \omega \in \Omega ; \begin{array}{l} \Lambda_k \setminus \Lambda_n \text{ に } \Lambda_n \text{ を囲む } \mathbb{Z}_u^2 \text{ の } -(*) \text{ half} \\ \text{circuit で } \partial\Lambda_n \text{ と } \mathbb{Z}_u^2 \cap \Lambda_k \text{ で } -(*) \text{connected} \\ \text{なものが存在する。} \end{array} \right\}$$

を $k > n$ に対して定義しておく。

Lemma A.6. $h = 0$、$\beta \leq \beta_c$ とする。このとき対応する Gibbs 分布 μ について次の評価が成り立つ：
任意の $n > 0$ に対し、$N > k > n$ を十分大きくとると

$$\mu(\underline{A}_{k,n}^- \cap \overline{A}_{N,k}^-) > \frac{1}{16}$$

とできる。

証明. $k > n$ に対して

$$A_{k,n}^- \equiv \left\{ \omega \in \Omega ; \begin{array}{l} \Lambda_k \setminus \Lambda_n \text{ に } \mathbb{Z}_u^2 \text{ の } \Lambda_n \text{ を囲む } -(*) \text{half} \\ \text{circuit が存在する。} \end{array} \right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

とおくと、Lemma A.5 により $N > k\ (> n)$ を十分大きくとれば、

$$(A.8)\quad \mu\left(A^-_{k,n} \cap A^+_{k,n} \cap A^-_{N,k} \cap A^+_{N,k} \right) > \frac{1}{2}$$

とできる。ただし、$A^+_{k,n}$, $A^+_{N,k}$ の定義は $A^-_{k,n}$, $A^-_{N,k}$ で − を + でおきかえたものである。μ の Markov 性により

$$(A.9)\quad \mu\left(\underline{A}^-_{k,n} \mid (A^-_{k,n} \cap A^+_{k,n} \cap A^-_{N,k} \cap A^+_{N,k}) \right)$$

$$= \mu\left(\underline{A}^-_{k,n} \mid A^-_{k,n} \cap A^+_{k,n} \right)$$

$\omega \in A^-_{k,n} \cap A^+_{k,n}$ とし、$s(\omega)$ を $\Lambda_k \setminus \Lambda_n$ 内の minimal な $\mathbb{Z}^2_u$ の $-(*)$ half circuit で Λ_n を囲むものとする。いま、$s(\omega)$ が $\partial\Lambda_n$ と $-(*)$connected でないとすると $s(\omega)$ に囲まれ Λ_n を囲む $(\Lambda_k \setminus \Lambda_n) \cap \mathbb{Z}^2_u$ の + half circuit $t(\omega)$ が存在する。$s(\omega)$ の minimality により $t(\omega)$ は $\partial\Lambda_n$ と + connected でなくてはならない。すなわち $\omega \in \underline{A}^-_{k,n} \cup \underline{A}^+_{k,n}$ が成り立つ。$\omega \mapsto -\omega$ に関する対称性から、このとき

$$(A.10)\quad \mu\left(\underline{A}^-_{k,n} \mid A^-_{k,n} \cap A^+_{k,n} \right) = \frac{1}{2}.$$

同様、

$$(A.11)\quad \mu\left(\overline{A}^-_{N,k} \mid A^-_{N,k} \cap A^+_{N,k} \right) = \frac{1}{2}.$$

(A.8)〜(A.10) により

$$(A.12)\quad \mu\left(A^-_{k,n} \right) > \frac{1}{4},$$

(A,8), (A.9), (A.11) より

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

(A.13) $\mu(A^-_{N,k}) > \frac{1}{4}$

FKG不等式と(A.12), (A.13)によりLemmaの主張を得る。

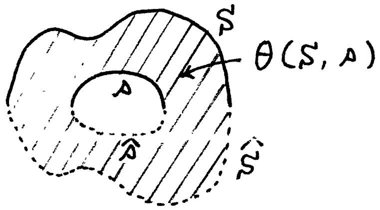
(Q.E.D.)

$\omega \in \underline{A}^-_{k,n}$ とするとき、$s(\omega)$ を $(\Lambda_k \setminus \Lambda_n) \cap \mathbb{Z}^2_u$ で Λ_n を囲む minimal な $-(*)$ half circuit とするとき $s(\omega)$ は $\partial\Lambda_n$ と $(\Lambda_k \setminus \Lambda_n) \cap \mathbb{Z}^2_u$ で $-(*)$ connected となる。

$\mathcal{S} \subset \Lambda_N \setminus \Lambda_k$, $s \subset \Lambda_k \setminus \Lambda_n$ をそれぞれ原点を囲む $\mathbb{Z}^2_u$ の (*) half circuits とするとき、

$$E_{\mathcal{S},s} \equiv \left\{ \omega \in \underline{A}^-_{k,n} \cap \overline{A}^-_{N,k} \;;\; \begin{array}{l} \mathcal{S} \text{ は } \Lambda_N \setminus \Lambda_k \text{ で maximal} -(*) \text{ half circuit} \\ s \text{ は } \Lambda_k \setminus \Lambda_n \text{ で minimal} -(*) \text{ half circuit} \end{array} \right\}$$

また、$\hat{\mathcal{S}}$, $\hat{s}$ をそれぞれ $\mathcal{S}$, s の x^1 軸に関する折り返し、i.e. $\hat{\mathcal{S}} = U_2(0)\mathcal{S}$, $\hat{s} \equiv U_2(0)s$ とおき $\theta(\mathcal{S}, s)$ を $\mathcal{S} \cup \hat{\mathcal{S}}$ と $s \cup \hat{s}$ によって囲まれる領域とする。



<u>Lemma A.7.</u> $h = 0$、$\beta \leq \beta_c$、対応するGibbs分布をμとする。もしも

$$\mu(I_-(\mathbb{Z}^2) \ni (0,0)) \equiv \alpha > 0$$

ならば、$\mathcal{S} \subset \Lambda_N \setminus \Lambda_k$、$s \subset \Lambda_k \setminus \Lambda_n$ なる $\mathbb{Z}^2_u$ の原点を囲む(*) half circuits に対して

$$\mu(C^-_{\mathcal{S},s} \cup D^-_{\mathcal{S},s} \mid E_{\mathcal{S},s}) \geq \frac{1}{4}\alpha$$

が成り立つ。 ただし、

$$C^{\pm}_{S,\Delta} \equiv \{ \omega \in \Omega ;\ \theta(S,\Delta) \text{ 内に } \Lambda_n \text{ を囲む } \pm(*)\text{circuit が存在} \},$$

$$D^{\pm}_{S,\Delta} \equiv \{ \omega \in \Omega ;\ \theta(S,\Delta) \text{ 内で } (k,0) \text{ が } \hat{S} \cup \hat{\Delta}\ (S \cup \Delta) \text{ と } \pm(*)\text{ connected} \}$$

とする。

証明. $\omega \in E_{S,\Delta}$ のとき $\omega(x) = -1 \quad \forall x \in S \cup \Delta$ だから FKG不等式により

$$\begin{aligned}
(A.14) \quad & \mu((C^-_{S,\Delta} \cup D^-_{S,\Delta}) \cap E_{S,\Delta}) \\
&= \int_{E_{S,\Delta}} P^{\omega}_{\theta(S,\Delta)}(C^-_{S,\Delta} \cup D^-_{S,\Delta})\, \mu(d\omega) \\
&\geq \int_{E_{S,\Delta}} P^{\hat{\omega}}_{\theta(S,\Delta)}(C^-_{S,\Delta} \cup D^-_{S,\Delta})\, \mu(d\omega) \\
&= \mu(E_{S,\Delta})\, P^{\hat{\omega}}_{\theta(S,\Delta)}(C^-_{S,\Delta} \cup D^-_{S,\Delta})
\end{aligned}$$

ただし、$\hat{\omega}$ は

$$\hat{\omega}(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x^2 \geq 0 \\ +1 & \text{if } x^2 < 0 \end{cases}$$

とする。 別に、

$$F^{\pm}_{S,\Delta} \equiv \left\{ \omega \in \Omega ;\ \begin{array}{l} (k,0) \text{ が } \theta(S,\Delta) \text{ で } \hat{S} \cup \hat{\Delta}\ (S \cup \Delta) \text{ と } \pm(*) \\ \text{connected な } \pm(*)\text{circuit によって囲まれる。} \end{array} \right\}$$

とおくとき、

$$P^{\hat{\omega}}_{\theta(S,\Delta)}(C^+_{S,\Delta} \cup C^-_{S,\Delta} \cup F^+_{S,\Delta} \cup F^-_{S,\Delta}) = 1$$

であることに注意して、更にGibbs分布の条件付確率の性質から、

$$P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(C_{S,s}^{-} \cup F_{S,s}^{-})$$

$$= P_{\theta(S,s)}^{-\hat{\omega}}((-C_{S,s}^{-}) \cup (-F_{S,s}^{-}))$$

$$= P_{\theta(S,s)}^{-U_2(0)\hat{\omega}}((-U_2(0)C_{S,s}^{-}) \cup (-U_2(0)F_{S,s}^{-})).$$

ところが、$-U_2(0)C_{S,s}^{-} = C_{S,s}^{+}$、$-U_2(0)F_{S,s}^{-} = F_{S,s}^{+}$
及び $-U_2(0)\hat{\omega} \geq \hat{\omega}$ だから、

$$\text{右辺} \geq P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(C_{S,s}^{+} \cup F_{S,s}^{+})$$

よって $P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(C_{S,s}^{-} \cup F_{S,s}^{-}) \geq \frac{1}{2}$ を得る。

ゆえに $P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(C_{S,s}^{-}) \geq \frac{1}{4}$ か $P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(F_{S,s}^{-}) \geq \frac{1}{4}$

が成り立つ。いま、$P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(F_{S,s}^{-}) \geq \frac{1}{4}$ とすると、

$$\begin{aligned} P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(D_{S,s}^{-}) &\geq P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(D_{S,s}^{-} \cap F_{S,s}^{-}) \\ &\geq \frac{1}{4} P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(D_{S,s}^{-} \mid F_{S,s}^{-}) \\ &\geq \frac{1}{4} P_{\theta(S,s)}^{\omega^{-}}(D_{S,s}^{-}) \geq \frac{\alpha}{4} \end{aligned}$$

最後の二つの不等式はFKG不等式による。以上により

$$\text{(A.15)} \quad P_{\theta(S,s)}^{\hat{\omega}}(C_{S,s}^{-} \cup D_{S,s}^{-}) \geq \min\left(\frac{1}{4}, \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha}{4}$$

が成り立つ。(A.14)と(A.15)をあわせると、

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\mu(C^-_{S,\Delta} \cup D^-_{S,\Delta} \mid E_{S,\Delta}) \geq \frac{\alpha}{4}$$

(Q.E.D.)

Theorem A.5 の証明.

いま、 $\mu(I_-(\mathbb{Z}^2) \ni (0,0)) = \alpha > 0$ と仮定する。任意の $n > 0$ に対し $N > k > n$ を十分大にとって

$$\mu(\underline{A}^-_{k,n} \cap \overline{A}^-_{N,k}) > \frac{1}{16}$$

となるようにとる。 この $n < k < N$ に対して Lemma A.7 により、

$$\mu(C^-_{S,\Delta} \cup D^-_{S,\Delta} \mid E_{S,\Delta}) \geq \frac{\alpha}{4}$$

が任意の原点を囲む $\mathbb{Z}^2_u$ の(*) half circuits $S \subset (\Lambda_N \setminus \Lambda_k) \cap \mathbb{Z}^2_u$, $\Delta \subset (\Lambda_k \setminus \Lambda_n) \cap \mathbb{Z}^2_u$ に対して成り立つ。

$$\bigcup_{S \subset \Lambda_N \setminus \Lambda_k} \bigcup_{\Delta \subset \Lambda_k \setminus \Lambda_n} E_{S,\Delta} = \underline{A}^-_{k,n} \cap \overline{A}^-_{N,k}$$

であることと、(S, Δ) が異なれば $E_{S,\Delta}$ が disjoint なことから、

$$\sum_{S \subset \Lambda_N \setminus \Lambda_k} \sum_{\Delta \subset \Lambda_k \setminus \Lambda_n} \mu(E_{S,\Delta}) > \frac{1}{16}.$$

よって

$$\sum_{S \subset \Lambda_N \setminus \Lambda_k} \sum_{\Delta \subset \Lambda_k \setminus \Lambda_n} \mu((C^-_{S,\Delta} \cup D^-_{S,\Delta}) \cap E_{S,\Delta}) > \frac{\alpha}{64}$$

これより、

$$\text{(A.16)} \quad \mu\left(\begin{array}{l} (k,0) \text{ が } (\Lambda_N \setminus \Lambda_k) \cap \mathbb{Z}^2_u \text{ で } \partial\Lambda_N \text{ と } -(*) \text{ connected な } -(*) \\ \text{half circuit か } (\Lambda_k \setminus \Lambda_n) \cap \mathbb{Z}^2_u \text{ で } \partial\Lambda_n \text{ と } -(*) \text{ conneted} \\ \text{な } -(*) \text{ half circuit のどちらかと } -(*) \text{ connected} \end{array}\right)$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$> \frac{\alpha}{128}$$

か、

(A.17) μ ($\Lambda_N \setminus \Lambda_n$ に原点を囲む－(*)circuit が存在) $> \frac{\alpha}{128}$

が成り立つ。 (A.16) が成り立つとすると更に、

(A.18) $\mu\left(\begin{array}{l}(k,0) \text{ が } (\Lambda_N\setminus\Lambda_k)\cap\mathbb{Z}_u^2 \text{ の } \partial\Lambda_N \text{ と } -(*) \text{ connected} \\ \text{な} -(*) \text{ half circuit と } -(*) \text{ connected}\end{array}\right) > \frac{\alpha}{256}$

か、

(A.19) $\mu\left(\begin{array}{l}(k,0) \text{ が } (\Lambda_k\setminus\Lambda_n)\cap\mathbb{Z}_u^2 \text{ で } \partial\Lambda_n \text{ と } -(*) \text{ connected} \\ \text{な} -(*) \text{ half circuit と } -(*) \text{ connected}\end{array}\right) > \frac{\alpha}{256}$

が成り立つ。 どちらでも以下の議論は同じなので (A.18) を仮定する。

μ の x^2 軸に関する対称性により、 (A.18) で $(k,0)$ を $(-k,0)$ とおきかえたものも成立。 FKG不等式により、この二つをあわせると、

(A.20) μ ($(k,0)$ と $(-k,0)$ が Λ_n^c で－(*) connected) $> \frac{\alpha^2}{65536} = \frac{\alpha^2}{2^{16}}$.

Λ_n^c で $(k,0)$ と $(-k,0)$ を結ぶ chain は Λ_n の上を通るものと下を通るものに分かれ、対称性から

(A.21) $\mu\left(\begin{array}{l}(k,0) \text{ と } (-k,0) \text{ を結ぶ、} \Lambda_n \text{ の上（下）を通る} \\ -(*) \text{ chain が存在}\end{array}\right) > \frac{\alpha^2}{2^{17}}$

再びFKG不等式を使うと、

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$$\mu\left((k,0)\text{と}(-k,0)\text{を通り}\Lambda_n\text{を囲む}-(*)\text{circuit がある}\right) > \frac{\alpha^4}{2^{34}}$$

以上より、

$$\mu\left(\Lambda_n\text{を囲む}-(*)\text{circuit が存在}\right) > \min\left(\frac{\alpha}{128}, \frac{\alpha^4}{2^{34}}\right) = \frac{\alpha^4}{2^{34}}$$

を得. nは任意で右辺はnに無関係だからμが$\mathcal{B}_\infty$上 trivialなこととあわせて

$$\mu\left(I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \emptyset\right) = 0$$

を得る。 $\omega \mapsto -\omega$ の変換に関してμは不変だからこのとき

$$\mu\left(I_-(\mathbb{Z}^2) \neq \phi\right) = 0$$

これは最初の仮定と矛盾している。 従って Th. A.5 の主張が成り立っていなくてはならない。

(Q.E.D.)

§3. ∞ (*) clusters の共存 ($\beta \leq \beta_c$ の場合)

§2までで一応$\beta \leq \beta_c$でも$h=0$の場合はわかったといってもよいだろうが、$h \neq 0$のときの情報としては Lemma A.4 を ∞ clusters に適用することにより

$$\text{(A.22)} \quad \begin{cases} h > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu\left(I_-(\mathbb{Z}^2) \neq \phi\right) = 0 \\ h < 0 \quad \Rightarrow \quad \mu\left(I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi\right) = 0 \end{cases}$$

がわかる。 では例えば

$$h > 0 \quad \text{のとき} \quad \mu\left(I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi\right) = 1$$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

は成り立つのだろうか？ 実はこれは一般に正しくない。ここで言えるのは次の定理までであり、それ以上はまだ open problem として残っている。

<u>Theorem A.6.</u> $\beta \leq \beta_c$ とする。 $H = \beta h$ とするとき、

(i) $H > 4\beta - h_c$ のとき

$$\mu\left(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi \right) = 1$$

(ii) $H > 4\beta + h_c$ のとき

$$\mu\left(I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi \right) = 1$$

(iii) $H < -4\beta + h_c$ のとき

$$\mu\left(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi \right) = 1$$

(iv) $H < -4\beta - h_c$ のとき

$$\mu\left(I_-(\mathbb{Z}^2) \neq \phi \right) = 1$$

ただし、h_c は $p_c \equiv e^{h_c}/(e^{h_c} + e^{-h_c})$ が $\mathbb{Z}^2$ 上の site percolation の critical probability を与える値。

証明の前に $\mathbb{Z}^2$ 上の site percolation について少し説明する。$0 \leq p \leq 1$ に対して P_p を $\mathbb{Z}^2$ 上各点独立に

$$P_p\{\omega(x) = +1\} = p, \quad P_p\{\omega(x) = -1\} = 1 - p \quad (x \in \mathbb{Z}^2)$$

なる値をとる Ω 上の Bernoulli probability measure とする。 このとき、

$$p_c \equiv \inf\{ p : P_p\{ I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi \} = 1 \}$$

が $\mathbb{Z}^2$ 上の <u>site percolation の critical probability</u> と呼ばれる。

P_p に対してFKG不等式が成り立ち

$$p > p_c \Rightarrow P_p\{I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi\} = 1$$

$$p < p_c \Rightarrow P_p\{I_+(\mathbb{Z}^2) \neq \phi\} = 0$$

明らかに、$p_c^* = 1 - p_c$ とおくと

$$p < p_c^* \Rightarrow P_p\{I_-(\mathbb{Z}^2) \neq \phi\} = 1$$

$$p > p_c^* \Rightarrow P_p\{I_-(\mathbb{Z}^2) \neq \phi\} = 0$$

更に、p_c^* については次の面白い結果がある。

<u>Theorem A.7.</u> (Russo [36])

$p > p_c^*$ なら $P_p(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 1$

$p < p_c^*$ なら $P_p(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 0$

($p < p_c$ なら $P_p(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 1$

$p > p_c$ なら $P_p(I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 0$)

p_c の値については上のことから $p_c \geq \frac{1}{2}$ はわかるが、それ以上のことはほとんど知られていない。　わずかに

<u>Theorem A.8.</u> ([10], [20], [24])

$p_c > \frac{1}{2}$。

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

が最近になってやっと証明された程度である。 Th. A.6 と A.8 をあわせると β が十分小さいとき、$h=0$ において $\mu\in\mathcal{G}(\beta,h)$ として

$$\mu\left(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2)\neq\phi,\ I_-^{(*)}(\mathbb{Z}^2)\neq\phi \right)=1$$

がわかる。 この性質は $h=0$ のとき $\beta<\beta_c$ で成り立つものと期待されている。

Theorem A.6 を証明するためにはいくつかの準備が必要である。 まず用語から準備することにする。

$\mathcal{P}$ を $(\Omega,\mathcal{B})$ 上の Probability measure の全体として $\mu,\mu'\in\mathcal{P}$ に対して

$\mu\le\mu' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある $\Omega\times\Omega$ 上の Probability measure m で

(i) $m(A\times\Omega)=\mu(A)$

$m(\Omega\times A)=\mu'(A) \quad {}^{\forall}A\in\mathcal{B}.$

(ii) $m((\omega,\omega');\ \omega\le\omega')=1.$

として順序 $\le$ を入れる。

<u>注意</u>. f が Ω 上の increasing ft. とすると、$\mu\le\mu'$ のとき、ある m があって

$$\begin{aligned}\int f(\omega)\mu(d\omega) &= \int_{\Omega\times\Omega} f(\omega)\, m(d\omega d\omega')\\ &= \int_{\{\omega\le\omega'\}} f(\omega)\, m(d\omega d\omega')\\ &\le \int_{\Omega\times\Omega} f(\omega')\, m(d\omega d\omega')\\ &= \int f(\omega)\mu'(d\omega)\end{aligned}$$

が成り立つ。 実はこの不等式（$\langle f \rangle_\mu \leq \langle f \rangle_{\mu'}$ と略）と $\mu \leq \mu'$ の定義は同値であることが〔23〕で示されている。しかし、ここでは必要がないので同値性については証明しない。

Lemma A. 8.（〔37〕）

μ, $P_p \in \mathcal{P}$, $0 \leq p \leq 1$ とする。 $\mathbb{Z}^2$ の各点に適当に 1 から番号をつけたとき、次の不等式が成り立つとする：

任意の $k \geq 1$ に対して

$$\mu(\omega(x_k) = +1 \mid \mathcal{B}_{\{x_1, \cdots, x_{k-1}\}}) \leq p \qquad \mu\text{-a.s.}$$

このとき $\mu \leq P_p$ が成り立つ。

証明. $\Omega \times \Omega$ 上に m を構成する。 まず、

$$m((\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega ;\ \omega(x_1) = \omega'(x_1) = +1) = \mu(\omega(x_1) = +1)$$

$$m((\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega ;\ \omega(x_1) = +1,\ \omega'(x_1) = -1) = 0$$

$$m((\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega ;\ \omega(x_1) = -1,\ \omega'(x_1) = +1) = p - \mu(\omega(x_1) = +1)$$

$$m((\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega ;\ \omega(x_1) = \omega'(x_1) = -1) = 1 - p$$

とおき、あと帰納的に

$$m(\omega(x_k) = \omega'(x_k) = +1 \mid \{\omega(x_{k-1}), \omega'(x_{k-1}), \cdots, \omega(x_1), \omega'(x_1)\})$$

$$\equiv \mu(\omega(x_k) = +1 \mid \mathcal{B}_{\{x_{k-1}, \cdots, x_1\}})(\omega)$$

$$m(\omega(x_k) = +1,\ \omega'(x_k) = -1 \mid \{\omega(x_{k-1}), \omega'(x_{k-1}), \cdots, \omega(x_1), \omega'(x_1)\})$$

$$\equiv 0$$

$$m(\omega(x_k)=-1,\ \omega'(x_k)=+1 \mid \{\omega(x_{k-1}),\omega'(x_{k-1}),\cdots,\omega(x_1),\omega'(x_1)\})$$

$$\equiv\ p-\mu(\omega(x_k)=+1 \mid \mathcal{B}_{\{x_{k-1},\cdots,x_1\}})(\omega)$$

$$m(\omega(x_k)=\omega'(x_k)=-1 \mid \{\omega(x_{k-1}),\omega'(x_{k-1}),\cdots,\omega(x_1),\omega'(x_1)\})$$

$$\equiv\ 1-p$$

と定義する。　このとき、mが求める$\Omega\times\Omega$上のProbability measureであることは明らか。　よって　$\mu\leq P_p$。

(Q.E.D.)

Theorem A.6 の証明.

Lemma A.8 を μ と P_{p_c} に対して適用すると、

$$\frac{e^{\beta(h-4)}}{e^{-\beta(h-4)}+e^{\beta(h-4)}}\leq\mu(\omega(x)=+1 \mid \mathcal{B}_{\{x\}^c})(\omega)$$

$$\leq\frac{e^{\beta(h+4)}}{e^{-\beta(h+4)}+e^{\beta(h+4)}}$$

が μ-a.s. で成立。　よって

$$p_c<p<\frac{e^{\beta(h-4)}}{e^{-\beta(h-4)}+e^{\beta(h-4)}}$$

のとき　$P_p\leq\mu$　となり、これより、　$\mu(I_+(\mathbb{Z}^2)\neq\phi)=1$　を得る。

$y=e^x/(e^{-x}+e^x)$ は x について単調増加だから、$H-4\beta>h_c$ のとき　$\mu\geq P_p$　となる $p>p_c$ が存在して

$$\mu(I_+(\mathbb{Z}^2)\neq\phi)=1$$

が出てくる。　同様　$\mu\geq P_p$　なる $p>p_c^*$ があるとき、$H-4\beta\geq h_c^*=-h_c$　であることに注意すると、$H-4\beta$

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

$\geq -h_c$ のとき

$$\mu(I_+^{(*)}(\mathbb{Z}^2) \neq \phi) = 1.$$

あとも同様に証明できる。

(Q.E.D.)

以上でPercolationについての補足は終わる。 まだまだ外に面白いと思われる話題は有るが、筆者の勉強不足もあり、解説できるようになるまでにかなりの時間が必要となりそうなのでこの辺でおしまいにすることにする。

— Thank you for your patience!

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

参考文献

1. M. Aizenman; Translation invariance and instability of phase coexistence in the two dimensional Ising system., Comm. Math. Phys., 73 (1980) 83-94.

2. ——————; Proof of the triviality of ϕ_d^4 field theory and some mean-field features of Ising models for $d>4$., Phys. Rev. Letters, 47 (1981) 1-4.

3. H. van Bejeren; Interface sharpness in the Ising system., Comm. Math. Phys., 40 (1975) 1-6.

4. J. Bricmont, Ch. Pfister & J. L. Lebowitz; Non-translation invariant Gibbs states with coexisting phases I., Comm. Math. Phys., 66 (1979) 1-20.

5. ——————————————; ——— II., Comm. Math. Phys., 66 (1979) 21-36.

6. ——————————————; ——— III., Comm. Math. Phys., 69 (1979) 267-291.

7. A. Conigrio, C. Nappi, F. Perrugi & L. Russo; Percolations and phase transitions in the Ising model., Comm. Math. Phys., 51 (1976) 315-323.

8. R. L. Dobrushin; Description of a random field by means of conditional probabilities and conditions for its regularities., Theo. Probab. Appl. 13 (1968) 197-224.

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

9. ———— ; Gibbs state describing coexistence of phases for a three-dimensional Ising model., Theo. Probab. Appl., 17 (1972) 582-600.

10. R. Durrett & D. Griffeath ; Supercritical contact processes on Z. (preprint)

11. E. B. Dynkin ; Entrance and exit spaces for a Markov processes., Actes, Congres intern. Math., tom 2 (1970) 502-512.

12. C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn & J. Ginibre ; Correlation inequalities on some partially ordered sets., Comm. Math. Phys., 22 (1971) 89-103.

13. J. Fröhlich ; On the triviality of $\lambda\varphi_d^4$ theories and the approach to the critical point in $d \underset{(=)}{\geq} 4$ dimensions., Nucl. Phys. B, 200 [FS 4] (1982) 281-296.

14. G. Gallavotti ; The phase separation line in the two-dimensional Ising model., Comm. Math. Phys., 27 (1972) 103-136.

15. ———— ; Instabilities and phase transitions in the Ising model., Rivista del Nuovo Cimento, 2 (1972) 133-169.

16. ———— & A. Martin-Löf ; Block-spin distributions for short range attractive Ising models., Il Nuovo Cimento, 25 B (1975) 425-441.

17. J. Ginibre; General formulation of Griffiths' inequalities., Comm. Math. Phys., 16 (1970) 310-328.

18. T. E. Harris; A lower bound for the critical probability in a certain percolation process., Proc. Cambridge Phyl. Soc. 56 (1960) 13-20.

19. Y. Higuchi; On the absence of the non-translation invariant Gibbs states for the two-dimensional Ising model., Colloquia Math. Societatis Janos Bolyai, 27, Random Fields, Esztergom, (Hungary); 1979 (1982) 517-534.

20. ————; Coexistence of infinite (*) clusters., (to appear in Z. Wahr. verw. Geb.)

21. R. A. Holley; Remarks on the FKG inequalities., Comm. Math. Phys., 36 (1974) 227-231.

22. 岩波講座 現代物理学の基礎 6 統計物理学 (1972)

23. T. Kamae, U. Krengel & G. L. O'Brien; Stochastic inequalities on partially ordered spaces., Annals of Probab. 5 (1977) 899-912

24. H. Kesten; private communication.

25. O. E. Lanford III & D. Ruelle; Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics., Comm. Math. Phys. 13 (1969) 194-215.

26. J. L. Lebowitz & A. Martin-Löf; On the uniqueness of the

equilibrium state for Ising spin systems., Comm. Math. Phys., 25 (1972) 276-282.

27. ———— ; GHS and other inequalities., Comm. Math. Phys., 35 (1974) 87-92.

28. ———— ; Coexistence of phases in Ising ferromagnets., J. Stat. Phys., 16 (1977) 463-476.

29. A. Messager & S. Miracle-Sole ; Correlation functions and boundary conditions in the Ising ferromagnet., J. Stat. Phys., 17 (1977) 245-262.

30. 宮本 宗実 ; 格子気体の相転移., Seminar on Probab. 38 (1973)

31. ———— ; Martin-Dynkin boundaries of random fields., Comm. Math. Phys., 36 (1974) 321-324.

32. ———— ; A remark to Harris's Theorem on percolation., Comm. Math. Phys., 44 (1975) 169-173.

33. L. Onsager ; Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition., Phys. Rev., 65 (1944) 117-149.

34. J. Palmer & C. Tracy ; Two-dimensional Ising correlations; convergence of the scaling limit., Adv. in Appl. Math., 2 (1981) 329-388.

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

35. L. Russo ; The infinite cluster method in the two-dimensional Ising model., Comm. Math. Phys., 67 (1979) 251 – 266.

36. ———— ; On the critical percolation probabilities., Z. Wahr. verw. Geb. 56 (1981) 229 – 238.

37. ———— ; An approximate Zero-One law. (to appear in Z. Wahr. verw. Geb.)

38. M. Sato , T. Miwa & M. Jimbo ; Holonomic quantum field theory. I., Publ. RIMS Kyoto Univ., 14 (1978) 223–267.

39. ———— ; ———— II., Publ. RIMS Kyoto Univ. 15 (1979) 201 – 278.

40. ———— ; ———— III. Publ. RIMS Kyoto Univ. 15 (1979) 577 – 629.

41. ———— ; ———— IV. Publ. RIMS Kyoto Univ. 15 (1979) 871 – 972.

42. ———— ; ———— V. Publ. RIMS Kyoto Univ. 16 (1980) 531 – 584

43. J. Slawny & W. Holsztynski ; Peierls condition and number of ground states., Comm. Math. Phys. 61 (1978) 177 – 190.

Sem. on Probab.
Vol.54 1982年
P1-126

1982年5月 確率論セミナー発行