Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

SEMINAR on PROBABILITY

Vol. 59

格子気体の流体力学極限

内山耕平　舟木直久

（東工大　理）（東大　数理）

（籠屋恵嗣、永幡幸生　記）

1997

確率論セミナー

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

目次

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

序文

このノートの目的は 格子気体のスケール極限を求めること，またそれを通して流体力学極限の理論の基本的部分を解説することである。

流体力学極限の研究は，流体の運動を流体を構成している（微視的）粒子系の運動法則から理解しようとする試みである．流体の方程式は古典力学における５つの保存量，即ち質量，運動量の３成分，エネルギー，を連続的に変化する巨視的物理量として記述する．流体を構成する個々の粒子は激しく運動し，それに応じて様々な物理量も非常に速く変化しているはずであるが，その中で保存量の変化は比較的緩やかにおこり，しかも（微視的に）十分大きい部分では粒子系はほぼ平衡状態に達しているであろうと期待される．但し，この局所的な平衡状態に到達している部分は巨視的には無限小とみなされるほど小さくなければならない．そうでなければ保存量の値は空間的に一定になってしまい，その運動方程式を考える意味がなくなるからである．ともかく，局所的な平衡状態の成立を認めれば，保存量の値は平衡状態のもとでの平均量として与えられ，逆に平衡状態はこれらの保存量の値により一意的に定まるから，保存量についての閉じた方程式，即ち流体の方程式が得られるはずである．これが流体の方程式の導出が可能となることのきわめて大雑把な説明である．しかし,（微視的）粒子系として古典的な Hamilton 系をとる限り，これに数学的裏付けを与えるのは今のところ非常に困難であろうと思われる．可逆で決定論的な古典的粒子系には，局所平衡状態の成立を保証する要素が欠けているからである．

ところで，流体力学の方程式には，実は熱力学的量が組み込まれているのであって（だから決定論的なものからは出てこないというわけではないが）ランダムな（あるいは散逸的な）要素が微視的系に初めからあると考えるのは自然なことと思われる．また，流体力学極限（特に局所平衡）の考え方自体はランダムな多体系によく適合し，確率論的にも興味深い内容を持っている．このため様々な確率論的模型が流体力学極限の観点から８０年代に入って以降盛んに研究されてきた．ここで取り上げる１次元格子気体はそのような模

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

型のなかで最も単純で，しかもこの問題の本質的な構造を保持していると思われる典型的なものである．

一般に多次元格子 $\mathbf{Z}^d$ 上を多数の粒子が，排除条件（1つの格子点には高々1粒子しか存在しえないという制約）のもとに特定の法則に従って運動する数学的模型を格子気体と云う．このノートでは格子が1次元で運動法則が Markov 的な確率法則の場合を考える．この系は粒子数を唯一の保存量とし，しかも粒子数を固定するごとに強いエルゴード性をもつ． エルゴード性は局所平衡を保証する上で本質的な役割を果たす．

古典的な物理系で粒子間の相互作用力が対称なポテンシャルによって与えられる場合は，勾配条件と呼ばれる良い性質を持っている．この条件は格子気体については自然な条件ではなく，非常に特殊な場合にのみ満足される． 一般に勾配条件を満たす系（勾配系）に対しては，局所平衡系の考え方により流体力学極限をとった後にどのような方程式が現れるか割合容易に予想でき，特に1章 (b) で簡単に紹介するように古典的粒子の力学系から Euler 方程式が少なくとも形式的には導出できる．

数学的にきちんとした結果は様々な一次元模型について得られてきた（[Ro 81], [BDS 83], [Mu 87], [Fr 89]）．これらはいずれも勾配系を扱ったもので，局所平衡を示すためにそれぞれの模型に固有な構造を巧みに利用している．これに対し Guo-Papanicolaou-Varadhan [GPV 88] の採った方法は画期的である．そこでは，エントロピーを利用した非常に汎用性のある方法が導入され，その方法は平衡状態の純粋相が保存量により一意的に定まり勾配条件を満たす対称な Markov 系であれば基本的にいつでも適用可能であると考えられる．その後 Yau [Y 91] は，[GPV 88] の方法を個々のモデルへの適用に際して遭遇する技術的困難が多くの場合回避できるように改良した． これにより勾配条件を満たす対称な Markov 系についての流体力学極限は，相転移のないパラメータ領域に限ればほぼ確立されたといえるであろう．

非勾配系について流体力学極限を証明するのは困難ではあっても，非常に重要かつ興味深い問題として注目されていたが，Varadhan [V 93a] は Ginzburg-Landau 模型で見事にこれを解決した．それは単純な直感的あるいは物理的説明では解き明かせないきわめて

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

非自明な深い結果である． その解法は華麗とでも形容できるものであって，援用される数学上の手法は多彩である．例えば（より一般の模型を考慮して）：

エントロピー，大偏差原理；Dirichlet 形式 (= エントロピー生成率)；

スペクトルギャップ，対数型 Sobolev 不等式； 非線形偏微分方程式の理論；

Markov 過程論 （中心極限定理, Feynmann-Kac の公式)；

平衡系の統計力学 i.e., Gibbs 分布に関する種々の結果 — 熱力学的等式，混合性，

アンサンブル同値 (equivalence of ensemble), 中心極限定理

などがある． [GPV] の方法はエントロピーの時間微分（= 分布密度の平方根の Dirichlet 形式）の評価から局所平衡を導くものである．勾配系であればこれでほとんど流体力学極限の方程式が得られることになるのであるが，非勾配系では事情が全く異なり，局所平衡の成立ということだけでは方程式の形すら見当がつかない．[V 93a] では問題を或る量の大偏差原理型の評価の問題として捉え，それを中心極限定理の分散の評価，さらにはスペクトルギャップの評価に帰着させる．そこでとられた一連の考え方は関連する揺動の問題あるいは対称でないモデルの流体力学極限の問題等でもきわめて有効となる．

このノートでは，非勾配系として自然でありしかも最も単純であると思われる，Bernoulli 測度に関し対称な 1 次元格子気体について流体力学極限の成立を示す．(上に掲げた対数型 Sobolev 不等式及び Gibbs 分布に関する結果は用いない.）直接には [FUY 96] に基づいている．証明の本質的なアイデアは [V 93a] による勾配置き換えにあるが，同時に [Y 91] の手法及び局所平衡状態の第 2 近似という方法を組み合わせて用いる．結果は多次元の場合 [FUY 96]，あるいは 1 次元で Gibbs 測度に関し対称な場合に拡張できる．

ここでこのノートの構成について簡単に触れておく．1 章：Euler 方程式を始めとする元々の流体の方程式の導出という立場から，流体力学極限の問題を概観する；本論である 2 章以降は 7 章 6 節を除けばこの章とは完全に独立している．2 章：モデルの定義と主定理を述べる．3 章： 勾配系に対し主定理の証明を与える；[GPV 88] における基本的枠組み（時空に関する平均操作；局所平衡の定式化）及び基本的道具·技法（エントロピー生成

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

とその応用）が導入される；この章は流体力学極限の考え方を理解する上で基本的である．4章：非勾配系に対し「勾配置き換え」を仮定し，[Y 91] の方法に沿った主定理の証明を与える．5章：「勾配置き換えの証明」を与える；[V 93a] のアイデアでこのノートの核になる部分である．6章：非勾配系に対し [V 93a] におけると同様にコンパクト性に基づく証明の概略を与える．7章：関連する話題を紹介する．8章：主定理の証明で用いた一般的な命題の証明を与える（流体力学極限に限らず種々の局面で応用可能であろうと思われる命題・テクニックをとり上げ，別にまとめてみた）．

****

本稿は 1995 年東北大学で開催された確率論サマースクールにおいて筆者たちの行った講義のノートに加筆·訂正をしたものである．序文及び 1, 2, 5, 6, 8 章 は主に内山が，文献の整理·解説と 3, 4, 7 章は主に舟木が担当した．

籠屋恵嗣氏，永幡幸生氏には講義の筆記及びタイプをして頂いた．なお永幡幸生氏には最終稿の作成に際しても内山，舟木担当分の調整·整理等多大の協力をして頂いた．両氏に心から感謝致します．またサマースクールを企画された小谷真一氏及び実務面でお世話になった会田茂樹，磯崎泰樹の両氏に厚くお礼申し上げます．

1997 年　4 月

内山耕平，　舟木直久

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第1章 流体力学極限について

このノートの主題は流体の方程式の導出に関連して格子気体と呼ばれる確率論的模型（排除過程ともいう）の集団的振る舞いを調べることである．本論に入る前に，物理的な流体に即してこの問題を概観しておきたい．序文で述べたように，ここでいう導出の問題とは微視的粒子系から出発して巨視的流体の描像をもとめるという統計力学的方法を指す．そこでは粒子の大きさ $\to 0$, 粒子の個数 $\to \infty$ 等の極限がとられるが，背後に微視的粒子系の力学と流体の連続的運動とを結び付ける局所平衡の成立と云う事実があってそのことがこの極限操作を特徴付けている．流体の方程式を導出するにあたってとられるそのような，あるいはそれと類似の数学的構造を持ったある種の極限操作は流体力学極限と呼ばれる．それは他の極限操作，例えば平均場近似，とはかなり明確に区別できるたぐいのものである．

流体力学の方程式の古典的な導出においては，流体は一種の巨視的対象とみなされ古典力学と熱力学が併用される．　即ち一方では流体は連続体とみなされ，その微小部分は古典力学の基礎法則にしたがって運動する質点（「流体粒子」）のように扱われる．他方，流体力学の方程式に現われる圧力関数およびエネルギーの保存則を表す式は系全体を熱力学的系とみなすことによって状態方程式を使って求められる．この導出方法はその手続きに関する限り単純明快ではあるが，熱力学的系としての流体と流体粒子からなる連続体としての流体が一貫した観点に基づいて結び付けられていないため，理論的に十分満足のいくものとは云いがたい．

これに対し，Morrey [M 55] は粘性のない流体の方程式としてよく知られている Euler 方程式を統計力学的考察によって古典的な Hamilton 系から導いた．即ち，流体を初めか

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

ら巨視的対象とはみなさず莫大な数の粒子から成っている統計力学的対象とみなしてその微視的構造から流体の運動を記述することが少なくとも形式的レベルでは可能であることを示したのである．このような方法によれば，出発点である古典的な粒子系を規定する相互作用の力と流体の方程式に現われる熱力学的関数が明確に関係付けられるとともに，微視的粒子系のどのような構造が巨視的流体の連続体としての運動に反映するかが少なくとも概念的には理解できる．しかし数学的観点からみると，本質的である極限操作をとる部分の議論は全く形式的で，序文に述べたように現在のところこのような仕方で Euler 方程式を厳密に導くには重大な困難があると思われる．

以下ではまず，見かけ上古典粒子系に近い確率模型である相互作用する Brown 粒子の系によって流体力学極限の大筋を解説し，その後で [M 55] による Euler 方程式の導出をごく簡単に紹介しておく．

(a) 相互作用する Brown 粒子の系

$B_i(\tau), i=1,2,\dots$ は独立な 1 次元 Brown 運動の列とする．N個の粒子 $x_1(\tau),\dots,x_N(\tau)$ が次の確率微分方程式に従って実軸 R 上を運動しているとする：

$$dx_i(\tau) = -\sum_{j:j\neq i} U'(x_i(\tau)-x_j(\tau))d\tau + dB_i(\tau), \quad i=1,2,\dots,N,$$

ここに U' は 関数 $U(x), x\in \mathrm{R}$, の微分を表わす．$U(x)$ は有界な台をもつ滑らかな偶関数 $(U(x)=U(-x))$ であり，

$$\psi(x) := -xU'(x) \geq 0$$

と仮定する． 最後の条件は第 j粒子が 第 i 粒子に及ぼす力 $-U'(x_i(\tau)-x_j(\tau))$ が反発力であることを意味する． さて x は微視的スケールでみた空間座標であって，巨視的スケールでの空間座標 y は非常に小さい数 ε によって $y=\varepsilon x$ で与えられるものとしよう.（ ε は巨視的スケールでの粒子の大きさ（ポテンシャル力の到達範囲）と考える.） 各 $x_i(t)$ が定性的に Brown 運動のように振舞うことから空間の巨視的スケールで変化が観察される為

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

には時間 τ が ε^{-2} 程度の大きさとなるまで待たなければならない．そこで

$$y_i^\varepsilon(t) = \varepsilon x_i(\varepsilon^{-2}t)$$

と置く．流体の方程式の導出に対応してここで問題にすべきことは巨視的変数 $y_i^\varepsilon(t), i = 1,2,...,N$ の集団としての振る舞いをとらえること，即ち粒子の巨視的位置の経験分布

$$\alpha_t^\varepsilon := \varepsilon \sum_i \delta_{y_i^\varepsilon(t)}$$

の時間的発展を記述することである.（1粒子の質量を ε と考えれば α_t^ε は質量の経験分布.）粒子数のみがこの系の保存量であることに注意されたい．

答えは次のように簡潔に述べられる：同時に $\varepsilon \downarrow 0$, $N \to \infty$ としたとき，α_0^ε が或るランダムでない有限測度 α_0 に確率収束すれば，すべての $t > 0$ に対し，α_t^ε は確率収束する.（このノートを通じて有限測度の空間の位相は常に測度の弱収束により与えられるものとする.）その極限測度 $\alpha_t(dy)$ は Lebesgue 測度 dy について絶対連続で密度関数 $\rho(t,y)$ は，初期条件

$$\rho(t,y)dy \to \alpha_o(dy)\ (t \downarrow 0)$$

および次の非線形拡散方程式を満たす：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}P(\rho(t,y)), \tag{1.1}$$

ここに $P(\rho)$ は以下に定義される一変数 $\rho \geq 0$ の増加関数であるが，一言でいえばそれはポテンシャル関数 U の決定する平衡系の統計力学に於ける圧力関数である．

パラメータ $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し有限区間 $[-L,L]$ 上の点過程 (x_i) の確率測度 μ_λ^L を

$$\mu_\lambda^L(d(x_i)) = \frac{1}{Z_L(\lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\lambda n}}{n!}\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{1\leq i\neq j\leq n}U(x_i-x_j)\Big]dx_1dx_2\cdots dx_n$$

により定義する． ただし $Z_L(\lambda)$ は規格化定数である.（ μ_λ^L は有限体積 Gibbs 測度と呼ばれる.）すべての実数 λ に対して次の極限

$$F(\lambda) := \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\log Z_L(\lambda)$$

が存在する；また $L \to \infty$ としたとき $\mu_\lambda^L(d(x_i))$ は $\mathbf{R}$ 上の或る点過程 $\mu_\lambda(d(x_i))$ に収束する．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

(この極限操作を熱力学極限という.) $F(\lambda)$ はしばしば圧力 (あるいは自由エネルギー) と呼ばれ, λ の凸関数である; また極限測度 μ_λ は大きなカノニカル (grand canonical) Gibbs 測度, λ は化学ポテンシャルと呼ばれる. 台が有界で $\mathbf{R}$ 上の積分が 1 である非負連続関数 $\chi(x)$ を一つ選んでおく. 写像

$$\lambda \longmapsto \bar{\rho}(\lambda) := \int \left(\sum_i \chi(x_i) \right) \mu_\lambda(d(x_i))$$

は狭義に単調増加で連続である. (μ_λ は平行移動不変, 従ってこの写像 $\bar{\rho}(\lambda)$ は$\chi(x)$ の選び方によらない. $\bar{\rho}(\lambda)$ は μ_λ のもとでの平均粒子数密度を表す.) $\bar{\rho}(\lambda)$ の逆関数を $\bar{\lambda}(\rho)$ とすれば, $P(\rho)$ は次式で定義される

$$P(\rho) = F(\bar{\lambda}(\rho)).$$

(但し $P(0) = 0.$) 即ち P は平衡系の統計力学により定義された圧力である. P は次の形に表わすことができる:

$$P(\rho) = \rho + \int \left[\sum_{i \neq j} \psi(x_i - x_j) \chi(x_i) \right] \mu_{\bar{\lambda}(\rho)}(d(x_i)) \tag{1.2}$$

([V91]). 拡散方程式の導出には実は P のこの表現があれば足りるが, P が熱力学的関数であると云う事実は興味深いことである. 以下に述べるように (1.1) の形は物理的に自然な仕方で容易に推測できるが (例えば [Ro 83]), 厳密な証明が与えたられたのは比較的最近のことである ([V 91] , 初期条件の一般化については [U 94] を参照; 但し共にトーラス (= 円周) 上の粒子系を扱っている. $\mathbf{R}$ 上で考えると不変測度

$$\nu_N(dx_1 dx_2 \cdots dx_N) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(x_i - x_j) \right] dx_1 dx_2 \cdots dx_N$$

は無限測度であるから規格化できないが, α_0^ε が有限測度に収束する限りこのことは重要でなく, ν_N を基礎の測度として基本的に同じ証明が適用できる.)

さて, 何故極限密度 $\rho(t, y)$ の満たす拡散方程式が P によって (1.1) のようになるかを説明しよう. そのからくりは統計力学的概念である局所平衡の成立を仮定すれば容易に

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

理解できる．$J(y)$ を有界な台をもつ滑らかな試験関数とする．まず伊藤の公式より

$$d\langle J,\alpha_t^\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}\sum_i \varepsilon J''(y_i^\varepsilon(t))dt - \sum_{i\neq j} U'\left(\frac{y_i^\varepsilon(t)-y_j^\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) J'(y_i^\varepsilon(t))dt + dM_t^\varepsilon. \tag{1.3}$$

ここに $\langle J,\alpha_t^\varepsilon\rangle$ は J の α_t^ε による積分を表す；またマルチンゲール M_t^ε は

$$M_t^\varepsilon = \int_0^t \sum_i \varepsilon J'(y_i^\varepsilon(s))d\tilde{B}_i(s) = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad (\tilde{B}_i(s) = \varepsilon B_i(\varepsilon^{-2}s))$$

となり $(\varepsilon \to 0)$ とするとき無視できる．(初期値についての仮定から $N\varepsilon = O(1)$ である.) U' は奇関数だから右辺第2項の $J'(y_i)$ は $(J'(y_i) - J'(y_j))/2$ で置き換わる．さらに $\psi(x) = -xU'(x)$ の台が有界であることに注意すれば

$$\begin{aligned}\langle J,\alpha_t^\varepsilon\rangle - \langle J,\alpha_0^\varepsilon\rangle = \quad & \frac{1}{2}\int_0^t \langle J'',\alpha_s^\varepsilon\rangle ds \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t \varepsilon\sum_{i\neq j}\psi\left(\frac{y_i^\varepsilon(s)-y_j^\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right) J''(y_i^\varepsilon(s))ds + o(1).\end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで吟味する必要のあるのは右辺第2項である．(大まかに言えば，第 i 粒子 $y_i^\varepsilon(t)$ と直接相互作用があるのは平均的に有限個であるから，この項は $\varepsilon\downarrow 0$ の時形式的収束項である．これに対し (1.3) の右辺第2項は定符号でないことによる打ち消し合いがなければ発散する項である．このように (1.3) が形式的発散項を含まないように書き直せる場合，勾配条件が成立しているという.) 見やすくするために (1.4) の中の和の記号の内に自明な式

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon}\chi\left(\frac{y_i^\varepsilon(s)-y}{\varepsilon}\right)dy$$

の右辺の形を挿入する．その上で微視的変数 $x_i(\varepsilon^{-2}s) = \varepsilon^{-1}y^\varepsilon(s)$ に戻り，さらに微視的座標 y/ε から見直した変数 $x_i^y(\tau) := x_i(\tau) - y/\varepsilon$ を導入すれば，上式右辺第2項は

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i\neq j}\psi(x_i^y(\varepsilon^{-2}s) - x_j^y(\varepsilon^{-2}s))\chi(x_i^y(\varepsilon^{-2}s))J''(y)(1+O(\varepsilon))dyds \tag{1.5}$$

と書ける．ここまでは単純な計算から導かれ格別の工夫はなされていない．実質上問題になるのはこの積分をいかに計算するかである．それには先に述べた局所平衡の成立という事実が決定的な役割を演ずる．

局所平衡の数学的定式化とそれに基ずく (1.5) の厳密な計算は格子気体について3章

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

で詳しく行う．ここではその直感的説明を与えておこう．任意の（大きな）正数 K に対し我々の系を区間 $[-K+y/\varepsilon, K+y/\varepsilon]$ に制限してみよう．今，仮にこの区間の両端に壁を作って外部との交渉がない状況を想定する．するとこの粒子系は粒子数 n を固定するごとに

$$\mu_\lambda^{L,n}(d(x_k)) = \frac{1}{Z_{L,n}} \exp\Big[\frac{1}{2}\sum_{i \neq j} U(x_i - x_j)\Big] dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

を不変測度に持つエルゴード的な Markov 過程となり，十分長い時間 $\tau_1 (\tau_1 \gg K^2)$ の後には平衡状態に達する.（より正確に言えば，この区間内の粒子数を n としたとき，$\tau_1/K^2 \to \infty, n/K \to \rho$ となるように $K, \tau_1, n \to \infty$ とすれば τ_1 時間後の粒子配置の分布は Gibbs 測度 $\mu_{\lambda(\rho)}$ に収束する.） 実際にはこの粒子系は孤立していないで区間外の粒子系と交渉を持つが，区間の幅が微視的スケールでみて非常に大きければ，その影響は小さく，y と s を止めるごとに y/ε の周りでは平衡状態に達している（局所平衡の成立）としてよいであろう．巨視的時間 $t_1 := \varepsilon^2 \tau_1 \leq 1$ でなくてはならないから，$\varepsilon K \ll 1$ である． 即ちこの区間は微視的には大きいが巨視的には無限小と看做されるものでなくてはならない．さて，局所平衡の成立を認めれば μ_λ のもとでの大数の法則により

$$\rho(s,y) = \lim_{K \to \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2K} \sharp\{i : |x_i^y(s)| \leq K\}$$

が定まり，(1.5) の積分は極限において

$$\frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} dy J''(y) \int \Big[\sum_{i \neq j} \psi(x_i - x_j)\chi(x_i)\Big] \mu_{\lambda(\rho(s,y))}(d(x_i))$$

となるであろう（詳しくは 3.2 節を見よ）．(1.2) によりこれは

$$\frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} [P(\rho(s,y)) - \rho(s,y)] J''(y) dy$$

に等しく，(1.4) に戻って見直せば求める非線形拡散方程式 (の弱形式) が得られたことになる．

さて上に述べた導出方法を振りかえってみると，次のように要約できるであろう．微視的時空 のスケール $(\tau, x) = (\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}y)$ でみれば至る所 (*all* y)，常に (*all* t) 平衡状態が保たれている．一方各 (t,y) に於ける粒子数密度 $\rho = \rho(t,y)$ は拡散型の関係式 $\rho_t = P_{yy}$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

に従って変化する．この関係式に現れる特性量 P は微視的構造の特性量 $\sum\psi(x_i-x_j)$ の平衡状態のもとでの統計的平均に単に ρ を加えたものであり，平衡状態は粒子数密度 ρ によって決定されるから，それは ρ の関数として定まる．こうして ρ について閉じた拡散方程式が得られる．

(b) 古典的粒子系

3次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ 内を多数の粒子が Newton の力学法則にしたがって運動しているとする．時刻 τ での第 i 粒子の位置と運動量を $(q_i(\tau),p_i(\tau))$ とし，粒子に働く力はポテンシャル関数 U であたえられる2体間力のみであるとする．粒子の質量が1となるように単位系をとれば，運動方程式は

$$\frac{d^2}{d\tau^2}q_i(\tau)=-\sum_{j\neq i}\nabla U(q_i(\tau)-q_j(\tau)),\quad i=1,2,\ldots$$

と書かれる．巨視的スケールでの粒子の大きさを ε とするとこの系の自然な巨視的時間は $t=\varepsilon\tau$ で与えられる．先のランダム系の模型では孤立系の保存量は粒子数のみであったが，古典力学が教えるようにここでは五つの保存量がある．即ち粒子数，運動量ベクトル，エネルギーの五つである．対応する経験分布は次のように定義される：

$$\begin{aligned}\alpha_t^\varepsilon &= \varepsilon^3\sum_i\delta_{\varepsilon q_i(\varepsilon^{-1}t)}\\ \beta_t^\varepsilon &= \varepsilon^3\sum_i p_i(\varepsilon^{-1}t)\delta_{\varepsilon q_i(\varepsilon^{-1}t)}\\ \gamma_t^\varepsilon &= \varepsilon^3\sum_i e_i(\varepsilon^{-1}t)\delta_{\varepsilon q_i(\varepsilon^{-1}t)},\end{aligned}$$

但し

$$p_i(\tau)=\frac{d}{d\tau}q_i(\tau);\qquad e_i(\tau):=\frac{1}{2}|p_i(\tau)|^2+\frac{1}{2}\sum_{j:j\neq i}U(q_i(\tau)-q_j(\tau)).$$

前と同様の計算（やや複雑になる）ができて，局所平衡が成立しているという仮定の下にこれらの経験分布の極限密度関数 $\rho(t,x),v(t,x),e(t,x)$ の満たすべき方程式系として次の Euler 方程式が導かれる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot(\rho v)=0$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^k) + \nabla\cdot(\rho v^k v) + \frac{\partial}{\partial x_k}P = 0 \quad (k = 1,2,3) \tag{1.6}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla\cdot(\rho e v + P v) = 0,$$

ここに $v = (v^1, v^2, v^3)$, $P = P(\rho, v, e)$ は以下で定義される統計力学的圧力関数である．

パラメータ $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_4) \in \mathbf{R}^5$ に対し有限領域 $[-L, L]^3$ 上の点過程 (q_i, p_i) の確率測度 μ_λ^L を

$$\mu_\lambda^L(d(q_i,p_i)) = \frac{1}{Z_L(\lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[\lambda_0 n + \sum_{k=1}^{3}\lambda_k V^k + \lambda_4 E\right]\frac{dq_1\cdots dq_n dp_1\cdots dp_n}{n!}$$

により定義する．ただし

$$V^k = V^k((p_i)) = \sum_i p_i^k \quad (k = 1,2,3),$$
$$E = E((q_i,p_i)) = \frac{1}{2}\sum_i |p_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U(q_i - q_j),$$

また $Z_L(\lambda)$ は規格化定数である．前と同様に

$$F(\lambda) := \lim_{L\to\infty}\frac{1}{(2L)^3}\log Z_L(\lambda);$$

また $L\to\infty$ としたときの $\mu_\lambda^L(d(q_i,p_i))$ の 極限測度を μ_λ とする．μ_λ による平均密度，平均速度，平均エネルギーをそれぞれ $\bar\rho(\lambda), \bar v(\lambda)$, $\bar e(\lambda)$ とする．例えば

$$\bar v(\lambda) := \int\left[\sum_i p_i \chi(q_i)\right]\mu_\lambda(d(q_j,p_j))$$

である．1次元の場合と違って，すべての $\lambda\in\mathbf{R}^3$ に対してこれらの極限が存在するとは限らないし，写像

$$\pi : \lambda \longmapsto (\bar\rho(\lambda), \bar v(\lambda), \bar e(\lambda))$$

が1対1かつ連続となるかどうかもわからない．しかし λ を $\mathbf{R}^5$ の適当な領域 W に制限すればこの写像は位相同型になることが知られている．写像 π の逆写像を $\bar\lambda(\rho, v, e)$ とすれば P は $\pi(W)$ 上 $P = F(\bar\lambda(\rho, v, e))$ と定義される．局所平衡に基付く前と同様な議論により期待されることは， 与えられた関数を初期値とする Euler 方程式 (1.6) の解が $\pi(W)$ の外に出るまでの時間，経験分布 $\alpha_i^\varepsilon, \beta_i^\varepsilon, \gamma_i^\varepsilon$ が $\varepsilon\downarrow 0$ とした時収束し，その密度関数がこの

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

解に一致するであろうということである．しかしこの決定論的な系で局所平衡が成立するか否かを決定することは全く未解決の 困難な問題である．(但し，純粋に決定論的であることを断念すれば，極限ではその影響が消えてしまうような弱いランダムな力を導入することによって，それはある程度可能である [OVY 93] §7.6 (2) 参照).

ここに述べた Hamilton 系から直接 Euler 方程式を導く方法以外に， Boltzmann 方程式から流体の方程式を導く方法が有りこれも流体力学極限と呼ばれる．Boltzmann 方程式は希薄気体における粒子の位置 x と速度 ξ の分布密度関数 $f^\varepsilon(t,x,\xi)$ についての次のような形の発展方程式である：

$$\frac{\partial}{\partial t}f^\varepsilon + \xi\cdot\nabla f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}Q(f^\varepsilon),$$

ここに ∇ は位置変数 x に関する微分を表し， $Q(f^\varepsilon)$ は速度変数 ξ についての非線形積分作用素 である．パラメータ ε は平均自由行程と呼ばれる量に相当し，或る意味で気体の希薄性を表現している． 速度変数について積分することにより密度場，速度場，エネルギーの場が各々

$$\begin{aligned}
\rho^\varepsilon(t,x) &= \int f^\varepsilon(t,x,\xi)d\xi \\
v^\varepsilon(t,x) &= \int \xi f^\varepsilon(t,x,\xi)d\xi \\
e^\varepsilon(t,x) &= \int \frac{1}{2}|\xi|^2 f^\varepsilon(t,x,\xi)d\xi
\end{aligned}$$

によって定義される．($e^\varepsilon = \frac{1}{2}|v^\varepsilon|^2 + \int\frac{1}{2}|\xi - v^\varepsilon|^2 f^\varepsilon(t,x,\xi)d\xi$ と分解したとき，普通，第 1 項は流体の微小部分を「流体粒子」とみなしたときの運動エネルギー，第 2 項はその内部エネルギーと解釈される．上に述べた Hamilton 系の模型における本来の内部エネルギー $\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}U(x_i - x_j)$ に対応している部分はすぐあとで述べる理由によりここには現われない.)
流体力学極限の問題はここでは，$\varepsilon\to 0$ としたとき，これらが流体の方程式の解に近づくこと，及び $f^\varepsilon(t,x,\xi)$ が局所 Maxwell 分布に近づくことを示すことである．この問題は比較的よく研究されていて興味深い数学上の結果が幾つか得られている（[Ca 80] [Lac 86,92], なお [CIP 94] [DP 91] に簡単な解説がある). Boltzmann 方程式は密度（=単位体積内の粒子の占める体積）を 0 に近づけた極限において Hamilton 系から導かれるはずのもので

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

ある.(そのとき，ひとつの衝突から次の衝突までの平均距離が平均自由行程であり，この極限はそれが一定に保たれるようにとる. この極限の取り方を Boltzmann-Grad 極限という.) この極限操作では粒子間の相互作用は衝突の瞬間においてのみなされ，その結果 Hamilton 系の微視的構造は極限に於いて失われてしまう. 従って，さらに $\varepsilon \to 0$ として得られる流体の方程式に現れる熱力学的関数はすべて理想気体の状態方程式で与えられることになる. つまり極限を 2 段階に分けて逐次取って得られた流体の方程式は，1 度に取った極限において現われると予想されるものとは異なるのである.

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第 2 章 モデルと結果

概要: このノートの目標は，流体力学極限の理論の枠組みを紹介することにある．対象とするモデルは 1 次元格子気体で， Bernoulli 測度に関し対称な場合に限って話しを進める．そのような場合でも系は一般には非勾配型である．このモデルの流体力学極限により得られる粒子数の極限密度関数 $\rho = \rho(t, \theta)$ は，非線形拡散方程式 $\rho_t = \partial_\theta(D(\rho)\partial_\theta \rho)$ を満たす．拡散係数 $D(\rho)$ は Green-Kubo 公式と同等の変分公式で表される．

2.1 モデルと問題

大きな自然数 N に対し，一次元離散トーラス $\Gamma_N = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \cong \{1, 2, \ldots, N\}$ (1 と $N+1$, あるいは 0 と N を同一視) 上の格子気体を考える．格子気体の個々の状態は配置空間

$$\mathcal{X}_N := \{0, 1\}^{\Gamma_N} = \{(\eta_x)_{x \in \Gamma_N} : \eta_x = 0 \text{ or } 1\}$$

の一点 $\eta = (\eta_x)_{x \in \Gamma_N} \in \mathcal{X}_N$ として表される．ここに $\eta_x = 1$ or 0 は格子点 x に粒子が，存るか無いかを表す．$\mathcal{X}_N$ 上の（連続）関数全体を $C(\mathcal{X}_N)$ と書き，格子点 $x, y (x \neq y)$ に対して， $C(\mathcal{X}_N)$ 上の作用素 π_{xy} を

$$\pi_{xy} f(\eta) = f(\eta^{xy}) - f(\eta)$$

$(f \in C(\mathcal{X}_N))$ によって定義する．但し，

$$(\eta^{xy})_z = \begin{cases} \eta_x & z = y \\ \eta_y & z = x \\ \eta_z & \text{その他}, \end{cases}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

即ち $\eta^{x,y}$ は格子点 x, y の間での η の値の入れ替えを表す．ここで考える格子気体は，

$$L_N f(\eta) = \sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}(\eta)\pi_{x,x+1} f(\eta),$$

の形の作用素 L_N で生成される $\mathcal{X}_N$ 上の Markov 過程である．$c_{x,x+1}(\eta) \geq 0$ は，粒子の配置が η であるときに隣接格子点 $x, x+1$ の間で状態変化 (粒子の飛躍) が起きる率 (rate) を与える関数である．以下ではこの格子気体に対して時間と空間のスケール変換

$$(\tau, x) \in [0, TN^2] \times \Gamma_N \to (t = N^{-2}\tau, \theta = N^{-1}x) \in [0, T] \times \mathbf{T}$$

($\mathbf{T} \cong [0,1)$) を施し，$N \to \infty$ として得られる極限粒子密度の特徴付けを与えたい．そのためには，あらかじめ時間変更をした格子気体を考えた方が都合がよい．そこで $N^2 L_N$ が生成する $\mathcal{X}_N$ 上の Markov 過程を

$$\eta^N(t) = \left\{\eta_x^N(t) : x \in \Gamma_N\right\}$$

で表すことにする．$c_{x,x+1}(\eta) > 0$ ($x \in \Gamma_N$) であれば，明らかに粒子数が唯一の保存量で，Markov 過程は粒子数によりエルゴード分解される．$\eta \in \mathcal{X}_N$ は自然に 1 次元トーラス $\mathbf{T} := \mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong [0,1)$ (0 と 1 は同一視) 上の離散測度

$$\alpha \equiv \alpha(d\theta; \eta) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \eta_x \delta_{\frac{x}{N}}(d\theta), \quad \theta \in \mathbf{T}$$

と同一視される．すべての $x \in \Gamma_N$ に対し $\eta_x = 1$ であれば，α は $\mathbf{T}$ 上の Lebesgue 測度を近似する．このことから明らかなように α の任意の極限点は密度 $\rho(\theta)$ を持ち $\rho(\theta) \leq 1$ である．粒子配置の見本分布 (sample distribution) を

$$\alpha_t^N(d\theta) \equiv \alpha(d\theta; \eta_t^N) := \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \eta_x^N(t)\delta_{\frac{x}{N}}(d\theta)$$

と定義する．我々の取り組むべき問題は次のように述べられる．

問題：$N \to \infty$ とした時に $\alpha_t^N(d\theta)$ が収束することを示し，その極限 $\rho(t,\theta)d\theta$ を特徴付ける方程式を求めよ．

注意：粒子の位置の集合 $\{x : \eta_x = 1\}$ を $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ と書き $m = |\eta| = \sum \eta_x$ と置くと $\alpha(d\theta; \eta)$ は $\alpha = \frac{m}{N}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \delta_{x_i}$ とも表せる．問題によっては，この表現の方が見やすいこと

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

もある.

演習 1 $c_{x,x+1} \equiv 1/2$ ならば極限の方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\rho. \tag{2.1}$$

解：各粒子を追跡する (隣接する 2 格子点上では率 $N^2/2$ で互いの場所を入れ替えることに注意する). 粒子に番号をつけて, $\eta^N(t)$ の代わりに Γ_N 上の粒子の位置の集合

$$\{x_k^N(t) : k = 1, 2, \ldots, m_N\}, \quad m_N := |\eta^N(0)|$$

を考えれば, k 番目の粒子の運動 $x_k^N(t), t \geq 0$ は飛躍率 N^2 で格子点上をジャンプする連続時間の酔歩である. これらは独立ではないが, 線型な表式

$$\langle \alpha_t^N, J \rangle = \frac{m_N}{N}\frac{1}{m_N}\sum_{k=1}^{m_N} J(\frac{x_k^N(t)}{N}), \quad J \in C^\infty(\mathbf{T})$$

の極限を見るには 2 粒子 $x_k^N(t), x_j^N(t)$ $(k \neq j)$ の漸近的な独立性を言えばよい. 実際 $(N^{-1}x_k^N(t), N^{-1}x_j^N(t))$ は 2 次元トーラス上の Brown 運動に収束することが示せる. (後に 3.1 節 演習 1 で与えられる解法のほうが証明としては単純明快であるが, ここに述べた見方も時には重要となる.) □

2.2 飛躍率についての仮定

$\mathcal{X}_N$ 及び $C(\mathcal{X}_N)$ 上のシフト作用素 τ_x, $x \in \mathbf{Z}$ を

$$\begin{aligned} (\tau_x \eta)_y &= \eta_{x+y} \quad (\eta \in \mathcal{X}_N) \\ \tau_x f(\eta) &= f(\tau_x \eta) \quad (f \in C(\mathcal{X}_N)) \end{aligned}$$

で定義する ($x, y, x+y$ は mod$N$ で考える). また $\mathcal{X} = \{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ と置き, $C_0(\mathcal{X})$ で $\mathcal{X}$ 上の局所関数全体を表す：

$$f \in C_0(\mathcal{X}) \Longleftrightarrow {}^\exists R \text{ s.t. } f \text{ は } (\eta_x)_{|x| \leq R} \text{ にのみ依存する.}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

τ_x は自然に $\mathcal{X}$ または $C(\mathcal{X})$ 上のシフト作用素 τ_x に拡張される. 飛躍率 $\{c_{x,x+1}\}$ に関し次の条件 1-4 を仮定する.

1. 非退化性：$c_{x,x+1}(\eta) > 0$ if $\eta_x \neq \eta_{x+1}$.
2. 空間的一様性：$c_{x,x+1} = \tau_x c_{0,1}$.
3. 相互作用の局所性：$c_{0,1} \in C_0(\mathcal{X})$
4. $c_{0,1}$ は本質的に (η_0, η_1) に依存しない. （ここに本質的にというのは $\eta_0 = \eta_1$ の時は $c_{0,1}$ をどのように定めてもよいからである.）

条件 4 から L_N が Bernoulli 測度に関して対称であることが従う（逆も成立）. なぜならば 条件 4 を使えば、$m = 0, 1, ..., N$ に対し

$$\sum_{\eta:|\eta|=m} f(\eta)c_{x,x+1}(\eta)g(\eta^{x,x+1}) = \sum_{\eta:|\eta|=m} f(\eta^{x,x+1})c_{x,x+1}(\eta)g(\eta), \quad \forall f,g \in C(\mathcal{X}_N)$$

となるからである. 特に Bernoulli 測度 は Markov 過程 $\eta^N(t)$ の不変測度である. ν^N を密度 1/2 を持つ $\mathcal{X}_N$ 上の Bernoulli 測度（$\mathcal{X}_N$ 上の一様確率測度でもある), 即ち ν^N の下で $\{\eta_x\}_{x\in\Gamma_N}$ は i.i.d. かつ $\nu^N(\eta_x = 1) = \nu^N(\eta_x = 0) = 1/2, x \in \Gamma_N$, とすると

$$\mathcal{D}_{x,x+1}(f) := -\int f c_{x,x+1}\pi_{x,x+1} f d\nu^N = \frac{1}{2}\int c_{x,x+1}(\pi_{x,x+1}f)^2 d\nu^N$$

となることが容易にわかる. 従って ν^N の下での L_N の Dirichlet 形式は次で与えられる：

$$\mathcal{D}^N(f) := -\int f L_N f d\nu^N = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{N}\int c_{x,x+1}(\pi_{x,x+1}f)^2 d\nu^N.$$

2.3 主定理 I

1 次元トーラス $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq [0,1)$ 上の有限測度全体を $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ で表す. $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ の点列 α_n は, 任意の $J \in C(\mathbf{T})$ に対し

$$\langle \alpha_n, J\rangle \longrightarrow \langle \alpha, J\rangle \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

となる $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbf{T})$ があれば，α に収束（弱収束）するといい，$\alpha_n \to \alpha$ と書く．次の定理を示すことがこのノートの主な目的である．

主定理 I 初期配置 $\eta^N(0)$ に関し，$N \to \infty$ とした時

$$\alpha_0^N \to \rho_0(\theta)d\theta \qquad \text{（確率収束）}$$

を仮定すれば，任意の $t > 0$ に対し

$$\alpha_t^N(d\theta) \to \rho(t,\theta)d\theta \quad \text{（確率収束）}$$

が成立する．極限密度関数 $\rho(t,\theta)$ は，次の *Cauchy* 問題

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(D(\rho(t,\theta))\frac{\partial}{\partial \theta}\rho(t,\theta)\right) \\ \rho(0,\theta) &= \rho_0(\theta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

の一意解として特徴付けられる．ここに D は一変数 $\rho \in [0,1]$ の連続関数で以下のように与えられる．$\mathcal{X}$ 上の密度 ρ の *Bernoulli* 測度を ν_ρ,（即ち，ν_ρ の下で $\{\eta_x\}_{x\in\mathbf{Z}}$ は *i.i.d.* かつ $E^{\nu_\rho}[\eta_x] = \rho$ ）ν_ρ による平均を $\langle . \rangle_\rho$ と書く．局所関数 $F \in C_0(\mathcal{X})$ に対して，

$$\hat{c}(\rho; F) = \left\langle \left\{ \eta_1 - \eta_0 - \sum_{y=-\infty}^{\infty} \pi_{0,1}(\tau_y F) \right\}^2 c_{01} \right\rangle_\rho \tag{2.3}$$

と定義し，

$$\hat{c}(\rho) = \inf_{F\in C_0(\mathcal{X})} \hat{c}(\rho; F) \tag{2.4}$$

$$\chi(\rho) = \rho - \rho^2 \tag{2.5}$$

とおくと $D(\rho)$ は次で与えられる：

$$D(\rho) = \frac{\hat{c}(\rho)}{2\chi(\rho)}. \tag{2.6}$$

（$\chi(\rho)$ は $\sum_{x=-\infty}^{\infty}(\langle \eta_x \eta_0 \rangle_\rho - \rho^2)$ と書け，統計力学的意味を持つ量（圧縮率，*compressibility*）に対応している.） □

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

次の補題により拡散係数 $D(\rho)$ は一様に正かつ有界であることがわかる.

補題 1 $c = c_{0,1}$ とする. $D(\rho)$ は次の不等式を満たす.

$$\frac{2\rho(1-\rho)}{\langle(\eta_1-\eta_0)^2/c\rangle_\rho} \le D(\rho) \le \frac{\langle(\eta_1-\eta_0)^2 c\rangle_\rho}{2\rho(1-\rho)}$$

[証明] $\hat{c}(\rho)$ の定義式で $F=0$ ととれば明らかに

$$D(\rho) = \frac{\hat{c}(\rho)}{2\rho(1-\rho)} \le \frac{\langle(\eta_1-\eta_0)^2 c\rangle_\rho}{2\rho(1-\rho)}$$

だから, $D(\rho)$ の上からの評価が得られる. 一方 $F = F(\eta_{-n},\ldots,\eta_n)$ とすると, $\eta_{x+1}-\eta_x = -\frac{1}{2}\pi_{x,x+1}(\eta_{x+1}-\eta_x)$ に注意して,

$$\begin{aligned}
\left\langle(\eta_1-\eta_0)\pi_{0,1}\sum_{x=-n}^{n+1}\tau_x F\right\rangle_\rho &= -2\left\langle(\eta_1-\eta_0)\sum_{x=-n}^{n+1}\tau_x F\right\rangle_\rho \\
&= -2\sum_{x=-n-1}^{n}\langle(\eta_{x+1}-\eta_x)F\rangle_\rho \\
&= -2\{\langle\eta_{n+1}F\rangle_\rho - \langle\eta_{-n-1}F\rangle_\rho\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
2\rho(1-\rho) = \langle(\eta_1-\eta_0)^2\rangle_\rho &= \langle(\eta_1-\eta_0)\{(\eta_1-\eta_0)-\pi_{0,1}\sum_x\tau_x F\}\rangle_\rho \\
&\le \langle(\eta_1-\eta_0)^2/c\rangle_\rho^{1/2}\langle\{(\eta_1-\eta_0)-\pi_{0,1}\sum_x\tau_x F\}c\rangle_\rho^{1/2}.
\end{aligned}$$

F は任意だから, $\hat{c}(\rho) \ge \dfrac{4\rho^2(1-\rho)^2}{\langle(\eta_1-\eta_0)^2/c\rangle_\rho}$ がわかり, $D(\rho)$ の下からの評価

$$D(\rho) = \frac{\hat{c}(\rho)}{2\rho(1-\rho)} \ge \frac{2\rho(1-\rho)}{\langle(\eta_1-\eta_0)^2/c\rangle_\rho}$$

が得られた. □

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第 3 章　勾配系

概要: 格子気体をモデルにして，Guo-Papanicolaou-Varadhan [GPV 88] の手法を紹介する．特に

- 勾配条件の役割
- 極限の流体力学的方程式の拡散係数と熱力学的等式
- compactness argument，非線型偏微分方程式の弱解の一意性
- エントロピー及びエントロピー生成率に基づく局所エルゴード定理，いわゆる 1-ブロック評価と 2-ブロック評価の証明

について述べ，飛躍率 $c_{x,x+1}$ が勾配条件を満たす場合に主定理 I を証明する．

3.1　流体力学的方程式の導出

前章で述べたように作用素 N^2L_N によって生成される Markov 過程 $\eta^N(t)=\{\eta_x^N(t); x\in\Gamma_N\}$ を考える．N^2 は時間変更によるものであった．$\eta^N(t)$ の質量分布:

$$\alpha_t^N(d\theta)=\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\eta_x^N(t)\delta_{\frac{x}{N}}(d\theta)\quad\in\ \mathcal{M}(\mathbf{T}),\quad t\geq 0 \tag{3.1}$$

の $N\to\infty$ としたときの漸近挙動を調べることが主要な目標である．

そこでテスト関数 $J\in C^\infty(\mathbf{T})$ をとり，ランダムな測度 α_t^N による J の積分 $\langle\alpha_t^N, J\rangle$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

を考えよう．それは $\mathcal{X}_N$ 上の関数

$$f(\eta) = f^N(\eta; J) := \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} \eta_x J(\frac{x}{N}) , \quad \eta \in \mathcal{X}_N$$

を用いて

$$\langle \alpha_t^N, J \rangle = f(\eta_t^N)$$

と表すことができる．$\langle \alpha_t^N, J \rangle$ の時間変化を調べるために，伊藤の公式を用いてその確率微分を計算すれば

$$\langle \alpha_t^N, J \rangle = \langle \alpha_0^N, J \rangle + \int_0^t b^N(\eta_s^N)\, ds + M_t^N \tag{3.2}$$

が得られる．但し M_t^N はマルチンゲールで，ドリフト項は $b^N(\eta) := N^2 L_N f(\eta)$ により与えられる．

2 つの項 $M_t^N, b^N(\eta)$ それぞれについて，$N \to \infty$ での挙動を調べよう．

(i) マルチンゲール項について $\lim_{N\to\infty} E[(M_t^N)^2] = 0$ が成立することを示そう．そのために

$$\frac{d}{dt}\langle M^N \rangle_t = \Gamma(\eta_t^N)$$

に注意する．ここで $\langle M^N \rangle_t$ は M_t^N の 2 次変分過程で，$\Gamma(\eta) = \Gamma^N(\eta)$ は，いわゆるカレドシャンである：

$$\begin{aligned}
\Gamma(\eta) &:= N^2 L_N f^2 - 2f \cdot N^2 L_N f \\
&= N^2 \sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}[(f + \pi_{x,x+1} f)^2 - f^2] - 2f N^2 \sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\, \pi_{x,x+1} f \\
&= N^2 \sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\, (\pi_{x,x+1} f)^2
\end{aligned}$$

ところが

$$\begin{aligned}
\pi_{x,x+1} f(\eta) &= \frac{1}{N} \sum_{y=1}^{N} \{(\eta^{x,x+1})_y - \eta_y\} J(\frac{y}{N}) \\
&= \frac{1}{N} \{J(\frac{x+1}{N}) - J(\frac{x}{N})\}(\eta_x - \eta_{x+1})
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

であって

$$J(\frac{x+1}{N}) - J(\frac{x}{N}) \quad = \quad \frac{1}{N}J'(\frac{x}{N}) + O(N^{-2})$$

だから

$$|\pi_{x,x+1}f(\eta)| \le \frac{C_1}{N^2}$$

がわかる．したがって

$$|\Gamma(\eta)| \le \frac{C_2}{N}$$

であり $\lim_{N\to\infty} E[(M_t^N)^2] = 0$ が示された．

(ii) 一方ドリフト項 $b^N(\eta)$ は，時間変更 N^2 を導入したために見かけ上は $O(N^2)$ である．この見かけ上の発散量を吸収して，$b^N(\eta)$ が実際は $O(1)$ であるということを示したい．あるいは，より正確に述べれば，ドリフト項 $b^N(\eta)$ が $O(1)$ になるように時間変更は導入されねばならず，ここで対象としている可逆モデル (reversible model, symmetric model) では拡散型スケール変換，つまり時間変更 N^2 の下で考えるのが適当であることを示したい．一般の非対称モデル (asymmetric model)，つまり L_N を対称にする確率測度が存在しない場合，例えば粒子が平均的に左右どちらかの方向に流れるような場合には，双曲型スケール変換，つまり時間変更 N の下でドリフト項が $O(1)$ になることがわかる ([Re 91] 参照)．但し，非対称モデルでも粒子の流れの平均値が 0 のときは，やはり拡散型スケール変換が適切になる ([Xu 93])．

話が少し横にそれてしまったが，もとに戻って $b^N(\eta)$ を書きかえていこう：

$$\begin{aligned}
b^N(\eta) &= N^2 L_N f \\
&= N\sum_{x=1}^{N} L_N\eta_x \cdot J(\frac{x}{N}) \\
&= N\sum_{x=1}^{N} \{c_{x,x+1}(\eta_{x+1}-\eta_x) + c_{x-1,x}(\eta_{x-1}-\eta_x)\}\, J(\frac{x}{N}) \\
&= N\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}(\eta_x-\eta_{x+1})\left\{J(\frac{x+1}{N}) - J(\frac{x}{N})\right\} \\
&= \sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}(\eta_x-\eta_{x+1})\cdot \nabla_N J(\frac{x}{N}) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

但し

$$\nabla_N J(\frac{x}{N}) := N\{J(\frac{x+1}{N}) - J(\frac{x}{N})\}$$

とおいた．ところが $\nabla_N J(\frac{x}{N}) = J'(\frac{x}{N}) + O(N^{-1})$ だから，最後の式は見かけ上 $O(N)$ である．このように，モデルの対称性・非対称性にかかわらず 1 つの N は吸収できる．

もう 1 つの N を吸収すること，Varadhan の言葉を借りれば“How to eat another N?”ということになるが，そのためにはモデルの“ある意味の対称性”が必要になる．(3.3) の右辺で最後に現れた量 $c_{x,x+1}(\eta_x - \eta_{x+1})$ は，ボンド $\langle x, x+1\rangle$ 上のカレント (current) とよばれる．$c_{x,x+1}\eta_x$ は格子点 x から格子点 $x+1$ への飛躍率で，$c_{x,x+1}\eta_{x+1}$ は逆に $x+1$ から x への飛躍率である．したがって，両者の差 $c_{x,x+1}(\eta_x - \eta_{x+1})$ はボンド $\langle x, x+1\rangle$ 上の流れを表すことになる．後で示すように $N \to \infty$ とするとき，いわゆる局所エルゴード定理が成立して，(3.3) の和 $\sum_{x=1}^N$ の中の量は局所的に平衡状態による平均値で置きかえてよいことがわかる．ところが，平衡状態，特に今考えているモデルでは Bernoulli 測度 $\{\nu_\rho\}_{\rho\in[0,1]}$ であるが，それらに関するカレントの平均値は

$$E^{\nu_\rho}[c_{x,x+1}(\eta_x - \eta_{x+1})] = 0, \qquad {}^\forall\rho \in [0,1] \tag{3.4}$$

である．というのは $c_{x,x+1}$ は η_x, η_{x+1} によらぬから，ν_ρ の下で $c_{x,x+1}$ と $\eta_x - \eta_{x+1}$ は独立であり，しかも $E^{\nu_\rho}[(\eta_x - \eta_{x+1})] = 0$ だからである．(3.4) は平衡状態においてカレントの平均値が 0 であるという一種の対称性を表す．したがって，和 (3.3) は漸近的に $0 \times \infty$ と考えられ，$c \equiv 1/2$ の時の結果（2.1 節の演習 1）から類推してドリフト項 $b^N(\eta)$ が $O(1)$ になる可能性があることが，見てとれる．ここではまず，飛躍率 $c(\eta) := c_{0,1}(\eta)$ あるいは正確にはカレント $c(\eta)(\eta_0 - \eta_1)$ が，勾配条件と呼ばれる次の条件を満たすと仮定して話を進めよう．一般の非勾配型モデルについても，和 (3.3) が $N \to \infty$ のとき収束することがわかるのであるが，それは次章以降で述べることにしたい．

勾配条件 (gradient condition): $\quad {}^\exists h(\eta) \in C_0(\mathcal{X}) \quad \text{s.t.} \quad c(\eta)(\eta_0 - \eta_1) = h - \tau_1 h$

勾配条件をみたす例は，この節の最後で述べる．勾配条件を仮定して，$b^N(\eta)$ を更に

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

書きかえよう：

$$\begin{aligned} b^N(\eta) &= \sum_{x=1}^{N}(\tau_x h - \tau_{x+1}h)\cdot\nabla_N J(\frac{x}{N}) \\ &= \sum_{x=1}^{N}\tau_x h\cdot\left\{\nabla_N J(\frac{x}{N}) - \nabla_N J(\frac{x-1}{N})\right\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\tau_x h\cdot\Delta_N J(\frac{x}{N}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

但し Δ_N は，格子上のスケール変換された2階の差分作用素

$$\Delta_N J(\frac{x}{N}) := N^2\left\{J(\frac{x+1}{N}) - 2J(\frac{x}{N}) + J(\frac{x-1}{N})\right\}$$

である．したがって

$$b^N(\eta) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\tau_x h(\eta)\cdot J''(\frac{x}{N}) + O(\frac{1}{N}) \tag{3.6}$$

となり，$b^N(\eta)$ は $O(1)$ であることが示された．勾配条件の下では N^2 が吸収できることがわかった．

♠ 流体力学的方程式の発見的導出:

以上の計算を基に，流体力学的方程式を発見的に導出してみよう．(3.6) の右辺は α_t^N で表現されていないので，$N\to\infty$ とした極限で α_t^N が収束したとしても，極限 α_t に対する閉じた方程式が直ちに得られる訳ではない．

演習 1 川崎力学 *(Kawasaki dynamics)*，つまり $c\equiv 1/2$ のときは $h(\eta)=\frac{1}{2}\eta_0$ ととれ

$$b^N(\eta_t^N) = \frac{1}{2}\langle\alpha_t^N, J''\rangle + O(\frac{1}{N})$$

となり，$O(N^{-1})$ の誤差を除き方程式は α_t^N に関し閉じている．したがって，極限で（線形）熱方程式 *(2.1)* を得る． □

そこで一般の場合にも漸近的に，(3.6) の右辺が α_t^N で表現できることを示す必要がある．そのために，次の様な物理的にもっともらしい主張が成立していると考える:

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

局所平衡状態 (local equilibrium states): 質量分布密度プロフィールと呼ばれる関数 $\rho(t,\theta) \in [0,1]$, $t>0$, $\theta \in \mathbf{T}$ が存在して，$N \to \infty$ のとき漸近的に

$$\{\eta^N_{x+y}(t)\}_{y\in\mathrm{Z}} \text{の } \mathcal{X} \text{上の分布} \quad \sim \quad \nu_{\rho(\mathrm{t},\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{N}})}, \quad {}^\forall \mathrm{x} \in \Gamma_\mathrm{N},\ {}^\forall \mathrm{t} > 0$$

とふるまう．但し ν_ρ は平均値 ρ の $\mathcal{X}$ 上の Bernoulli 測度である． □

この主張は，N^2 という長時間スケールの後に系は平衡状態，つまり $\{\nu_\rho\}_{\rho\in[0,1]}$ のうちのどれかに到達すると考えられるので，もっともらしい．空間的，及び時間的なエルゴード性 (大数の法則, LLN) により，微視的な変数の大規模な和は平均化されると期待できるから，ドリフト項は

$$\begin{aligned} b^N(\eta^N_t) \quad &\overset{LLN}{\sim} \quad \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \langle h\rangle_{\rho(t,\frac{x}{N})} J''(\frac{x}{N}) \\ &\longrightarrow \quad \int_{\mathbf{T}} \langle h\rangle_{\rho(t,\theta)} J''(\theta)\, d\theta, \qquad N\to\infty \end{aligned}$$

とふるまうであろう．但し

$$\langle h\rangle_\rho = \langle h\rangle(\rho) := E^{\nu_\rho}[h] \tag{3.7}$$

である．同様に

$$\begin{aligned} \langle \alpha^N_t, J\rangle \quad &= \quad \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \eta^N_x(t) J(\frac{x}{N}) \\ &\sim \quad \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \langle \eta_0\rangle_{\rho(t,\frac{x}{N})} J(\frac{x}{N}) \\ &\to \quad \int_{\mathbf{T}} \rho(t,\theta) J(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

となることが期待されるので，質量分布密度プロフィール $\rho(t,\theta)$ いいかえれば α^N_t の極限分布密度は，閉じた方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbf{T}} \rho(t,\theta)J(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbf{T}} P(\rho(t,\theta))J''(\theta)\, d\theta, \qquad {}^\forall J \in C^\infty(\mathbf{T}) \tag{3.8}$$

をみたすと予想される．ここで

$$P(\rho) := \langle h\rangle_\rho$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

とおいた．すなわち，$\rho(t,\theta)$ に対する非線形偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}P(\rho(t,\theta)) \tag{3.9}$$

が得られる．(3.8) は (3.9) の弱形 (weak form) であることに注意されたい．

拡散係数: (3.9) の右辺は

$$\frac{\partial}{\partial \theta}P'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

と書きかえられるから

$$D(\rho) := P'(\rho)$$

が方程式 (3.9) の拡散係数である．

熱力学的等式 (thermodynamic identity): 平衡状態 ν_ρ に関する部分積分（部分和）の公式等を通して得られる（平衡）統計力学的な関係式をいう．拡散係数は

$$D(\rho) = \frac{1}{2\chi(\rho)}\langle c(\eta)(\eta_0 - \eta_1)^2\rangle_\rho \tag{3.10}$$

と変形することができる．但し $\chi(\rho)$ は圧縮率 (compressibility) とよばれる量で

$$\chi(\rho) := \sum_{x=-\infty}^{\infty}\left(\langle \eta_x\eta_0\rangle_\rho - \langle \eta_x\rangle_\rho\langle \eta_0\rangle_\rho\right) = \rho - \rho^2$$

と定義される．ν_ρ が一般の Gibbs 分布の場合を含んだ (3.10) の証明は，[FHU 91] p.249 にあるので参照していただきたい．

注意 1 *(i) (3.10)* から，特に $P'(\rho) \geq 0$ がわかる *(*拡散係数の非負性*)*.
(ii) 一般の非勾配型の場合に $D(\rho)$ を与える変分公式 *(2.3)-(2.6)* がある．特に勾配型の場合には，この変分公式において $F=0$ で最小値がとられることがわかる．
(iii) 拡散係数 $D(\rho)$ を系の時間発展 *(dynamics)* を用いて，カレント-カレント相関関数の時空和として表現する公式は古くから知られ，*Green-*久保の公式とよばれている．*[S 91] p.180* では，*Green-*久保の公式と，上述の変分公式の同値性を述べている．特に勾配型の場合には，*Green-*久保の公式で時間発展により記述される *dynamic part* は消え，ν_ρ に関する平均量つまり *static part* のみで $D(\rho)$ が表現できる．それが公式 *(3.10)* に他ならない．□

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

以下の目標は，局所平衡状態の実現を示して，(3.9) を数学的に厳密に導くことである．証明に入る前に，勾配条件を満たすような例を挙げておこう．

例 1 *([FHU 91], [Sp 91, p.182])* $c(\eta) = 1 + \alpha(\eta_{-1} + \eta_2)$ は，勾配条件及び *Bernoulli* 測度に関する詳細釣り合い条件 *(detailed balance condition)* つまり *2.2* 節の条件 *4* を満たす．但し $c(\eta) > 0, {}^\forall\eta$ であるために $\alpha > -1/2$ を仮定する．この飛躍率 $c(\eta)$ に対して

$$h(\eta) = (\alpha+1)\eta_0 + \alpha(\eta_{-1} - \eta_0)(\eta_0 - \eta_1) \quad \in \ C_0(\mathcal{X})$$

ととれば

$$c = h - \tau_1 h$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} P(\rho) &= \langle h \rangle_\rho \\ &= (\alpha+1)\rho + \alpha\langle \eta_{-1}\eta_0 - \eta_{-1}\eta_1 - {\eta_0}^2 + \eta_0\eta_1 \rangle_\rho \\ &= \rho + \alpha\rho^2 \end{aligned}$$

故に，拡散係数は

$$D(\rho) = 1 + 2\alpha\rho$$

である．特に *(3.9)* は，非線形方程式であることがわかる．

この例は，多次元化可能である．実際，ボンド $\langle x, x+e_k \rangle$ 上の飛躍率を

$$c_{x,x+e_k}(\eta) = 1 + \alpha_k(\eta_{x-e_k} + \eta_{x+2e_k}), \qquad \alpha_k > -1/2, \quad 1 \le k \le d$$

とする．但し e_k は k 方向の単位ベクトルである．このとき

$$h = (h_k)_{k=1}^d = \{(\alpha_k+1)\eta_0 + \alpha_k(\eta_{-e_k} - \eta_0)(\eta_0 - \eta_{e_k})\}_{k=1}^d$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

ととれば

$$c_{0,e_k}(\eta_0 - \eta_{e_k}) = h_k - \tau_{e_k} h_k$$

と書ける．したがって，極限の非線形偏微分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\theta) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2}(\rho + \alpha_k \rho^2)(t,\theta), \qquad \theta \in \mathbf{T}^d := \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$$

となる． □

3.2 局所エルゴード定理の定式化と流体力学的方程式の厳密な導出

前節では局所平衡状態の実現を仮定して，極限の巨視的質量分布密度に対する流体力学的方程式を発見的に導いた．そのための主要なアイデアは，微視的な変数の和を，極限の質量分布密度によって定まる平衡状態に関する平均値によって置きかえることにあった．本節では，そのような置きかえを局所エルゴード定理として定式化し，非線形拡散方程式 (3.9) を数学的に厳密に導くことにしよう．

上で述べたように (3.5) の形に書きかえられたドリフト項 $b^N(\eta)$ は，巨視的には狭い領域であっても微視的に十分広い空間であれば，その上の和に対して大数の法則が働き，和は平均値で置きかえられるものと期待される．そこで，テスト関数 J の滑らかさにも注意して，和 (3.5) を次のように書き直す．

$$\begin{aligned} b^N(\eta) &= \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \tau_x h(\eta)\cdot J''(\frac{x}{N}) + O(\frac{1}{N}) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \bar{h}_{x,\varepsilon N}(\eta)\cdot J''(\frac{x}{N}) + O(\varepsilon) + O(\frac{1}{N}) \qquad (3.11) \end{aligned}$$

但し

$$\bar{h}_{x,K} := \frac{1}{2K+1}\sum_{y:|x-y|\le K} \tau_y h$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

は格子点 x を中心とし，一辺の長さが $2K+1$ のブロックにおける $\tau_y h$ の見本平均値 (sample average) である．$\bar{h}_{x,\varepsilon N}$ は，巨視的には幅が 2ε と狭い領域だが，微視的には幅 $2\varepsilon N$ の広い領域での見本平均値である．したがって $N \to \infty$ とするとき，大数の法則が成立し，$\bar{h}_{x,\varepsilon N}$ はその局所平衡状態に関する平均値で置きかえられると予想できる．この主張を正確に定式化しよう．

定理 A (時空平均測度 (space-time averaged measure) に対する局所エルゴード定理)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{N \to \infty} E\left[\int_0^t \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} |\bar{h}_{x,\varepsilon N}(\eta_s^N) - \langle h \rangle(\bar{\eta}_{x,\varepsilon N}(\eta_s^N))| ds\right] = 0$$

但し $\langle h \rangle(\rho)$ は (3.7) で定義された h の ν_ρ に関する平均値で，$\bar{\eta}_{x,\varepsilon N}$ は変数 η_y の見本平均値:

$$\bar{\eta}_{x,\varepsilon N} := \frac{1}{2\varepsilon N + 1} \sum_{y:|x-y| \le \varepsilon N} \eta_y = \langle \alpha^N, \frac{N}{2\varepsilon N + 1} 1_{[\frac{x}{N}-\varepsilon, \frac{x}{N}+\varepsilon]}(\theta) \rangle$$

である．$\bar{\eta}_{x,\varepsilon N}$ は局所見本分布密度 (local sample density) ということがある． □

定理 A では局所平衡状態は，見本分布密度を用いて決定されていることに注意されたい．

♠ 非線形拡散方程式 (3.9) の導出:

定理 A の証明は次節以降で与えることにして，ここでは定理 A から非線形偏微分方程式 (3.9) が導かれることを示そう．そのために，次の補題を用意する．

補題 1 *(i) Markov* 過程 $\eta^N(t)$ の質量分布 $\alpha_t^N, t \in [0,T]$ が定める $D([0,T], \mathcal{M}(\mathbf{T}))$ 上の分布を Q^N とすれば，$\{Q^N\}_N$ は緊密 *(tight)* である．

(ii) $\{Q^N\}_N$ の $N \to \infty$ としたときの任意の極限 Q に対し，$Q(C([0,T], \mathcal{M}(\mathbf{T}))) = 1$ が成立する．

(iii) 更に $Q\{\alpha_t(d\theta) = {}^{\exists}\rho(t,\theta)d\theta,\ 0 \le \rho(t,\theta) \le 1 \text{ a.e.}\theta,\ \text{for } {}^{\forall}t > 0\} = 1$ である．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

[証明] (i) 前節の (3.2) 及び，マルチンゲール M_t^N に対する計算 §3.1 (i) とドリフト項 $b^N(\eta)$ に対する (3.5) から，各 $J \in C^\infty(\mathbf{T})$ に対し，

$$E^{Q^N}[(\langle \alpha_t, J\rangle - \langle \alpha_s, J\rangle)^2 | \mathcal{F}_s^N] \le C(t-s)$$

がわかる．したがって (i) は容易に示される．実際，例えば [FV 79] にある結果: 各 $J \in C^\infty(\mathbf{T})$ に対し $\{\langle \alpha_t^N, J\rangle\}_N$ が緊密ならば $\{\alpha_t^N\}_N$ の $D([0,T], \mathcal{M}(\mathbf{T}))$ 上の緊密性が従うことに注意すればよい．

(ii) $\langle \alpha_t, J\rangle$ のジャンプの大きさ $\le 2\|J\|_\infty N^{-1} \to 0$ による．

(iii) 部分列 $\{Q^{N'}\}$ が Q に収束しているとする．滑らかなテスト関数 $J = J(t,\theta) \ge 0$ に対し

$$0 \le \int_0^T \langle \alpha_t^N, J(t,\cdot)\rangle dt \le \int_0^T \frac{1}{N}\sum_{x=1}^N J(t,x) dt$$

であるから

$$0 \le \int_0^T \int_{\mathbf{T}} \rho(t,\theta) J(t,\theta) d\theta dt \le \int_0^T \int_{\mathbf{T}} \overset{\ell}{\cancel{\rho(t,\theta)}} J(t,\theta) d\theta dt \quad \text{a.s.}(Q)$$

file は訂正ズミ

したがって $0 \le \rho(t,\theta) \le 1$ a.s.(Q). □

さて本題即ち勾配条件を仮定した上での主定理 I の証明に戻ろう．定理 A が証明されたとすると，(3.11) から

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{N\to\infty} E\left[\int_0^t \left| b^N(\eta_s^N) - \frac{1}{N}\sum_{x=1}^N \langle h\rangle(\bar\eta_{x,\varepsilon N}(\eta_s^N)) \cdot J''(\frac{x}{N})\right| ds\right] = 0$$

が得られる．ところが，$\varepsilon > 0$ を固定して $\bar\eta_{x,\varepsilon N}(\eta_s^N) = \langle \alpha_s^N, \frac{1}{2\varepsilon} 1_{[\frac{x}{N}-\varepsilon, \frac{x}{N}+\varepsilon]}\rangle + O(N^{-1})$ だから，(3.2) 及び $\langle h\rangle = P$ に注意して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{N\to\infty} E^{Q^N}\left[\left|\langle \alpha_t, J\rangle - \langle \alpha_0, J\rangle - \int_0^t \frac{1}{N}\sum_{x=1}^N P(\langle \alpha_s, \frac{1}{2\varepsilon} 1_{[\frac{x}{N}-\varepsilon, \frac{x}{N}+\varepsilon]}\rangle) \cdot J''(\frac{x}{N}) ds\right|\right] = 0$$

がわかる．主定理 I では初期条件について $\langle \alpha_0^N, J\rangle \to \langle \rho_0, J\rangle$ (確率収束) と仮定したから，補題 1 (i) より，$\{Q^N\}$ の任意の極限 Q に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E^Q\left[\left|\langle \alpha_t, J\rangle - \langle \rho_0, J\rangle - \int_0^t ds \int_{\mathbf{T}} P(\langle \alpha_s, \frac{1}{2\varepsilon} 1_{[\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon]}\rangle) J''(\theta) d\theta\right|\right] = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

が $^\forall J \in C^\infty(\mathbf{T})$, $^\forall t$ (高々可算個を除く) について成立する (cf. [EK 86]). ところが $\alpha_s(d\theta) = {}^\exists\rho(s,\theta)d\theta, Q$-a.s. だから$\varepsilon \to 0$ のとき

$$\int_{\mathbf{T}} P(\langle \alpha_s, \frac{1}{2\varepsilon}1_{[\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon]}\rangle)J''(\theta)d\theta \longrightarrow \int_{\mathbf{T}} P(\rho(s,\theta))J''(\theta)d\theta$$

よって, Q-a.s. に

$$\langle \rho_t, J\rangle = \langle \rho_0, J\rangle + \int_0^t ds \int_{\mathbf{T}} P(\rho(s,\theta))J''(\theta)\,d\theta, \quad {}^\forall J \in C^\infty(\mathbf{T}),\ {}^\forall t \ge 0$$

が成立する. つまり, $\rho(t,\theta)$ は (3.8) を満たす. いいかえれば, $\rho(t,\theta)$ は非線形偏微分方程式 (3.9) の弱解であることがわかった. ところが, 次に示すように (3.9) の弱解は一意である. したがって Q も一意的に定まる. 以上の考察から, 部分列 N' をとることなく $Q^N \Longrightarrow Q$ であって, 極限 Q の下で $\alpha_t = \rho(t,\theta)\,d\theta$ は, 初期条件 ρ_0 をもつ非線形拡散方程式 (3.9) の一意的な弱解であることがわかった. 故に, 勾配条件が満たされるとき, 主定理 I は証明された.

- P の非減少性と, 拡散係数 $D(\rho) := P'(\rho)$ の非負性は同値である. この条件は放物型方程式の初期値問題が解けるために必要であり, 弱解の一意性を保証するために十分である.

- 解の存在は, 流体力学極限により証明された.

- 一意性の証明の基本的なアイデアを説明しておく (これはエネルギー不等式の方法と呼ばれる). ρ^1, ρ^2 を同じ初期値をもつ二つの解とし,

$$w_t^i(\theta) = \nabla^{-1}\rho_t^i(\theta), \quad i = 1,2$$

とおく. このとき, ρ^1, ρ^2 が適当な正則性を持てば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\| w_t^1 - w_t^2 \|_{L^2(\mathbf{T})}^2 &= 2\langle w_t^1 - w_t^2, \frac{d}{dt}(w_t^1 - w_t^2)\rangle \\ &= 2\langle w_t^1 - w_t^2, \nabla(P(\rho_t^1) - P(\rho_t^2))\rangle \\ &= -2\langle \rho_t^1 - \rho_t^2, P(\rho_t^1) - P(\rho_t^2)\rangle.\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

P は非減少なので右辺は非正であり

$$\frac{d}{dt} \| w_t^1 - w_t^2 \|_{L^2(\mathbf{T})}^2 \leq 0$$

がわかる．ところが初期値は同じ：$w_0^1 = w_0^2$ なので

$$w_t^1 = w_t^2 \text{ for } {}^\forall t \geq 0$$

が得られる．ρ^1, ρ^2 が弱解であっても一様に有界であれば，軟化子により正則化することで上の手続きは容易に正当化できる（[FHU 91]）．より一般の場合の一意性の証明が 8.5 節で与えられる．

3.3 エントロピーとエントロピー生成率

前節では局所エルゴード定理 (定理 A) の証明を先送りした．本節ではその証明の準備として，エントロピー及びエントロピー生成率とよばれる 2 つの量を導入する．$\mathcal{X}_N$ 上の確率測度全体のなす空間を $\mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$ と表すことにする．

定義 2 $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$ に対して，エントロピー *(entropy)* $H^N(\mu)$ とエントロピー生成率 *(entropy production rate)* $I^N(\mu)$ を，それぞれ次のように定義する：

$$\begin{aligned} H^N(\mu) &:= \int_{\mathcal{X}_N} \varphi \log \varphi d\nu^N \\ I^N(\mu) &= \mathcal{D}^N(\sqrt{\varphi}) := -\int_{\mathcal{X}_N} \sqrt{\varphi} L_N \sqrt{\varphi}\, d\nu^N \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}_N} \sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1} \left(\pi_{x,x+1}\sqrt{\varphi}\right)^2 d\nu^N \end{aligned}$$

但し $\nu^N = \nu_{1/2}^N$ は $\mathcal{X}_N$ 上の $\frac{1}{2}$-*Bernoulli* 測度で

$$\varphi(\eta) := \frac{d\mu(\eta)}{d\nu^N(\eta)} = \frac{\mu(\eta)}{\nu^N(\eta)}$$

である． □

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

演習 2 $^\forall\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$ に対して，次を示せ：

$$0 \le H^N(\mu) \le N\log 2$$

□

[解答] エントロピーが非負であることは，Jensen の不等式を使えばよい．上からの評価を示そう：

$$\begin{aligned} H^N(\mu) &= \sum_{\eta\in\mathcal{X}_N} \varphi(\eta)\log\varphi(\eta)\nu^N(\eta) \\ &= \sum_{\eta\in\mathcal{X}_N} \mu(\eta)\{\log\mu(\eta) - \log\nu^N(\eta)\} \end{aligned}$$

であるが，任意の $\eta(\in\mathcal{X}_N)$ に対し，$\nu^N(\eta) = \frac{1}{2^N}$，$\log\mu(\eta) \le 0$ が成り立っているので

$$H^N(\mu) \le N\log 2 \sum_{\eta\in\mathcal{X}_N} \mu(\eta) = N\log 2$$

が得られる． □

$I^N(\mu)$ は作用素 L_N に対する Dirichlet 形式であるが，次の補題が示すように，エントロピーの時間微分として現れるのでエントロピー生成率とよばれる．

補題 3 初期分布 μ_0^N をもつ N^2L_N-*Markov* 過程 $\eta^N(t)$ の $\mathcal{X}_N$ 上の分布を μ_t^N とすると，

$$\frac{d}{dt}H^N(\mu_t^N) \le -4N^2I^N(\mu_t^N)\ (\le 0)$$

[証明] $d\mu_t^N = \varphi_t d\nu^N$ とすれば，L_N は ν^N について対称だから φ_t は Kolmogorov の前進方程式

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = L_N\varphi_t$$

を満たす．したがって

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{X}_N}\varphi_t\log\varphi_t d\nu^N = \int_{\mathcal{X}_N}\frac{d}{dt}\varphi_t\cdot\log\varphi_t d\nu^N + \int_{\mathcal{X}_N}\frac{d}{dt}\varphi_t d\nu^N$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{X}_N} L_N\varphi_t \log\varphi_t d\nu^N \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_N}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\left(\pi_{x,x+1}\varphi_t\right)\left(\pi_{x,x+1}\log\varphi_t\right)d\nu^N \\
&\leq -4N^2 I^N(\mu_t^N)
\end{aligned}
$$

第2の等号では $\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{X}_N}\varphi_t d\nu^N = 0$ を用い，一方，最後の不等号では

$$(a-b)(\log a - \log b) \geq 4(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, \qquad {}^\forall a, b > 0$$

を用いた. □

演習 3 $I^N(\mu)$ は μ の凸関数である．すなわち $0 \leq^\forall a_1, a_2 \leq 1$ *s.t.* $a_1 + a_2 = 1$ に対して

$$I^N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2) \leq a_1 I^N(\mu_1) + a_2 I^N(\mu_2)$$

[解答] $\varphi_i := a_i(d\mu_i/d\nu^N)$, $i = 1, 2$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
I^N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2) &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_N}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\left(\pi_{x,x+1}\sqrt{\varphi_1+\varphi_2}\right)^2 d\nu^N \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_N}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\left\{\left(\pi_{x,x+1}\sqrt{\varphi_1}\right)^2 + \left(\pi_{x,x+1}\sqrt{\varphi_2}\right)^2\right\} d\nu^N \\
&= a_1 I^N(\mu_1) + a_2 I^N(\mu_2)
\end{aligned}
$$

ここで

$$\left(\sqrt{a'+b'} - \sqrt{a+b}\right)^2 \leq \left(\sqrt{a'}-\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b'}-\sqrt{b}\right)^2, \qquad {}^\forall a, a', b, b' > 0$$

を用いた. □

系 4 $\{\mu_t^N\}_{0\leq t\leq T}$ の時空平均 $\tilde{\mu}^N$ を

$$\tilde{\mu}^N := \frac{1}{NT}\sum_{x=1}^{N}\int_0^T \mu_t^N \circ \tau_x^{-1}\, dt$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

で定めれば，次の不等式が成立する：

$$I^N(\tilde{\mu}^N) \le \frac{C}{N}, \qquad C = \frac{\log 2}{2T}$$

[証明] まず $\{\mu_t^N\}_{0\le t\le T}$ の時間平均 $\bar{\mu}^N := \frac{1}{T}\int_0^T \mu_t^N\,dt$ を考える．補題 3を用いれば

$$4N^2\int_0^T I^N(\mu_t^N)dt \le -H^N(\mu_T^N) + H^N(\mu_0^N)$$

ところが，演習 3 より I^N は凸関数だから，演習 2 にも注意して

$$\begin{aligned} 4N^2TI^N(\bar{\mu}^N) &\le 4N^2\int_0^T I^N(\mu_t^N)dt \\ &\le H^N(\mu_0^N) \le N\log 2 \end{aligned}$$

したがって

$$I^N(\bar{\mu}^N) \le \frac{\log 2}{2NT}.$$

$I^N(\tilde{\mu}^N)$ については I^N の凸性を用いればよい． □

3.4 局所エルゴード定理の証明

前節の準備の下で，定理 A の証明を与えよう．但しここからは，飛躍率 $c(\eta)$ に対する勾配条件は仮定しない．つまり，第 2 章で述べた条件 1 - 4 のみを仮定する．次章以降で，一般の非勾配型モデルを扱うが，その場合にも得られた結果を適用したいからである．$T>0$ を固定して，$\eta^N(t)$ の $\mathcal{X}_N$ 上の分布 μ_t^N の時空平均を考える：

$$\tilde{\mu}^N := \frac{1}{NT}\sum_{x=1}^N \int_0^T \mu_t^N \circ \tau_x^{-1}\,dt \;\in\; \mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$$

定理 A を示すには，次の二つの定理を示せばよい．

定理 5 *(1-ブロック評価)* $^\forall f \in C_0(\mathcal{X})$ に対し

$$\lim_{K\to\infty}\limsup_{N\to\infty} E^{\tilde{\mu}^N}[\,|\,\bar{f}_{0,K} - \langle f\rangle(\bar{\eta}_{0,K})\,|\,] = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

この定理を局所エルゴード定理ということもある.

定理 6 *(2-ブロック評価)*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{K\to\infty}\lim_{L\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\sup_{L\le|z|\le\varepsilon N}E^{\tilde\mu^N}[\,|\,\bar\eta_{0,K}-\bar\eta_{z,K}\,|\,]=0$$

まず，この2つの定理から定理 A が導かれることを簡単にみておこう．$\varepsilon>0$ は固定して，$K\ll N$ とする．このとき，一辺の長さ $2N\varepsilon+1$ のブロックを，一辺の長さ $2K+1$ の小さなブロック達 ((K) ブロックという) に分けていき，定理6を用いれば，分布 $\tilde\mu^N$ の下で ($N\to\infty, L\to\infty, K\to\infty, \varepsilon\downarrow 0$ の順に極限をとるとき)

$$\bar\eta_{x,\varepsilon N}\sim\bar\eta_{y,K}\qquad\text{if}\qquad(L\le)\ |x-y|\le\varepsilon N$$

と近似できることがわかる．ところが，ν_ρ は $\rho\in[0,1]$ について連続だから $\langle h\rangle(\rho)(:=\langle h\rangle_\rho)$ は$\rho\in[0,1]$ について一様連続で，したがって

$$\langle h\rangle(\bar\eta_{x,\varepsilon N})\sim\langle h\rangle(\bar\eta_{y,K})\qquad\text{if}\qquad(L\le)\ |x-y|\le\varepsilon N$$

という置きかえが可能になる．一方 $\bar h_{x,\varepsilon N}$ も，やはり (K) ブロック達の上の和に分けていって，それぞれの (K) ブロックに対しては定理5を応用すれば，定理 A が得られるのである．以下，本節では1-ブロック評価 (定理 5) の証明を与える．2-ブロック評価 (定理 6) は次節で証明する．

前節では $\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$ に対して，エントロピー生成率を考えた．しかし，ここでは $N\to\infty$ とする極限を考えるので，無限領域における分布に対して，エントロピー生成率を定義した方が都合がよい．但し，分布が無限領域上で定義されているというだけであって，エントロピー生成率自体は有界領域上のものを考える．無限領域上のエントロピー生成率は発散するからである．

いくつかの記号を導入しておこう．$\mathcal{X}:=\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ は無限領域 $\mathbf{Z}$ 上の粒子の配置空間，$\mathcal{P}(\mathcal{X})$ は $\mathcal{X}$ 上の確率測度全体のなす空間を表す．$\Lambda\subset\mathbf{Z}$ に対し $\mathcal{F}_\Lambda:=\sigma\{\eta_x|x\in\Lambda\}$ とおく．$\nu=\nu_{1/2}\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$ は $\mathcal{X}$ 上の平均値 $\frac12$ の Bernoulli 測度で，R は飛躍率 c の台の大き

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

さ (range, 第 2 章の条件 3 参照) とする．このとき $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, $K \geq 1$ に対して，μ の (K) ブロック上のエントロピー生成率を

$$I_K(\mu) \ := \ -\int_{\mathcal{X}} \sqrt{\varphi} L_K \sqrt{\varphi}\, d\nu$$

で定義する．但し

$$\begin{aligned} L_K &= L_{[-K,K]} := \sum_{x=-K}^{K-1} \pi_{x,x+1} \\ \varphi &:= \frac{d\mu|_{\mathcal{F}[-K-R,K+R]}}{d\nu|_{\mathcal{F}[-K-R,K+R]}} \end{aligned}$$

である．ここで $\mu|_{\mathcal{F}_\Lambda}$ は μ を $\mathcal{F}_\Lambda$ 上に制限して得られる確率測度を表す．また $-K \leq x < K$ に対し

$$I_{x,x+1}^{(K)}(\mu) := \frac{1}{2} \sum_{\eta \in \mathcal{X}_{[-K-R,K+R]}} c_{x,x+1}(\eta) \left(\pi_{x,x+1} \sqrt{\mu|_{\mathcal{F}[-K-R,K+R]}(\eta)} \right)^2$$

と置く，但し $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ に対し $\mathcal{X}_\Lambda := \{0,1\}^\Lambda$ であり，$c_{x,x+1}(\eta)$ はここでは $\mathcal{X}_{[-K-R,K+R]}$ 上の関数と考えている．

補題 7 *(i)* （I_K の変分表現）$I_K, I_{x,x+1}^{(K)}$ は次の表示をもつ：

$$\begin{aligned} I_K(\mu) &= \sup\left\{ -\int_{\mathcal{X}} \frac{L_K u}{u} d\mu \,\middle|\, u > 0, \mathcal{F}_{[-K-R,K+R]}\text{-可測} \right\}. \\ I_{x,x+1}^{(K)}(\mu) &= \sup\left\{ -\int_{\mathcal{X}} \frac{L_{x,x+1} u}{u} d\mu \,\middle|\, u > 0, \mathcal{F}_{[-K-R,K+R]}\text{-可測} \right\}, \qquad -K \leq x < K. \end{aligned}$$

(ii)
$$I_K(\mu) \ = \ \sum_{x=-K}^{K-1} I_{x,x+1}^{(K)}(\mu).$$

[証明] $\bar{\Lambda} = [-K-R, K+R]$ と置き，μ の $\mathcal{F}_{\bar{\Lambda}}$ への制限を μ_Λ と書く：

$$\mu_\Lambda := \mu|_{\mathcal{F}_{\bar{\Lambda}}}, \quad \bar{\Lambda} = [-K-R, K+R].$$

$\varphi(\eta) = \mu_\Lambda(\eta)/\nu_\Lambda(\eta)$ とすると

$$\begin{aligned} I_{x,x+1}^{(K)}(\mu) &= \frac{1}{2} \sum_{\eta \in \mathcal{X}_{\bar{\Lambda}}} c_{x,x+1}(\eta) \left(\pi_{x,x+1} \sqrt{\mu|_\Lambda(\eta)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}_{\bar{\Lambda}}} c_{x,x+1} \left(\pi_{x,x+1} \sqrt{\varphi} \right)^2 d\nu_\Lambda \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}} c_{x,x+1}\left(\pi_{x,x+1}\sqrt{\varphi}\right)^2 d\nu$$

ここで x について和をとれば (ii) が得られる．(i) を示すため $\mathcal{F}_{\bar{\Lambda}}$-可測な $u>0$ をとって

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{X}} \frac{L_{x,x+1}u}{u} d\mu &= -\int_{\mathcal{X}} \frac{\varphi}{u} L_{x,x+1} u d\nu \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}} c_{x,x+1}(\eta)\left\{\frac{\varphi(\eta^{x,x+1})}{u(\eta^{x,x+1})} - \frac{\varphi(\eta)}{u(\eta)}\right\}\left\{u(\eta^{x,x+1}) - u(\eta)\right\} d\nu \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}} c_{x,x+1}(\eta) \\
&\qquad \left[\varphi(\eta^{x,x+1}) - \left\{\frac{\varphi(\eta^{x,x+1})}{u(\eta^{x,x+1})}u(\eta) + \frac{\varphi(\eta)}{u(\eta)}u(\eta^{x,x+1})\right\} + \varphi(\eta)\right] d\nu.
\end{aligned}$$

相乗平均は相加平均を超えないから

$$\frac{\varphi(\eta^{x,x+1})}{u(\eta^{x,x+1})}u(\eta) + \frac{\varphi(\eta)}{u(\eta)}u(\eta^{x,x+1}) \geq 2\sqrt{\varphi(\eta^{x,x+1})\varphi(\eta)}.$$

従って

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{X}} \frac{\varphi}{u} L_{x,x+1} u d\nu &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}} c_{x,x+1}(\eta)\left\{\sqrt{\varphi(\eta^{x,x+1})} - \sqrt{\varphi(\eta)}\right\}^2 d\nu \\
&= I^{(K)}_{x,x+1}(\mu).
\end{aligned}$$

上で $u=\sqrt{\varphi}=\mathrm{const}\sqrt{\mu_\Lambda}$ とすれば等号が成立する．(ii) を考慮すればこれで (i) が証明されている． □

さて$\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$ に対し

$$I^N_{x,x+1}(\mu) := -\int_{\mathcal{X}_N} c_{x,x+1}(\sqrt{\varphi}\pi_{x,x+1}\sqrt{\varphi})d\nu^N \quad (\varphi = d\mu/d\nu^N).$$

と置くと上と同じ証明により

$$\begin{aligned}
I^N_{x,x+1}(\mu) &= \sum_{\eta} c_{x,x+1}(\eta)(\pi_{x,x+1}\sqrt{\mu}(\eta))^2 \\
&= \sup\left\{-\int_{\mathcal{X}_N} \frac{\pi_{x,x+1}u}{u} d\mu \,\middle|\, u>0 \text{ は } \mathcal{X}_N \text{上の関数}\right\}
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

を得る. $2K+2R<N$ であれば $I_K(\mu), I^{(K)}_{x,x+1}(\mu)$ 等は$\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$ に対しても 自然に定義できる.(必要なら$\mu^N\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$ は周期的に拡張して, $\mu^N\in\mathcal{P}(\mathcal{X})$ とみなす：つまり $\{\eta_x\}_{x\in\Gamma_N}$ を μ^N-分布した確率変数とするとき, それを x について周期的に拡張して得られる確率変数 $\{\eta_x\}_{x\in\mathbf{Z}}$ の分布を考える.) このとき補題 7(iii) より

$$I^{(K)}_{x,x+1}(\mu)\le I^N_{x,x+1}(\mu),\qquad -K\le x<K \tag{3.12}$$

を得る.

[定理 5 の証明] $1\le K(\ll N)$ を固定すれば

$$\begin{aligned} I_K(\tilde{\mu}^N) &= \sum_{x=-K}^{K-1} I^{(K)}_{x,x+1}(\tilde{\mu}^N) \\ &= \sum_{x=-K}^{K-1} I^N_{x,x+1}(\tilde{\mu}^N) \\ &= \frac{2K}{N} I_N(\tilde{\mu}^N) \le \frac{2CK}{N^2} \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \end{aligned}$$

ここで, 最初の等号は補題 7(ii) に, 次の不等号は (3.12) による；また第 2 の等号では $\tilde{\mu}^N$ のシフト不変性を, そして最後の評価には系 4をそれぞれ用いた. この評価は d 次元格子であっても, $I_N(\tilde{\mu}^N)=o(N^d)$ ならば基本的に同じであることを注意しておく. ここで N^d は周期格子の全体積である.

$\mathcal{X}$ はコンパクトだから $\{\tilde{\mu}^N\}_N$ が緊密であることは明らかで, その任意の極限 μ をとれば, 補題 7(i) を用いて I_K が下半連続であることがわかるので

$$I_K(\mu)\ =\ 0,\qquad {}^\forall K\ge 1$$

となる. ところが補題 7(ii) より, これは

$$\pi_{x,x+1}\mu|_{\mathcal{F}[-K-R,K+R]}\equiv 0,\ \ {}^\forall x\in[-K,K-1],{}^\forall K\ge 1$$

を意味する. いいかえれば, μ は交換可能測度 (exchangeable measure), つまり任意の座標の入れかえについて不変な測度であることがわかった. ところが, de Finetti の定理よ

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

り交換可能測度は Bernoulli 測度の重ね合わせであることが知られている．したがって，$\lambda \in \mathcal{P}([0,1])$ が存在して μ は

$$\mu(\cdot) = \int_0^1 \nu_\rho(\cdot)\,\lambda(d\rho)$$

と表現されることが示された．

注意 2 ここでは可逆測度が *Bernoulli* 測度，つまり独立な系になる場合のみを扱った．しかし，一般に相互作用 *(interaction)* をもつ場合には

交換可能測度 → カノニカルな *Gibbs* 測度 *(canonical Gibbs measure)*

Bernoulli 測度 → 大カノニカルな *Gibbs* 測度 *(grandcanonical Gibbs measure)*

と置きかえればよく，*de Finetti* の定理に相当するものは，統計的集団の同値性 *(equivalence of ensemble)* である．*([Ge 79] の Introduction, [FHU 91] 参照)* □

以上の考察により，$N \to \infty$ での $\tilde{\mu}^N$ の任意の極限は $\{\nu_\rho\}_{\rho\in[0,1]}$ の重ね合わせになるので，定理 5を示すためには結局

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{\rho\in[0,1]} E^{\nu_\rho}[\,|\,\bar{f}_{0,K} - \langle f\rangle(\bar{\eta}_{0,K})\,|\,] = 0$$

をいえば十分であることがわかる．ところが ν_ρ は独立な系だから，大数の法則により，$K \to \infty$ として

$$\begin{aligned} \bar{f}_{0,K} &\to \langle f\rangle(\rho), \qquad \nu_\rho\text{—a.e.} \\ \bar{\eta}_{0,K} &\to \rho, \qquad \nu_\rho\text{—a.e.} \end{aligned}$$

である．これらの収束が $\rho \in [0,1]$ について一様であることにも注意して，定理 5は示される．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

3.5 2-ブロック評価の証明

この節では 2-ブロック評価（定理 6 ）の証明を与える．1-ブロック評価の証明では，$\mu \in \mathcal{P}(X)$ が平衡状態であるためのには任意の区間 $[-K, K]$ に対して，$I_K(\mu) = 0$ となることが（必要）十分条件であることを用いた．2-ブロック評価の証明も基本的には同様の考え方による．但しここでは 2 つのブロック間で粒子のやりとりをするダイナミクスを導入し，対応する I-関数を計算することになる．

注意. 証明に入る前に 2-ブロック評価の関数解析的な意味を説明して置こう．定理 5 から容易に

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{K \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \int |\bar{\eta}_{0,K} - \bar{\eta}_{0,\varepsilon N}| d\tilde{\mu}^N = 0. \tag{3.13}$$

が導かれる．補題 1 から列 $(\alpha_t^N, t \in [0,T])_N$ は部分列にそって確率過程 $(\rho(t,\theta)d\theta, t \in [0,T])$ に収束する．簡単のため部分列を改めて α_t^N と書き，要点をわかりやすくするために $\rho(t,\theta)$ は最初からランダムでないと仮定しよう．点 $\theta \in [0,1]$ での微視的な見本密度関数

$$\rho^{N,K}(t,\theta) := \bar{\eta}_{x,K}(\eta_t^N), \quad \frac{x}{N} \le \theta < \frac{x+1}{N}$$

を導入すると，(3.13) 式は

$$\lim_{K \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \int_0^T dt \int_0^1 d\theta E[|\rho^{N,K}(t,\theta) - \rho(t,\theta)|] = 0 \tag{3.14}$$

と書くことができる．($(2\varepsilon)^{-1}\alpha_t^N((\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon)) \sim (2\varepsilon)^{-1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho(t,\theta+u)du \sim \rho(t,\theta)$ となることに注意せよ.）さて主定理の証明の出発点である式 (3.11) において ε を K/N で置き換えれば，右辺の主要項は $N^{-1}\sum_{x=1}^N \bar{h}_{x,K}(\eta)J''(x/N)$ となる．1-ブロック評価（定理 5）を考慮すれば $\bar{h}_{x,K}(\eta)$ は $\langle h \rangle(\bar{\eta}_{x,K})$ で置き換えられるので，結局主定理の証明には，確率収束の意味で

$$\int_0^T dt \int_0^1 \langle h \rangle(\rho^{N,K}(t,\theta))J''(\theta)d\theta \to \int_0^T dt \int_0^1 \langle h \rangle(\rho(t,\theta))J''(\theta)d\theta \tag{3.15}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

を示せばよかったことになる．ところで K をとめるごとに弱収束の意味で

$$\rho^{N,K}(t,\theta) \to \rho(t,\theta), \quad (N \to \infty)$$

であった．このことは，(3.15) の成立を期待させはするが，実際には $\langle h\rangle(\rho)$ が線型でない限りそれを保証はしない（下記演習 4 参照）．(3.15) を得るには (3.14) のようなより強い意味での収束を言っておく必要があるのである． □

演習 4 u_n が一様有界でかつ $u_n(\theta)$ が $u(\theta)$ に弱収束していても，かならずしも

$$\int f(u_n(\theta))d\theta \to \int f(u(\theta))d\theta$$

とはならないことを示せ．

[解] 例えば

$$\begin{aligned} u_n(\theta) := 1 + \sin n\theta &\to 1 \\ (u_n(\theta))^2 &\to 3/2. \end{aligned}$$

□

定理 6 の証明：

$$\hat{\tau}_z : \eta \in \mathcal{X} \to (\eta, \tau_z\eta) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X},$$

$$\mu^N_{(z)} = \tilde{\mu}^N \circ \hat{\tau}_z^{-1} \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$$

と置く．$\{\mu^N_{(z)}\}_{L \le |z| \le \epsilon N}$ の $N \to \infty, L \to \infty$ とした時の極限点の全体を $\mathcal{A}^\circ_\epsilon$ とすると次式が成り立つ：

$$\limsup_{N\to\infty} \max_{L\le|z|\le\epsilon N} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} |\bar{\eta}_{0,K} - \bar{\eta}'_{0,K}| \mu^N_{(z)}(d\eta d\eta') \le \sup_{\mu\in\mathcal{A}^\circ_\epsilon} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} |\bar{\eta}_{0,K} - \bar{\eta}'_{0,K}| d\mu \tag{3.16}$$

定理の証明には右辺が $\varepsilon \to 0$ のとき 0 に収束することを示す必要がある．$\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$,

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$\Lambda = [-K, K], K = 1, 2, \dots$ に対し

$$I_\Lambda^{(1,2)}(\mu) = -\int \sqrt{\varphi}\,(L_\Lambda \otimes 1 + 1 \otimes L_\Lambda)\,\sqrt{\varphi} d(\nu \times \nu)$$

$$\varphi = \varphi_{\bar{\Lambda}} = d\mu|_{\bar{\Lambda}\times\bar{\Lambda}}/d(\nu \times \nu)_{\bar{\Lambda}\times\bar{\Lambda}}$$

とおく，但し $\bar{\Lambda}$ は Λ の R 近傍. $I_\Lambda^{(1,2)}(\mu)$ は 2 つの独立な 1 次元格子気体に対応するエントロピー生成率である. 2 つの成分間の粒子のやりとりのダイナミクスを

$$L^{(0)} = \pi_{0,0'}$$

で与える. $0'$ は $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ の第 2 成分の原点を表す. 対応するエントロピー生成率は

$$I_\Lambda^{(0)}(\mu) := -\int \sqrt{\varphi} L^{(0)} \sqrt{\varphi} d(\nu \times \nu)$$

である. C を $I^N(\tilde{\mu}^N) \le C/N$ となる定数とし

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \left\{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) : I_\Lambda^{(1,2)}(\mu) = 0\ , I_\Lambda^{(0)}(\mu) \le 4\varepsilon^2 C \|1/c_{0,1}\|_\infty\right\}$$

とおく.

補題 8 $\left\{\mu_{(z)}^N = \tilde{\mu}^N \hat{\tau}_z^{-1}\right\}_{L \le |z| \le N}$ の極限点全体 $\mathcal{A}_\varepsilon^\circ$ は $\mathcal{A}_\varepsilon$ に含まれる.

[証明] 補題 7(i) と同様に変分表現

$$I_\Lambda^{(1,2)}(\mu) = \sup\left\{-\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \frac{L_\Lambda^{(1,2)} u}{u} d\mu \,\middle|\, u > 0, \mathcal{F}_{\bar{\Lambda}} \times \mathcal{F}_{\bar{\Lambda}}\text{-可測}\right\}$$

が成り立つ，但し $L_\Lambda^{(1,2)} = L_\Lambda \otimes 1 + 1 \otimes L_\Lambda$. $\bar{\Lambda}$ と $\bar{\Lambda} + z$ が互いに素になるように z をとれば

$$\begin{aligned} I_\Lambda^{(1,2)}(\mu_{(z)}^N) &= \sup\left\{-\int_{\mathcal{X}_N} \frac{L_{\Lambda\cup(\Lambda+z)}^{(1,2)} u}{u} d\tilde{\mu}^N \,\middle|\, u > 0, \mathcal{F}_{\bar{\Lambda}\cup(\bar{\Lambda}+z)}\text{-可測}\right\} \\ &\le \sum_{x:\{x,x+1\}\subset\Lambda\cup(\Lambda+z)} I_{x,x+1}^N(\tilde{\mu}^N) \\ &\le 2|\Lambda| I^N(\tilde{\mu}^N)/N = O(1/N^2) \end{aligned}$$

ここに第 1 の不等式には補題 7 (ii) と (3.12) を用いた. したがって，極限点 μ に対し

$$I_\Lambda^{(1,2)}(\mu) = 0.$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

同様に $I_\Lambda^{(0)}(\mu)$ の変分表現を用いることにより，

$$I_\Lambda^{(0)}(\mu^N(z)) \le \int_{\mathcal{X}_N} (\pi_{0,z}\sqrt{\varphi})^2 d\nu,$$

但し $\varphi = d\tilde{\mu}^N/d\nu$．作用素 $\pi_{0,z}$（i.e. 0 と z での η の値の交換）は，隣接格子点の間での交換を順次行うことにより達成される：

$$\eta = \eta_{(0)} \to \eta_{(1)} \to \eta_{(2)} \to \cdots \to \eta_{(z-1)} \to \eta_{(z)} \to \cdots \to \eta_{(2z-1)} = \eta^{0,z}$$

ここに $\eta_{(k)} = (\eta_{(k-1)})^{k-1,k}$ $(1 \le k \le z)$; $\eta_{(z+k+1)} = (\eta_{(z+k)})^{z-k-1,z-k-2}$ $(0 \le k \le z-1)$．したがって

$$\begin{aligned}(\pi_{0,z}\sqrt{\varphi}(\eta))^2 &= \left(\sum_{k=0}^{2z-1}(\sqrt{\varphi}(\eta_{(k+1)}) - \sqrt{\varphi}(\eta_{(k)})\right)^2 \\ &\le (2z-1)\sum_{k=1}^{z}\left[(\pi_{k,k+1}\sqrt{\varphi})^2(\eta_k) + (\pi_{z-k+1,z-k}\sqrt{\varphi})^2(\eta_{z+k-1})\right].\end{aligned}$$

両辺を ν で積分し，$\mu^N_{(z)}$ がシフト不変であることに注意して，系 4 の評価 $I^N(\tilde{\mu}^N) \le C/N$，および $|z| \le \varepsilon/N$ であることを用いれば，

$$I_\Lambda^{(0)}(\mu^N_{(z)}) = \int_{\mathcal{X}_N}(\pi_{0,z}\sqrt{\varphi})^2 d\nu \le (2z)^2 I_{0,1}(\tilde{\mu}^N)\|1/c_{0,1}\|_\infty \le 4C\varepsilon^2\|1/c_{0,1}\|_\infty$$

を得る． □

定理 6 の証明に戻ろう．(3.16) 及び補題 8 より，示すべきことは，

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{K\to\infty}\sup_{\mu\in\mathcal{A}_\varepsilon}\int|\bar{\eta}_{0,K} - \bar{\eta}'_{0,K}|d\mu = 0$$

である．$\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon$ とすると，$I_\Lambda^{(1,2)}(\mu) = 0$ であるから，§3.4 の最後に述べたのと同様の議論により，$\hat{\mu}(d\rho_1, d\rho_2) \in \mathcal{P}([0,1]^2)$ が存在して，

$$\mu = \int_{[0,1]^2}\nu_{\rho_1}\times\nu_{\rho_2}\hat{\mu}(d\rho_1, d\rho_2)$$

と表現されることがわかる．したがって

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{\mu\in\mathcal{A}_\varepsilon}\int|\rho - \rho'|d\hat{\mu} = 0 \tag{3.17}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

を示せばよい．$I_\Lambda^{(0)}(\mu)$ の変分表現により，$\Lambda = [-K, K]$ とすると，任意の $\mathcal{F}_\Lambda$ -可測な $u > 0$ に対して，

$$I_{\Lambda_K}^{(0)}(\mu) \geq -\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \frac{L^{(0)}u}{u} d\mu$$

である．特に $u = \exp\left[\frac{a}{2}(2K+1)((\bar{\eta}_{0,K})^2 + (\bar{\eta}'_{0,K})^2)\right]$ とおくと

$$\begin{aligned} I_\Lambda^{(0)}(\mu) &\geq -\int \left[\exp\left\{-a(\eta_0 - \eta'_0)(\bar{\eta}_{0,K} - \bar{\eta}'_{0,K}) + \frac{a}{2K+1}(\eta_0 - \eta'_0)^2\right\} - 1\right] d\mu \\ &\geq a\int (\eta_0 - \eta'_0)(\bar{\eta}_{0,K} - \bar{\eta}'_{0,K}) d\mu + O(a^2) + O(\frac{1}{K}). \end{aligned}$$

$\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon$ に対しては，$I_\Lambda^{(0)}(\mu) \geq C'\varepsilon^2$ だったから，$K \to \infty$ とすることにより

$$C''(\varepsilon^2 + a^2) \geq a \int |\rho - \rho'|^2 \hat{\mu}(d\rho, d\rho').$$

さらに順次 $\varepsilon \downarrow 0$，$a \downarrow 0$ とすると，

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\mu \in \mathcal{A}_\varepsilon} \int |\rho - \rho'|^2 \hat{\mu}(d\rho, d\rho') = 0$$

を得る．$\int |\rho - \rho'| d\hat{\mu} \leq \sqrt{\int |\rho - \rho'|^2 d\hat{\mu}}$ だから (3.17) が従う． □

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第4章 非勾配系

概要: 本章では，勾配条件が必ずしも満たされない，いわゆる非勾配型 (non-gradient) モデルを扱う．

- Yau [Y 91] の相対エントロピー法
- 局所平衡状態の第2次近似
- 勾配置きかえ (gradient replacement)
- 局所平衡状態に対する大偏差原理型評価

などについて述べる．

4.1 はじめに

前章では飛躍率 $c_{x,x+1}$ に対して勾配条件を仮定したが，これからは第2章の条件 1–4 (特に詳細釣り合い条件) のみを仮定する．したがって，Bernoulli 測度に関する対称性はそのまま成立するが，系は一般に非勾配型になる．このとき，前章で述べたドリフト項 $b^N(\eta)$ に関する変形 (3.3) はよいのだが，(3.5) のような変形は不可能になる．したがって，$b^N(\eta)$ は見かけ上，まだ $O(N)$ の量である．このような非勾配型のモデルに対して，流体力学極限を初めて証明したのは Varadhan [V 93a] である．彼の主要なアイデアは，(3.3) に現れるカレント $c_{x,x+1}(\eta_x - \eta_{x+1})$ を，長時間にわたるふるまいが同等であるような勾配型の項，

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

つまり適当な h をみつけて $\tau_x h - \tau_{x+1} h$ のように表される項で置きかえるというものであった．いわゆる勾配置きかえ (gradient replacement) である．但し，置きかえに際して一種の補正項 $c_{x,x+1}\pi_{x,x+1}(\sum_y \tau_y F)$ が必要になる．これは，数学的には homogenization を証明するときの摂動項に似た役割を果たす．勾配置きかえの詳細は次章で述べるが，もしこのような置きかえが可能になれば，あとは基本的に前章と同様の議論を続けることができ流体力学極限が証明される．Varadhan の方法はこのように，第 3 章で述べた [GPV 88] の手法を基礎として，それに勾配置きかえを組み合わせるものであった．

一方，これから紹介する手法は，Yau [Y 91] が勾配型モデルに対して用いた相対エントロピー法である．今，極限の流体力学的方程式があらかじめ予想できたとしよう．このとき，$N \to \infty$ として，考えている系の分布は極限方程式を解いて定まる局所平衡状態 (local equilibrium state) に十分近いと予想される．それを，系の分布の局所平衡状態に関する単位体積当たりの相対エントロピーが 0 に収束する，という意味で証明する．第 3 章では，大域平衡状態 (global equilibrium state) $\nu^N = \nu^N_{1/2}$ に関する相対エントロピー $H^N(\mu)$ のみを考え，局所エルゴード定理を導いたが，ここでは ν^N を時間的・空間的に一様でない測度にとりかえるのである．

しかし [Y 91] と違い，ここでは非勾配系を扱う．勾配系では，巨視的な密度関数つまり流体力学的方程式の解から局所平衡状態を定義すれば十分であったが，非勾配系ではそれでは不十分で局所平衡状態の第 2 次近似まで考える必要が生ずる．第 2 次近似を考えることは，計算上は (3.4) の下で述べた $0 \times \infty$ を $(0 + \frac{\mathrm{const}}{N}) \times N \to \mathrm{const}$, $N \to \infty$ と見直すことに相当し自然である．しかも，このような考え方自体は，統計力学では例えば Boltzmann 方程式に対する Hilbert 展開あるいは Chapman-Enskog 展開としてかなり古くから知られていた．第 2 次近似の決定の仕方であるが，物理的には，広い領域の両端で異なる質量分布密度をもつ状態つまり状態の第 1 次近似のみを与えたときの，系の不変測度 (steady state という）をとればよい ([S 91], [KLO 95])．数学的には Varadhan が与えた変分公式 (2.4) の最小値を与える関数 F を用いて定義できる．第 2 次近似は，大偏差原理型の評価を与える定理 5 でもそうであるが，エントロピーレベルでは不要である（[V 93b] 参

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

照). その時間微分であるエントロピー生成率を考えるときに，初めて必要になることを注意しておきたい.

最後に前章で用いた [GPV 88] の手法と比べて，Yau の手法の利点・欠点をいくつか挙げておこう.

利点: (i) 2-ブロック評価，$\{\alpha^N_\cdot\}_N$ の分布の緊密性，非線型偏微分方程式の弱解の一意性 (強解の一意性が自動的に出る) は不要で，証明が簡素化される．代わりに局所平衡状態に関する大偏差原理が必要になる.
(ii) 相転移があっても，その領域を排除しながら議論を進めることができる (例えば [OVY 93]) .

欠点: (i) 非線型偏微分方程式の滑らかな解の存在を仮定する必要がある.
(ii) 初期分布に対して [GPV 88] よりやや強いエントロピー条件が必要になる．主定理 II の後の注意を参照されたい.

4.2 主定理 II

これまでと同様に，$\Gamma_N = \{1, \cdots, N\}$，$L_N = \sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\pi_{x,x+1}$ とし，$c = c_{0,1}$ は $\{\eta_0, \eta_1\}$ によらないものとする．これは飛躍率 c の Bernoulli 測度 $\{\nu_\rho\}_{\rho\in[0,1]}$ に関する詳細釣り合い条件に他ならない．したがって，このとき $\{\nu_\rho\}_{\rho\in[0,1]}$ は L_N に対する可逆測度になる．また $\eta^N(t) = \{\eta^N_x(t)\}_{x=1}^N$ を N^2L_N から生成される Markov 過程として，$\eta^N(t)$ の質量分布:

$$\alpha^N_t(d\theta) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\eta^N_x(t)\delta_{x/N}(d\theta) \quad \in \ \mathcal{M}(\mathbf{T}), \quad t \geq 0$$

を考える.

Varadhan [V93a] のとった道筋，特に 2-ブロック評価を用いる証明によれば，2 章で述べた定理 I を示すことができるのだが，ここでは [Y 91] による簡素化された手法を用いる．この方法によっても得られる結果は主定理 I と基本的に同じであるが，定式化を若干変更

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

する必要が生じる．まず α_t^N の極限として現れる非線形拡散方程式を思い出しておこう：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t,\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{ D(\rho(t,\theta))\frac{\partial \rho}{\partial \theta}(t,\theta) \right\} \tag{4.1}$$

但し，拡散係数 $D(\rho), \rho \in [0,1]$ は (2.3)-(2.6) のように定義される．Yau の手法を用いるためには，拡散係数に対して，次の仮定が必要になる．

仮定 D: 拡散係数は滑らか，つまり $D(\rho) \in C^2([0,1])$ である．

主定理 II 拡散係数 D は上の仮定を満たすとする．さらに，初期値 $\rho_0(\theta)$ が与えられたとき，方程式 (4.1) は滑らかな解 $\rho(t,\theta)$ をもち，しかも $\eta^N(t)$ の初期分布 f_0 は $H(f_0|\bar{\psi}_0) = o(N)$ を満たすとする．但し $\bar{\psi}_0(\eta) := Z_N^{-1} \exp\left\{ \sum_{x=1}^N \bar{\lambda}(\rho_0(x/N))\eta_x \right\}$ は巨視的な分布密度プロフィール $\rho_0(\theta)$ をもつ局所平衡状態 (第 1 次近似) である．相対エントロピー $H(f_0|\bar{\psi}_0)$ 及び関数 $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\rho)$ の定義は次節で述べる．このとき，$^\forall t > 0$ に対して

$$\alpha_t^N(d\theta) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \rho(t,\theta)\, d\theta \quad \text{確率収束}$$

が成立する． □

注意 1 *(i)* 仮定 D は今のところ証明されていない．物理的には相転移のない状況を考えているので $D(\rho) \in C^\infty$ と期待されるが，数学的には $D(\rho)$ は変分公式により定義されている．そのような関数の滑らかさを示すことは容易ではないと思われる．実際，*Varadhan [V 94]* が *tagged particle* の自己拡散係数 *(self diffusion coefficient)* に対して，*Lipschitz* 連続性を示したのが，これまでに唯一つ知られている結果である．仮定 D が必要になるのは，*Yau* の手法の欠点 *(i)* として述べたことと関係する．
(ii) 初期条件に対する仮定 $H(f_0|\bar{\psi}_0) = o(N)$ は *[GPV 88]* の $O(N)$ （あるいは $o(N^{d+2})$ と弱められることもある）より強い．但し *[GPV 88]* では相対エントロピーは大域平衡状態に関するものであり，初期分布に対する大数の法則も合わせて仮定した．第 3 章でみたように，格子気体モデルでは *[GPV 88]* のエントロピー条件は自動的に満たされる． □

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

4.3 主定理 II の証明の方針

本節では主定理 II の証明を，エントロピー生成率 $h(t)$ に対する評価 (定理 B) に帰着させる．

♠ Cramér 変換と相対エントロピー:

主定理 II に出てきた，関数 $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\rho)$ と相対エントロピー $H(f|\psi)$ について説明しよう．まず $\rho \in [0,1]$ に対して，平均値 ρ をもつ $\{0,1\}$ 上の分布を $\bar{\nu}_\rho$ と表す．すなわち

$$\bar{\nu}_\rho := (1-\rho)\delta_0 + \rho\delta_1 \ \in \ \mathcal{P}(\{0,1\})$$

である．次に，化学ポテンシャル (chemical potential) $\lambda \in \mathbf{R}$ をもつ，1 格子点上の大カノニカル Gibbs 測度 $\tilde{\nu}_\lambda$ を考えよう．つまり

$$\tilde{\nu}_\lambda(d\eta) \ := \ \frac{1}{Z_\lambda} e^{\lambda\eta}\, \bar{\nu}_{\frac{1}{2}}(d\eta) \ \in \ \mathcal{P}(\{0,1\}) \tag{4.2}$$

である．但し Z_λ は $\tilde{\nu}_\lambda$ を確率測度にするための正規化定数で，$Z_\lambda := 1 + e^\lambda$ である．(4.2) を $\bar{\nu}_{\frac{1}{2}}$ の Cramér 変換ということがある．次に

$$\bar{\rho}(\lambda) := E^{\tilde{\nu}_\lambda}[\eta] = \frac{e^\lambda}{1+e^\lambda}$$

とし，その逆関数を

$$\bar{\lambda}(\rho) := \log \frac{\rho}{1-\rho}$$

とおく．このとき，$\lambda \in \bar{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ と $\rho \in [0,1]$ は 1 対 1 に対応する．$\bar{\lambda}(\rho)$ は，大カノニカル Gibbs 分布の平均値が ρ になるように化学ポテンシャルを定める関数である．

f, ψ を $\mathcal{X}_N$ 上の $\frac{1}{2}$-Bernoulli 測度 $\nu^N(d\eta)(= \prod_{x=1}^N \bar{\nu}_{\frac{1}{2}}(d\eta_x)) \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$ に関する確率密度関数として，f の ψ に関する相対エントロピー $H(f|\psi) = H_N(f|\psi)$ を

$$\begin{aligned} H(f|\psi) \ &:= \ H(f\, d\nu^N | \psi\, d\nu^N) \\ &= \ \int_{\mathcal{X}_N} f \log(f/\psi)\, d\nu^N \end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

で定義する．

♠ 局所平衡状態の第 2 次近似:

2 つの関数 $\lambda = \lambda(t,\theta)$, $F = F(\eta) \in C_0(\mathcal{X})$ が与えられたとして，局所平衡状態の第 2 次近似 (正確には，その $\nu^N \in \mathcal{P}(\mathcal{X}_N)$ に関する密度関数) を

$$\psi_t(\eta) := Z_t^{-1} \exp\left\{\sum_{x=1}^{N} \lambda(t,\frac{x}{N})\eta_x + \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \tau_x F(\eta) \cdot \lambda'(t,\frac{x}{N})\right\}, \qquad \eta \in \mathcal{X}_N \tag{4.3}$$

で定義する．但し，$\lambda' := \partial\lambda/\partial\theta$ で，Z_t は$\psi_t d\nu^N$ を $\mathcal{X}_N$ 上の確率測度にするような規格化定数である．N は F の台の大きさより十分大であるとしてよく，このとき $\tau_y F(\eta)$ は $\eta \in \mathcal{X}_N$ に対して定義できる．また，Markov 過程 $\eta^N(t)$ の $\mathcal{X}_N$ 上の分布 μ_t^N の，ν^N に対する密度関数を f_t と書く．つまり

$$\mu_t^N = f_t \, d\nu^N$$

である．更に f_t の ψ_t に関する単位体積当たりの相対エントロピーを

$$h_N(t) := \frac{1}{N} H(f_t|\psi_t) \tag{4.4}$$

とおく．

♠ 主定理 **II** の証明の方針:

以上の準備の下で主定理 II の証明の方針を説明したい．

第 1 段: $\rho(t,\theta)$ を流体力学的方程式 (4.1) の解として $\lambda(t,\theta)$ を $\lambda(t,\theta) := \bar{\lambda}(\rho(t,\theta))$ で定める．一方 $F = F(\eta)$ を $\hat{c}(\rho)$ に対する変分公式の最小値を (ほぼ) 与える関数 (ρ によらぬ) として，$\lambda(t,\theta)$ と F から (4.3) で定まる局所平衡状態の第 2 次近似 ψ_t を考える．このとき

$$「\ h_N(0) = o(1) \implies h_N(t) = o(1) \ \text{ for } {}^\forall t > 0\ 」$$

であることをいう．つまり初期分布が局所平衡状態に近ければ，系は時間発展した後でも流体力学的方程式から定まるプロフィールをもつ局所平衡状態に近いことを主張する．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第2段: $\psi_t d\nu^N$ に対する大偏差原理型の評価 (定理5) により，局所平衡状態に対して指数的に速い大数の法則:

$$P^{\psi_t}(\mathcal{A}_{N,t}) \ \leq \ e^{-CN}, \quad {}^{\exists}C > 0$$

が示される．ここで，$\delta > 0$, $J \in C^\infty(\mathbf{T})$ が与えられたとして $\mathcal{A}_{N,t}$ は集合

$$\mathcal{A}_{N,t} := \left\{ \eta \in \mathcal{X}_N \, ; \, \left| \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} J(\frac{x}{N})\eta_x - \langle J, \rho(t,\theta) \rangle \right| > \delta \right\}$$

である．確率測度 $\psi_t d\nu^N$ を P^{ψ_t} と記した．ところが，エントロピー不等式 (第8章) と第1段の結果より

$$\begin{aligned} P^{f_t}(\mathcal{A}_{N,t}) \ &\leq \ \frac{\log 2 + H(f_t|\psi_t)}{\log\{1 + 1/P^{\psi_t}(\mathcal{A}_{N,t})\}} \\ &\leq \ \frac{\log 2 + o(N)}{\log\{1 + 1/e^{-CN}\}} \sim \frac{o(N)}{CN} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

がわかり，主定理 II の結論が得られるのである． □

第1段で述べた主張は，次の定理から示される．定理を述べる前に，いくつかの記号を導入しよう．まず熱力学的な関数

$$I(u;\lambda) := -\lambda u - q(u) + p(\lambda), \quad u, \lambda \in \mathbf{R} \tag{4.5}$$

$$p(\lambda) := \log(e^\lambda + 1)$$

$$q(u) := -u \log u - (1-u)\log(1-u)$$

を考える．$I(\cdot;\lambda)$ は $\bar{\nu}_\lambda$ に関する大偏差原理の速度関数 (rate function) で，p は圧力，q は Helmholtz の自由エネルギー (specific free energy) である．次に $D = D(\rho)$ を方程式 (4.1) の拡散係数として

$$P(\rho) := \int_0^\rho D(m)\, dm$$

とおく．また $F \in C_0(\mathcal{X})$ が与えられたとき，剰余関数

$$R(\rho; F) := \widehat{c}(\rho; F) - \widehat{c}(\rho)$$

を考える．$\widehat{c}(\rho; F), \widehat{c}(\rho)$ は $D(\rho)$ を定義するときに用いた関数である．最後に，滑らかな関

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

数 $\lambda(t,\theta)$ が与えられたとして $\rho(t,\theta) := \bar{\rho}(\lambda(t,\theta))$ とおき,

$$\begin{aligned}\sigma(u;\theta,t) &:= -\dot{\lambda}(t,\theta)\{u-\rho(t,\theta)\} + \lambda''(t,\theta)\{P(u)-P(\rho(t,\theta))\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda'(t,\theta))^2\{\widehat{c}(u)-\widehat{c}(\rho(t,\theta))\} \\ g(t) = g_\delta(t) &:= \sup_{u(\theta)\in C(\mathbf{T};[0,1])} \int_{\mathbf{T}} \{\delta\cdot\sigma(u(\theta);\theta,t) - I(u(\theta);\lambda(t,\theta))\}\,d\theta\end{aligned}$$

と定義する.

定理 B 滑らかな関数 $\lambda(t,\theta)$ と $F \in C_0(\mathcal{X})$ は任意に与えられているものとして, $h_N(t)$ を (4.4) で定義する. このとき, $h(t) := \limsup_{N\to\infty} h_N(t)$ が $h(0) < \infty$ を満たすならば, δ_0, $C > 0$ が存在して $0 < {}^\forall\delta < \delta_0$, ${}^\forall\beta > 0$ に対し

$$\begin{aligned}h(t) &\le h(0) + \frac{1}{\delta}\int_0^t g(s)ds + \frac{1}{\delta}\int_0^t h(s)ds \\ &\quad + \frac{C}{\beta} + \frac{1}{2}(\beta+1)\sup_{\rho\in[0,1]}|R(\rho;F)| \times \int_0^t ||\lambda'(s,\cdot)||^2_{L^2(\mathbf{T})}ds\end{aligned}$$

が成立する. □

定理 B から次の系が得られ, したがって主定理 II の証明の第 1 段が完結する.

系 1 $\rho(t,\theta)$ を流体力学的方程式 *(4.1)* の解として $\lambda(t,\theta) := \bar{\lambda}(\rho(t,\theta))$ と定める. このとき, $h(0) = 0$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $F \in C_0(\mathcal{X})$ が存在して

$$0 \le h(t) \le \varepsilon \quad \text{for } {}^\forall t \in [0,T]$$

とできる.

[証明] <u>主張</u>: 「$\delta > 0$ が十分小 $\Longrightarrow g_\delta(t) \le 0$」 を示そう.
まず $I(u;\lambda)$ は, u の関数として $u = \bar{\rho}(\lambda)$ で最小値 0 をとり, しかもその点で真に凸であること:

$$\inf_{u\in[0,1]} I(u;\lambda) = I(\bar{\rho}(\lambda);\lambda) = 0,$$

$$I''(\bar{\rho}(\lambda);\lambda) := \partial^2 I/\partial u^2(\bar{\rho}(\lambda);\lambda) > 0$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

に注意すれば

$$I(u;\lambda(t,\theta)) \geq C\{u-\rho(t,\theta)\}^2, \qquad {}^\exists C>0 \tag{4.6}$$

がわかる．一方，$\sigma(u;\theta,t)$ については，容易にわかるように

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u;\theta,t)|_{u=\rho(t,\theta)}\\ &= -\dot{\lambda}(t,\theta)+\lambda''(t,\theta)D(\rho(t,\theta))+\frac{1}{2}(\lambda'(t,\theta))^2\cdot\hat{c}'(\rho(t,\theta))\end{aligned}$$

である．但し $\dot{}$ は t に関する微分，$'$ は θ に関する微分を表す．ところが

$$\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{e^\lambda}{1+e^\lambda}\right)=\rho-\rho^2=\chi(\rho) \tag{4.7}$$

だから

$$\dot{\lambda}=\frac{\dot{\rho}}{\chi},\quad \lambda'=\frac{\rho'}{\chi},\quad \lambda''=\frac{\rho''\chi-\rho'\cdot\chi'\rho'}{\chi^2} \tag{4.8}$$

である．さらに

$$\frac{1}{2}\hat{c}'=(\chi D)'=\chi' D+\chi D'$$

に注意して

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u;\theta,t)|_{u=\rho(t,\theta)}\\ &=-\frac{\dot{\rho}}{\chi}+\frac{\rho''\chi-\chi'(\rho')^2}{\chi^2}\cdot D(\rho)+\frac{(\rho')^2}{\chi^2}(\chi'D+\chi D')\\ &=\frac{-\dot{\rho}+\rho''D(\rho)+(\rho')^2D'(\rho)}{\chi}\\ &=\frac{-\dot{\rho}+(D(\rho)\rho')'}{\chi} \ = \ 0\end{aligned} \tag{4.9}$$

が得られる．最後の等号で，ρ に対する流体力学的方程式 (4.1) を用いた (主定理 II の証明でこの方程式を用いるのはこの部分だけである)．ところが

$$\sigma(\rho(t,\theta);\theta,t)=0$$

だから，(4.9) にも注意して，ある $v=v(u,\theta,t)\in[0,1]$ が存在して

$$\sigma(u;\theta,t)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}(v;\theta,t)\{u-\rho(t,\theta)\}^2 \tag{4.10}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

と書けることがわかった．よって，(4.6) と (4.10) から主張がいえた．これと，Gronwall の補題を用いれば，定理 B から系の結論が得られる． □

あとは定理 B の証明だけが残されたことになる．

4.4 定理 B の証明

では定理 B の証明にとりかかろう．定理 B の証明は，最終的には勾配置きかえ (定理 C) に帰着されるのだが，まず証明の方針を 4 段階に分けて大まかに述べておきたい:

1. 相対エントロピーの変化率 (エントロピー生成率) $\frac{d}{dt}h_N(t)$ を計算する．このとき 2 つの項 $\Omega_1 = \Omega_1(\eta), \Omega_2 = \Omega_2(\eta)$ (命題 3参照) が現れる．
2. $O(1)$ の項 Ω_2 に対しては，1-ブロック評価を用いる．
3. 見かけ上 $O(N)$ の項 Ω_1 に対しては，勾配置きかえが必要になる．
4. ともに $\bar{\eta}_{x,K}$ の関数で置きかえた後に，大偏差原理を適用する．

以下，この手順に沿って定理 B の証明を進めよう．

♠ 第 1 段： $\frac{d}{dt}h_N(t)$ の計算．

相対エントロピーの微分を計算するために，次の補題を準備する．

補題 2 $f_t = f_t(\eta) > 0, \eta \in \mathcal{X}_N$ は前進方程式 $\dot{f}_t = Lf_t$ を満たすとする．但し $L = N^2 L_N$ である．このとき，任意の $\psi_t = \psi_t(\eta) > 0, \eta \in \mathcal{X}_N$ に対して

$$\frac{d}{dt}H(f_t|\psi_t) \le \int_{\mathcal{X}_N} \frac{f_t}{\psi_t}(L\psi_t - \dot{\psi}_t)\, d\nu^N$$

が成立する．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

注意 2 この結果は L を L^* に置きかえれば，一般の非対称な *Markov* 過程に対しても成立する *[OVY 93]*.

[証明] 相対エントロピーの定義を思い出して，その微分を計算すれば

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(f_t|\psi_t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{X}_N} f_t \log\frac{f_t}{\psi_t}\, d\nu^N \\
&= \int_{\mathcal{X}_N}\left[\dot{f}_t \log\frac{f_t}{\psi_t} + f_t \frac{d}{dt}\left(\log\frac{f_t}{\psi_t}\right)\right] d\nu^N \\
&= \int_{\mathcal{X}_N}\left[L f_t \cdot \log\frac{f_t}{\psi_t} + \dot{f}_t - \frac{f_t}{\psi_t}\cdot\dot{\psi}_t\right] d\nu^N \\
&= \int_{\mathcal{X}_N} f_t \cdot L\log\frac{f_t}{\psi_t}\, d\nu^N - \int_{\mathcal{X}_N}\frac{f_t}{\psi_t}\,\dot{\psi}_t\, d\nu^N
\end{aligned}$$

最後の等式では，L の対称性及び$\int_{\mathcal{X}_N}\dot{f}_t\, d\nu^N = \int_{\mathcal{X}_N} L f_t\, d\nu^N = 0$ であることを用いた．ところが，一般に $u = u(\eta) > 0$ に対して

$$\pi_{x,x+1}\log u = \log\frac{u(\eta^{x,x+1})}{u(\eta)} \le \frac{u(\eta^{x,x+1})}{u(\eta)} - 1 = \frac{\pi_{x,x+1}u(\eta)}{u(\eta)}$$

だから

$$L\log u \le \frac{Lu}{u} \quad \text{if} \quad u > 0$$

がわかる．よって

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}_N} f_t \cdot L\log\frac{f_t}{\psi_t}\, d\nu^N &\le \int_{\mathcal{X}_N} f_t \frac{L(\frac{f_t}{\psi_t})}{\frac{f_t}{\psi_t}}\, d\nu^N = \int_{\mathcal{X}_N}\psi_t \cdot L(\frac{f_t}{\psi_t})\, d\nu^N \\
&= \int_{\mathcal{X}_N} L\psi_t \cdot \frac{f_t}{\psi_t}\, d\nu^N
\end{aligned}$$

故に，結論が証明された． □

したがって $\frac{d}{dt}h_N(t)$ を上から評価するには，補題 2で $\psi_t = \psi_t(\eta)$ を (4.3) で定めた関数にとって

$$N^{-1}\psi_t^{-1}\{N^2 L_N\psi_t - \dot{\psi}_t\}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

を計算すればよい．そこで，まずこの第 1 項は

$$
\begin{aligned}
N^{-1}\psi_t^{-1}\cdot N^2 L_N\psi_t &= \frac{N}{\psi_t(\eta)}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\left\{\psi_t(\eta^{x,x+1})-\psi_t(\eta)\right\} \\
&= N\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\left[\exp\left\{\left(\lambda(t,\frac{x}{N})-\lambda(t,\frac{x+1}{N})\right)(\eta_{x+1}-\eta_x)\right.\right. \\
&\qquad\left.\left. +\frac{1}{N}\pi_{x,x+1}\sum_{y=1}^{N}\tau_y F(\eta)\cdot\lambda'(t,\frac{y}{N})\right\}-1\right] \\
&= -\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\tilde{\Omega}_{x,x+1}+\frac{1}{2N}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\tilde{\Omega}_{x,x+1}^2 \\
&\quad -\frac{1}{2N}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\lambda''(t,\frac{x}{N})(\eta_{x+1}-\eta_x)+o(1)
\end{aligned}
$$

但し

$$
\tilde{\Omega}_{x,x+1} := \lambda'(t,\frac{x}{N})(\eta_{x+1}-\eta_x)-\pi_{x,x+1}\sum_{y=1}^{N}\tau_y F(\eta)\cdot\lambda'(t,\frac{y}{N})
$$

とおいた．最後の変形では

$$
\exp\{\cdots\}-1=\{\cdots\}+\frac{1}{2}\{\cdots\}^2+O(\frac{1}{N^3})
$$

及び

$$
\nabla\lambda(t,\frac{x}{N})=\lambda'(t,\frac{x}{N})+\frac{1}{2N}\lambda''(t,\frac{x}{N})+o(\frac{1}{N})
$$

であることを用いた．$o(1)$ は $N\to\infty$ のとき 0 に収束する項である．一方

$$
N^{-1}\psi_t^{-1}\dot{\psi}_t=-\frac{1}{N}\cdot\frac{\dot{Z}_t}{Z_t}+\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{x=1}^{N}\lambda(t,\frac{x}{N})\eta_x+\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\tau_x F(\eta)\cdot\lambda'(t,\frac{x}{N})\right\}
$$

ここで $E^{\psi_t}[\frac{1}{N}\psi_t^{-1}\dot{\psi}_t]=0$ 及び上式の右辺の最後の項は $o(1)$ であることに注意すると

$$
\frac{1}{N}\psi_t^{-1}\dot{\psi}_t=-E^{\psi_t}[\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\dot{\lambda}(t,\frac{x}{N})\eta_x]+\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\dot{\lambda}(t,\frac{x}{N})\eta_x+o(1)
$$

がわかる．但し，確率測度 $\psi_t d\nu^N$，あるいは $f_t d\nu^N$ に関する期待値を，それぞれ $E^{\psi_t}[\ \cdot\ ]$，$E^{f_t}[\ \cdot\ ]$ のように書くことにする．

以上まとめて，$N\to\infty$ のとき

$$
N^{-1}\psi_t^{-1}\{N^2 L_N\psi_t-\dot{\psi}_t\} \ = \ \Omega_1+\Omega_2+a(t)+o(1) \tag{4.11}
$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

が得られた．但し，(4.11) の右辺の各項は

$$\Omega_1 = \Omega_1(\eta) := -\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\Omega_{x,x+1}$$

$$\begin{aligned}\Omega_2 = \Omega_2(\eta) := &-\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\dot{\lambda}(t,x/N)\eta_x + \frac{1}{2N}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\Omega_{x,x+1}^2 \\ &-\frac{1}{2N}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\lambda''(t,x/N)(\eta_{x+1}-\eta_x) \\ &+\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\lambda''(t,x/N)\pi_{x,x+1}\left(\sum_{y=1}^{N}(y-x)\tau_y F\right)\end{aligned}$$

$$\Omega_{x,x+1} = \Omega_{x,x+1}(\eta) := \lambda'(t,x/N)\left\{\eta_x - \eta_{x+1} - \pi_{x,x+1}\left(\sum_{y=1}^{N}\tau_y F\right)\right\}$$

$$a(t) := E^{\psi_t}\left[\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\dot{\lambda}(t,x/N)\eta_x\right]$$

と定義される．

また，ψ_t の定義を思い出せば，$E^{\psi_t}[\eta_x] \sim \bar{\rho}(\lambda(t,x/N)), N \to \infty$ だから，$a(t)$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} a(t) = \int_{\mathbf{T}} \dot{\lambda}(t,\theta)\rho(t,\theta)\,d\theta$$

が成り立つことが容易にわかる．それには，後で述べる定理5を用いてもよい．但し，$\bar{\rho}(\lambda(t,\theta)) = \rho(t,\theta)$ に注意されたい．

以上の計算から，次の命題が得られた．

命題 3

$$h_N(T) - h_N(0) \le \int_0^T E^{f_t}[\Omega_1 + \Omega_2]\,dt + \int_0^T dt \int_{\mathbf{T}} \dot{\lambda}(t,\theta)\rho(t,\theta)\,d\theta + o(1)$$

但し $o(1)$ は $N \to \infty$ のときに 0 に近づく項である． □

♠ 第 2 段： Ω_2 の処理．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

1-ブロック評価の証明には勾配条件を用いなかったことに注意して

$$\lim_{K\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\int_0^T E^{f_t}\left[\Omega_2+\frac{1}{N}\sum_{x=1}^N\dot{\lambda}(t,\frac{x}{N})\eta_x-\frac{1}{2N}\sum_{x=1}^N(\lambda'(t,\frac{x}{N}))^2\hat{c}(\bar{\eta}_{x,K};F)\right.$$
$$+\frac{1}{2N}\sum_{x=1}^N\lambda''(t,\frac{x}{N})\langle c_{x,x+1}(\eta_{x+1}-\eta_x)\rangle_{\bar{\eta}_{x,K}}$$
$$\left.-\frac{1}{N}\sum_{x=1}^N\lambda''(t,\frac{x}{N})\langle c_{x,x+1}\pi_{x,x+1}(\sum_{y=1}^N(y-x)\tau_yF)\rangle_{\bar{\eta}_{x,K}}\right]dt=0$$

が成り立つ．ところが

$$\langle c_{x,x+1}(\eta_{x+1}-\eta_x)\rangle_\rho=0,\quad\langle L_{x,x+1}(\cdots)\rangle_\rho=0,\qquad {}^\forall x,\ {}^\forall\rho$$

なので，命題3から，$N\to\infty, K\to\infty$ とするとき，$\int_0^T E^{f_t}[\Omega_2]\,dt$ は

$$\int_0^T E^{f_t}\left[-\frac{1}{N}\sum_{x=1}^N\dot{\lambda}(t,\frac{x}{N})\bar{\eta}_{x,K}+\frac{1}{2N}\sum_{x=1}^N(\lambda'(t,\frac{x}{N}))^2\hat{c}(\bar{\eta}_{x,K};F)\right]dt$$

に置きかえてよいことがわかる．

♠ 第 3 段： Ω_1 の処理．

Ω_1 は見かけ上，$O(N)$ の発散項である．この項を処理するには，次の定理が基本的である．この定理は，格子上の非勾配型 Ginzburg-Landau モデルに対して，Varadhan [V 93a] が最初に提示したものである．証明は次章で与える．

定理 C (勾配置きかえ) $C>0$ が存在し，${}^\forall\beta>0$ に対して

$$\limsup_{K\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\int_0^T E^{f_t}\left[\Omega_1+\sum_{x=1}^N D(\bar{\eta}_{x,K})\lambda'(t,x/N)\cdot\frac{1}{2K+1}\sum_{y=x-K}^{x+K}(\eta_{y+1}-\eta_y)\right.$$

$$\left.-\frac{\beta}{2N}\sum_{x=1}^N(\lambda'(t,x/N))^2R(\bar{\eta}_{x,K};F)\right]dt\le\frac{C}{\beta}$$

が成立する． □

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

定理Cに現れる期待値記号下の第2項，つまり Ω_1 の次の項について，$D(\rho) \in C^2([0,1])$ と仮定したから

$$
\begin{aligned}
P(\bar{\eta}_{x+1,K}) - P(\bar{\eta}_{x,K}) &= \int_{\bar{\eta}_{x,K}}^{\bar{\eta}_{x+1,K}} D(m)\, dm \\
&= D(\bar{\eta}_{x,K})(\bar{\eta}_{x+1,K} - \bar{\eta}_{x,K}) + \{\mathrm{error}\} \\
&= D(\bar{\eta}_{x,K}) \cdot \frac{1}{2K+1} \sum_{y=x-K}^{x+K} (\eta_{y+1} - \eta_y) + \{\mathrm{error}\}
\end{aligned}
$$

である．故に，第2項は次のように勾配型に書けることがわかる．

$$
\begin{aligned}
(\text{第 2 項}) &= \sum_{x=1}^{N} \lambda'(t, \frac{x}{N})\{P(\bar{\eta}_{x+1,K}) - P(\bar{\eta}_{x,K})\} + \{\mathrm{error}\} \\
&= -\frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} \lambda''(t, \frac{x}{N}) P(\bar{\eta}_{x,K}) + \{\mathrm{error}\}
\end{aligned}
$$

したがって，命題3における $\int_0^T E^{f_t}[\Omega_1]\, dt$ は，$N \to \infty, K \to \infty$ とするとき

$$
\int_0^T E^{f_t} \left[\frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} \lambda''(t, \frac{x}{N}) P(\bar{\eta}_{x,K}) + \frac{\beta}{2N} \sum_{x=1}^{N} (\lambda'(t, \frac{x}{N}))^2 R(\bar{\eta}_{x,K}; F) \right] dt
$$

に C/β の誤差で置きかえてよい．

一方，$P' = D = \frac{\hat{c}}{2\chi}$ で (4.8) から $\rho' = \lambda' \chi$ だから

$$
\int_{\mathbf{T}} \lambda''(t,\theta) P(\rho(t,\theta))\, d\theta = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{T}} (\lambda'(t,\theta))^2 \hat{c}(\rho(t,\theta))\, d\theta
$$

が成り立っている．

以上，第2段の結果もまとめれば，命題3から次の命題が証明された．

命題 4 $N \to \infty, K \to \infty$ とするとき，0 に収束する項 $o(1)$ があって

$$
\begin{aligned}
h_N(T) - h_N(0) \;\le\; & \int_0^T E^{f_t}[W]\, dt + \frac{C}{\beta} \\
& + \frac{1}{2}(\beta + 1) \sup_{\rho} |R(\rho; F)| \times \int_0^T ||\lambda'(t, \cdot)||^2_{L^2(\mathbf{T})}\, dt + o(1)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．但し，$W = W(\eta)$ は次のようにして定義される関数である：

$$
W \;:=\; -\frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} \dot{\lambda}(t, x/N)\{\bar{\eta}_{x,K} - \rho(t, x/N)\}
$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$+\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\lambda''(t,x/N)\{P(\bar\eta_{x,K})-P(\rho(t,x/N))\}$$
$$+\frac{1}{2N}\sum_{x=1}^{N}(\lambda'(t,x/N))^2\{\widehat{c}(\bar\eta_{x,K})-\widehat{c}(\rho(t,x/N))\}$$

□

♠ 第 4 段： $E^{f_t}[W]$ の評価.

最後に，命題 4 に現れる期待値 $E^{f_t}[W]$ を評価しよう．そのための基本的なアイデアは，エントロピー不等式 (8 章) を用いて，非平衡系 $\eta^N(t)$ の分布 $f_t d\nu^N$ という“よくわからない測度”に関する期待値の評価を，局所平衡状態 $\psi_t d\nu^N$ という“よくわかった測度”の指数的モーメントの評価へと，帰着させることにある．但し，その際，f_t の ψ_t に関する相対エントロピーという代償を支払う必要がある．実際，エントロピー不等式より $^\forall\delta>0$ に対し

$$\begin{aligned}E^{f_t}[W] &= \frac{1}{\delta N}E^{f_t}[\delta NW]\\ &\le \frac{1}{\delta N}\{\log E^{\psi_t}[e^{\delta NW}]+H(f_t|\psi_t)\}=\frac{1}{\delta N}\log E^{\psi_t}[e^{\delta NW}]+\frac{1}{\delta}h_N(t)\end{aligned}$$

がわかる．

あとは，$\psi_t d\nu^N$ に関する指数的モーメントを評価すればよい．そのために，$\psi_t d\nu^N$ に対する大偏差原理型の上からの評価が必要になる．$\lambda=\lambda(\theta)\in C(\mathbf{T}),F\in C_0(\mathcal{X})$ が与えられたとして，(4.3) と同様にして定義される局所平衡状態の第 2 次近似密度関数を $\psi^N_{\lambda(\cdot),F}$ と書くことにする．つまり $\lambda(t,\theta)$ を，$\lambda(\theta)$ に置きかえて定義するのである．このとき

定理 5 $^\forall G(\theta,\rho)\in C(\mathbf{T}\times[0,1])$ に対し

$$\limsup_{K\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log E^{\psi^N_{\lambda(\cdot),F}}\left[\exp\left\{2K\sum_{x\in 2K\mathbf{Z}\cap[1,N]}G(x/N,\bar\eta_{x,K})\right\}\right]$$
$$\le \sup_{\rho(\theta)\in C(\mathbf{T},[0,1])}\int_{\mathbf{T}}\{G(\theta,\rho(\theta))-I(\rho(\theta);\lambda(\theta))\}\,d\theta$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

が成立する．但し $I(\rho;\lambda)$ は (4.5) で与えた関数である． □

ここでは定理 5の証明をていねいに述べることはやめ，定理の主張がなぜ成立するのか，大まかにつかんでもらうために，簡単な場合に説明するに留めたい．詳細は [FUY 95] を参照していただきたい．そこには，一般の Gibbs 測度に対して，しかも相転移があったとしても，同様の結果が成り立つことが証明してある．

まず，局所平衡状態の第 2 次近似項 F は，大偏差原理に対して実際は寄与しないことがわかるので，ここでは最初から $F=0$ としよう．ところが，$F=0$ ならば，$\psi^N_{\lambda(\cdot),0}d\nu^N$ は直積測度

$$\tilde{\nu}_{\lambda(\cdot)}(d\eta) := \prod_{x=1}^{N} \tilde{\nu}_{\lambda(x/N)}(d\eta_x)$$

に他ならない．但し，$\tilde{\nu}_\lambda, \lambda\in\mathbf{R}$ は (4.2) で定義した，1 格子点上の大カノニカル Gibbs 測度である．次に，定理 5の左辺に現れる $\bar{\eta}_{x,K}$ であるが

$$\bar{\eta}_{x,K} = \frac{2K-1}{2K+1}\bar{\eta}_{x,K-1} + O(\frac{1}{K})$$

だから，実際は $\bar{\eta}_{x,K}$ の代わりに $\bar{\eta}_{x,K-1}$ としてもさしつかえない．G の連続性にも注意されたい．そうすれば，$\{\bar{\eta}_{x,K-1}\}_{x\in 2K\mathbf{Z}\cap[1,N]}$ は $\tilde{\nu}_{\lambda(\cdot)}$ の下で独立な確率変数になるので

$$\frac{1}{N}\log E^{\tilde{\nu}_{\lambda(\cdot)}}\left[\exp\left\{2K\sum_{x\in 2K\mathbf{Z}\cap[1,N]} G(x/N,\bar{\eta}_{x,K-1})\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x\in 2K\mathbf{Z}\cap[1,N]} \log E^{\tilde{\nu}_{\lambda(\cdot)}}\left[\exp\left\{2KG(x/N,\bar{\eta}_{x,K-1})\right\}\right] \tag{4.12}$$

と変形できる．ところが，$\lambda(\theta)$ は θ について連続だから，$x\in 2K\mathbf{Z}\cap[1,N]$ を任意に固定するとき，和の中に現れる $\tilde{\nu}_{\lambda(\cdot)}$ に関する期待値は，ほぼ $\lambda(\cdot)$ が定数 $\lambda(x/N)$ の Bernoulli 測度 $\tilde{\nu}_{\lambda(x/N)}(d\eta) := \prod_{y\in\mathbf{Z}}\tilde{\nu}_{\lambda(x/N)}(d\eta_y)$ に関する期待値とみなすことができる．しかし $\lambda\in\mathbf{R}$ が定数ならば，$\tilde{\nu}_\lambda$ の下で $\{\eta_y\}_y$ は独立同分布 (i.i.d.) である．このとき，Cramér の大偏差原理に関する定理と，Varadhan の定理 (例えば [Deuschel-Stroock]) から，$G=G(\rho)\in C([0,1])$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

に対して

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K}\log E^{\tilde{\nu}_\lambda}\left[\exp\left\{2KG(\bar{\eta}_{0,K-1})\right\}\right]$$
$$=\sup_{\rho\in\mathbf{R}}\{G(\rho)-I(\rho;\lambda)\}$$

が成立する．但し，$I(\rho;\lambda)$ は $\tilde{\nu}_\lambda$ に関する大偏差原理の速度関数で，(4.5) のように与えられることはよく知られている．したがって，少々ラフではあるが，(4.12) の右辺は

$$\sim\frac{2K}{N}\sum_{x\in 2K\mathbf{Z}\cap[1,N]}\sup_{\rho\in\mathbf{R}}\{G(x/N,\rho)-I(\rho;\lambda(x/N))\}$$

とふるまうであろうと考えられる．ところが，これは丁度 Riemann 和の形をしていて，sup をとる ρ は $\theta=x/N$ ごとにとりかえて考えるべきであるから，最終的に定理 5のような評価にたどりつくことができると，理解されるだろう．

命題 4と定理 5を用いれば，定理 B が得られる．したがって，主定理 II の証明を完結するには，あとは定理 C を証明すればよいことになった．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第5章　勾配置き換え（証明）

概要：　ここでは定理Cを証明する．定理Cに現れる平均値の評価は順次

1．エントロピー不等式により平衡測度の下での大偏差原理型の評価に；

2．Feynman-Kac の公式により Shrödinger 型の作用素の第一固有値の評価に；

3．第一固有値を Rayleigh-Shrödinger 摂動理論により（時間 $\to\infty$ のときの）中心極限定理の分散の評価に

置き換えられる（5.2 節）．最後の中心極限定理の分散の評価は作用素 $L_{[-K,K]}=\sum_{x=-K}^{K-1} c_{x,x+1}\pi_{x,x+1}$ のスペクトルの飛びの大きさの $K\to\infty$ のときの精密な評価に帰着される（5.4 節、定理 5.3, 5.4)．その証明はきわめて巧妙であり他のモデルに対し勾配置き換えの方法を拡張しようとするとき最も問題となる部分である．

5.1　証明の方針

4.4 節 の定理 C の主張を述べ直しておこう．一般に有界関数 $g(\eta)$ に対し

$$\sum_{x=1}^{N} J(t,\frac{x}{N})\tau_x g(\eta)=\sum_{x=1}^{N} J(t,\frac{x}{N})\bar{g}_{x,K}(\eta)+O(\frac{K}{N})$$

であることに注意すると証明すべき式は

$$\limsup_{K\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\int_0^T E^{f_t}\left[\sum_{x=1}^{N} J(t,\frac{x}{N})\tau_x G^K(\eta^N(t))-\frac{\beta}{2N}\sum_x J^2(t,\frac{x}{N})R(\bar{\eta}_{x,K};F)\right]dt\le\frac{C}{\beta}$$

と書かれる．但し β は任意の正の数で，C は β によらない定数，また

$$G^K(\eta)=\frac{1}{2K+1}\left[D(\bar{\eta}_{0,K})A_K-B_K-H_K\right]$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$A_K = \eta_K - \eta_{-K} = \sum_{x=-K}^{K-1} (\eta_{x+1} - \eta_x)$$
$$B_K(\eta) = \sum_{x=-K}^{K} c_{x,x+1}(\eta_{x+1} - \eta_x)$$
$$H_K = \sum_{x=-K+n}^{K-n} \tau_x \left(L^N F\right)(\eta) \quad (F = F(\eta_{-n}, \dots \eta_n))$$
$$J(t,\theta) = \lambda'(t,\theta).$$

次の記号あるいは表記法を用いる：

$$\mathcal{X}_{K,m} = \left\{\eta \in \{0,1\}^{\Lambda_K}; |\eta| = \sum_{x=-K}^{K} \eta_x = m\right\}, \quad \Lambda_K = \{-K, \dots K\};$$

$\nu_{K,m} : \mathcal{X}_{K,m}$ 上の一様確率測度;

$\langle\cdot\rangle : \nu_{K,m}$に関する平均値;

$\eta|_{\Lambda_K} = \xi, \eta|_{\Lambda_K^c} = \omega$ のとき

$\eta = \xi \circ \omega,\ G(\eta) = G_\omega(\xi)$ 等と書く

$$L_{\Lambda_K,\omega} = \sum_{x=-K}^{K-1} c_{x,x+1}\pi_{x,x+1}\text{: } C(\{0,1\}^{\Lambda_K}) \text{ 上の作用素} \quad (\eta|_{\Lambda_K^c} = \omega).$$

定理Cの証明は次に述べる補題と定理に容易に帰着される。

補題 1 （中心極限定理の分散の評価への帰着）滑らかな関数 $J = J(t,\theta)$ と $M = M(\rho) \in C([0,1])$，$G = G(\eta) \in C(\mathcal{X})$ に対し

$$W_{N,K,t}(\eta) := \sum_{x=1}^{N} J(t, \frac{x}{N})\tau_x G - \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N} M(\bar{\eta}_{x,K}) J^2(t, \frac{x}{N})$$

とおく．任意の ω, K, m に対して，$\langle G_\omega\rangle_{K,m} = 0$ であれば正数 c が存在して

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log E_{eq}^N & \left[\exp[N\int_0^T W_{N,K,T}(\eta^N(t))dt]\right] \\ \le\ & T||J||_\infty^2 \sup_{m,\omega}\left[(2K)\Delta_{K,m,\omega}(G_\omega) - M(\frac{m}{2K+1})\right].\end{aligned}$$

ここに E_{eq}^N は初期分布を $\nu_{1/2}^N$ にとった平衡系に関する平均を表し、sup は $m = 0, 1, \dots, 2K+1$ 及び $\omega \in \{0,1\}^{\Lambda_K^c}$ にわたってとる；また

$$\Delta_{K,m,\omega}(f,g) := -\langle f, L_{\Lambda_K,m,\omega}^{-1} g\rangle_{K,m} \quad (\langle f\rangle_{K,m} = \langle g\rangle_{K,m} = 0)$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$\Delta(f) := \Delta(f, f).$$

定理 2 *(中心極限定理の分散)*

$$\lim_{\substack{K\to\infty \\ m/2K\to\rho}} \Delta_{K,m,\omega}\left(D(\bar{\eta}_{0,K})A_K - B_K - H_K\right)\frac{1}{2K+1} = \frac{1}{2}\left\{\hat{c}(\rho;F) - \hat{c}(\rho)\right\}.$$

[定理 C の証明] 補題 1 で $G = G^K$, $M = \frac{1}{2}R(\cdot|F)$ ととりエントロピー不等式

$$E^{\mu}X \le \frac{1}{N\beta}\log E^{\nu}[e^{N\beta X}] + \frac{1}{N\beta}H^N(\mu|\nu) \quad (X \ge 0)$$

を適用すれば，証明すべき不等式の左辺は

$$T||J||_{\infty}^2\beta \limsup_{K\to\infty}\sup_{m,\omega}\left[(2K)\Delta_{K,m,\omega}(G_\omega) - R(\frac{m}{2K+1};F)\right] + \frac{C}{\beta}$$

でおさえられる．ところが $R(\rho;F) = \hat{c}(\rho;F) - \hat{c}(\rho)$ は ρ の連続関数であるから，結局、定理 C の証明は補題 1 及び定理 2 の証明に帰着されることがわかった． □

補題 1 は次節で、定理 2 は 5.3 節および 5.4 節に於いて証明される。

5.2 補題 1 の証明

補題 1 の証明には，Feyman-Kac の公式（8.2 節）及び Rayleight-Schrödinger 摂動理論でよく知られている第 1 固有値の評価（8.3 節）を用いる．

まず Feyman-Kac の公式（8.2 節）より

$$\frac{1}{N}\log E_{eq.}^N\left[\exp\left\{\int_0^T NW_{N,K}(\eta^N(t))dt\right\}\right] \le \frac{1}{N}\int_0^T \Omega_N(t)dt,$$

但し $\Omega_N(t)$ は次で与えられる：

$$\begin{aligned}\Omega_N(t) &= \sup_{\langle f^2\rangle_\nu=1}\left[\langle fNW_{N,K,t}f\rangle_\nu + \langle fN^2L_Nf\rangle_\nu\right] \\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X}^N)} E^{\mu}\left[NW_{N,K,t} - N^2I^N(\mu)\right].\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$W_{N,K,t}$ の定義から，

$$\begin{aligned} E^{\mu}W_{N,K,t} &= E^{\mu}\left[\sum_{x=1}^{N}\left\{J(t,\frac{x}{N})\tau_x G - \frac{1}{N}M(\bar{\eta}_{x,K})J^2(t,\frac{x}{N})\right\}\right] \\ &\leq \sum_{x=1}^{N}\sup_{l} E^{\mu}\left[l\tau_x G - \frac{1}{N}M(\bar{\eta}_{x,K})l^2\right]. \end{aligned}$$

一方 $I_{\Lambda_K}(\mu) = \sum_{x=-K}^{K-1} I_{x,x+1}(\mu)$ とおくと，

$$I^N(\mu) = \sum_{x=1}^{N} I_{x,x+1}(\mu) = \frac{1}{2K}\sum_{x=1}^{N} I_{\Lambda_K}(\tau_x\mu).$$

これらを代入すれば，

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\int_0^T \Omega_N(t)dt &\leq T\sum_{x=1}^{N}\sup_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_N)}\sup_{|l|\leq||J||_\infty}\left[E^{\tau_x\mu}\{lG - \frac{1}{N}l^2M(\bar{\eta}_{0,K})\} - \frac{1}{2K}I_{\Lambda_K}(\tau_x\mu)\right] \\ &\leq T\sup_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_N)}\sup_{|l|\leq||J||_\infty}\left[E^{\mu}[NlG - l^2M(\bar{\eta}_{0,K})] - \frac{N^2}{2K}I_{\Lambda_K}(\mu)\right]. \end{aligned}$$

右辺の平均は，まず $\omega = \eta|_{\Lambda_K^c}$ が与えられたとした条件付き平均を先にとってから計算する．これに応じて，$L_{\Lambda_K,\omega}$ に対するエントロピー生成率 $I_{\Lambda_K,\omega}$ を用いて

$$I_{\Lambda_K}(\mu) = \int I_{\Lambda_K,\omega}(\mu(.|\omega))\mu_{\Lambda_K^c}(d\omega)$$

と表現しておけば

$$\frac{1}{N}\int_0^1 \Omega_N(t)dt \leq \sup_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_K)}\sup_{|l|\leq||J||_\infty}\sup_{\omega}\left\{E^{\mu}\left[NlG_\omega - l^2M(\bar{\eta}_{0,K})\right] - \frac{N^2}{2K}I_{\Lambda_K,\omega}(\mu)\right\}$$

を得る. ($\mathcal{X}_K := \{0,1\}^{\Lambda_K}$.) $\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_K)$ を $\mu_m\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_{K,m})$ に分解して

$$\mu = \sum_{m=0}^{2K+1} p_m\mu_m, \quad p_m = \mu(\mathcal{X}_{K,m})$$

と表せば，$I_{\Lambda_K,\omega}(\mu) = \sum_m p_m I_{\Lambda_K,\omega}(\mu_m)$ である．これを上の不等式に代入し，

$$\Omega_N^{m,K,\omega} = \sup_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X}_{\Lambda_{K,m}})} E^{\mu}\left[\frac{2Kl}{N}G_\omega - I_{\Lambda_K,\omega}(\mu)\right]$$

とおけば，

$$\frac{1}{N}\int_0^1 \Omega_N(t)dt \leq \sup_{|l|\leq||J||_\infty}\sup_{\omega}\sup_{0\leq m\leq 2K+1}\left\{\frac{N^2}{2K}\Omega_N^{m,K,\omega} - l^2M(\frac{m}{2K+1})\right\}.$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

ここで，$\Omega_N^{m,K,\omega}$ は $L_{\Lambda_K,\omega}+\frac{2Kl}{N}G_\omega$ の第一固有値であり，$\langle G_\omega\rangle_{K,m}=0$ であるから，Rayleigh-Schrödinger 摂動理論（8.3 節）より，

$$\begin{aligned}\Omega_N^{m,K,\omega} &\leq \Delta_{K,m,\omega}\left(\frac{2Kl}{N}G_\omega\right)+O(\frac{1}{N^3})\\ &= \frac{(2K)^2l^2}{N^2}\Delta_{K,m,\omega}(G_\omega)+O(\frac{1}{N^3}).\end{aligned}$$

以上から，

$$\begin{aligned}&\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log E_{eq.}\left[\exp[N\int_0^T W_{N,K,T}(\eta^N(t))dt]\right]\\ &\leq T||J||_\infty^2\sup_{m,\omega}\left[(2K)\Delta_{K,m,\omega}(G_\omega)-M(\frac{m}{2K+1})\right].\end{aligned}$$

□

5.3 閉形式とその特徴付け

この節では次節で行う定理２（分散の評価）の証明で本質的な役割を演じる定理（定理４）を準備する。証明には作用素 $L_{\Lambda.\omega}$ の０でない最初の固有値の評価（spectral gap）を用いる。

区間 Λ が与えられているとする。$\{\eta(k)\}_{k=0}^n$ をΛ 上の配置の有限列 とする。或るボンド の列 $b(1),b(2),\ldots,b(n)\subset\Lambda$ が在って，$k=1,2,\ldots,n$ に対し

$$\eta(k)=\eta^{b(k)}(k-1)$$

となる時この $\{\eta(k)\}_{k=0}^n$ を鎖と呼び，特に $\eta(0)=\eta(n)$ の時、閉鎖と呼ぶ.（ボンド $b=\{x,x+1\}$ に対し $\eta^b=\eta^{x,x+1}$.）関数族 $\{\Psi^b\}_{b\subset\Lambda}$，$\Psi^b\in L^2(\nu)$, は任意の有限な閉鎖 $\{\eta(k)\}_{k=0}^n$ に対して，

$$\sum_{k=1}^n\Psi^{b(k)}(\eta(k-1))=0 \tag{5.1}$$

を満たすならば，Λ 上で閉じている又はΛ 上の閉形式であるという.

もし $\{\Psi^b\}$ が Λ 上の閉形式ならば (5.1) で $n=2$ の場合を考えれば，$b(1)=b(2)$ になり任

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

意のボンド $b \subset \Lambda$ で

$$\Psi^b(\eta^b) = -\Psi^b(\eta)$$

となる.

補題 3 Ψ^b が Λ 上の閉形式ならば鎖 $\{\eta(k)\}_{k=0}^n$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{n} \Psi^{b(k)}(\eta(k-1)) \tag{5.2}$$

は最初と最後の配置 $\eta(0)$ と, $\eta(n)$ のみによって決定される（つまり途中の経路によらない）. したがって各 $\mathcal{X}_{\Lambda,m} = \{\eta \in \mathcal{X}_\Lambda | \, |\eta| = m\}, (0 \le m \le |\Lambda|)$ 上に関数 G がとれて

$$\sum_{k=1}^{n} \Psi^{b(k)}(\eta(k-1)) = G(\eta(n)) - G(\eta(0))$$

を満たす. 特に,

$$\Psi^b = \pi_b G$$

と書くことができる. 逆にこの形で与えられた $\{\Psi^b\}$ は閉形式である.

[証明] $\eta(0)$ から $\eta(n)$ への経路が 2 つあったときに (5.2) の和が等しいことを示す. 2 つの経路を

$$\eta(0) \to \eta(1) \to \ldots \to \eta(n)$$
$$\eta(0) \to \eta'(1) \to \ldots \to \eta'(n'),$$

但し $\eta(n) = \eta'(n')$, とする. 長さ $n + n'$ の鎖として,

$$\eta(0) \to \eta(1) \to \ldots \to \eta(n) \to \eta'(n'-1) \to \ldots \to \eta'(1) \to \eta(0)$$

をとると, この鎖は閉じている, したがって

$$\sum_{i=1}^{n+n'} \Psi^{b(i)}(\eta(i-1)) = 0.$$

ところで $\Psi^b(\eta^b) = -\Psi^b(\eta)$ だから,

$$\sum_{i=1}^{n'} \Psi^{b'(i)}(\eta'(i-1)) = -\sum_{i=n+1}^{n+n'} \Psi^{b(i)}(\eta(i-1)).$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

これをすぐ上の式に代入すれば,

$$\sum_{i=1}^{n'} \Psi^{b'(i)}(\eta'(i-1)) = \sum_{i=1}^{n} \Psi^{b(i)}(\eta(i-1)).$$

よって補題は証明された. □

定理 4 $\Psi \in L^2(\nu_\rho)$ とする. $\{\Psi^{x,x+1} = \tau_x\Psi, x \in \mathbf{Z}\}$ が $\mathbf{Z}$ 上の閉形式ならば $\Psi \in \overline{\{\Psi_F : F \in C_0(\mathcal{X})\}}$ である. 但し $\overline{A}$ は $L^2(\nu_\rho)$-ノルム に関する $A \subset L^2(\nu_\rho)$ の閉包を表す. (容易にわかるように逆も成り立つ.)

[証明] 第1段. $\Psi \in L^2(\nu_\rho)$ かつ $\{\Psi^{x,x+1} = \tau_x\Psi, x \in \mathbf{Z}\}$ は $\mathbf{Z}$ 上の閉形式とする. 局所関数の列 F_n を適当に選んで Ψ_{F_n} が $L_2(\nu_\rho)$ において Ψ に強収束するようにできることを示す. ベルヌーイ測度 ν_ρ による平均を $\langle\cdot\rangle_\rho$ で、その条件付き平均を $\langle\cdot|\cdot\rangle_\rho$ で表す.

$$\Psi_{(n)}^{x,x+1} = \langle \Psi^{x,x+1} | \mathcal{F}_{\Lambda_n} \rangle_\rho \quad \left(\Psi^{x,x+1} = \tau_x \Psi\right)$$

とおく. 容易にわかるように$\Psi_{(n)}^{x,x+1}$ は Λ_n 上の閉形式である. 従って補題3より $\mathcal{X}_n = \{0,1\}^{\Lambda_n}$ 上の関数 g_n で

$$\begin{aligned} \pi_{x,x+1} g_n &= \Psi_{x,x+1}^{(n)} \\ \langle g_n | \, |\eta| &= m \rangle_\rho = 0 \qquad m = 0,1,2,\ldots 2n+1 \end{aligned}$$

を満たすものが存在する. F_n を次のようにとる:

$$F_n = \frac{1}{2n} \langle g_{2n} | \mathcal{F}_{\Lambda_n} \rangle_\rho.$$

Ψ_F の定義から,

$$\Psi_{F_n} = \frac{1}{2n} \sum_{x=-n}^{n-1} \tau_{-x} \Psi_{(n)}^{x,x+1} + \tau_{n+1}\pi_{-n,-n+1} F_n + \tau_{-n}\pi_{n,n+1} F_n$$

である. Jensen の不等式によって,

$$\langle (\Psi_{(n)}^{x,x+1})^2 \rangle_\rho \leq \langle \Psi^2 \rangle_\rho$$

であり $\tau_{-x}\Psi_{(n)}^{x,x+1} \to \Psi, n \to \infty$, だから, 境界項 $\tau_{n+1}\pi_{-n,-n+1}F_n + \tau_{-n}\pi_{n,n+1}F_n$ が 0 に収

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

束することを示せば Ψ_{F_n} が Ψ に $L^2(\nu_\rho)$-収束することがわかる.

第2段. 線型部分空間の弱収束閉包は強収束閉包と一致するから，境界項が 0 に弱収束することを示せばよい．それには境界項が L^2 で有界であることを言えば十分である．実際,

$$s_n^+ = \tau_{-n}\pi_{n,n+1}F_n, \quad s_n^- = \tau_{n+1}\pi_{-n,-n+1}F_n$$

とおくと $\eta_1 = \eta_0$ のとき $s_n^+ = s_n^- = 0$ であり，また $(\eta_1 - \eta_0)s_n^\pm$ の任意の極限点 $t^\pm$ は各々

$$|\eta_1 - \eta_0|, \{\eta_x | x < 0\} \text{ または } |\eta_1 - \eta_0|, \{\eta_x | x > 1\}$$

にのみ依存する関数である．$x < 0$ に対し

$$\langle (\pi_{x-1,x}s_n^+)^2 \rangle_\rho = \text{const}\langle_\rho \Psi^2 \rangle/(2n)$$

であるから，$\pi_{x-1,x}t^+ = 0, x < 0$．これは，$|\eta_1 - \eta_0| = 1$ で条件付ければ，t^+ は $\{\eta_x | x < 0\}$ の対称 (exchangeable) な関数であることを意味する．したがって Hewitt-Savage の 0-1 法則から，$|\eta_1 - \eta_0| = 1$ の下で t^+ は定数である．t^- についても同じことが言え,

$$\begin{aligned}
\langle t^+ + t^- \rangle_\rho &= \lim_{n\to\infty} \langle (\eta_1 - \eta_0)(s_n^+ + s_n^-) \rangle_\rho \\
&= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{x=-n}^{n-1} \langle (\eta_1 - \eta_0)\tau_{-x}\Psi_{x,x+1}^{(n)} \rangle_\rho \\
&= -\langle (\eta_1 - \eta_0)\Psi \rangle = 0
\end{aligned}$$

ゆえに境界項 $s_n^+ + s_n^-$ の任意の極限点は 0 でなければならない.

第3段. π_x を次のように定義する：

$$\pi_x f(\eta) = f(\eta^x) - f(\eta)$$

但し η^x は η において x での値を逆転したものである．$q = 1 - \rho$ とおくと，$F_n(\eta)$ は η_{n+1} の値によらないから,

$$\langle (\pi_{n,n+1}F_n)^2 \rangle_\rho = 2\rho q \langle (\pi_n F_n)^2 \rangle_\rho.$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

F_n の定義から,

$$\begin{aligned}
2n\pi_n F_n &= \pi_n \langle g_{2n} | \mathcal{F}_{\Lambda_n} \rangle_\rho \\
&= \pi_n \langle \eta_k g_{2n} | \mathcal{F}_{\Lambda_n} \rangle_\rho + \pi_n \langle (1-\eta_k) g_{2n} | \mathcal{F}_{\Lambda_n} \rangle_\rho \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} U_{n,k} + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} V_{n,k},
\end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
U_{n,k} &= \pi_n \langle \eta_k g_{2n} | \mathcal{F}_{\Lambda_n} \rangle_\rho \\
V_{n,k} &= \pi_n \langle (1-\eta_k) g_{2n} | \mathcal{F}_{\Lambda_n} \rangle_\rho .
\end{aligned}$$

$\left(\sum_{k=n+1}^{2n} U_{n,k} \right)^2$, $\left(\sum_{k=n+1}^{2n} V_{n,k} \right)^2$ は共に η_n によらないから,

$$\begin{aligned}
&\langle (\pi_n F_n)^2 \rangle_\rho \\
&\le 2\frac{1}{(2n)^2}\frac{1}{\rho} \left\langle \eta_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} U_{n,k} \right)^2 \right\rangle_\rho + 2\frac{1}{(2n)^2}\frac{1}{q} \left\langle (1-\eta_n) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} V_{n,k} \right)^2 \right\rangle_\rho .
\end{aligned}$$

一般に

$$\eta_n \pi_n (\eta_k g_{2n}) = \eta_n \eta_k (\pi_n - \pi_k + \pi_k) g_{2n}, \quad (k \neq n)$$
$$\langle \eta_k \pi_k F | \mathcal{F}_{Z\setminus\{k\}} \rangle_\rho = \langle \frac{1}{q} (\rho - \eta_k) F | \mathcal{F}_{Z\setminus\{k\}} \rangle_\rho$$

が成り立つから,

$$\eta_n U_{n,k} = \langle \eta_n \eta_k (\pi_n - \pi_k) g_{2n} | \mathcal{F}_{\Lambda_n} \rangle_\rho + \eta_n \langle \frac{1}{q} (\rho - \eta_k) g_{2n} | \mathcal{F}_{\Lambda_n} \rangle_\rho .$$

さらに、一般に

$$\left\langle \eta_n \eta_k \left((\pi_n - \pi_k) F \right)^2 \right\rangle_\rho = \frac{\rho}{2q} \left\langle (\pi_{n,k} F)^2 \right\rangle_\rho$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned}
\langle \eta_n \eta_k ((\pi_n - \pi_k) g_{2n})^2 \rangle_\rho &= \frac{\rho}{2q} \langle (\pi_{n,k} g_{2n})^2 \rangle_\rho \\
&\le \frac{\rho}{2q} (2(k-n)) \sum_{x=n+1}^{k-1} \langle (\pi_{x,x+1} g_{2n})^2 \rangle_\rho .
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

ここで作用素 $\sum_{x=n+1}^{2n} \pi_{x,x+1}$ のスペクトルの飛びが n^{-2} より大きいこと（8.5 節参照）を用いれば,

$$\langle (\pi_{x,x+1} g_{2n})^2 \rangle_\rho \leq \langle \Psi^2 \rangle_\rho,$$

$$\langle g_{2n} | |\eta| = m \rangle_\rho = 0$$

に注意して,

$$\langle g_{2n}^2 \rangle_\rho \leq c(2n)^2 \sum_{x=n+1}^{2n} \langle (\pi_{x,x+1} g_{2n})^2 \rangle_\rho \leq c' n^3 \langle \Psi^2 \rangle_\rho$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \langle \eta_n (\frac{1}{n} \sum U_{n,k})^2 \rangle_\rho &\leq 4\rho \frac{1}{2q} \langle \Psi^2 \rangle_\rho + \frac{2}{q^2} \frac{1}{n^2} \left\langle \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} (\rho - \eta_k) \right)^2 \right\rangle_\rho \langle (g_{2n})^2 \rangle_\rho \\ &\leq c'' \langle \Psi^2 \rangle_\rho. \end{aligned}$$

同様に

$$\frac{1}{n^2} \langle (1-\eta_n)(\frac{1}{n} \sum V_{n,k})^2 \rangle_\rho \leq c'' \langle \Psi^2 \rangle_\rho.$$

よって $\pi_{n,n+1} F_n$ は $L^2(\nu_\rho)$ で有界である．$\pi_{-n,-n+1} F_n$ の有界性も同様に示される． □

5.4 局所系における中心極限定理の分散

5.1 節で定義したように

$$\begin{aligned} A_K &= \eta_K - \eta_{-K} = \sum_{x=-K}^{K-1} (\eta_{x+1} - \eta_x) \\ B_K = B_{K,\omega}(\xi) &= \sum_{x=-K}^{K-1} c_{x,x+1}(\eta_{x+1} - \eta_x) = -L_{\Lambda_K,\omega} \{ \sum_{x=-K}^{K} x\eta_x \} \\ H_K = H_{K,\omega}(\xi) &= \sum_{x=-K+n}^{K-n} \tau_x (L^N F) = L_{\Lambda_K,\omega} \sum_{x=-K+n}^{K-n} \tau_x F \end{aligned}$$

と置く．但し $F = F(\eta_{-n}, \ldots, \eta_n)$ である．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

演習 1 次を示せ：

1. $G = G(\eta)$ に対して，

$$\pi_{x,x+1}\tau_y G = \tau_y \pi_{x-y,x-y+1} G.$$

2. $-K \le x < K$ に対して，

$$\begin{aligned}\pi_{x,x+1}\left\{\sum_{y=-K}^{K} y\eta_y\right\} &= -(\eta_{x+1}-\eta_x)\\ \pi_{x,x+1}\left\{\sum_{n-K}^{K-n}\tau_y F\right\} &= \tau_x \Psi_F\end{aligned}$$

但し，$\Psi_F = \pi_{0,1}\sum_y \tau_y F \quad \left(= \sum_y \tau_y \pi_{-y,-y+1} F\right)$ とする．

命題 5 次の等式が成り立つ：

$$\lim_{\substack{K\to\infty\\ m\to\infty\\ m/2K\to\rho}} \frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}\left(B_{K,\omega}-H_{K,\omega}\right) = \frac{\hat{c}(\rho;F)}{2}. \tag{5.3}$$

$$\lim_{\substack{K\to\infty\\ m\to\infty\\ m/2K\to\rho}} \frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}\left(A_K, B_{K,\omega}-H_{K,\omega}\right) = \chi(\rho). \tag{5.4}$$

[証明] 恒等式

$$\begin{aligned}&\Delta_{K,m,\omega}(f,g) = \langle f(-L_{\Lambda_K,\omega})^{-1}g\rangle_{K,m}\\ &\Delta_{K,m,\omega}(L_{\Lambda_K,\omega}f) = -\langle L_{\Lambda_K,\omega}f,f\rangle_{K,m} = \mathcal{D}_{K,m,\omega}(f)\\ &\Delta_{K,m,\omega}(-L_{\Lambda_K,\omega}f,g) = -\langle f,g\rangle_{K,m}\\ &B_{K,\omega}-H_{K,\omega} = -L_{\Lambda_K,\omega}\left(\sum_{x=-K}^{K} x\eta_x + \sum_{x=-K+n}^{K-n}\tau_x F\right)\end{aligned}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{K\to\infty\\ m\to\infty\\ m/2K\to\rho}} \frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}\left(B_{K,\omega}-H_{K,\omega}\right) &= \lim_{\substack{K\to\infty\\ m\to\infty\\ m/2K\to\rho}} \frac{1}{2K}\mathcal{D}_{K,m,\omega}\left(\sum_{x=-K}^{K} x\eta_x + \sum_{x=-K+n}^{K-n}\tau_x F\right)\\ &= \frac{1}{2}\langle(\eta_1-\eta_0-\Psi_F)^2 c\rangle_\rho = \frac{\hat{c}(\rho;F)}{2}.\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

同様に

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}(A_K, B_K - H_K) \\
&= \frac{1}{2K}\left\langle\left((\eta_K - \eta_{-K})\left\{\sum_{x=-K}^{K} x\eta_x + \sum_{x=-K+n}^{K-n}\tau_x F\right\}\right)\right\rangle_{K,m} \\
&= \frac{1}{2K}\Bigg\{\langle(\eta_K - \eta_{-K})(K\eta_K - K\eta_{-K})\rangle_{K,m} + \langle(\eta_K - \eta_{-K})(\tau_{K-n}F + \tau_{-K+n}F)\rangle_{K,m} \\
&\quad + \left\langle(\eta_K - \eta_{-K})\left(\sum_{x=-K+1}^{K-1} x\eta_x + \sum_{x=-K+n+1}^{K-n-1}\tau_x F\right)\right\rangle_{K,m}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

$F = F(\eta_{-n}, \dots \eta_n)$ だから，$G := \left(\sum_{x=-K+1}^{K-1} x\eta_x + \sum_{x=-K+n+1}^{K-n-1}\tau_x F\right)$ は $\mathcal{F}_{\Lambda_{K-1}}$-可測，したがって，

$$
\langle(\eta_K - \eta_{-K})G\rangle = -\frac{1}{2}\langle\pi_{K,-K}(\eta_K - \eta_{-K})G\rangle = -\frac{1}{2}\langle(\eta_K - \eta_{-K})\pi_{K,-K}G\rangle = 0
$$

結局

$$
\frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}(A_K, B_K - H_K) = \rho(1-\rho) = \chi(\rho).
$$

□

定理 6 $\hat{c}(\rho)$ は $\rho \in [0,1]$ の連続関数で、しかも

$$
\lim_{\substack{K\to\infty \\ m\to\infty \\ m/2K\to\rho}} \frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}(A_K) = \frac{2\chi^2(\rho)}{\hat{c}(\rho)} = \frac{\chi(\rho)}{D(\rho)}.
$$

系 7

$$
\lim_{\substack{K\to\infty \\ m\to\infty \\ m/2K\to\rho}} \frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}\left(D(\frac{m}{2K})A_K - B_{K,\omega} + H_{K,\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{c}(\rho;F) - \hat{c}(\rho)\right)
$$

$$
D(\rho) = \frac{\hat{c}(\rho)}{2\chi(\rho)}.
$$

[系の証明]　命題 5，定理 6 及び次式より明らか：

$$
D^2\frac{\chi}{D} - 2D\chi + \frac{1}{2}\hat{c}(\rho;F) = \frac{1}{2}\left(\hat{c}(\rho;f) - \hat{c}(\rho)\right).
$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

□

[定理 6 の証明] まず $\Delta_{K,m,\omega}$ が非負定値な 2 次形式であるから,

$$|\Delta_{K,m,\omega}(A_K,u)|^2 \le \Delta_{K,m,\omega}(A_K)\Delta_{K,m,\omega}(u)$$

$u = B_K - H_K$ とおいて, $K \to \infty$ とすれば命題 5 により

$$\lim_{\substack{K\to\infty\\ m\to\infty\\ m/2K\to\rho}} \frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}(A_K) \ge \frac{2\chi^2(\rho)}{\hat{c}(\rho;F)}.$$

F は任意だから

$$\lim_{\substack{K\to\infty\\ m\to\infty\\ m/2K\to\rho}} \frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}(A_K) \ge \frac{2\chi^2(\rho)}{\hat{c}(\rho)}. \tag{5.5}$$

定理 6 の本質的部分は逆向きの不等式

$$\lim_{\substack{K\to\infty\\ m\to\infty\\ m/2K\to\rho}} \frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}(A_K) \le \frac{2\chi^2(\rho)}{\hat{c}(\rho)} \tag{5.6}$$

である. これが示せれば特に $\hat{c}$ の連続性がわかる. 実際 $\hat{c}(\rho)$ は, 連続関数の族の下限であるから, 上半連続である. 一方 (5.5) の左辺は上半連続だから, (5.5) と (5.6) から, $\hat{c}$ の下半連続性が従う. ゆえに $\hat{c}$ は連続.

さて (5.6) の証明のために

$$\begin{aligned} a_{K,m,\omega} &:= \frac{1}{2K}\Delta_{K,m,\omega}(A_K), \\ a(\rho) &= \limsup_{\substack{K\to\infty\\ m\to\infty\\ m/2K\to\rho}} a_{K,m,\omega}, \\ F_{K,m,\omega} &:= \left[(L_{\Lambda_K,\omega}|_{|\xi|=m})^{-1}A_K\right] \times \left(-\frac{\chi(\rho)}{a_{K,m,\omega}}\right) \end{aligned}$$

と置く. 次の等式はこの定義から自明である. 以下簡単のために添字 ω は省略する.

$$\frac{1}{2K}\langle A_K, F_{K,m}\rangle_{K,m} = \chi(\rho)$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$\frac{1}{2K}\mathcal{D}_{K,m}(F_{K,m}) = \frac{\chi^2(\rho)}{a_{K,m}}. \tag{5.7}$$

但し、$\mathcal{D}_{K,m} = \mathcal{D}_{K,m,\omega}$ は $L_{\Lambda_K,m,\omega}$ に対応する Dirichlet-形式である.

補題 8 K をとめるごとに, 列 $\{F_n^{(K)}\}_n$ があって, $F_n^{(K)} \in \mathcal{F}_{\Lambda_K}$ かつ

$$\frac{1}{2K}\langle A_K, F_n^{(K)}\rangle_{n,m} = \chi(\rho)$$
$$\frac{1}{2K}\mathcal{D}_{n,m}(F_n^{(K)}) \le \frac{\chi^2(\rho)}{a_{n,m}}(1+o(1))$$

但し $o(1) \to 0$ $(n \to \infty)$ である.

[証明] 次のように $\alpha_{i,i+1}^{(n)}, \beta_{i,i+1}^{(n)}$ を定義する：

$$\alpha_{i,i+1}^{(n)} = \langle(\eta_{i+1} - \eta_i)F_{n,m}\rangle_{n,m}$$
$$\beta_{i,i+1}^{(n)} = \langle c_{i,i+1}(\pi_{i,i+1}F_{n,m})^2\rangle_{n,m}.$$

(5.7) 式から,

$$\sum_{i=-n}^{n-1} \alpha_{i,i+1}^{(n)} = \langle A_n, F_{n,m}\rangle_{n,m} = 2n\chi$$
$$\sum_{i=-n}^{n-1} \beta_{i,i+1}^{(n)} = \mathcal{D}_{n,m}(F_{n,m}) = 2n\frac{\chi^2}{a_{n,m}}$$

であり, また

$$|\alpha_{i,i+1}^{(n)}| \le \langle\pi_{i,i+1}F_{n.m}\rangle_{n,m} \le \sqrt{\langle(\pi_{i,i+1}F_{n,m})^2\rangle_{n,m}} \le C\sqrt{\beta_{i,i+1}^{(n)}} \le C\sqrt{\sum \beta_{i,i+1}^{(n)}} \le C'\sqrt{n}$$

である. ここで最後の不等式には定理の証明の最初に示した, $a_{n,m}$ の下からの評価を用いた. $[-n, n]$ の両端を c の依存領域分 (長さを $q = 2R+1$ とする) だけ外して, 大きさ $2K$ のブロック $b_1, b_2, \ldots b_l$ と余り E にわけ (E の中には最初に外した分も入れておく),

$$g_r = \sum_{(i,i+1)\in b_r} \alpha_{i,i+1}^{(n)}$$
$$G_r = \sum_{(i,i+1)\in b_r} \beta_{i,i+1}^{(n)},$$
$$M = \max_{1\le r\le l} \frac{g_r}{\sqrt{G_r}}\frac{1}{\sqrt{2K}} \tag{5.8}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

とおくと，$g_r \leq M\sqrt{G_r}\sqrt{2K}$ だから

$$\begin{aligned}\sum g_r &\leq M\sqrt{2K}\sum\sqrt{G_r}\\ &\leq M\sqrt{2K}\sqrt{l}\sqrt{\sum G_r}\\ &\leq M\sqrt{2K}\sqrt{l}\sqrt{2n\chi^2\frac{1}{a_{n,m}}}\\ &\leq 2n\chi M\frac{1}{\sqrt{a_{n,m}}}\end{aligned}$$

残りの E の部分では，$\alpha_{i,i+1}^{(n)} \leq C'\sqrt{n}$ だから，

$$2n\chi = \sum \alpha_{i,i+1}^{(n)} \leq \sum g_r + 2(K+q)C'\sqrt{n} \leq 2n\chi M\frac{1}{\sqrt{a_{n,m}}} + 2(K+q)C'\sqrt{n}.$$

これより

$$M \geq \frac{(2n\chi - 2(K+q)C'\sqrt{n})\sqrt{a_{n,m}}}{2n\chi}.$$

したがって

$$M \geq (1-o(1))\sqrt{a_{n,m}},$$

但し $o(1) \to 0 \ \ (n \to \infty)$. (5.8) 式で最大値を与える r をとり，$F_{n,m}$ を規格化して，

$$\tilde{F}_n = \frac{2K\chi}{g_r}F_{n,m}$$

とおく．$F_{n,m}$ から g_r, G_r を決めたように，$\tilde{F}_n$ に対して $\tilde{g}_r, \tilde{G}_r$ を決めれば，

$$\begin{aligned}\tilde{g}_r &= 2K\chi\\ \tilde{G}_r &= \left(\frac{\tilde{g}_r}{M}\right)^2\frac{1}{2K} \leq 2K\frac{\chi^2}{a_{n,m}}.\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_{b_r}$ を b_r 上でつくられる σ-代数とし

$$\tilde{F}_n^{(K)} = \langle \tilde{F}_n | \mathcal{F}_{b_r}\rangle_{n,m}$$

と定義する．いま $\langle\cdot|\mathcal{F}\rangle_{n,m}$ と $\pi_{i,i+1}$ は $i, i+1 \in b_r$ ならば入れ替えが可能で，$\langle\cdot\rangle_{n,m}$ は，b_r 上と $[-K, K]$ 上で分布が等しいことに注意すれば，$\tilde{F}_n^{(K)}$ を平行移動して，$F_n^{(K)} \in \mathcal{F}_{\Lambda_K}$ になるようにとると，

$$\langle A_K, F_n^{(K)}\rangle_{n,m} = 2K\chi$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$\mathcal{D}_n(F_n^{(K)}) \leq 2K\frac{\chi^2}{a_{n,m}}(1+o(1))$$

となることがわかる. □

補題 9 補題 8 で構成した列 $F_n^{(K)}$ の適当な部分列をとれば，その極限 $F^{(K)}$ が存在して，以下を満たす.

$$\begin{aligned} F^{(K)} &\in \mathcal{F}_{\Lambda_K} \\ \langle A_K, F^{(K)}\rangle_\rho &= 2K\chi \\ \mathcal{D}(F^{(K)}) &\leq 2K\frac{\chi^2}{a}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

[証明] 補題 8 の $F_n^{(K)}$ に対し，各 K を止めるごとに，

$$\Psi_n^{x,x+1} := \pi_{x,x+1}F_n^{(K)} \quad (\{x,x+1\}\subset\Lambda_K)$$

は Λ_K における閉形式であり，かつ n に関し有界である．したがって、その収束する部分列の極限を $\Psi_\infty^{x,x+1}$ とすると，$\mathcal{F}_{\Lambda_K}$-可測な $F^{(K)}$ により $\Psi_\infty^{x,x+1} = \pi_{x,x+1}F^{(K)}$ と表せる．この部分列に沿って $a_{n,m}\to a(\rho)$ であるとしてさしつかえなく，この $F^{(K)}$ が求めるものである．□

補題 9 の $F^{(K)}$ を用いて，

$$\begin{aligned} \phi^{(K)} &:= \pi_{0,1}\left(\frac{1}{2K}\sum_{x=-K}^{K}\tau_x F^{(K)}\right) \\ &= \frac{1}{2K}\sum_{y=-K}^{K}\tau_y\pi_{-y,-y+1}F^{(K)} \end{aligned}$$

とおくと，Schwarz の不等式と (5.9) の第 3 式から，

$$\langle c_{0,1}|\phi^{(K)}|^2\rangle_\rho \leq 2\frac{\chi^2(\rho)}{a(\rho)}. \tag{5.10}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

そこで，$L^2(\nu_\rho)$ で弱収束するような $\phi^{(K)}$ の部分列を選び，その極限を ϕ とすると $\{\Phi^{x,x+1} := \tau_x\phi\}_{x\in\mathbf{Z}}$ は Z 上の閉形式である．なぜならば，

$$\tau_x\phi^{(K)} = \pi_{x,x+1}\left(\frac{1}{2K}\sum_{y=-K}^{K}\tau_y F^{(K)}\right) + \frac{1}{2K}\pi_{x,x+1}\left\{\left(\sum_{y=K+1}^{K+x} - \sum_{y=-K+x}^{-K-1}\right)\tau_y F^{(K)}\right\}$$

と書け，右辺第 2 項は

$$\langle|\pi_{x,x+1}F^{(K)}|\rangle_\rho = O(\sqrt{K})$$

より $K\to\infty$ とすると零に弱収束し，第 1 項は Z 上の閉形式に弱収束するからである．したがって定理 4 より $\Psi\in\overline{\{\Psi_F : F\in C_0(\mathcal{X})\}}$ と定数 α がとれて

$$\phi = \alpha(\eta_1-\eta_0)+\Psi$$

と書ける．$F^{(K)}$ の取り方から

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{2K}\langle A_K, F^{(K)}\rangle_\rho = \frac{1}{2K}\sum_{x=-K}^{K-1}\langle(\eta_{x+1}-\eta_x)F^{(K)}\rangle_\rho\\ &= -\frac{1}{4K}\sum_{x=-K}^{K-1}\langle(\eta_{x+1}-\eta_x)\pi_{x,x+1}F^{(K)}\rangle_\rho\\ &= -\frac{1}{2}\langle(\eta_1-\eta_0)\phi^{(K)}\rangle_\rho.\end{aligned}$$

$K\to\infty$ とすれば $\chi = -\frac{1}{2}\langle(\eta_1-\eta_0)\phi\rangle_\rho$．一方 $\pi_{0,1}\Psi = -2\Psi$ より容易に $\langle(\eta_1-\eta_0)\Psi\rangle_\rho = 0$ がわかる．したがって $\alpha=1$．即ち

$$\phi = -(\eta_1-\eta_0)+\Psi$$

となる．これと (5.10) より

$$\langle(\eta_1-\eta_0-\Psi)^2c\rangle_\rho = \langle\phi^2 c\rangle_\rho \le 2\frac{\chi^2(\rho)}{a(\rho)}.$$

ところで，

$$\hat{c}(\rho) = \inf_{F\in C_0}\langle(\eta_1-\eta_0-\Psi_F)^2c\rangle_\rho$$

だったので $a(\rho)\le\dfrac{2\chi^2(\rho)}{\hat{c}(\rho)}$ となる．即ち $\lim(2K)^{-1}\Delta_{K,m}(A_K)\le\dfrac{2\chi^2(\rho)}{\hat{c}(\rho)}$ がいえた． □

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第6章 Compactness argument による証明

概要: 過程 α_t^N のコンパクト性に基づいた主定理（定理 I ）の証明の概略を述べる．過程 α_t^N のコンパクト性（定理2）の証明は勾配系の場合と違ってかなり面倒で、ここでは省略する． また勾配置換え（定理C）において巨視的に無限小のブロック Λ_K を微視的に無限大のブロック $\Lambda_{\epsilon N}$ に入れ替えて述べ直す必要がある． これは2-ブロック評価と大偏差原理で用いられる方法を使って保証されるがその証明も省略する．これら省略した部分については [V93a] を参照されたい．勾配置き換えにおける誤差項の L^1 評価を，前と同様にエントロピー不等式により大偏差原理型の評価に帰着させる． そこでは $L^1(P)$ においてゼロになる量 $\int_0^T \sum_x J(t, \frac{x}{N})\tau_x L^N F(\eta^N(t))dt$ を評価すべき量につけ加えてやることが鍵になる．

命題 1 *(一般論)* 可測空間 $(S, \mathcal{F})$ 上の確率測度全体を $\mathcal{P}(S, \mathcal{F})$ とする．$\nu \in \mathcal{P}(S, \mathcal{F})$ とし，$\mathcal{A}$ を可測関数からなる集合で，任意の $F \in \mathcal{A}$ に対して，定数 $c(F)$ があって，

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log E^\nu[e^{NF}] \le C(F),$$

とする．このとき任意の列 $\mu_N \in \mathcal{P}(S, \mathcal{F})$ に対し，$\mathcal{A}$ が有限集合であれば

$$\limsup_{N\to\infty} E^{\mu_N}\left[\sup_{F\in\mathcal{A}}(F - C(F))\right] \le \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} H(\mu_N|\nu);$$

特に μ_N の極限点 μ に対しては，$\mathcal{A}$ が無限集合であっても

$$E^\mu[\sup_{F\in\mathcal{A}}(F - C(F))] \le \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} H(\mu_N|\nu).$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

[証明] $\mathcal{A}=\{F_i\}_{i=1}^n$ として，$\bar{F}_i = F_i - C(F_i)$ とおくと，

$$\log E^{\nu}\left[\exp\{N\max_i \bar{F}_i)\}\right] \le \log\left\{\sum_{i=1}^n E^{\nu}[\exp N\bar{F}_i]\right\}.$$

また

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\left\{E^{\nu}[\exp N\bar{F}_i]\right\} \le 0.$$

ゆえにエントロピー不等式

$$E^{\mu_N}\left[\max_i \bar{F}_i\right] \le \frac{1}{N}\log E^{\nu}\left[\exp\left\{N\max_i \bar{F}_i\right\}\right] + \frac{1}{N}H(\mu_N|\nu)$$

において $N\to\infty$ とすれば求める不等式を得る. □

さて (3.2)、(3.3) から、任意の $J\in C^{\infty}(\mathbf{T})$ に対して

$$\langle\alpha_t^N, J\rangle - \langle\alpha_0^N, J\rangle = -\sum_{x=1}^N \nabla_N J(\frac{x}{N})\int_0^t c_{x,x+1}(\eta^N)(\eta_{x+1}^N - \eta_x^N)ds + o(1)$$

であった. 特に

$$\beta_t^N(d\theta) = \sum_{x=1}^N \int_0^t c_{x,x+1}(\eta^N(s))(\eta_{x+1}^N(s) - \eta_x^N(s))ds\,\delta_{\frac{x}{N}}(d\theta)$$

とおけば,

$$\langle\alpha_t^N, J\rangle - \langle\alpha_0^N, J\rangle = -\int_{\mathbf{T}} J'(\theta)\beta_t^N(d\theta)$$

と表される. 次の定理は Garcia-Rodemich-Rumsey の定理（例えば [SV 1979] 参照）を用いて証明される（証明は略す）.

定理 2 $\mathbf{T}$ 上の符号付き有界測度の空間 $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ に値をとる確率過程として α_t^N, β_t^N $(0\le t\le T)$ は緊密である.

確率過程 α_t^N, β_t^N が誘導する $D([0,t]\to(\mathcal{M}(\mathbf{T}))^2)$ 上の確率測度を Q^N とする.

補題 3 Q^N の任意の極限点 Q の下では可測関数 $\rho(t,\theta), \gamma(t,\theta)$ があって,

$$\alpha_t(d\theta) = \rho(t,\theta)d\theta,$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$\beta_t(d\theta) = \int_0^t \gamma(s,\theta)dsd\theta,$$
$$E^Q\left[\int_0^T \int_{\mathbf{T}} \gamma^2(t,\theta)d\theta dt\right] < \infty.$$

さらに，$\rho(t,\theta)$ は下記の意味で θ に関する偏導関数 $\rho_\theta(t,\theta)$ を持つ：

$$\int_0^t \int_{\mathbf{T}} J_\theta(s,\theta)\rho(s,\theta)d\theta ds = -\int_0^t \int_{\mathbf{T}} J(s,\theta)\rho_\theta(s,\theta)d\theta ds,$$
$$E^Q\left[\int_0^T \int_{\mathbf{T}} \rho_\theta^2(t,\theta)d\theta dt\right] < \infty.$$

[証明]　関数 $J = J(t,\theta)$ に対して，

$$\begin{aligned} F &:= \int_0^T \sum_{x=1}^N J(s,\frac{x}{N})c_{x,x+1}(\eta^N(s))(\eta^N_{x+1}(s) - \eta^N_x(s))ds \\ &= \int_0^T \int_{\mathbf{T}} J(s,\theta)d_s\beta^N_s(d\theta) \end{aligned}$$

($d_s\beta_s$ は β_s の Stiltjes 微分を表す)，β^N が $D([0,T] \to \mathcal{M}(\mathbf{T})$ 上に誘導する分布を μ^N として命題 1 を適用する．$L^2(\mathcal{X}_N)$ 上の作用素

$$N^2 L_N + \sum_{x=1}^N J(s,\frac{x}{N})c_{x,x+1}(\eta^N(s))(\eta^N_{x+1}(s) - \eta^N_x(s))$$

の第 1 固有値を $\Omega_N(s)$ とすると，

$$\frac{1}{N}\log E^\nu[e^{NF}] \le \frac{1}{N}\int_0^T \Omega_N(s)ds.$$

ところで $\Omega_N(s)$ は

$$\Omega_N(s) = \sup_{\langle f\rangle=1, f\ge 0}\left\{E^{fd\nu}[N\sum J(s,\frac{x}{N})c_{x,x+1}(\eta_{x+1}-\eta_x)] - N^2 I^N(f)\right\}$$

と書ける．また

$$I^N(f) = \mathcal{D}^N(\sqrt{f}) = \sum_x c_{x,x+1}(\pi_{x,x+1}\sqrt{f})^2$$
$$E^{fd\nu}[N\sum J(s,\frac{x}{N})c_{x,x+1}(\eta_{x+1}-\eta_x)] = -\frac{1}{2}\langle N\sum J(s,\frac{x}{N})c_{x,x+1}(\eta_{x+1}-\eta_x)\pi_{x,x+1}f\rangle_\nu$$
$$\pi_{x,x+1}f(\eta) = \left(\sqrt{f}(\eta^{x,x+1}) + \sqrt{f}(\eta)\right)\pi_{x,x+1}\sqrt{f}(\eta).$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

そこで，任意の $a, \xi \in \mathbf{R}, b > 0$ に対し $2a\xi - \xi^2 b^2 \leq a^2/b$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\Omega_N(s) &= \sup_f \sum_x \Big\langle -\frac{1}{2} N J(s, \frac{x}{N}) c_{x,x+1}(\eta_{x+1} - \eta_x) \left(\sqrt{f(\eta^{x,x+1})} + \sqrt{f(\eta)}\right) \pi_{x,x+1}\sqrt{f} \\ &\qquad - N^2 c_{x,x+1}(\pi_{x,x+1}\sqrt{f})^2 \Big\rangle_\nu \\ &\leq \sum_x J^2(s, \frac{x}{N}) \langle c_{x,x+1}(\eta_{x+1} - \eta_x)^2 f \rangle_\nu \\ &\leq M \sum J^2(s, \frac{x}{N}).\end{aligned}$$

それゆえ命題 1 から，

$$E^Q \left[\sup \left\{ \int_0^T \int_0^1 J(s,\theta) ds \beta_s(d\theta) - M \int_0^T \int_0^1 J^2(s,\theta) d\theta ds \right\} \right] \leq C.$$

ところが、一般に $[0,T] \times \mathbf{T}$ 上の測度 $\mu = \mu(dtd\theta)$ に対して，

$$\sup_\varphi \left[2 \int \varphi(\theta, t) d\mu(t,\theta) - \int \varphi^2(t,\theta) d\theta dt \right] < \infty$$

ならば $\gamma(\theta, t)$ があって，$d\mu(\theta, t) = \gamma(\theta, t) d\theta dt$ かつ $\sup_\varphi [2 \int \varphi d\mu - \varphi^2 d\theta dt] = \int \gamma^2 d\theta dt$ である．従って命題の $\gamma(t, \theta)$ についての補題 3 の評価がいえた．

同様の議論を

$$F = \langle \alpha_t^N, \frac{\partial}{\partial \theta} J \rangle \sim \sum (\eta_x - \eta_{x+1}) J(t, \frac{x}{N})$$

に対して行えば，

$$E^Q \left[\sup_J \left\{ \int_0^T \int_{\mathbf{T}} \frac{\partial}{\partial \theta} J(s,\theta) \rho(s,\theta) d\theta ds - M' \int_0^T \int_{\mathbf{T}} J^2(s,\theta) d\theta ds \right\} \right] \leq C$$

を得る．これより $E^Q[\int_0^T \int_{\mathbf{T}} \rho_\theta^2 d\theta ds] < \infty$. □

上の補題から，

$$\begin{aligned}\alpha_t^N(J) - \alpha_0^N(J) &= -\int_0^t J'(\theta) \beta_t^N(d\theta) \\ &\to -\int_0^t \int_{\mathbf{T}} J'(\theta) \gamma(s,\theta) d\theta ds \quad (N \to \infty)\end{aligned}$$

だから，

$$\gamma(t,\theta) = D(\rho(t,\theta)) \rho_\theta(t,\theta) \quad \text{a.s.}(Q)$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

がいえれば 極限の方程式 (2.2) が得られることになる.

補題 4

$$\lim_{N\to\infty} E\left|\int_0^T \sum_x J(t,\frac{x}{N})\tau_x L^N F(\eta^N(t))dt\right| = 0$$

[証明] 下記の 2 つの等式より明らかである：

$$\frac{1}{N^2}E\sum J(t,\frac{x}{N})\tau_x F\left(\eta^N(t)\right)\Big|_0^T$$
$$= \frac{1}{N^2}\int_0^T \sum J_t(t,\frac{x}{N})\tau_x F + \int_0^T \sum J(t,\frac{x}{N})L^N\tau_x F + M_N(t)$$
$$E|M_N(t)|^2 = O(\frac{1}{N^2})$$

□

本章においても勾配置換えが本質的である. 但し、ここでは K を εN に置き替える必要がある. そこで

$$\begin{aligned} U(\eta) &= \sum_{x=1}^N J(t,\frac{x}{N})\frac{\tau_x A_{\varepsilon N}}{2N\varepsilon+1}D(\bar\eta_{x,N\varepsilon}) - \sum_{x=1}^N J(t,\frac{x}{N})c_{x,x+1}(\eta)(\eta_{x+1}-\eta_x) \\ &\quad - \sum_{x=1}^N J(t,\frac{x}{N})L_N(\tau_x F) - \frac{1}{2}\sum_{x=1}^N J^2(t,\frac{x}{N})R(\bar\eta_{x,\varepsilon N};F) \end{aligned}$$

と置く. 右辺第 3 項の時間積分は補題 4 より 0 に L^1 収束するので、右辺全体の確率収束での極限では消えてしまう項である. しかし 5 章でみたように、大偏差原理型の評価ではこの項をつけ加えておくことが重要な意味を持つ.

再びエントロピー不等式により

$$\int_0^T E^{\mu_N}U(\eta^N(t))dt \le \frac{1}{N}\log E^\nu\left[\exp\left\{\int_0^T NU(\eta^N(s))ds\right\}\right] + C.$$

2 ブロック評価と定理 C を基礎にした計算により

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log E^\nu\left[\exp\left\{\int_0^T NU(\eta^N(s))ds\right\}\right] = 0$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

を示すことができる.（詳細は [V93a] をみよ.）一方、順次 $N \to \infty, k \to \infty$ とするとき

$$\frac{\tau_x A_{N\varepsilon}}{2N\varepsilon+1} \sim \frac{1}{N}\frac{1}{2\varepsilon}(\bar{\eta}_{x+N\varepsilon,k} - \bar{\eta}_{x-N\varepsilon,k})$$

となるから、$\int_0^T U(\eta^N(t))dt$ の第1項の極限は Q の下で

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbf{T}} J(t,\theta)\frac{\rho(t,\theta+\varepsilon)-\rho(t,\theta-\varepsilon)}{2\varepsilon} D\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\rho(t,r)dr\right)d\theta dt \\ &\quad \to \int_0^T \int_{\mathbf{T}} J(t,\theta)\rho_\theta(t,\theta)D(\rho(t,\theta))d\theta dt.\end{aligned}$$

第2項は $\int_0^T\int_{\mathbf{T}} J(t,\theta)dt\beta_t^N(d\theta)$ と書けるから，その極限は Q の下で $\int_0^T\int_{\mathbf{T}} J(t,\theta)\gamma(t,\theta)dtd\theta$ となる. したがって、全ての滑らかな関数 J に対して,

$$\begin{aligned}E^Q\Bigg[&\int_0^T\int_{\mathbf{T}} J(t,\theta)[D(\rho(t,\theta))\rho_\theta(t,\theta)-\gamma(t,\theta)]d\theta dt \\ &-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbf{T}} J^2(t,\theta)R(\rho(t,\theta);F)d\theta dt\Bigg] \le C.\end{aligned}$$

ここで

補題 5 （証明は [$FUY95$] 参照）

$$\inf_{F\in C_0}\sup_{\rho} R(\rho;F) = 0.$$

を用いれば

$$E^Q\left[\int_0^T\int_{\mathbf{T}} J(t,\theta)[D(\rho(t,\theta))\rho_\theta(t,\theta)-\gamma(t,\theta)]d\theta dt\right] \le C.$$

ところが、テスト関数 J は任意だからこの積分下の $[\cdots]$ はゼロでなくてはならない. 従って

$$\gamma(t,\theta) = D(\rho(t,\theta))\rho_\theta(t,\theta) \ \ \text{a.s.}(Q)$$

を得る. これで主定理（定理 I ）が証明された.

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第 7 章 関連した結果

概要: これまでみたように流体力学極限は，大数の法則のレベルの問題である．そこで，ここでは，対応する中心極限定理・大偏差原理に関する結果を述べる．また，流体力学極限と密接に関連する自己拡散過程の問題、及び他のモデル・他の手法・最近の結果などについて簡単にまとめる．

7.1 流体力学極限と揺動（一般的注意）

流体力学極限は，確率論的には大数の法則として定式化される．したがって，数学的に自然に，中心極限定理 (fluctuation problem) や大偏差原理 (large deviation) などが関連した問題として提起される．中心極限定理は，系が平衡（つまり初期条件が定常分布）のとき平衡揺動 (equilibrium fluctuation)，そうでなければ非平衡揺動 (non-equilibrium fluctuation) とよばれる．非平衡揺動あるいは大偏差原理が，流体力学極限より強い主張を含むことは明らかであろう．というのは，非平衡揺動では，そもそも平均値つまり流体力学的方程式の解からの揺動を論ずるわけだし，大偏差原理では速度汎関数 (rate functional) の最小値を与える $\rho = \rho(t,\theta)$ は流体力学的方程式を満たさねばならない．つまり，速度汎関数の中には当然，流体力学的方程式に関する情報が含まれているのである．更に，次に述べるように平衡揺動を調べることによっても，やはり拡散係数 $D(\rho)$ が求まり，したがって流体力学極限を示して得られる情報と本質的に同等な情報が，平衡揺動からも得られることがわかる．これは揺動散逸定理とよばれる一連の結果の一つである．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

7.2 平衡揺動

(a) 勾配系:

まず系が勾配型の場合を考えよう．ここでは，前章までに論じたモデル，つまり Bernoulli 測度 に関して可逆な格子気体に対する結果を述べる．更に一般に $\mathbf{Z}^d$ 上の格子気体で，Gibbs 分布を可逆測度にもつような系に対して，[DPSW 86] の結果がある．

初期分布は $\mathcal{X}_N$ 上の Bernoulli 測度 ν_ρ^N として，(3.1) で定義した格子気体 $\eta^N(t)$ の質量分布 $\alpha_t^N(d\theta)$ を考える．系は平衡だから，$^\forall t>0$ に対して大数の法則：$\alpha_t^N(d\theta)\to\rho d\theta$ (確率収束), $N\to\infty$, が成立している．そこで，$\alpha_t^N(d\theta)$ の極限 $\rho d\theta$ からの揺動

$$\xi_t^N(d\theta) := N^{1/2}(\alpha_t^N(d\theta)-\rho d\theta) \tag{7.1}$$

を考える．このとき

定理 1 ξ_t^N は空間 $D([0,T],H^{-2}(\mathbf{T}))$ 上 ξ_t に弱収束する．但し，$H^{-2}(\mathbf{T})$ は $\mathbf{T}$ 上の *Sobolev* 空間で，ξ_t は次の確率偏微分方程式の (平衡) 解として定まる無限次元の *Ornstein-Uhlenbeck* 過程である：

$$d\xi_t(\theta)=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\{D(\rho)\xi_t\}\,dt+\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sqrt{2\chi(\rho)D(\rho)}\,dw_t(\theta)\right\},\quad \theta\in\mathbf{T} \tag{7.2}$$

ここで $w_t(\theta)$ はホワイトノイズ過程 (特に共分散は $E[\langle w_t,J\rangle^2]=t\|J\|^2_{L^2(\mathbf{T})},{}^\forall J\in L^2(\mathbf{T})$) である．いいかえれば，$\dot{w}_t(\theta)$ は時空のホワイトノイズである． □

[証明について] (3.2) から

$$\langle\xi_t^N,J\rangle=\langle\xi_0^N,J\rangle+\int_0^t N^{1/2}b^N(\eta_s^N)\,ds+N^{1/2}m_t^N$$

であることがわかる．そこで，まず右辺の<u>マルチンゲール項</u>について考えよう．

$$\frac{d}{dt}\langle N^{1/2}m^N\rangle_t \;=\; N\Gamma(\eta_t^N)=N^3\sum_{x=1}^N c_{x,x+1}(\pi_{x,x+1}f)^2(\eta_t^N)$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}\left(\eta_x^N(t)-\eta_{x+1}^N(t)\right)^2\left(\nabla_N J\left(\frac{x}{N}\right)\right)^2$$
$$\sim \int_{\mathbf{T}}\langle c(\eta_0-\eta_1)^2\rangle_\rho (J'(\theta))^2\,d\theta, \qquad N\to\infty$$

$\sim$ は，正確には両辺を t で積分して局所エルゴード定理 (定理 A) の意味で成立すると考える必要がある．ところが系は勾配型だから，(3.10) から $\langle c(\eta_0-\eta_1)^2\rangle_\rho = 2\chi(\rho)D(\rho)$ と書きかえられる．したがって，$N\to\infty$ とした極限でマルチンゲール項からは (7.2) の右辺第 2 項が得られることがわかるだろう．

次にドリフト項については，(3.6) でみたように，勾配条件から

$$N^{1/2}b^N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=1}^{N}\tau_x h(\eta)J''\left(\frac{x}{N}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \tag{7.3}$$

と変形できる．したがって，極限で ξ_t に対する閉じた方程式を得るためには，やはり $\sqrt{N}\tau_x h$ を ξ_t^N を用いて表さねばならない．しかし，今度は $\sqrt{N}$ が余分についているから，定理 A では不十分である．定理 A の代わりに

♠ 平衡系に対する Boltzmann-Gibbs 原理:

$$\lim_{N\to\infty} E^{\nu_\rho^N}\left[\left|\int_0^t \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=1}^{N} J\left(\frac{x}{N}\right)\left\{\tau_x h-\langle h\rangle_\rho - D(\rho)(\eta_x-\rho)\right\}(\eta_s^N)\,ds\right|^2\right]=0$$

を示す必要がある．但し，実際に上の原理を応用するのは (7.3) からわかるように J'' に対してであって，そのとき定数項 $-\langle h\rangle_\rho$ は消えることに注意されたい．このことに注意して Boltzmann-Gibbs 原理を適用すれば，ドリフト項の極限として (7.2) の右辺第 1 項が現れることがわかる．したがって，ξ_t に対する方程式 (7.2) が得られるのである．

Boltzmann-Gibbs 原理の意味するところを簡単に述べておく．η_x は粒子数にかかわる量つまり保存量成分で，したがって微視的にはゆっくり変化する．一方，保存量は粒子数だけだから，他の成分は急速に変化し，したがって長時間経過した後には平均化され消えてしまう．Boltzmann-Gibbs 原理は h の長時間にわたる挙動は，その η_x 成分への射影の

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

みが生き残り，η_x に適当な定数（それが拡散係数になるのだが）をかけたものの長時間挙動と同値であることを主張している．この原理を最初に定式化したのは Rost である．

[Boltzmann-Gibbs 原理の証明について] Chang [C 94] は，spectral gap に基づいた簡明な証明を与えているので，それを述べておこう．$X = X(\eta)$ は $E[X] \equiv E^{\nu_\rho^N}[X] = 0$ を満たす $\mathcal{X}_N$ 上の関数とする．このとき，$^\forall t > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
E\left[\left|\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t X(\eta_s^N)\,ds\right|^2\right] &= \frac{1}{t}\int_0^t\int_0^t E[X(\eta_{s_1}^N)X(\eta_{s_2}^N)]\,ds_1ds_2 \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t\int_0^t E[Xe^{|s_1-s_2|N^2L_N}X]\,ds_1ds_2 \\
&\le 2\int_0^t E[Xe^{sN^2L_N}X]\,ds \\
&\le \frac{2}{N^2}E[X(-L_N)^{-1}X]
\end{aligned}
$$

以前，最後の項を「中心極限定理の分散」と呼んだ理由は，実はこの計算にあるといってよい．それはともかく，ここで L_N のスペクトルの飛び (spectral gap): $-L_N \ge \mathrm{const}\times N^{-2}$ を用いれば

$$
\frac{2}{N^2}E[X(-L_N)^{-1}X] \le \mathrm{const}\,E[X^2]
$$

を得る．したがって，Boltzmann-Gibbs 原理という時間発展に関係した問題 (dynamical problem) を示すには

$$
\lim_{N\to\infty} E^{\nu_\rho^N}\left[\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=1}^N(\tau_x h - \langle h\rangle_\rho - D(\rho)(\eta_x-\rho))\right\}^2\right] = 0
$$

という時間発展にまったく関係のない，平衡状態のみに関係する問題 (static problem) を示せばよいことがわかる．しかし，これは確率変数列 $\tau_x h$ に対する中心極限定理に他ならない． □

注意 1 ここで論じたモデルは平衡かつ可逆だから，L^2-理論が適用可能であった．*[DPSW 86]* も，ある意味でそうした手法を使っている．しかし，非可逆モデルについては L^2-理論は使えない．最近 *C.C. Chang* は，L^1 の範疇でエントロピー不等式を組み合わせて用い，

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

非可逆モデルも扱えることを注意している *(1995*年 *7*月台湾でのシンポジウム*)*. □

(b) 非勾配系:

非勾配型の系について平衡揺動を最初に示したのは，格子上の Ginzburg-Landau モデルに対する [Lu 94] である．証明には Varadhan [V 93a] 同様，摂動法を用いる．つまり $\langle\xi_t^N, J\rangle$ に，前章までに述べたのと同様に $F = F(\eta)$ から定まる適当な項（中心極限定理のファクター $N^{1/2}$ は別にして $O(N^{-1})$）を加える．F は雑にいって，前と同じく変分原理の最小値を与える関数にとる．このとき，摂動を加えた $\langle\xi_t^N, J\rangle$ のマルチンゲール項は，局所エルゴード定理を用いて処理でき，結果的に今度は $D(\rho)$ を流体力学極限で得られた拡散係数と同じにとって，やはり (7.2) の第 2 項に収束することがわかる．一方，ドリフト項については，第 5 章で勾配置きかえを実行するために与えた「中心極限定理の分散」の評価がそのまま適用できる．すなわち，この評価が平衡系に対する中心極限定理を示すために丁度十分な速さで与えられていることがわかり，ドリフト項の極限を求めることができる．このようにして，極限の ξ_t は勾配型のときと同じ方程式 (7.2) を満たすことがわかるのである（[Ch 95], [Fu 96] 参照）.

「中心極限定理の分散」の評価では，ドリフト項（+ 摂動項）を直接 η_x に射影してしまうので，Boltzmann-Gibbs 原理は不要になる．つまり，非勾配系では流体力学極限を示すために必要であった結果が，そのまま平衡揺動，更に大偏差原理の証明に応用できるのである ([Q 94], [Q 95])．いいかえれば，極限を求めるために必要な収束の速さの程度が，“非平衡な大数の法則”と“平衡な中心極限定理”では，ある意味で同等なのである．

ついでながら，極限で拡散項と不変測度がわかれば，ドリフト項の極限は容易に予想されることを注意しておく．これは揺動散逸定理とよばれることがある．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

7.3 非平衡揺動

非平衡揺動の問題は，現在のところ勾配型の場合にしか解決されていない．格子上の Ginzburg-Landau モデルに対する [CY 92] の結果がある．

今度は $\rho_t(\theta)$ を流体力学的方程式 (3.9) の解として

$$\xi_t^N(d\theta) := N^{1/2}(\alpha_t^N(d\theta) - \rho_t(\theta)d\theta)$$

を考える．系は勾配型とする．

定理 2 初期条件に対して $\alpha_0^N(d\theta) \to \rho_0(\theta)d\theta, \xi_0^N \Longrightarrow^\exists \xi_0$ *(weakly on $H^{-\alpha}(\mathbf{T}), \alpha > 9/2$)* および，ある（弱い）技術的な条件を仮定する．このとき，ξ_t^N は空間 $D([0,T], H^{-\alpha}(\mathbf{T}))$ 上 ξ_t に弱収束する．極限 ξ_t は *Ornstein-Uhlenbeck* 過程で，次の確率偏微分方程式の解である．

$$d\xi_t(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\{D(\rho_t(\theta))\xi_t\}\,dt + \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sqrt{2\chi(\rho_t(\theta))D(\rho_t(\theta))}\,dw_t(\theta)\right\}, \quad \theta \in \mathbf{T} \tag{7.4}$$

[証明について] $\langle \xi_t^N, J\rangle$ のマルチンゲール項については，やはり定理 A を用いればよく，基本的に平衡揺動の場合と同じである．

一方，ドリフト項については，(3.9) と (7.4) を比べれば，極限は結果的に流体力学的方程式を線形化したものになる．平衡系では，不変測度のスケール極限（=Gauss 測度）およびマルチンゲール項の極限がともに容易にわかるから，この Gauss 測度を不変にするようにドリフト項は決定されねばならない．先に注意した揺動散逸定理である．ところが，非平衡系では $\rho_t(\theta)$ は空間変数 θ に依存する．もし非平衡系で，平衡系の極限方程式 (7.2) の $D(\rho)$ を単純に $D(\rho_t(\theta))$ に置きかえてよいとしても，それは微分の内に留まるのか，それとも外に出るのか，わからない．したがって，非平衡系での極限方程式が (7.4) の形になることが，直ちに予想される訳ではない．

$\langle \xi_t^N, J\rangle$ のドリフト項は，(7.3) と同様に，勾配条件を用いて

$$N^{1/2}b^N(\eta_s^N) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=1}^N \left\{\tau_x h(\eta_s^N) - P(\rho_s(\frac{x}{N}))\right\} J''\left(\frac{x}{N}\right) + o(1)$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

と変形できる．P が現れるのは，$\rho_t(0)$ に対する流体力学的方程式 (3.9) を用いたからである．これを ξ_t^N について閉じた形に書くために，$\tau_x h(\eta_s^N) - P(\rho_s(\frac{x}{N}))$ を Taylor 展開し，その剰余項 $R_N(t) := \int_0^t r_N(\eta_s^N)\,ds$ について $R_N(t) \to 0$ を示したい．つまり，Boltzmann-Gibbs 原理を，非平衡系に対して示す必要がある．そのための基本的な考え方は，これまでにも何度も用いたが，時間発展に関する問題 (dynamical problem) を，平衡状態（Gibbs 測度）に関する問題 (static problem) に帰着させることにある．前と重複する部分があるが，証明の道筋を述べておきたい．

第 1 段： エントロピー不等式を用いて，平衡系の問題に持ち込む：

$$E_{non}^N[R] \le \frac{1}{\beta N} \log E_{eq}^N[e^{\beta N R}] + \frac{1}{\beta N} H_N(P_{non}^N | P_{eq}^N)$$

但し，P_{non}^N は考えている非平衡系を，P_{eq}^N は初期分布を $\nu_{1/2}^N$ にとった平衡系を表す．また、E_{non}^N、E_{eq}^N はこれらの平衡系における平均を表す．相対エントロピーは $H_N(P_{non}^N | P_{eq}^N) \le N \log 2$ だから，β を十分大にとることによって，時間発展を含む平衡系に対する指数的モーメント評価の問題に帰着された．

第 2 段： 系は可逆（対称）だから，Feynman-Kac の公式，spectral theorem を用いることにより

$$\log E_{eq}^N[e^{\beta N R}] = t \cdot \sup \left\{ \int \beta N r(\eta) f^2(\eta)\, d\nu_{1/2}^N + (L_N f, f) \,\middle|\, \int f^2 d\nu_{1/2}^N = 1 \right\}$$

と書き直される．ここで $(L_N f, f) = -N^2 I^N(f)$ に注意されたい．

第 3 段： 右辺の評価は時間発展を含まない static problem であるが，sup 内の第 1 項は，依然 $f^2 d\nu_{1/2}^N$ という非平衡測度に関する平均値である．そこで，再びエントロピー不等式を用いる．正確には周期格子 Γ_N を小さいブロック達 (大きさ $K \sim N^{3/10}$ 又は $\ell N^{1/2}$) に分け，各ブロックごとにエントロピー不等式を用いる．その際，$f^2 d\nu_{1/2}^N$ のエントロピーが現れるが，それを Dirichlet 形式 $I^K(f)$ でおさえこみ，結局 $-N^2 I^N(f)$ に吸収してしまう．そのために，対数型 Sobolev 不等式が必要になる．特に，対数型 Sobolev 定数の格子サイズへの依存度を調べることが大切であり，[LY 93], [Y 94], [Y 95] の研究が重要になる．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第4段： 最後にカノニカル Gibbs 測度 $\nu_{n,m}$ （格子サイズ n, 粒子数 m) に関する指数的モーメント評価を，局所中心極限定理を用いて実行する． □

注意 2 非平衡揺動の非勾配型モデルへの拡張は未解決である．この問題を解決するには，「中心極限定理の分散」の収束の速さを更に $\sqrt{N}$ 上げて示す必要があり，それはほとんど不可能に見える．*[S 91]* には，一般の非勾配型・非平衡の場合に，定理 *2* の *Ornstein-Uhlenbeck* 過程が予想として書かれている．不変測度が，一般に *Gibbs* 測度の場合は，まだ全く不明である．

7.4 大偏差原理

Γ_N のように有限領域 (finite volume) 上で定義されたモデルについては，平衡系の分布と非平衡系の分布は互いに絶対連続である．したがって，それらの相対エントロピーは有限になり，非平衡系に対して大偏差原理を証明することは，結局，平衡系に対して大偏差原理を証明することに帰着される．平衡系に対して大偏差原理を証明するには，これまでの議論と同様に，Feynman-Kac の公式を用い，モデルの可逆性に注意すれば，固有値問題（最大固有値）を調べればよいことになる．

例えば，大偏差原理の下からの評価 (lower bound) を示すには，与えられた $\rho(t,\theta)$ が大数の法則の極限として現れるように時間発展を変形 (コントロール) する．そのためには，飛躍率 $c_{x,x+1}$ に弱い摂動を加え，Girsanov の公式を用いればよい．いわゆる Cramér の trick である．例えば [KOV 89] では川崎力学 (i.e. $c_{x,x+1} \equiv 1$) を扱っているが，weakly asymmetric simple exclusion process に対する流体力学極限 (つまり大数の法則) を証明している．途中で，平衡系に対して局所エルゴード定理が super exponentially に（すなわち，どんな指数的速さよりも速く）成立することを示したのが基本的である．

[Q 94] では，格子上の非勾配型 Ginzburg-Landau モデルを扱った．やはり Varadhan

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

[V 93a] の「中心極限定理の分散」評価がぴったりである．[Q 95] では，ランダム媒質中の格子気体を扱っている．ランダム媒質のために，モデルは非勾配型になる．無限領域上のモデルについては，[LY 95] がある．

7.5 自己拡散過程

格子気体中の特定の 1 粒子に印を付けて (tagged particle) その運動を追跡する．このとき，その粒子自身のランダムな運動，あるいは適当なスケール変換の下での極限確率過程は自己拡散過程 (self-diffusion) と呼ばれる．これに対し本文で扱った経験分布 α_t^N に関する拡散を塊状拡散 (bulk diffusion) という．後者は粒子を区別する必要が全くないため粒子の動きの速さを規定する係数 $c_{x,y}(\eta)$ は $\eta_x = \eta_y$ の時任意に与えることができる．一方自己拡散過程では印のついた粒子の運動法則は $\eta_x = \eta_y (= 1)$ の時の $c_{x,y}(\eta)$ の与え方により大きく影響される．自明な場合を除けば，自己拡散係数を決定する問題は塊状拡散の問題より一段階精密な解析を要する．というのは前者は一粒子の運動の道の空間における分布を扱うのに対し，後者は時刻 t を指定するごとに粒子の位置の分布を決定すればよいからである．

ここでは多次元離散トーラス $(\Gamma_N)^d = \mathbf{Z}^d/(N\mathbf{Z})^d$ 上の単純格子気体を考える．その生成作用素は，次で与えられる．

$$\frac{1}{2}\sum_{|x-y|=1} 1(\eta_x \neq \eta_y)\pi_{x,y},$$

但し右辺の和は $(\Gamma_N)^d$ 上の隣り合う 2 点 $\{x, y\}$ の全体にわたる．(したがって各粒子は平均 $1/d$ の Markov 的待ち時間の後に隣接する $2d$ 個の格子点のうち，1 つを等確率で選びもしそこに粒子がなければ，そこに移動する，また，すでに他の粒子があれば動かない.) 今自然数列 $N(n)$ が与えられたとし，$(\Gamma^{N(n)})^d$ 上，n 個の粒子からなる格子気体を考える．粒子にあらかじめ番号をつけて，時刻 t での粒子の配置を $\mathrm{x}^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t), \ldots, x_n^n(t))$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

で表す.(§2.1 注意を参照.) 拡散型のスケール変換の下での粒子の配置

$$\mathrm{y}^n(t) = N^{-1}\mathrm{x}^n(N^2 t) = (y_1^n(t), \ldots, y_n^n(t))$$

が道の空間の n 重直積 $(D([0,1] \to (\mathbf{T}^d))^n$ に誘導する確率測度を Q_n とする.

仮定 1. 初期値 $\mathrm{y}^n(0)$ の分布 μ_n は対称（粒子の番号付けによらない）であり，ある $\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{T}^d)$ を極限測度とする Boltzmann 列（8.6 節参照）であるとする.

仮定 2. 次の極限が存在して正：

$$\bar{\rho} := \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(N(n))^d} > 0.$$

仮定 1 の下で，Q_n は対称である. 仮定 1,2 により，$\alpha_t^N \to \rho(t,\theta)$（確率収束）である. 但し $\rho(t,\theta)$ は $\bar{\rho}\mu$ を初期値とする熱方程式 $\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{1}{2}\Delta\rho$ の解である（§2.1）. したがって配置 $\mathrm{y}^n(t)$ の経験分布

$$\beta_t^n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i^n(t)} = \frac{N^d}{n}\alpha_t^N$$

に対しては

$$\beta_t^n(d\theta) \to \frac{\rho(t,\theta)d\theta}{\bar{\rho}} \ (確率収束)$$

である. 我々の目標は，確率過程の列 $\{y_1^n(t) : t \in [0,1]\}_n$ の収束，即ち $Q_{n|1}$（Q_n の第一成分への射影）の収束を知ることである. 初期分布 μ_n が一様分布の時はこの問題は Kipnis - Varadhan により解決された：

定理 3 *([KV 86])* μ_n が $(N^{-1}\Gamma_N)^d$ 上の一様分布であれば $Q_{n|1}$ は収束し，極限過程は一様分布を初期分布とし粒子密度 $\bar{\rho}$ に依存した共分散行列

$$D_s(\bar{\rho}) = \begin{pmatrix} \sigma^2(\rho) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2(\rho) \end{pmatrix}$$

をもつ d 次元トーラス $\mathbf{T}^d$ 上の *Brown* 運動である.($d > 1$ に対し $\sigma^2(\bar{\rho}) > 0$.)

一般の初期分布の場合は極限過程の生成作用素は時刻 t での極限密度関数 $\rho = \rho(t,\theta)$ に依

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

存し，自己拡散係数 D_s を用いて次のように書かれる：

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\nabla D_s(\rho)\nabla + \frac{1}{2}(D_s(\rho) - E)\frac{\nabla\rho}{\rho}\nabla,$$

但し E は単位行列である．

定理 4 *([Re 94])* 第 *1* 粒子の分布 $Q_{n|1}$ は収束し，極限確率測度 $R_\rho = \lim_{n\to\infty} Q_{n|1}$ は初期分布を μ，生成作用素を $\mathcal{A}$ とする $\mathbf{T}^d$ 上の拡散過程である．

$\mathcal{A}$ の形は次のように理解される．$\mathcal{A}$ の形式的共役作用素を $\mathcal{A}^*$ とする．R_ρ に従う拡散過程の時刻 t での分布密度は上に述べたことから $\rho(t,\theta)/\bar{\rho}$ で与えられるから，ρ は前進方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \mathcal{A}^*\rho \tag{7.5}$$

を満たさねばならない．一方 ([KV 86]) の定理より $\mathcal{A}$ の拡散項は $\frac{1}{2}D_s(\rho)\nabla\nabla$ で与えられるであろうことが推測される：即ち ρ に依存するベクトル場 $b(\rho) = b(\rho(t,\theta))$ により

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}D_s(\rho)\nabla\nabla + b(\rho)\nabla \tag{7.6}$$

と書かれるであろう．ところで ρ は $\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{1}{2}\Delta\rho$ を満たしていた．したがって (7.5) より

$$\mathcal{A}^*\rho = \frac{1}{2}\nabla\cdot\nabla D_s(\rho)\rho - \nabla\cdot(\rho b(\rho)) = \frac{1}{2}\nabla\cdot E\nabla\rho$$

である．これを成立させる b の自然な形は

$$b = \frac{1}{2}\frac{\nabla((D_s - E)\rho)}{\rho}$$

であろう．これを (7.6) に代入すれば求める $\mathcal{A}$ の形になる．

定理 4 の証明には $Q_{n|1}$ の緊密性と $y_1^n(t)$ の有限次元分布の収束を言えばよい（8.6 節参照）．後者は以下に述べるように色のついた粒子からなる単純格子気体についての Quastel ([Q 95]) の結果に容易に帰着される．[Re 94] では $Q_{n|1}$ の緊密性を証明している．これは道の空間における経験分布

$$\tilde{\alpha}^n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{y_i^n(\cdot)}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

の緊密性と同等である（§8.6 定理 13）. [Re 94] はこれから直ちに Q_n が Boltzmann 列であると結論しているが，これは自明なことでない：$\tilde{\alpha}^n$ の極限点がランダムでないことを示す必要があるからである．さて [Q95] の結果は次のようなものである．今考えている格子気体粒子に色，例えば白と赤，をつけて区別する．時刻 t での白色の粒子の配置を $\eta^{n,W}(t)(\in \{0,1\}^{(\Gamma^N)^d})$ とすると，その経験分布

$$\alpha_t^{n,W}(d\theta) = \frac{1}{N^d}\sum_{x\in(\Gamma^N)^d} \eta_x^{n,W}(N^2 t)\delta_{x/N}(d\theta) \quad \theta \in \mathbf{T}^d \quad (N = N(n))$$

に対し次が成立する．

定理 5 *([Q 95])* α_0^n 及び，$\alpha_0^{n,W}$ の分布がランダムでない測度に収束すれば，$\alpha_t^{n,W}$ は（t について一様に）収束し，その極限密度関数 $\rho^W(t,\theta)$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^W = \mathcal{A}^*\rho^W$$

に対する *Cauchy* 問題の解として特徴づけられる．

この定理から $y_1^n(t)$ の有限次元分布を導くには次のように考えればよい．$\mathbf{T}^d$ の可測集合 A, B と時刻 $0 < s < t$ に対し

$$\frac{1}{N^d}\sum_{i=1}^n \chi(y_i(s)\in A)\chi(y_i(t)\in B)$$

の極限は定理 4 に従えば

$$\int_B \rho^{s,A}(t,\theta)d\theta$$

で与えられる，但し $\rho^{s,A}(t,\theta)$ は

$$\rho^{s,A}(s,\theta) = \rho(s,\theta)\chi_A(\theta)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{s,A} = \mathcal{A}^*\rho^{s,A}, \quad t > s$$

の解である（$\mathcal{A}^*u = \frac{1}{2}\nabla D_s(\rho)\nabla u - \frac{1}{2}\nabla((D_s - E)\frac{\nabla\rho}{\rho}u)$ であった）．そこで，時刻 s において $y_i^n(s)\in A$ であるか否かに従って粒子に各々白，赤の色分けをしておけば，$\rho^{s,A}(t,\theta)$, $t \geq s$ は白い粒子の極限密度関数である．したがって $\rho^{s,A}$ に対する上記拡散方程式は定理 5 から

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

の帰結である．一般に k 個の時点での結合分布に対しては 2^{k-1} 種類の色分けを考えればよい．

定理 5 は塊状拡散の問題である．しかし色分けしたことによって生ずる相互作用（たとえば赤色の粒子に囲まれている白色の粒子は動けない）のため，勾配条件は成立せず，証明には本稿で解説したような変分法的手法を用いる必要がある．

7.6 その他のモデル・手法

流体力学極限の問題が，Dobrushin や Lebowitz らによって，数学的に論ずる対象となりそのような道が開かれてから２０年近く，Guo-Papanicolaou-Varadhan の論文 [GPV 88] が現れてからでも既に１０年が経過し，この間に行われた関連する数学的研究の蓄積は現在では膨大な量に及んでいる．ここで，それらを網羅して語ることは到底不可能であるが，重要と思われるもの・筆者達の目にとまったものなどを，簡潔に述べて本文に対する補足としたい．

(1) Rezakhanlou の結果:

(a) 相転移: [Re 90] では，[GPV 88] における Bernoulli 測度を Gibbs 測度に一般化して，可逆な勾配型の Ginzburg-Landau 格子モデルを扱った．Gibbs 分布は相転移をもつ可能性がある．しかし，平均スピン $\rho \in \mathbf{R}$ に対して，化学ポテンシャル $\lambda(\rho)$ を対応させる関数は well-defined であることに注意して，[Re 90] では流体力学的方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\theta) = \Delta\lambda(\rho(t,\theta))$$

を導いた．この方程式は，見かけ上は [GPV 88] のものと同じである．関数 $\lambda(\rho)$ は ρ について単調非減少であるが，もし相転移があれば，$\lambda \in \mathbf{R}$ を決めても相は一意ではなく，したがって $\rho \in \mathbf{R}$ は一意的に定まるとは限らない．いいかえれば，そのような ρ では，$\lambda(\rho)$ はフラットな関数になり，したがって拡散係数は $\lambda'(\rho) = 0$ と退化するのである．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

(b) invisid Burgers' equation: [Re 91] では非対称な格子気体モデル (asymmetric simple exclusion process) を考え，双曲型スケール変換 (時間 $t \mapsto Nt$, 空間 $x \mapsto x/N$) の下で，極限が粘性のない Burgers 方程式 (いわゆる Riemann の方程式) で記述されることを非常に広いクラスの初期関数に対して示した.（初期関数が単調の場合は [Ro 81] 等で扱われている.）この方程式の解の一意性は，エントロピー解とよばれる物理的に自然なクラス内で成立することが知られているが，[Re 91] では，粒子系の極限として現れる解は，常にこの意味の解であることを証明している.

(2) Yau とその周辺の結果:

[OVY 93] $\mathbf{R}^3$ 上の N 粒子 Hamilton 力学系を考える．その時間発展に，運動量・エネルギーを保存するように，ランダムなノイズを加える．このノイズは局所エルゴード定理を示すために必要になるのだが，$N \to \infty$ のとき消え去るように十分小さくとれる．更に，非常に速い粒子が現れると技術的な困難が生ずるので，運動エネルギー $|p|^2/2$ を1次のオーダーで増大する関数 $\phi(p)$ に置きかえる．この修正は不自然ではあるが，$N \to \infty$ とした極限で，Euler 方程式が得られることを示した．証明には [Y 91] の相対エントロピー法を用いる.

[LOY 94] d 次元の asymmetric simple exclusion process (格子気体で x から y への飛躍率 $p(x,y)$ は non-random) を考える．その流体力学極限は粘性のない Burgers 方程式になるが，この論文では $d \geq 3$ として，その次のオーダーまでの近似を考えた．極限では $N^{-1}\sum_{i,j=1}^d \partial_i\{a^{ij}(\rho)\partial_j\rho\}$ なる補正項をもつ，粘性のある Burgers 方程式を得ている．似たような，第2次補正 (Navier-Stokes correction) の問題は [EMY 93] でも論じている.

[LOY 96] この論文では，上の論文で得られた拡散項 $\{a^{ij}(\rho)\}$ に関する3つの表示: 塊状拡散係数, Green-Kubo の公式, Varadhan の変分原理 (いずれも [Sp 91] にある) の同値性を示し，ρ に関する連続性を証明している．但し，時空相関関数の（熱核的）減衰を仮定しているので，発見的な議論も含まれている.

[Y 94] [GPV 88] と同様に，格子上の保存型 Ginzburg-Landau モデルを考えるが,

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

Hamiltonian に Kac 型の長距離平均場相互作用を加える．このとき，相転移の可能性があり，自由エネルギー $h(u)$ は (下に) 凸 (な) 関数にならない．したがって，[GPV 88] の結果をそのまま適用すると拡散係数 $h''(u)$ が負になる．実際には，そのようなことはあり得ないので，拡散係数をどう修正すればよいか，考察している．

[L 96] 1 次元の totally asymmetric (つまり右方向へのみ粒子はジャンプする) zero-range process を考える．大偏差原理の証明には，その摂動を考え流体力学極限を示す必要がある．この論文では，例えば，原点に来た (滞在している) ときに，粒子の運動が遅くなるとして，流体力学極限を証明している．極限では，粒子の滞留によって原点における δ-測度が現れ，他では粘性のない Burgers 方程式の non-entropic な弱解になることを示している．また，有限個の粒子が遅くなるときの極限も調べている．

(3) 界面モデルに関する結果:

[FuS 97] では，実効的 Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ 界面モデルを考察した．$d+1$ 次元空間内に 2 相を分離する (微視的なレベルでの) 界面があり，それはある超平面 ($\Gamma_N := (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^d$ をとる) からみて常にグラフで表されていると仮定する．すなわち，界面の高さを表す変数 $\phi = \{\phi(x)\}_{x\in\Gamma_N}$ がとれると仮定する．界面の時間発展はランダムで，次の確率微分方程式によって定める．

$$d\phi_t(x) = -\sum_{y:|x-y|=1} V'(\phi_t(x) - \phi_t(y))dt + \sqrt{2}dw_t(x), \qquad x \in \Gamma_N \tag{7.7}$$

ここで $\{w_t(x), x \in \mathbf{Z}^d\}$ は独立な Brown 運動の系である．$\phi_t = \{\phi_t(x)\}_{x\in\Gamma_N}$ に対して，空間 (つまり x-方向と ϕ-方向の両方) を $\frac{1}{N}$ に縮め，同時に時間も $\frac{1}{N^2}$ に変更するような時空の拡散型スケール変換を導入し

$$\phi_t^N(\theta) := \frac{1}{N}\phi_{N^2t}(x), \quad \theta \in \Lambda_N(x) \subset \mathbf{T}^d$$

とおく．但し $\Lambda_N(x) := \{\theta \in \mathbf{T}^d; -1/2N \le \theta_i - x_i/N < 1/2N, 1 \le i \le d\}$ で $\mathbf{T}^d = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d \cong [0,1)^d$ は d 次元トーラスである．ポテンシャル $V \in C^2(\mathbf{R})$ は 2 つの条件: (1) 対称性: $V(-\eta) = V(\eta), \eta \in \mathbf{R}$, (2) 真に凸: $0 < \exists c_- \le V''(\eta) \le \exists c_+, \eta \in \mathbf{R}$, を満たすと仮

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

定する．このとき

定理 6 *(7.7)* の初期分布 μ_0^N が，$\lim_{N\to\infty} E^{\mu_0^N}[||h_0 - \phi_0^N||^2] = 0$，$h_0 \in L^2(\mathbf{T}^d)$ を満たせば

$$\lim_{N\to\infty} E[||h_t - \phi_t^N||^2] = 0, \qquad {}^\forall t > 0$$

が成立し，$h_t = \{h(t,\theta); \theta \in \mathbf{T}^d\}$ は非線形偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t,\theta) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial u_i}(\nabla h(t,\theta))\right] \tag{7.8}$$

の一意解である．ここで $\sigma(u), u \in \mathbf{R}^d$ は表面張力 *(surface tension)* とよばれる量で，*Hamiltonian* $H(\phi) := \sum_{|x-y|=1} V(\phi(x) - \phi(y))$ と，${}^\exists i$ *s.t.* $|x_i| = \ell$ なる $x \in \mathbf{Z}^d$ に対する境界条件 $\phi(x) = u \cdot x$ を与えたときの，$\ell \to \infty$ での熱力学的極限として定まる．$||\cdot||$ は $L^2(\mathbf{T}^d)$ のノルムを表す．

定理の証明には，いわゆる"H^{-1}-法"を用いた．つまり $E[||h_t - \phi_t^N||^2]$ の t-微分を直接計算し，それが $N \to \infty$ のとき非正であることを，1-ブロック評価のみを用いて示すのである．変数 ϕ よりも，むしろ $\nabla\phi \equiv \{\nabla\phi(\langle x,y\rangle) := \phi(x) - \phi(y)\,|\,|x-y| = 1\}$ が，格子気体における保存量つまり η-変数の役割を果たし，$\nabla\phi$-変数からみれば，ノルム $||\phi||$ は H^{-1}-ノルムに相当するから，H^{-1}-法という．この手法によれば，2-ブロック評価は不要である．

対応する static な揺動問題は [NS 96] により扱われた．関連する論文として [KaSo 94, 95] などがある．[Fu 97] も参照されたい．

(4) 抵抗を受ける一次元粒子系:

速度が Ornstein-Uhlenbeck 過程に従う粒子が相互作用しながら運動する系が [OV 91] により扱われた．これに対し [U 96] では抵抗を受けながら直線上を Newton の力学法則に従って運動する 粒子系の流体力学極限が求められた．後者は Ornstein-Uhlenbeck 粒子系で White noise をゼロにしたものにほかならない． 粒子は、[OV 91] ではトーラス上を、[U 96] では反射壁を持つ単位区間上を動く場合を扱っているが、簡単のため直線全体を動

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

くものとすると運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q_i(t) &= p_i(t)\\ \frac{d}{dt}p_i(t) &= -p_i(t) - \sum_{j:j\neq i} U'(q_i(t)-q_j(t)) + \kappa \dot{W}_i(t)\end{aligned}$$

($i=1,...,N$) と書かれる. $q_i(t)$ 及び $p_i(t)$ は i 番目の粒子の位置と運動量、$\dot{W}_i(t)$ は互いに独立な White noise の列である. 2体間相互作用のポテンシャル関数 $U(x)$ は [OV 91] では有界な台を持つ連続的微分可能な偶関数、[U 96] では $x\in\mathbf{R}-\{0\}$ に対し定義され $U(0+)=\infty, U(+\infty)=0$ となる連続的微分可能な偶関数でともに相互作用が反発力であること、即ち$\psi(x):=-xU'(x)\geq 0$ が仮定されている. いずれの場合も勾配系となり保存量は粒子数のみであり、流体力学極限において現れるのは、$(x_i(t)=\varepsilon q_i(\varepsilon^{-2}t))_{i=1}^N$ の極限粒子数密度の満たす非線形拡散方程式

$$\partial_t\rho = \partial_\theta^2 P(\rho)$$

である. 以下簡単の為 $\varepsilon=1/N$ とする. White noise が在る場合($\kappa=1$)は $P(\rho)$ は1章で述べた相互作用する Brown 粒子の系と同じ関数で与えられる. White noise が無い場合には $U(x), x>0$ は凸関数でかつ $x>1$ について可積分であること、即ち

$$\int_1^\infty U(x)dx<\infty$$

がさらに仮定され、

$$P(\rho) = -\sum_{k=1}^\infty kU'(k/\rho)$$

となる. White noise が無い場合エントロピー生成法は使えない. 局所エルゴード性を示すには、まず平衡状態は粒子が等間隔に並んだ配置に限られることを示し、この事と全エネルギーが非増加であることを使う.

U についての積分条件が破れる場合 (long range potential) も [U 97] によって調べられている. $|x|\to\infty$ のとき

$$\psi(x)\sim\frac{1}{|x|^\gamma}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$(0<\gamma\le 1)$ を仮定する．$0<\gamma<1$ であれば、適切なスケール変換は

$$x_i(t)=\varepsilon q_i(\varepsilon^{-1-\gamma}t)$$

である．運動方程式は誤差項を無視すれば

$$N^{-\gamma-1}\frac{d^2}{dt^2}x_i(t)=-\frac{d}{dt}x_i(t)+\frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\frac{x_i(t)-x_j(t)}{|x_i(t)-x_j(t)|^{2+\gamma}}$$

と書け、簡単な計算から右辺第 2 項の平均場近似が極限の方程式の形を決定していることがわかる．但し、この平均場近似の相互作用は強い特異性をもつので極限操作は自明ではない．極限の方程式はもはや局所的ではなく、次の微積分方程式で与えられることになる：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\theta,t)=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho(\theta,t)\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\theta',t)}{|\theta-\theta'|^{\gamma}}d\theta'\right).$$

$\gamma=1$ の時はスケール変換を

$$x_i(t)=\varepsilon q_i(\varepsilon^{-2}|\ln\varepsilon|^{-1}t),\quad 1\le i\le N$$

と取れば、極限の方程式として

$$\partial_t\rho=\partial_\theta^2\rho^2$$

を得る．この系についての極限操作は平均場近似でも流体力学極限でもなく、証明には 1 次元の特殊性に基づいたかなり精密な計算を行う．スケール変換の仕方からわかるようにこれらの極限は White noise の存在に影響されない．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

第8章 付録(一般論からの準備)

概要: 本章では，本文中で用いたキーになる評価等の証明を与える．これらの結果は，流体力学極限に限らず，種々の局面で応用可能である．その点を考慮に入れ，ここにまとめてみた．

8.1 エントロピー不等式

定理 1 (エントロピー不等式) $(S, \mathcal{F})$ を可測空間とし，λ, μ は $(S, \mathcal{F})$ 上の確率測度で λ は μ に関して絶対連続 $(\lambda \ll \mu)$ とする．このとき，$(S, \mathcal{F})$ 上の任意の有界可測関数 u に対して

$$\int_S u(x)\lambda(dx) \leq \log \int_S e^{u(x)}\mu(dx) + H(\lambda|\mu)$$

が成立する．但し，$H(\lambda|\mu)$ は λ の μ に関する相対エントロピーである．すなわち

$$H(\lambda|\mu) := \int_S \log f(x)\lambda(dx) = \int_S f(x)\log f(x)\mu(dx)$$

で，$f = \frac{d\lambda}{d\mu}$ は *Radon-Nikodym* 密度関数である．

[証明] $^\forall u = u(x)$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_S u(x)\lambda(dx) &= \int_S \log e^{u(x)}\lambda(dx) \\
&= \int_S \left(\log e^{u(x)}\right) f(x)\mu(dx) \\
&= \int_S \log\left[\frac{e^{u(x)}}{f(x)} f(x)\right] \cdot f(x)\mu(dx)
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$= \int_S \left[\log \frac{e^{u(x)}}{f(x)}\right] f(x)\mu(dx) + H(\lambda|\mu)$$

簡単のため，$f(x) > 0, \lambda$-a.e. と仮定して計算した．最後の積分に対して，Jensen の不等式を用いると

$$\begin{aligned}\int_S u(x)\lambda(dx) &\leq \log \int_S \frac{e^{u(x)}}{f(x)} \cdot f(x)\mu(dx) + H(\lambda|\mu) \\ &= \log \int_S e^{u(x)}\mu(dx) + H(\lambda|\mu)\end{aligned}$$

□

系 2 （エントロピーの変分表現）

$$H(\lambda|\mu) = \sup_{u\in\mathcal{B}(S)} \left\{\int_S u(x)\lambda(dx) - \log \int_S e^{u(x)}\mu(dx)\right\}$$

但し，$\mathcal{B}(S)$ は S上の有界可測関数全体である．

[証明] 上の定理から，“ $\geq$” 向きの不等号が従う．逆向きの不等号を示すには，$u(x) = \log f(x)$ ととればよい（正確には，$\{x \in S|\, f(x) = 0\}$ 上では注意が必要になる．詳しくは，[DV 75, 76] を参照されたい）． □

8.2 Feyman-Kac の公式

補題 3 確率空間 $(S, \mathcal{F}, \mu)$ 上，μ に関し対称な L^2-強連続 *Markov* 半群の生成作用素 $\mathcal{L}$ が与えられているとする．$V_t(x)$ を有界可測関数，$x(t)$ を作用素 $\mathcal{L}$ の生成する S 上の *Markov* 過程とすると，

$$\log E_\mu \left[\exp \int_0^T V_t\left(x(T-t)\right) dt\right] \leq \int_0^T \Omega(s)ds,$$

但し $\Omega(t)$ は 次で与えられる

$$\Omega(t) = \sup_{\langle f^2\rangle_\mu = 1} \left[\langle V_t f^2\rangle_\mu + \langle f\mathcal{L}f\rangle_\mu\right].$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

(μ がエルゴード的であれば $\Omega(t)$ は $\mathcal{L}+V_t$ の第 1 固有値である.)

[証明] Feyman-Kac の公式 を用いる. x から出発する確率過程に関する平均を E_x で表し,

$$u(t,x)=E_x\left[\exp\left\{\int_0^t V_s(x(t-s))ds\right\}\right]$$

とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial t}u=\mathcal{L}u+V_t u$$
$$u|_{t=0}=1$$

を満たす. したがって,

$$\frac{d}{dt}\langle u^2(t)\rangle_\mu=2\langle u(t)\frac{\partial}{\partial t}u(t)\rangle_\mu=2\langle u(t)(\mathcal{L}u+V_t u)\rangle_\mu\le 2\langle u^2(t)\rangle_\mu\Omega(t).$$

初期値は $\langle u^2(0)\rangle_\mu=1$ だから

$$\langle u^2(T)\rangle_\mu\le\exp\left[2\int_0^T\Omega(s)ds\right].$$

ゆえに

$$\langle u(T)\rangle\le(\langle u^2(T)\rangle)^{1/2}\le\exp\left[\int_0^T\Omega(t)dt\right]$$

即ち

$$\log\langle u(T)\rangle\le\int_0^T\Omega(t)dt.$$

□

8.3 Rayleigh-Schrödinger 摂動理論

補題 4 確率空間 $(S,\mathcal{F},\mu)$ 上, μ に関し対称な L^2-強連続かつ保存的な *Markov* 半群の生成作用素 $\mathcal{L}$ が与えられているとする. $\mathcal{L}$ のスペクトルの飛びを κ_2 とする：

$$\kappa_2=\inf_{\langle f\rangle=0}\frac{\langle -f\mathcal{L}f\rangle_\mu}{\langle f^2\rangle_\mu}>0.$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

このとき $V \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$ （即ち $V = \mathcal{L}g$, $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$）に対し Ω_V を $\mathcal{L}+V$ の第 1 固有値とすると，

$$\Omega_V \leq \langle V(-\mathcal{L})^{-1}V\rangle + 4||V||_\infty^3 \frac{1}{\kappa_2^2}.$$

証明. φ を Ω_V の正規化した固有関数とすると，

$$\Omega_V = \langle \varphi\mathcal{L}\varphi\rangle + \langle V\varphi^2\rangle$$

$\bar{\varphi} = \varphi - \langle\varphi\rangle$ を考えると，$\mathcal{L}\langle\varphi\rangle = 0$ から明らかに，

$$\langle \varphi\mathcal{L}\varphi\rangle = \langle \bar{\varphi}\mathcal{L}\bar{\varphi}\rangle$$

$V \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$ だったから，$\langle V\rangle = 0$. これから，

$$\Omega_V = \langle \bar{\varphi}\mathcal{L}\bar{\varphi}\rangle + 2\langle\varphi\rangle\langle V\bar{\varphi}\rangle + \langle V\bar{\varphi}^2\rangle.$$

ここで Schwarz の不等式から，

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\varphi}\mathcal{L}\bar{\varphi}\rangle + 2\langle\varphi\rangle\langle V\bar{\varphi}\rangle &\leq \langle \bar{\varphi}\mathcal{L}\bar{\varphi}\rangle + |\langle\varphi\rangle|\sqrt{4\langle V(-\mathcal{L})^{-1}V\rangle\langle\bar{\varphi}\mathcal{L}\bar{\varphi}\rangle} \\
&\leq \frac{1}{2}\langle\varphi\rangle^2 2\langle V(-\mathcal{L})^{-1}V\rangle \\
&\leq \langle V(-\mathcal{L})^{-1}V\rangle.
\end{aligned}$$

一方，

$$\langle V\bar{\varphi}^2\rangle \leq ||V||_\infty \sup_{f:\langle f^2\rangle=1} \frac{\langle f^2\rangle}{-\langle f\mathcal{L}f\rangle}(-\langle\varphi\mathcal{L}\varphi\rangle)$$

$\Omega_V = \sup_{f:\langle f^2\rangle=1}\left[\langle Vf^2\rangle - \langle f\mathcal{L}f\rangle\right]$ と，$\langle v\rangle = 0$ より，$\Omega_V \geq 0$. ゆえに

$$\begin{aligned}
-\langle\varphi\mathcal{L}\varphi\rangle \leq \langle V\varphi^2\rangle &= \langle V(\varphi^2 - \langle\varphi\rangle^2)\rangle \\
&\leq ||V||_\infty\sqrt{(\varphi+\langle\varphi\rangle)^2\langle\bar{\varphi}^2\rangle} \\
&\leq 2||V||_\infty\sqrt{\frac{-\langle\varphi\mathcal{L}\varphi\rangle}{\kappa_2}}.
\end{aligned}$$

これより，

$$-\langle\varphi\mathcal{L}\varphi\rangle \leq \frac{4}{\kappa_2}(||V||_\infty)^2.$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

以上から，

$$\Omega_V \leq \langle V(-\mathcal{L})^{-1}V\rangle + 4\|V\|_\infty^3 \frac{1}{\kappa_2^2}.$$

□

8.4 解の一意性

極限密度関数 $\rho(t,\theta)$ の満たす非線形拡散方程式 (2.2) は，$f(u) = \int_0^u D(s)ds$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(\rho(t,\theta)), \quad (t,\theta) \in (0,T) \times \mathbf{T}$$

と書かれる．ここではこれをやや一般化して，$\mathbf{R}^d$ の領域 Ω 上での非線形発展方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \mathcal{L} f(u) \tag{8.1}$$
$$u = u(t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega$$

を考え，対応する初期値問題の弱解の一意性を示す．

$m(dx)$ を Ω 上の確率測度とし，$\mathcal{L}$ は $L^2(m)$ 上の対称 Markov 半群 $P_\tau, \tau \geq 0$，の生成作用素であるとする．m に関する積分を $\langle\cdot\rangle$ で，$\mathcal{L}$ の定義域を $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ で表す．次の (1)-(3) を仮定する．

(1) 各 $\tau > 0$ に対し，$\Omega \times \Omega$ 上の有界連続関数 $p_\tau(x,y)$，$(\tau > 0)$ があって

$$P_\tau\varphi(x) = \int_\Omega p_\tau(x,y)\varphi(y)m(dy).$$

(2) 各 $0 < a < b$ に対し，

$$r_{a,b}(x,y) = \int_a^b p_\tau(x,y)d\tau$$

とおくと，$x \in \Omega$ を止めるごとに $r_{a,b}(x,\cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ であり次の等式が成り立つ：

$$\mathcal{L}r_{a,b}(x,.)(y) = p_b(x,y) - p_a(x,y).$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

(3) $\varphi \in L^1(m)$, $x \in \Omega$ に対し P_τ が保存的（$P_\tau 1 \equiv 1$）であるか否かに応じて

$$\lim_{\tau \to \infty} P_\tau \varphi(x) = \langle \varphi \rangle \text{ または } 0.$$

トーラス上の Laplacian の生成する半群は, 明らかにこれらの仮定を満たす.

定義 5 $u_0 \in L^1(m), u_0 \geq 0$ に対し，u が非負で次の条件を満たすとき *(8.1)* の非負な弱解であるという.

(4) $\sup_{0 \leq t \leq T} \langle u(t) \rangle < \infty$, $\int_0^T \langle f(u(t)) \rangle dt < \infty$

(5) $J \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ が $\mathcal{L}J$ とともに有界連続であれば

$$\langle u(t)J \rangle = \langle u_0 J \rangle + \int_0^t \langle f(u(s))\mathcal{L}J \rangle ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

f は非減少関数で，$f(0) = 0$ とする.

定理 6 $u_0 \in L^2(m)$ であれば非負な弱解は高々一つである.

以下に述べる証明は [U 94], [U 97] に依る。

補題 7 $u_0 \in L^2(m)$ であれば，非負な弱解 u は次を満たす.

$$\int_0^T \langle u(s) f(u(s)) \rangle ds < \infty.$$

[証明] $0 < a < b$ とする．仮定より $x \in \Omega$ を固定するごとに

$$r_{a,b}(\cdot, x) = r_{a,b}(x, \cdot) = \int_a^b p_\tau(x, \cdot) d\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$$

であったから，(5) で $J = r_{a,b}(\cdot, x)$ ととれば $\langle u(t) r_{a,b}(\cdot, x) \rangle$ は t の絶対連続関数で

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u(t) r_{a,b}(\cdot, x) \rangle &= \langle (p_b(x, \cdot) - p_a(x, \cdot)) f(u(t)) \rangle \\ &= P_b f(u(t))(x) - P_a f(u(t))(x) \end{aligned}$$

である．今

$$F(s,t)=\int m(dx)\int u(s,x)r_{a,b}(x,y)u(t,y)m(dy)$$

とおけば $F(s,t)=F(t,s)$ であり，$F_s(t,t):=\lim_{h\to 0}[F(t+h,t)-F(t,t)]/h$ (a.e.) が存在し，さらに

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)\right|\le C\langle f(u(t))\rangle,$$

但し $C=\sup_s\langle u(s)\rangle(||p_a||_\infty+||p_b||_\infty)$．(4) およびこれらのことから $F(t,t)$ は絶対連続で $(d/dt)F(t,t)=2F_s(t,t)$ となることが示せる（後の補題 8 参照）．積分形に書きかえれば

$$\int_a^b\langle u(t)P_\tau u(t)\rangle d\tau-\int_a^b\langle u_0P_\tau u_0\rangle d\tau=2\int_0^t\langle u(s)P_bf(u(s))\rangle-2\int_0^t\langle u(s)P_af(u(s))\rangle ds \quad (8.2)$$

を得る．$b=1$ ととり，$t\uparrow T, a\downarrow 0$ とすると左辺第 1 項が非負であることおよび

$$\langle|P_\tau u_0|^2\rangle\le\langle P_\tau u_0^2\rangle\le\langle u_0^2\rangle$$

に注意すれば，

$$\limsup_{a\downarrow 0}\int_0^T\langle u(s)P_af(u(s))\rangle ds<\infty.$$

最後に Fatou の補題を適用すれば，求める式が得られる． □

補題 8 $F(s,t),(s,t)\in[0,1]^2$，は s（あるいは t）をとめるごとに t（あるいは s）について絶対連続で，その *Radon-Nikodym* の導関数 F_s,F_t は各々可積分関数 $G(s),H(t)$ により

$$|F_s(s,t)|\le G(s),\quad |F_t(s,t)|\le H(t)$$

とおさえられているとする．このとき $F(t,t)$ は絶対連続である．さらに $F_s(t,t)=\lim_{h\to 0}[F(t+h,t)-F(t,t)]/h$ *(a.e.)*，$F_t(t,t)=\lim_{h\to 0}[F(t,t+h)-F(t,t)]/h$ *(a.e.)* であれば $F(t,t)$ の *Radon-Nikodym* の導関数は $(d/dt)F(t,t)=F_s(t,t)+F_t(t,t)$ で与えられる．

[証明] $h\neq 0$ に対し

$$\varphi^h(t) = \frac{F(t+h,t+h)-F(t,t+h)}{h}$$
$$\psi^h(t) = \frac{F(t,t+h)-F(t,t)}{h}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

とおくと，仮定から

$$|\varphi^h(t)| \le \frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)ds, \qquad (8.3)$$
$$|\psi^h(t)| \le \frac{1}{h}\int_t^{t+h} H(s)ds.$$

特に，$h>0$ に対し

$$|F(t+h,t+h)-F(t,t)| \le \int_t^{t+h}(G(s)+H(s))ds.$$

従って $F(t,t)$ は絶対連続である．ゆえに $0<\alpha<\beta<1$ に対し

$$F(\beta,\beta)-F(\alpha,\alpha)=\int_\alpha^\beta \lim_{h\to 0}(\varphi^h(t)+\psi^h(t))dt.$$

ところで，Fubini の定理により

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \frac{dt}{h}\int_t^{t+h} G(s)ds &= \int_\alpha^\beta G(s)ds + \int_0^h \frac{h-r}{h}G(\beta+r)dr - \int_0^h \frac{h-r}{h}G(\alpha+h)dr \\ &\to \int_\alpha^\beta G(s)ds\end{aligned}$$

であるから $M^h(t)=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}G(s)ds$ は h に関し一様可積分である．従って (8.3) より $\varphi^h(t)$ も一様可積分．$\lim_{h\to 0}\psi^h(t)=F_t(t,t)$ (a.e.) であれば，

$$F(\beta,\beta)-F(\alpha,\alpha)=\lim_{h\to 0}\int_\alpha^\beta \varphi^h(t)dt+\int_\alpha^\beta F_t(t,t)dt.$$

最後に

$$\int_\alpha^\beta \varphi^h(t)dt=\int_{\alpha+h}^{\beta+h}\frac{F(t,t)-F(t-h,t)}{h}dt \to \int_\alpha^\beta F_s(t,t)dt$$

より，補題の等式を得る． □

[定理の証明] u,v を条件 (4), (5) を満たす 2 つの解とする．$(u\vee v)f(u\vee v)\le uf(u)+vf(v)$ だから補題 7 より

$$\int_0^T \langle (u(t)\vee v(t))f(u(t)\vee v(t))\rangle dt<\infty$$

$z(t)=u(t)-v(t), F(t)=f(u(t))-f(v(t))$ とおく．(8.2) を導いたときと同様にして，

$$\frac{1}{2}\int_a^b \langle (P_{\tau/2}z(t))^2\rangle d\tau = \int_0^t \langle F(s)P_bz(s)\rangle ds - \int_0^t \langle P_{a/2}F(s)P_{a/2}z(s)\rangle ds \qquad (8.4)$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

但し，ここに $P_\tau = P_{\tau/2}P_{\tau/2}$ および P_τ が対称であることを用いた．f の単調性から

$$\begin{aligned}|P_{a/2}z(s)P_{a/2}F(s)| &\leq 2P_{a/2}(u(s)\vee v(s))P_{a/2}f(u(s)\vee v(s)) \\ &\leq 2P_{a/2}\{(u(s)\vee v(s))f(u(s)\vee v(s))\}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

$a\downarrow 0$ のとき $P_a 1$ は 1 に有界収束するから，

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle P_{a/2}\{(u(s)\vee v(s))f(u(s)\vee v(s))\}\rangle ds &= \int_0^t \langle (u(s)\vee v(s))f(u(s)\vee v(s))P_{a/2}1\rangle ds \\ &\to \int_0^t \langle (u(s)\vee v(s))f(u(s)\vee v(s))\rangle ds\end{aligned}$$

これは (8.5) の右辺が，したがって左辺が a について一様に $dsm(dx)$-可積分であることを意味する．(8.4) において順に $b\uparrow\infty, a\downarrow 0$ とすると，今示した一様可積分性と仮定 (3) により

$$\int_0^\infty \langle (P_\tau z(t))^2\rangle dt = -\int_0^t \langle z(s)F(s)\rangle ds \geq 0.$$

したがって $z(t) = u(t) - v(t) = 0$. □

8.5 スペクトルの飛び

$\mathcal{X}_{K,m}$ 上の一様測度 $\nu_{K,m}$ による L^2-ノルムと単純格子気体の Dirichlet 形式 $\mathcal{D}_{K,m}(f) = \frac{1}{2}\sum_{x=-K}^{K-1}\langle(\pi_{x,x+1}f)^2\rangle_{K,m}$ の間に次の不等式が成り立つ．

定理 9 $\mathcal{X}_{K,m}$ 上の関数 f に対し，$\langle f\rangle_{K,m} = 0$ であれば，

$$\langle f^2\rangle_{K,m} \leq \frac{(2K+1)^2}{8}\mathcal{D}_{K,m}(f).$$

注意： 定理は $-L_{K,m} := \sum_{x=-K}^{K-1}\pi_{x,x+1}$（即ち $c\equiv 1$ としたときの $-L_{\Lambda_K,m,\omega}$）の第 2 固有値

$$\kappa(K,m) = \min_{\langle f\rangle_{K,m}=0}\mathcal{D}_{K,m}(f)/\langle f^2\rangle_{K,m}$$

に対し $\kappa(K,m) \geq 8/(2K+1)^2$ が成り立つことと同値である．このとき明らかに

$$\max_{0\leq m\leq 2K+1}\kappa(K,m) \geq \frac{8}{(2K+1)^2}.$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

係数 8 はより大きい数でおきかえられるかもしれないが，$1/K^2$ というオーダーはこれ以上よくならず，

$$\max_{0\le m\le 2K+1} \kappa(K,m) \le \frac{12}{(2K+1)^2} \tag{8.6}$$

であることが次のようにしてわかる．

$$-L_{\Lambda_K}\left\{\sum_{x=-K}^{K} x\eta_x\right\} = \eta_K - \eta_{-K}$$

であるから $B = \sum_{|x|\le K} x\eta_x$ に対し，

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\Lambda_K}(B) &= \left\langle \left(\sum_{x=-K}^{K} x\eta_x\right)(\eta_K - \eta_{-K})\right\rangle_\nu = \frac{1}{2}K \\
\langle B^2\rangle_\nu &= \frac{1}{2}\sum_{x=-K}^{K} x^2 + \frac{1}{4}\sum_{x\ne y} xy = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{K} x^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{12}
\end{aligned}$$

が容易にわかる．これより

$$\langle B^2\rangle_\nu \ge \frac{(K+1)(2K+1)}{6}\mathcal{D}_{\Lambda_K}(B)$$

したがって (8.6) が成り立つ． □

定理の証明は $\mathcal{X}_N$ 上の平均場作用素

$$\mathcal{L}_{(N)} := \frac{1}{N}\sum_{\{x,y\}\subset\Gamma_N} \pi_{x,y}$$

のスペクトルを調べることによってなされる．(右辺の和は Γ_N の 2 点の組全体についてとられる.)

補題 10 $\mathcal{L}_{(N)}$ の $\{\eta|\ |\eta| = m\}$ への制限の相異なる固有値は

$$\lambda_K = -K\left(1 - \frac{K-1}{n}\right), \quad K = 0,1,\dots,m$$

で尽くされる．第 *1* 固有値 $\lambda_0 = 0$ は単根，スペクトルの飛びは $\lambda_0 - \lambda_1 = 1$，したがって，$\mathcal{X}_N$ 上の任意の関数 f に対し

$$\langle (f - \langle f\rangle_\rho)^2\rangle_\rho \le \frac{1}{2N}\sum_{\{x,y\}\subset\Gamma_N} \langle (\pi_{x,y} f)^2\rangle_\rho.$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

[証明] $m = 0, 1, \dots, N$ に対し,

$$\{\eta^A | A \subset \Gamma_N, \#A \le m\}$$

の線型包を V_m とする．$V_0 =$ 定数関数全体であり，$\{|\eta| = m\}$ 上では V_m は全関数空間と一致する．補題の証明には

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{を固有値とする固有ベクトル全体が } V_m \text{ を張る} \tag{8.7}$$

を示せばよい．(8.7) を m についての帰納法で示す．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(N)}\{\eta^A\} &= \frac{1}{N}\sum_{x\in A}\sum_{y\in A\setminus\{x\}}(\eta^{A\setminus\{x\}}\eta_y - \eta^A) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{x\in A}\eta^{A\setminus\{x\}}(|\eta| - |A| + 1) - \frac{\#A(N - |A| + 1)}{N}\eta^A
\end{aligned}$$

$\#A = m$ とすると,

$$\mathcal{L}_{(N)}\{\eta^A\} = \lambda_m\eta^A + g, \quad g \in V_{m-1}.$$

帰納法の仮定から

$$(\lambda_m - \mathcal{L}_{(N)})h = g$$

が $h \in V_{m-1}$ について解け，このとき $f = \eta^A + h$ は λ_m を固有値とする固有ベクトルである．ゆえに (8.7) が示された． □

[定理の証明] f は $\mathcal{X}_{\Lambda_K,m}$ 上の関数で，$\langle f\rangle_{K,m} = 0$ とする．また $\langle\cdot\rangle = \langle\cdot\rangle_{K,m}$ とする．$-K \le x < y \le K$ に対し

$$\langle(\pi_{x,y}f)^2\rangle \le |y - x|\sum_{z=x}^{y-1}\langle(\pi_{z,z+1}f)^2\rangle$$

であるから，補題より，$n = (2K + 1)$ として

$$\begin{aligned}
\langle f^2\rangle &\le \frac{1}{2n}\sum_{1\le x<y\le n}|y - x|\sum_{z=x}^{y-1}\langle(\pi_{z,z+1}f)^2\rangle \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{K=1}^{n-x}K\sum_{j=1}^{K-1}\langle(\pi_{x+j,x+j+1}f)^2\rangle
\end{aligned}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n}\sum_{K=1}^{n-1} K \sum_{j=1}^{K-1}\sum_{x=1}^{n-K}\langle(\pi_{x+j,x+j+1}f)^2\rangle \\
&\leq \frac{1}{n}\left\{\sum_{K=1}^{[n/2]} K(K-1) + \sum_{K=[n_2]+1}^{n-1} K(n-K)\right\}\mathcal{D}_{\Lambda_K,m}(f) \\
&= \frac{1}{n}\left\{\sum_{K=1}^{[n/2]} K(K-1) + \sum_{K=1}^{n-[n/2]-1} K(n-K)\right\}\mathcal{D}_{\Lambda_K,m}(f) \\
&\leq \frac{n^2}{8}\mathcal{D}_{\Lambda_K,m}(f).
\end{aligned}
$$

□

8.6 確率測度の Boltzmann 列

S を完備可分距離空間，$\mathcal{P}(S)$ を S 上の確率測度全体とし $\mathcal{P}(S)$ には弱収束の位相をいれておく．直積空間 S^n 上の対称な確率測度の列 μ_n 及び，μ_n に従う確率変数 $(X_1,\ldots,X_n)\in S^n$ が与えられているとする．$\mathcal{P}(S)$ -値確率変数 α_n を

$$
\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}
$$

により定義する．また μ_n の S^k 上への射影を $\mu_{n|k}$ と書く．

定理 11 $\mu\in\mathcal{P}(S)$ に対し次は同値

$$
\alpha_n \to \mu \quad \text{確率収束} \tag{8.8}
$$

$$
\mu_{n|k} \Rightarrow \underbrace{\mu\otimes\ldots\otimes\mu}_{k\ fold} \quad k=1,2,\ldots \tag{8.9}
$$

$$
\mu_{n|1} \Rightarrow \mu \text{ かつ } \mu_{n|2} \Rightarrow \mu\otimes\mu \tag{8.10}
$$

但し $\Rightarrow$ は確率測度の弱収束を，$\otimes$ は確率測度の直積を表す．

定義 12 *(8.9)* が成り立つとき，μ_n は（μ を極限測度とする）*Boltzmann* 列であるという．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

注意. 完備可分距離空間 S は単位区間の可算直積空間に部分空間として埋め込める（Urysohn の定理）. 従って，同じ位相をあたえる別の距離を適当に取れば全有界になり，特に，S 上の有界な一様連続関数の空間は可分である．これより一様に有界な（S上の）連続関数の列 $\{f_n\}$ がとれて $\mathcal{P}(S)$ の位相は

$$d(\alpha,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}|\alpha(f_n)-\beta(f_n)|,\quad \alpha,\beta\in\mathcal{P}(S) \tag{8.11}$$

で与えられることがわかる．したがって上記定理 11 における確率収束は

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}P(d(\alpha_n,\mu)>\varepsilon)=0$$

と書くことができる．

[定理 11 の証明] S 上の有界連続関数 f に対し $E\alpha_n(f)=\mu_{n|1}(f)$ より (8.8) ならば $\mu_{n|1}\to\mu$. このことと

$$E(\alpha_n(f)-\mu_{n|1}(f))^2=\mu_{n|2}(f\otimes f)-[\mu_{n|1}(f)]^2+O(\frac{1}{n}) \tag{8.12}$$

より (8.8) ならば (8.10) を得る．(8.8) より (8.9) を導くには (8.12) を一般化すればよい．逆に (8.10) を仮定すれば各 f について $\alpha_n(f)\to\mu(f)$（確率収束）が直ちにわかる．$\mathcal{P}(S)$ は距離が (8.11) で与えられるからこれから (8.8) が従う． □

次ぎの定理は [Sz 91] による．

定理 13 $\mathcal{P}(S)$-値確率変数列 $\{\alpha_n\}$ が緊密であるためには $\mu_{n|1}$ が緊密であることが必要十分である．

[証明] $\{\alpha_n\}$ が法則収束すれば，$\mu_{n|1}$ も収束するから必要性は明らか．逆を示す．$K_k\subset S$ がコンパクトであれば

$$\mathcal{K}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha\in\mathcal{P}(S):\alpha(K_k)\geq 1-\frac{1}{k}\right\}$$

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

は $\mathcal{P}(S)$ のコンパクト集合．また

$$P\{\alpha_n \notin \mathcal{K}\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\alpha_n(S \setminus K_k) > \frac{1}{k}\right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k\mu_{n|1}(S \setminus K_k)$$

である．そこで $\mu_{n|1}$ が緊密であれば，$\varepsilon > 0$ に対し K_k を，例えば

$$\sup_n \mu_{n|1}(S \setminus K_k) \leq \varepsilon / k^3$$

ととれば

$$P(\alpha_n \notin \mathcal{K}) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

となり，$\{\alpha_n\}$ が緊密であることがわかる． □

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

文献表

文献表をまず内容別に整理し，それらを手法あるいはモデルの別によって分類しておく．但し，当然のことながら，この文献表はすべてを網羅したものでないことは，断るまでもない．

まず内容別に，次のように分類する．

$\boxed{1}$ 流体力学極限 (Hydrodynamic Limit)

$\boxed{2}$ 揺動問題 (Fluctuation Problem)

$\boxed{3}$ 大偏差原理 (Large Deviation)

$\boxed{4}$ Tagged Particle

$\boxed{5}$ 関係した文献

$\boxed{6}$ 解析的手法

$\boxed{7}$ 総合報告

その上で，$\boxed{1}$ は手法別・モデル別に，$\boxed{2}$ ～ $\boxed{3}$ はモデル別に分類する．

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

1 流体力学極限

A 手法別分類

a エントロピー法

(1) 勾配型モデル: [GPV 88], [Fr 90], [Re 90], [Y 91], [FHU 91], [V 91], [SU 93], [U 94], [U 96], [FIS 95]

(2) 非勾配型モデル: [V 93a], [V 93b], [Q 92], [KLO 94], [KLO 95], [FUY 95]

(3) 非対称モデル: [Re 91], [OVY 93], [EMY 93], [FFL 94], [LO 94], [L 94], [LOY 94], [LOY 95], (関連して [ABL 88], [KR 94])

(3') 非対称モデル (mean 0): [Xu 93]

b エントロピー法によらぬもの: [Ro 81], [BDS 83], [Fu 91], [CS 96], [U 96]

B モデル別分類

(1) Ginzburg-Landau モデル (格子, 連続): [Fr 87], [Fr 89], [GPV 88], [Fu 89a], [Fu 89b], [Re 90], [Ya 91], [Fu 91a], [Fu 91b], [Va 93a], [Va 93b], [Zhu 95]

(2) 格子気体: [DFL 86], [FHU 91], [Q 92], [KLO 92], [LY 93], [EMY 94], [FUY 95], [Q 95], [VY 94]

(3) 相互作用のある Brown 粒子系: [Ro 83], [Va 91], [OV 91], [U94]

(4) Hamilton system with (weak) noise: [OVY 93], [FFL 94], [LO 94]

(5) Mechanical system: [BDS 83], [Mu 87], [U 96], [U 97a], [U 97b]

2 揺動問題 (モデル別分類)

(1) Ginzburg-Landau 格子モデル: [Zhu 90], [CY 92], [Lu 94]

(2) 格子気体: [DPSW 86], [Zhu 92], [Ch 94], [Ch 95], [Q 95], [Fu 96]

(3) 相互作用のある Brown 粒子系: [Itô 83] (独立な場合), [Sp 86]

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

3 大偏差原理 (モデル別分類)

(1) Ginzburg-Landau 格子モデル: [DV 89], [Q 94], [LY 95]
(2) 格子気体: [KOV 89], [LY 95] (zero range), [Q 95]
(3) 相互作用のない無限粒子系: [DV 87]

4 Tagged Particle (流体力学極限に関連性の強いものに限る)

[KV 86], [Re 94], [V 94], [V 95], [SX 96]

5 関係した文献

(1) Gibbs 測度: [Ge 79], [Ge 88]
(2) スペクトルギャップ・対数型 Sobolev 不等式: [LY 93], [Y 94], [Y 95], [LSV 96]

6 解析的手法

[M 55], [Ca 80], [Lac 86], [Lac 92], [Lac 93] (propagation of chaos)

7 総合報告

[DIPP 84], [S 91], [DP 91], [CIP 94], [Fu 89], [Q 95], [V 96], [Fu 97]
読み物: [Fu 91], [Fu 92], [Fu 93]

Bibliography

[ABL 88] E.D. Andjel, M.D. Bramson and T.M. Liggett: Shocks in the asymmetric exclusion process, Probab. Theory Relat. Fields, **78** (1988), 231-247.

[BFL 96] I. Benjamini, P.A. Ferrari and C. Landim: Asymmetric conservative processes with random rates, Stoch. Proc. Appl., **61** (1996), 181-204.

[BDS 83] C. Boldrighini, R.L. Dobrushin and Yu.M. Suhov: One-dimensional hard rod caricature of hydrodynamics, J. Statis. Phys., **31** (1983), 577-615.

[Ca 80] R.E. Caflish: The fluid dynamic limit of the non-linear Bolzmann equation, Commun. Pure Appl. Math., **33** (1980), 651-666.

[CRZ 96] P. Cattiaux, S. Roelly and H. Zessin: Une approche Gibbsienne des diffusions Browniennes infini-dimensionnelles, Probab. Theory Relat. Fields, **104** (1996), 147-179.

[CIP 94] C. Cercignani, R. Illner and M. Pulvirenti: The Mathematical Theory of Dilute Gases, Springer, 1994.

[Ch 94] C.C. Chang: Equilibrium fluctuations of gradient reversible particle systems, Probab. Theory Relat. Fields, **100** (1994), 269-283.

[Ch 95] C.C. Chang: Equilibrium fluctuations of nongradient reversible particle systems, to appear in: Nonlinear Stochastic PDE's: Hydrodynamic Limit and Burgers' Turbulence (eds. Funaki and Woyczynski), IMA volume **77**, Springer, 1995, pp. 41-51.

[ChY 92] C.C. Chang and H.T. Yau: Fluctuations of one-dimensional Ginzburg-Landau models in non-equilibrium, Commun. Math. Phys., **145** (1992), 209-234.

[CS 96] L. Chayes and G. Swindle: Hydrodynamic limits for one-dimensional particle systems with moving boundaries, Ann. Probab., **24** (1996), 559-598.

[DFL 86] A. De Masi, P.A. Ferrari and J.L. Lebowitz: Reaction diffusion equations for interactiong particle systems, J. Statis. Phys., **44** (1986), 589-644.

[DIPP 84] A. De Masi, N. Ianiro, A. Pellegrinotti and E. Presutti: A survey of the hydrodynamical behavior of many-particle systems, in: Nonequilibrium Phenomena II, From Stochastics to Hydrodynamics, eds. Lebowitz and Montroll, Elsevier Science Publishers BV, 1984.

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

[DP 91] A. De Masi and E. Presutti: Mathematical Methods for Hydrodynamic Limits, Lect. Notes Math., **1501**, Springer, 1991.

[DPSW 86] A. De Masi, E. Presutti, H. Spohn and W.D. Wick: Asymptotic equivalence of fluctuation fields for reversible exclusion processes with speed change, Ann. Probab., **14** (1986), 409-423.

[DS 89] J.-D. Deuschel and D.W. Stroock: Large Deviations, Academic Press, 1989.

[DV 75] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan: Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time I, Commun. Pure Appl. Math., **28** (1975), 1-47.

[DV 76] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan: Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time III, Commun. Pure Appl. Math., **29** (1976), 389-461.

[DV 87] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan: Large deviations for noninteracting infinite-particle systems, J. Statis. Phys., **46** (1987), 1195-1232.

[DV 89] M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan: Large deviations from a hydrodynamic scaling limit, Commun. Pure Appl. Math., **42** (1989), 243-270.

[EMY 93] R. Esposito, R. Marra and H.T. Yau: Diffusive limit of asymmetric simple exclusion, preprint, 1993.

[EK 86] S.N. Ethier and T.G. Kurtz: Markov Processes, Characterization and Convergence, Wiley, 1986.

[ELS 96] G.L. Eyink, J.L. Lebowitz and H. Spohn: Hydrodynamics and fluctuations outside of local equilibrium: Driven

diffusive systems, J. Statis. Phys., **83** (1996), 385-472.

[FIS 95] S. Feng, I. Iscoe and T. Seppäläinen: A microscopic mechanism for the porous medium equation, preprint 1995.

[FK 95] P.A. Ferrari and C. Kipnis: Second class particles in the rarefaction fan, Ann. Inst. Henri Poincaré (in memoriam C. Kipnis), **31** (1995), 143-154.

[FV 79] W.H. Fleming and M. Viot: Some measure-valued Markov processes in population genetics theory, Indiana Univ. Math. Journ., **28** (1979), 817-943.

[Fr 87] J. Fritz: On the hydrodynmic limit of a Ginzburg-Landau lattice model. The a priori bounds, J. Statis. Phys., **47** (1987), 551-572.

[Fr 89] J. Fritz: On the hydrodynmic limit of a Ginzburg-Landau lattice model. The law of large numbers in arbitrary dimensions, Probab. Theory Relat. Fields, **81** (1989), 291-318.

[Fr 90] J. Fritz: On the diffusive nature of entropy flow in infinite systems: remarks to a paper by Guo-Papanicolaou-Varadhan, Commun. Math. Phys., **133** (1990), 331-352.

[FFL 94] J. Fritz, T. Funaki and J.L. Lebowitz: Stationary states of random Hamiltonian systems, Probab. Theory Relat. Fields, **99** (1994), 211-236.

[Fu 89a] T. Funaki: Derivation of the hydrodynamical equation for one-dimensional Ginzburg-Landau model, Probab. Theory Relat. Fields, **82** (1989), 39-93.

[Fu 89b] T. Funaki: Hydrodynamic limit for Ginzburg-Landau type continuum model. Probability theory and mathematical statistics, Proceedings of the fifth Vilnius Conference (1989), 1990, 382-390.

[Fu 89c] 舟木直久: 流体力学極限 — 局所平衡状態の統計力学, 数学 **41** (1989), 166-176.

[Fu 91a] T. Funaki: The hydrodynamic limit for a system with interactions prescribed by Ginzburg-Landau type random Hamiltonian, Probab. Theory Relat. Fields, **90** (1991), 519-562.

[Fu 91b] T.Funaki: The reversible measures of multi-dimensional Ginzburg-Landau type continuum model, Osaka J. Math., **28** (1991), 463-494.

[Fu 91c] 舟木直久：流体力学極限をめぐって, 数理科学, 1991 年 10 月号.

[Fu 92] 舟木直久：ミクロからマクロへ — 流体力学極限, 数理科学, 1992 年 5 月号.

[Fu 93] 舟木直久：気体分子の衝突, 数理科学, 1993 年 6 月号.

[Fu 96] T. Funaki: Equilibrium fluctuations for lattice gas, in "Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory" (eds. Ikeda, Watanabe, Fukushima and Kunita), Springer, 1996, 63-72.

[Fu 97] 舟木直久：相分離の確率モデルと界面の運動方程式, 数学, **49** (1997).

[FHU 91] T. Funaki, K. Handa and K. Uchiyama: Hydrodynamic limit of one-dimensional exclusion processes with speed change, Ann. Probab., **19** (1991), 245-265.

[FUY 95] T. Funaki, K. Uchiyama and H.T. Yau: Hydrodynamic limit for lattice gas reversible under Bernoulli measures, in: Nonlinear Stochastic PDE's: Hydrodynamic Limit and Burgers' Turbulence (eds. Funaki and Woyczynski), IMA volume **77**, Springer, 1995, pp. 1-40.

[FuS 97] T. Funaki and H. Spohn: Motion by mean curvature from the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model, to appear in Commun. Math. Phys., 1997.

[Ge 79] H.O. Georgii: Canonical Gibbs Measures, Lect. Notes Math., **760**, Springer, 1979.

[Ge 88] H.O. Georgii: Gibbs Measures and Phase Transitions, Walter, 1988.

[GPV 88] M.Z. Guo, G.C. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan: Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions, Commun. Math. Phys., **118** (1988), 31-59.

[I 83] K. Itô: Distribution-valued processes arising from independent Brownian motions, Math. Z., **182** (1983), 17-33.

[KaSo 94] M.A. Katsoulakis and P.E. Souganidis: Interacting particle systems and generalized evolution of fronts, Arch. Rat. Mech. Anal., **127** (1994), 133-157.

[KaSo 95] M.A. Katsoulakis and P.E. Souganidis: Generalized motion by mean curvature as a macroscopic limit of stochastic Ising models with long range interactions and Glauber dynamics, Commun. Math. Phys., **169** (1995), 61-97.

[KLO 94] C. Kipnis, C. Landim and S. Olla: Hydrodynamical limit for a nongradient system: the generalized symmetric exclusion process, Commun. Pure Appl. Math., **47** (1994), 1475-1545.

[KLO 95] C. Kipnis, C. Landim and S. Olla: Macroscopic properties of a stationary nonequilibrium distribution for a non-gradient interacting particle system, Ann. Inst. Henri Poincaré (in memoriam C. Kipnis), **31** (1995), 191-221.

[KOV 89] C. Kipnis, S. Olla and S.R.S. Varadhan: Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion processes, Commun. Pure Appl. Math., **42** (1989), 115-137.

[KV 86] C. Kipnis and S.R.S. Varadhan: Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions, Commun. Math. Phys., **104** (1986), 1-19.

[KR 94] C. Klingenberg and N.H. Risebro: Convex conservation laws with discontinuous coefficients, preprint, 1994.

[Lac 86] M. Lachowicz: On the initial layer and the existence theorem for the nonlinear Boltzmann equation; differentiability of the solution of the corresponding system of linear equations, Arch. Mech., **38** (1986), 127-141.

[Lac 92] M. Lachowicz: Solutions of nonlinear kinetic equations on the level of the Navier-Stokes dynamics, J. Math. Kyoto Univ., **32** (1992), 31-43.

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

[Lac 93] M. Lachowicz: A system of stochastic differential equations modelling the Euler and the Navier-Stokes hydrodynamic equations, Japan J. Indust. Appl. Math., **10** (1993), 109-131.

[L 91] C. Landim: Hydrodynamical equation for attractive particle systems on $\mathbf{Z}^d$, Ann. Probab., **19** (1991), 1537-1558.

[L 96] C. Landim: Hydrodynamical limit for space inhomogeneous one dimensional totally asymmetric zero range processes, Ann. Probab., **24** (1996), 599-638.

[LM 97] C. Landim and M. Mourragui: Hydrodynamic limit of mean zero asymmetric zero range processes in infinite volume, Ann. Inst. Henri Poincaré, **33** (1997), 65-82

[LOY 97] C. Landim, S. Olla and H.T. Yau: First order correction for the hydrodynamic limit of asymmetric simple exclusion processes in dimension $d \geq 3$, Commun. Pure Appl. Math. **50** (1997), 149-202.

[LOY 96] C. Landim, S. Olla and H.T. Yau: Some properties of the diffusion coefficient for asymmetric simple exclusion processes, Ann. Probab., **24** (1996), 1779-1808.

[LSV 96] C. Landim, S. Sethuraman and S. Varadhan: Spectral gap for zero-range dynamics, Ann. Probab., **24** (1996), 1871-1902.

[LY 95] C. Landim and H.T. Yau: Large deviations of interacting particle systems in infinite volume, Commun. Pure Appl. Math., **48** (1995), 339-379.

[LiO 96] C. Liverani and S. Olla: Ergodicity in infinite Hamiltonian systems with conservative noise, Probab. Theory Relat. Fields, **106** (1996), 401-445

[Lu 94] S. Lu: Equilibrium fluctuations of a one-dimensional nongradient Ginzburg-Landau model, Ann. Probab., **22** (1994), 1252-1272.

[LuY 93] S.L. Lu and H.T. Yau: Spectral gap and logarithmic Sobolev inequality for Kawasaki and Glauber dynamics, Commun. Math. Phys., **156** (1993), 399-433.

[M 55] C.B. Morrey: On the derivation of the equations of hydrodynamics from statistical mechanics, Commun. Pure Appl. Math., 8 (1955), 279-326.

[Mou 96] M. Mourragui: Comportement hydrodynamique et entropie relative des processus de sauts, de naissances et de morts, Ann. Inst. Henri Poincaré, **32** (1996), 361-385.

[Mu 87] M.G. Mürmann: The hydrodynamic limit of a one-dimensional nearest neighbor gradient system, J. Stat. Phys. **48** (1987), 769-788.

[NS 96] A. Naddaf and T. Spencer: On homogenization and scaling limit of some gradient perturbations of a massless free field, to appear in Commun. Math. Phys., 1996.

[OV 91] S. Olla and S.R.S. Varadhan: Scaling limit for interacting Ornstein-Uhlenbeck processes, Commun. Math. Phys., **135** (1991), 355-378.

[OVY 93] S. Olla, S.R.S. Varadhan and H.T. Yau: Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise, Commun. Math. Phys., **155** (1993), 523-560.

[Q 92] J. Quastel: Diffusion of color in the simple exclusion process, Commun. Pure Appl. Math., **45** (1992), 623-679.

[Q 95] J. Quastel: Large deviations from a hydrodynamic scaling limit for a nongradient system, Ann. Probab., **23** (1995), 724-742.

[Q 95] J. Quastel: Diffusion in disordered media, to appear in: Nonlinear Stochastic PDE's: Hydrodynamic Limit and Burgers' Turbulence (eds. Funaki and Woyczynski), IMA volume **77**, Springer, 1995, pp. 65-80.

[Re 90] F. Rezakhanlou: Hydrodynamic limit for a system with finite range interactions, Commun. Math. Phys., **129** (1990), 445-480.

[Re 91] F. Rezakhanlou: Hydrodynamic limit for attractive particle systems on $\mathbf{Z}^d$, Commun. Math. Phys., **140** (1991), 417-448.

[Re 94] F. Rezakhanlou: Propagation of chaos for symmetric simple exclusions, Commun. Pure Appl. Math., **47** (1994), 943-957.

[Ro 81] H. Rost: Non-equilibrium behavior of a many particle process: density profile and local equilibria, Z. Wahr. verw. Gebiete, **58** (1981), 41-53.

[Ro 83] H. Rost: Hydrodynamik Gekoppetter Diffusionen: Fluktuationen im Gleichgewicht, Lect. Notes Math. **1031** (1983), 97-107.

[SV 79] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan: Multidimensional Diffusion Processes, Springer, 1979.

[SX 96] S. Sethuraman and L. Xu: A central limit theorem for reversible exclusion and zero-range particle systems, Ann. Probab., **24** (1996), 1842-1870.

[Sp 86] H. Spohn: Equilibrium fluctuations for interacting Brownian particles, Commun. Math. Phys., **103** (1986), 1-33.

[Sp 91] H. Spohn: Large Scale Dynamics of Interacting Particles, Springer, 1991.

[Sp 93] H. Spohn: Interface motion in models with stochastic dynamics, J. Statis. Phys., **71** (1993), 1081-1132.

[SpY 95] H. Spohn and H.T. Yau: Bulk diffusivity of lattice gases close to criticality, J. Statis. Phys., **79** (1995), 231-241.

[Sz 91] A.S. Sznitman: Propagation of chaos. In: Ecole d'été Saint-Flour 1989 (Lect. Notes Math., vol. 1464, pp. 165-251), Springer, 1991.

[SU 93] Y. Suzuki and K. Uchiyama: Hydrodynamic limit for a spin system on a multidimensional lattice, Probab. Theory Relat. Fields, **95** (1993), 47-74.

[U 94] K. Uchiyama: Scaling limits of interacting diffusions with arbitrary initial distributions, Probab. Theory Relat. Fields, **99** (1994), 97-110.

[U 96] K. Uchiyama: Scaling limit for a mechanical system of interacting particles, Commun. Math. Phys., **177** (1996), 103-128.

[U 97a] K. Uchiyama: Scaling limits for large systems of interacting particles (preprint)

[U 97b] K. Uchiyama: Scaling limit for a mechanical system of interacting particles II, (preprint)

[U 97c] K. Uchiyama: Uniqueness of non-negative solutions for an integro-differential equation, (preprint)

[V 91] S.R.S. Varadhan: Scaling limits for interacting diffusions, Commun. Math. Phys., **135** (1991), 313-353.

[V 93a] S.R.S. Varadhan: Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions - II, In: Asymptotic problems in probability theory: stochastic models and diffusions on fractals (eds. Elworthy and Ikeda), Longman, 1993, pp. 75-128.

[V 93b] S.R.S. Varadhan: Relative entropy and hydrodynamic limits, In: Stochastic Processes, A Festschrift in Honour of G. Kallianpur (eds. Cambanis et al.), Springer, 1993, pp. 329-336.

[V 94] S.R.R. Varadhan: Regularity of self diffusion coefficient, In: the Dynkin Festschrift: Markov processes and their applications (ed. Freidlin), 1994, 387-397.

[V 95] S.R.S. Varadhan: Self diffusion of a tagged particle in equilibrium for asymmetric mean zero random walk with simple exclusion, Ann. Inst. Henri Poincaré (in memoriam C. Kipnis), **31** (1995), 273-285.

[V 96] S.R.S. Varadhan: The complex story of simple exclusion, in "Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory" (eds. Ikeda, Watanabe, Fukushima and Kunita), Springer, 1996, 385-400.

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

[VY 94] S.R.S. Varadhan and H.T. Yau: Diffusive limit of lattice gas with mixing conditions, in preparation.

[Xu 93] L. Xu: Diffusive scaling limit for mean zero asymmetric simple exclusion processes, Courant thesis, 1993.

[Y 91] H.T. Yau: Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models, Letters Math. Phys., **22** (1991), 63-80.

[Y 94] H.T. Yau: Metastability of Ginzburg-Landau model with a conservation law, J. Statis. Phys., **74** (1994), 705-742.

[Y 94?] H.T. Yau: Logarithmic Sobolev inequality for Kawasaki dynamics, I. the independent case, preprint, 1994.

[Y 96] H.T. Yau: Logarithmic Sobolev inequality for lattice gas with mixing conditions, CMP.,**181** (1996), 367-408.

[Zhu 90] M. Zhu: Equilibrium fluctuations for one-dimensional Ginzburg-Landau lattice model, Nagoya Math. J., **117** (1990), 63-92.

[Zhu 92] M. Zhu: Nonequilibrium fluctuations for one-dimensional exclusion processes with speed change, preprint 1992.

[Zhu 95] M. Zhu: The reversible measures of a conservative system with finite range interactions, "Nonlinear Stochastic PDE's: Burgers' Turbulence and Hydrodynamic Limit" (eds. T. Funaki and W.A. Woyczynski), IMA volume, Springer, 1995, 53-64

Sem. on Probab.
Vol.59 1997年
P1-132

１９９７年６月　確率論セミナー発行