A 4 Martingale

目　次

凡　例

Ω	基本空間
$\mathcal{B}$	Ω の σ-field
P	$(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度
$\mathcal{F}$ $[\mathcal{F}_t]$	$\mathcal{B}$ の σ-subfield
$\mathcal{B}(\mathcal{C})$	集合族 $\mathcal{C}$ を含む最小の σ-field
$\mathcal{B}(X_\lambda, \lambda \in \Lambda)$:	Ω 上の函数族 $\{X_\lambda(\omega), \lambda \in \Lambda\}$ を含む最小の σ-field
EX	X の期待値 $EX = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$
$E\{X \mid \mathcal{F}\}$	X の $\mathcal{F}$ に関する条件つき期待値
$L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$:	$\mathcal{F}$-可測で $E\lvert X\rvert^p < \infty$ な確率変数の全体
$\lVert X \rVert_p$	$X \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の norm $\{\int_\Omega \lvert X\rvert^p dP\}^{\frac{1}{p}}$
$s \uparrow t$ $(s \downarrow t)$	s が、下から（上から）t に近づくこと
$s \wedge t$ $(s \vee t)$	s, t の小さい（大きい）方

A 4 Martingale

I 定義と例

§1 定義と簡単な性質

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$を確率空間，$\mathbb{T}$を実数の部分集合とし各$t \in T$に対し，$\mathcal{B}$のσ－subfield $\mathcal{F}_t$ 及び確率変数$X_t(\omega)$が対応しているとする。必要があれば完備化すればよいので全体を通じて$(\Omega, \mathcal{B}, P)$は完備確率空間，$\mathcal{F}_t$ はP測度0の集合をすべて含むものとしておく。

<u>定義 1.1</u>　（*martingale, sub－, super－*）

$\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in T\}$が <u>*martingale*</u> であるというのは

a)　$s, t \in T$　$s < t$ のとき　$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$

b)　$X_t(\omega)$は$\mathcal{F}_t$ 可測で　$E|X_t| < \infty$

c)　$s, t \in T$，$s < t$のとき

（1.1）　$E\{X_t | \mathcal{F}_s\} = X_s$　　（$a.s$）

が成立つことである。又(1.1)の等式をそれぞれ$\geqq$，及び$\leqq$でおきかえたとき，<u>*sub-martingale*</u>，（又は*semi－martingale*），<u>*super－martingale*</u>（又は*lower semi－martingale*）と云う。

<u>注意1</u>　$\mathcal{F}_t$を明示せず単に$\{X_t, t \in T\}$が*martingale*（*sub－, super－*）と云うことがあるが，それは$\mathcal{F}_t$として$\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(X_s; s \in (-\infty, t] \cap \mathbb{T})$をとり，$\{X_t, \mathcal{B}_t, t \in \mathbb{T}\}$が*martingale*（*sub－, super－*）となることである。このとき条件つき期待値の書き方から（1.1）式は

$E\{X_t | X_u, u \in T, u \leqq s\} = X_s$　　　（$a.s$）

"即ち，s迄のX_uを知ったときのX_tの条件つき期待値がX_sに等しい"と云い表わすことができる。

又 b)により$\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in T\}$が*martingale*（*sub－, super－*）なら$\{X_t, t \in T\}$は*martingale*（*sub－, super－*）である。

<u>注意2</u>　条件 c)は

c')　$s, t \in T$，$s < t$　のとき，すべての$\Lambda \in \mathcal{F}_s$に対し

$\int_\Lambda X_t \, dP = \int_\Lambda X_s \, dP$

と同値である。従って必ずしも$E|X_t| < \infty$でなくても積分が確定する場合、例えばすべての$t \in T$に対し，$X_t \geqq 0$　（$a.s$）のような場合には，c')により*martingale*を定義することができる。このとき，

generalized martingale と云うことにする。submartingale (supermartingale) においても同称である。

注意3 martingale の場合 X_t のとる値として複素数を許すことがある。しかし submartingale, supermartingale は常に実数値である。

martingale (sub-, super-) の定義は 円周 (球面) 平均が中心の値に等しい (より大きい, より小さい) と云う調和函数 (劣一, 優一) の定義と似ている所がある。実際に Brown 運動を通して両者の間には深い関係があり、Doob が martingale 理論を組織的に適用して Newton potential, Dirichlet 問題等の確率論的基礎づけに多くの貢献をしている。(→ Doob [5]) 又最近では markov 過程の functional の研究の進歩に伴って、martingale そのもの、potential 論が研究されている。それは後で述べることにしてここでは簡単な次のことを注意しておく。submartingale と supermartingale は X_t の符号を変えれば互にうつるので、martingale の potential 論以外は主として submartingale について述べる。

$\boxed{1.1}$ a) $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in T\}$, $\{Y_t, \mathcal{F}_t, t\in T\}$ を submartingale とすると,

$\{C_1X_t + C_2Y_t, \mathcal{F}_t, t\in T\}$ ($C_1, C_2 \geqq 0$ 定数)

$\{X_t \vee Y_t, \mathcal{F}_t, t\in T\}$

も submartingale である。

b) $\{X_t^{(n)}, \mathcal{F}_t, t\in T\}$ ($n=1,2\cdots$) を martingale (sub-) とし, $X_t^{(n)} \uparrow X_t$ (又は $X_t^{(n)} \downarrow X_t$) (a.s) とすると $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in T\}$ は generalized martingale (sub-) である。

$0\leqq Y_t$, $Y_t \in L_1[\mathcal{F}_t]$ が存在して $|X_t^{(n)}| \leqq Y_t$ (a.s) であれば martingale (sub-) になる。

$\boxed{1.2}$ $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in T\}$ を submartingale とすると、EX_t は t の函数として単調増加函数で、定数函数となるのは martingale の場合でかつそのときに限る。

$\boxed{1.3}$ a) $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in T\}$ を martingale, $\varphi(x)$ を凸函数とする。もし $t_0\in T$ が存在して $E|\varphi(X_{t_0})| < \infty$ であれば $\{\varphi(X_t), \mathcal{F}_t,$

$t \in T \cap (-\infty, t_0]\}$ は submartingale である。

b) $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in T\}$ を submartingale, $\varphi(x)$ を単調増加な凸函数とする。もし $t_0 \in T$ が存在して $E|\varphi(X_{t_0})| < \infty$ なら $\{\varphi(X_t), \mathcal{F}_t, t \in T \cap (-\infty, t_0]\}$ は submartingale である。

このことから $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in T\}$ を martingale とすると $\{|X_t|^p, \mathcal{F}_t, t \in \mathcal{F}_t\}$ $(p \geq 1)$, $\{|X_t| \log^+ |X_t|, \mathcal{F}_t, t \in T\}$ ($\log^+ x = 0$, $x < 1$, $\log^+ x = \log x$, $x \geq 1$) 等は期待値が有限なら submartingale である。又同様に $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in T\}$ を submartingale とすると $\{X_t \log^+ X_t, \mathcal{F}_t, t \in T\}$, $\{X_t^+, \mathcal{F}_t, t \in T\}$ $(x^+ = x \vee 0)$ 等も期待値が有限なら submartingale である。

定義1.1で parameter の集合 T を実数の部分集合としたが、一般に全順序集合としても定義は同様である。T が整数のある集合である場合離散 parameter, 区間とか区間の和集合のような場合連続 parameter の martingale と呼ぶことにする。共通に議論できる部分も可成りあるが連続 parameter の場合、解析的条件が複雑になることと、問題の興味のおき方にも少し差があるので一応分けて記述することにする。

更に parameter の集合 T が有向集合の場合とか、X_t のとる値が Banach 空間になるときとか, 基礎の確率空間が σ−有限測度空間になる場合が考えられているが それは IV でまとめて述べる。

§2 例

例に入る前に後程よく出て来る一様可積分 (uniformly integrable) の概念についてまとめておく。

確率変数の系 $\{X_\lambda(\omega); \lambda \in \Lambda\}$ が一様可積分というのは

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\{|X_\lambda| > N\}} |X_\lambda| \, dP = 0$$

が $\lambda \in \Lambda$ につき一様に成立つことである。

(i) $\{X_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ が一様可積分であるための必要且つ充分条件は

a) $\sup_{\lambda \in \Lambda} E|X_\lambda| < \infty$

b) $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ を定めて、$P(A) < \delta$ なるすべての $A \in \mathcal{B}$ に対し、$\int_A |X_\lambda| \, dP < \varepsilon$

とできることである。

(ii)　$p>1$が存在して $\sup_{\lambda\in\Lambda} E|X_\lambda|^p<\infty$ なら $\{X_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ は一様可積分である。

(iii)　$\{X_n, n\geqq 1\}\subseteqq L_1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 且つ $X_n\geqq 0$ $(a.s)$ $X_n\to X_\infty$ $(a.s)$ とする。このとき $\{X_n, n\geqq 1\}$ が一様可積分であるための必要条件は $\lim_{n\to\infty} EX_n = EX_\infty$ である。

(iv)　$\{X_n, n\geqq 1\}\subseteqq L_p(\Omega, \mathcal{B}, P)$ $(p\geqq 1)$ $X_n\to X_\infty$ $(a.s)$ $X_\infty\in L_p(\Omega, \mathcal{B}, P)$ とする。$E|X_n-X_\infty|^p\to 0$ $(n\to\infty)$ となるための必要充分条件は $\{X_n, n\geqq 1\}$ が一様可積分なことである。

(v)　$L_1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を可分とする。$\{X_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}\subseteqq L_1$ $\sup_{\lambda\in\Lambda} E|X_\lambda|<\infty$ とすると $\{X_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ が弱位相 $\sigma(L_1, L_\infty)$ で sequentially compact になるための必要充分条件は一様可積分なことである。

いくつかの典型的な例をあげ、それに関連する話題を合せて述べることにする。

例1　$Y_n\in L_1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ $n=1,2,\cdots$ $X_n=\sum_{k=1}^n Y_k$ とおく。このとき $\{X_n, n\geqq 1\}$ が martingale になるための必要充分条件は

(2.1)　$E\{Y_{n+1} | Y_1\cdots Y_n\}=0$ $n\geqq 1$, $(a.s)$

が成立つことである。特に $\{Y_1, Y_2\cdots\}$ が独立で $EY_j=0$ $j=1,2,\cdots$ であれば (2.1) が成立つので $\sum_{j=1}^n Y_j = X_n$ は martingale である。

(2.1) をみたす確率変数列の研究は P. Levy により始められた。(→ P. Levy [1] P. 238) Lévy は (2.1) を条件 (C) と名づけ、X_n に対する中心極限定理（定理67：P. 242）X_n の収束（P. 247 定理68）を考察している。そしてこれが martingale の研究の出発点になったものと考えられる。

一般に $Y_n\in L_1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ $(n\geqq 1)$ とすると、(2.1)をみたさない場合でも

$X_n=\sum_{j=1}^n Y_j-\sum_{j=2}^n E\{Y_j | Y_1\cdots Y_{j-1}\}$

とおくと $\{X_n, n\geqq 1\}$ は martingale になる。即ち期待値が有限な確率変数の和は、適当な確率変数をひくことにより、必ず martingale になる。従って任意の確率変数列は期待値が有限であれば、martingale と残りの部分の和として表わされる。特に興味のあるのは submartingale の場合で

$\boxed{2.1}$ (Doob [3] P. 297)

$\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geqq 1\}$ を submartingale とすると

a) $X_n = X'_n + A_n \quad (n \geqq 1)$

と唯一通りに分解できる。ただし、$\{X'_n, \mathcal{F}_n, n \geqq 1\}$ は martingle で A_n は $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測かつ $0 = A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots$ (a.s) $EA_n < \infty \ (n \geqq 1)$ である。

b) $\sup_n EX_n < \infty$ ならば $E(A_\infty) < \infty$

c) $\sup_n E|X_n| < \infty$ ならば更に $\sup E|X'_n| < \infty$

d) $\{X_n ; n \geqq 1\}$ が一様可積分なら $\{X'_n, n \geqq 1\}$ もそうである。

e) $X_n^+ = |X'_n| + A_n$ は submartingale で $P(|X_n| \leqq X_n^+) = 1$ $(n = 1, 2 \cdots)$

が成立つ。

A_n の作り方は $\Delta_1 = 0 \quad \Delta_j = E\{X_j \mid \mathcal{F}_{j-1}\} - X_{j-1} \quad (j \geqq 2)$ とおき $A_n = \sum_{j=1}^n \Delta_j$ とすればよい。この分解は離散 parameter の submartingale の種々の命題を証明するのに用いられるが submartingle の構造をある程度きめているという点で重要である。「連続 parameter の submartingale に対して、これを類似な分解が得られるか」という問題を <u>Doob の分解問題</u>と云い最近 Meyer によって肯定的に解決され、これにより連続 parameter の submartingale の構造は詳しく分るようになり、又 potential 論も非常に進んだ。これについては III §4 で述べる。

<u>例 2</u> $\{\mathcal{F}_n ; n \geqq 1\}$ を単調増加な $\mathcal{B}$ の σ− subfield. $Z \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ とする。$X_n = E\{Z \mid \mathcal{F}_n\}$ とおくと $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geqq 1\}$ は martingale である。

この例も P. Levy [1] に表われている。そこでは特に $A \in \mathcal{F}_\infty = \mathcal{B}(\bigvee_{n \geqq 1} \mathcal{F}_n)$ $Z = \chi_A$ ($= A$ の indicator) の場合が取扱われ $X_n = E\{\chi_A \mid \mathcal{F}_n\} = P(A \mid \mathcal{F}_n)$ に対し $\lim_{n \to \infty} X_n = \chi_A$ (a.s) となることが示されている。(Lévy [1] 定理 41)

<u>例 3</u> E を加算個の base をもつ局所 compact な Hausdorff 空間とし $\mathbb{M} = (W, \mathcal{F}_t, x_t(w), P_x, \zeta(w))$ を E を state space とする <u>standard な markov 過程</u>とする。(→ Markov 過程) III §4 §5 は、主として markov 過程との関連で martingale を論じるのでそのときの準備をかねて一通り定義と記号の意味を説明しておく。

$\mathbb{W}$は$[0,\infty]$から$\bar{E}=E\cup\{\partial\}$（$E$がcompactなら$\partial$はisolated pointとして、$E$がcompactでなければ$\partial$はalexandroffの一点compact化としてつけ加える）への写像$w=w(t)$の集合で(i) $w=w(t)$は$[0,\infty)$で右連続。(ii) 左からの極限値をもち、(iii) ある$\zeta(w)$ $(0<\zeta(w)\leqq\infty)$が存在して$t<\zeta(w)$なら$w(t)\in E$. $t\geqq\zeta(w)$なら$w(t)=\partial$をみたすものの全体とする。$w(t)$を$x_t(w)$ともかくことにして$\mathcal{B}_t=\mathcal{B}(x_u;u\leqq t)$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\bigcup_{t\geqq0}\mathcal{B}_t)$とおく。

P_x $(x\in\bar{E})$を可測空間$(\mathbb{W},\mathcal{B})$上の確率測度として
(P.1) $\forall A\in\mathcal{B}$に対し、$x\to P_x(A)$は$\mathcal{B}(\bar{E})$可測（$\mathcal{B}(\bar{E})$は$\bar{E}$のBorel field）(P.2) $P_x(x_0=x)=1$ (P.3)
$\forall s,t\in[0,\infty)$ $\forall A\in\mathcal{B}(\bar{E})$に対し$P_x(x_{t+s}\in A\mid\mathcal{B}_s)=P_{x_s}(x_t(w)\in A)$ (a.s. P_x) をみたすものとする。μを$(\bar{E},\mathcal{B}(\bar{E}))$上の確率測度とし、$A\in\mathcal{B}$に対し、$P_\mu(A)=\int P_x(A)\,d\mu(x)$とおくと$P_\mu$は$(\mathbb{W},\mathcal{B})$上の確率測度となるが$\mathcal{F}_t$ $[\mathcal{F}]$を$\mathcal{B}_t$ $[\mathcal{B}]$のすべての確率測度μによるP_μ-completionの共通部分とする。$\tau(w)$を$\mathbb{W}$上で定義され$[0,\infty]$の値をとる函数として$\forall t$に対し$\{\tau(w)<t\}\in\mathcal{F}_t$となるとき<u>stopping time</u>（markov time）と云い、$\mathcal{F}_{\tau+}=\{A;A\in\mathcal{F},\ \forall s\geqq0$に対し$A\cap\{\tau<s\}\in\mathcal{F}_s\}$とおくと$\mathcal{F}_{\tau+}$は$\mathcal{F}$の$\sigma$-sub fieldである。もし、$P_x$が(P.1)(P.2)(P.3)の外に(P.4) $\forall A\in\mathcal{B}(\bar{E})$に対し

$$P_x(x_{\tau+t}\in A\mid\mathcal{F}_{\tau+})=P_{x_\tau}(x_t\in A)\qquad(a.s.\ P_x)$$

($x_\infty=\partial$としておく)

をもつとき$\mathbb{M}=(\mathbb{W},\mathcal{F}_t,x_t,P_x,\zeta)$は強markov性をもつという。
$\tau(w)=t$は一つのstopping timeで$\mathcal{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$となるが(P.4)があれば一般に$\mathcal{F}_{t+}=\mathcal{F}_t$である。$\mathbb{M}$が強Markov性をもち更に<u>左擬連続</u>；τ_nをstopping timeの列として$\tau_n\uparrow\tau$となるとき
$P_\mu(x_{\tau_n}\to x_\tau;\tau<\infty)=P_\mu(\tau<\infty)$：がすべての確率測度$\mu$（以后初期分布と云う）に対して成立つときstandardなMarkov過程（又は<u>Hunt process</u>）と云う。

$\bar{\mathcal{B}}(E)$ $[\bar{\mathcal{B}}(\bar{E})]$を$\mathcal{B}(E)$ $[\mathcal{B}(\bar{E})]$のすべての有界測度によるcompletionとし$\alpha\geqq0$とする。E上の函数$u(x)$は (i) $\bar{\mathcal{B}}(E)$可測、(ii) $u(x)\geqq0$
(iii) $u(x)\geqq E_x(e^{-\alpha t}u(x_t);t<\zeta)$ (iv) $\lim_{t\downarrow0}E_x(e^{-\alpha t}u(x_t);t<\zeta)=u(x)$ をみたすとき$\mathbb{M}$に関し<u>α-excessive function</u>と呼ばれる。特に0-excessive functionは単に<u>excessive function</u>と云う。例えば$f(x)$を有界で$\geqq0$な$\bar{\mathcal{B}}(E)$可測函数とするとα位potential

$U^{\alpha} f(x) = E_x(\int_0^{\zeta} e^{-\alpha t} f(x_t)\, dt)$ は α-excessive function である。

今 $u(x)$ を α-excessive function とし、∂における値を 0 と定義して $\bar{E}$ 上の函数に拡張しておくと、すべての $t \in [0, \infty)$ に対し $X_t(w) = e^{-\alpha t} u(x_t(w))$ が定義されるが $(X_t(w), \mathfrak{F}_t, t \in [0, \infty))$ は確率空間 $(W, \mathfrak{F}, P_{\mu})$ 上の generalized supermartingale であり特に $E_{\mu}(e^{-\alpha t} u(x_t)) = \int e^{-\alpha t} u(x_t(w))\, dP_{\mu}(w) < \infty \quad (t \in [0, \infty))$ であれば supermartingale である。excessive function の確率論的な構造、即ち、その additive functional による表現と、上のようにしてできる supermartingale との間には極めて興味深い関係があり、主として Meyer により深く研究されている。このことは Ⅳ §4 §5で述べる。又 M1 が Green 空間上の Brown運動のときには非負優調和函数は excessive function になり、従って $X_t(w) = u(x_t(w))$ は (generalized) super martingale になる。逆に下半連続な函数 $u(x)$ に $x_t(w)$ を代入して $X_t(w) = u(x_t(w))$ を作るとき、これが supermartingale になるならば、$u(x)$ は優調和函数になる。このこと組織的に活用したのが Doob の一連の研究である。Doob [5] [6] [7] [8] 参照。

例 4　　Brown 運動と Poisson 過程

1 次元の標準 Brown 運動 (= Wiener 過程) はそれ自身 martingale である。これは連続な見本過程をもつ trivial でない martingale の例である。逆に $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t \in [a, b]\}$ を見本過程が確率 1 で連続な martingale で $EX_t^2 < \infty$、$EX_t = 0$ $(t \in [a, b])$ 及び $E\{(X_t - X_s)^2 \mid \mathfrak{F}_s\} = t - s$ をみたすとすると、Brown 運動になる。

それに対し、Poisson過程 $\{X_t, a \leq t \leq b\}$ は 殆んどすべての見本過程が高さ 1 の飛躍のみで増加する submartingale である。逆に $\{X_t, \mathfrak{F}_t, a \leq t \leq b\}$ が高さ 1 の飛躍のみで増加する確率過程で $E\{X_t - X_s \mid \mathfrak{F}_s\} = \lambda(t - s)$ (即ち $\{X_t - \lambda t, \mathfrak{F}_t \; t \in [a, b]\}$ が martingale) ならば Poisson過程である。

例 5　　$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とし、任意の n に対して、Ω の分割

$$\Pi_n : \Omega = M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \cdots \qquad M_j^{(n)} \in \mathcal{B} \quad j = 1, 2, \cdots$$

が与えられているとする。$\mathfrak{F}_n$ を $M_j^{(n)}$ $(j \geq 1)$ を含む最小の σ-field、$\mathfrak{F}_{\infty} = \mathcal{B}(\bigcup_{n \geq 1} \mathfrak{F}_n)$ とおく。今 Π_{n+1} が Π_n の細分になっているとすると、$\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{F}_n \subseteq \cdots$ が得られる。φ を field $\bigcup_{n \geq 1} \mathfrak{F}_n$ 上の集合

函数として、φの$\mathfrak{F}_n$上への制限φ_nが$\mathfrak{F}_n$上で完全加法的になっていると仮定する。このとき

$$
\begin{aligned}
X_n(\omega) &= \varphi(M_j^{(n)}) / P(M_j^{(n)}) && \omega \in M_j^{(n)} && P(M_j^{(n)}) > 0 \\
&= 0 && \omega \in M_j^{(n)} && P(M_j^{(n)}) = 0
\end{aligned}
$$

と定義すると$\{X_n(\omega), \mathfrak{F}_n, n \geqq 1\}$は martingale になる。

この martingale に収束定理を適用すると、可成り明快な derivative の理論ができる。このことについてはII §4及びIV §3参照。

II 離散 parameter の martingale

§1. optional sampling

この§では submartingale（martingale）という性質が optional sampling, その特別な場合としての optional stopping 等の変換で不変なことを述べる。optional sampling は markov 過程論における time change に相当するもので、確率過程論の中で特に重要な概念である。連続 parameter のときはIII§3で述べることにし、ここでは離散 parameter に限って説明する。

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間、$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ を増加する $\mathcal{B}$ の σ-subfield の列とする。$\tau(\omega)$ を自然数又は $+\infty$ を値とする $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率変数で

$\forall j \geq 1$ に対し、$\{\tau(\omega) \leqq j\} \in \mathcal{F}_j$

をみたすとき（$\mathcal{F}_n$ に関する）<u>stopping time</u> と云う。（markov 過程論では markov 時間、又は「将来と独立な時間」等とも呼ばれる。）

$\tau(\omega)$ を stopping time とするとき、

$\mathcal{F}_\tau = \{A;\ A \in \mathcal{B},\ \forall j \geq 1$ に対し、$A \cap \{\tau \leqq j\} \in \mathcal{F}_j\}$ と定義すると、

$\mathcal{F}_\tau$ は $\mathcal{B}$ の σ-subfield となる。

$(\mathcal{F}_n)$ に関する stopping time の全体を $\mathfrak{S}$ と表わすことにし、又確率変数列 $\{X_n, n \geq 1\}$ があって各 n に対し、X_n が $\mathcal{F}_n$ 可測のとき、$(\mathcal{F}_n)$ に<u>整合</u>（well adapted）していると云うことにする。

$\boxed{1.1}$ a) $\tau(\omega) = j\ (a.s)$ （j：自然数）は <u>stopping time</u> で

$\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_j$

b) $\tau, \sigma \in \mathfrak{S}$ なら $\tau \vee \sigma,\ \tau \wedge \sigma \in \mathfrak{S}$

c) $\tau, \sigma \in \mathfrak{S}$ $\tau \leqq \sigma\ (a.s)$ なら $\mathcal{F}_\tau \subseteqq \mathcal{F}_\sigma$

d) τ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測

e) $\tau < \infty\ (a.s)$ $\{X_n, n \geq 1\}$ が $(\mathcal{F}_n)$ に整合しているなら

$X_{\tau(\omega)}(\omega)$ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測

である。

次に確率変数列 $\{\tau_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ があって

(O.S.1) $\tau_n(\omega)$ は $(\mathcal{F}_n)$ につき stopping time

(O.S.2) $\tau_1(\omega) \leqq \tau_2(\omega) \leqq \cdots < +\infty\ (a.s)$

をみたすとき <u>sampling sequence</u> と呼ぶことにする。このとき、

$\{X_n, n \geq 1\}$ が $(\mathcal{F}_n)$ に整合していれば $\check{X}_n(\omega) = X_{\tau_n(\omega)}(\omega)$ $(n=1,2,\cdots)$ と定

義することにより、新しい確率変数列 $\{\check{X}_n\ n \geqq 1\}$ を定義でき、e)により $\check{\mathfrak{F}}_n = \mathfrak{F}_{\tau_n}$ に整合している。$\{\check{X}_n, \check{\mathfrak{F}}_n\ n \geqq 1\}$ を(作ることを)$\{X_n, \mathfrak{F}_n\ n \geqq 1\}$ の sampling variable (τ_n) による <u>optional sampling</u> と云う。特に、$\tau(w)$ を stopping time とし, $\tau_j(w) = \tau \wedge j\ (j \geqq 1)$ とおくと、(τ_j) は (0.S.1) (0.S.2) をみたすので optional sampling $\{\check{X}_n, \check{\mathfrak{F}}_n, n \geqq 1\}$ が定義されるがこれを <u>optional stopping</u> と云う。martingale に対しては次の定理が成立つ。

$\boxed{1.2}$ $\{X_n, \mathfrak{F}_n, n \geqq 1\}$ を submartingale, $(\tau_n)_{n \geqq 1}$ を sampling sequence, $\{\check{X}_n, \check{\mathfrak{F}}_n\ n \geqq 1\}$ を (τ_n) による $\{X_n, \mathfrak{F}_n, n \geqq 1\}$ の optional sampling とする。もし

a) $E|\check{X}_n| < \infty \qquad n \geqq 1$

b) $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \inf \int_{\{\substack{\tau_n > N \\ X_N > 0}\}} X_N \, dP = 0$

が成立てば $\{\check{X}_n, \mathfrak{F}_n, n \geqq 1\}$ も submartigale になり

c) $E X_1 \leqq E\check{X}_n \qquad n \geqq 1$

が成立つ。

<u>注意1</u> $\displaystyle \sup_{n \geqq 1} E|X_n| < \infty$ ならば a) は恒に成立つ。

<u>注意2</u> $X_n \leqq 0$ (a.s) であれば $\displaystyle \sup_{n \geqq 1} E|X_n| < \infty$ であるから明らかに b) が成立つ。

<u>注意3</u> b) をより強い条件

b') $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \inf \int_{\{\tau_n > N\}} |X_N| \, dP = 0 \qquad n \geqq 1$

でおきかえると、c)は

c') $\displaystyle E X_1 \leqq E\check{X}_n \leqq \sup_{j \geqq 1} E X_j \qquad j \geqq 1$

と強められる。又このとき $\{X_n, \mathfrak{F}_n, n \geqq 1\}$ が martingale であれば $\{\check{X}_n, \check{\mathfrak{F}}_n, n \geqq 1\}$ も martingale で $E\check{X}_n = E X_1\ (n \geqq 1)$ が成立つ。

更に強い条件として次のことが知られている。

$\boxed{1.3}$ 次の (C1)−(C.4) のいづれかが成立てば a) 及び b) が成立つ

(C1) $\{X_n, n \geqq 1\}$ は一様可積分である。

(C2) 各 τ_n は確率1で有界である。

(C3) $E\tau_j<\infty$ $(j\geqq 1)$ かつある $K>0$ が存在して $n<\tau_j(\omega)$ (a.s) であれば $E\{|X_{n+1}-X_n|\mid\mathcal{F}_n\}\leqq K$ (a.s) が成立つ。

(C4) $\{X_n,\mathcal{F}_n,n\geqq 1\}$ が martingale で更に $Z(\omega)\geqq 0$ (a.s) $EZ<\infty$ なる確率変数と、$j_1<j_2<\cdots$ なる整数列が存在して、

$|X_k|\geqq|X_{j_i}|-Z$ (a.s) $k\geqq j_i$ $i\geqq 1$

が成立つ。

注意 (C1) が成立てば $\{\check{X}_n,n\geqq 1\}$ も一様可積分である。

optional stopping は optional sampling の特別な場合であるが、重要な変換なので別に述べておく。

$\tau_j=\tau\wedge j\leqq j$ (a.s) であるから $\boxed{1.3}$ (C.2) により

$\boxed{1.4}$ submartingale (martingale) $\{X_n,\mathcal{F}_n,n\geqq 1\}$ が optional stopping により $\{\check{X}_n,\check{\mathcal{F}}_n,n\geqq 1\}$ に変換されたとすると、$\{\check{X}_n,\check{\mathcal{F}}_n,n\geqq 1\}$ は submartingale (martingale) になる。特に submartingale のときは

$$EX_1\leqq E\check{X}_n\leqq EX_n \qquad n\geqq 1$$

martingale のときは

$$EX_1=E\check{X}_n \qquad n\geqq 1$$

が成立つ。

§2 種々の不等式

以下もし $E|X|\leqq E|Y|$ 等とかくとき、片方又は両方が $+\infty$ のときも含めているものとしておく。

$\boxed{2.1}$ $\{X_t,t\in T\}$ を submartingale とする。

a) もし $t_0,t_1\in T$ $t_0\leqq t_1$ であれば

$$E|X_t|\leqq -E\{X_{t_0}\}+2E|X_{t_1}| \qquad t_0\leqq t\leqq t_1$$

b) $X_t\geqq 0$ (a.s)、$t_1\in T$ とすると

$$\{X_t;\ t\in T\cap(-\infty,t_1]\}$$

は一様可積分である。

c) $s_1\geqq s_2\geqq\cdots$ $s_n\in T$ とすると、$\{X_{s_n};n\geqq 1\}$ が一様可積分であるための必要充分条件は

$$\lim_{n\to\infty}EX_{s_n}>-\infty$$

である。

次の2つの定理の essential に重要な点は、不等式の中に parameter の個数 n を含んでいないことで submartingale が最后の元を含んでいれば無限個の確率変数についても成立つことである。証明には optional sampling が用いられる。

$\boxed{2.2}$ $\{X_j ; 1 \leqq j \leqq n\}$ を submartingale, λ を実数とする。このとき

$$(2.1)\quad \lambda P\{\max_{1\leqq j\leqq n} X_j(\omega) \geqq \lambda\} \leqq \int_{\{\max_{1\leqq j\leqq n} X_j \geqq \lambda\}} X_n \, dP \leqq E|X_n|$$

$$(2.2)\quad \lambda P\{\min_{1\leqq j\leqq n} X_j(\omega) \leqq \lambda\} \geqq \int_{\{\min_{1\leqq j\leqq n} X_j \leqq \lambda\}} X_n \, dP - E\{X_n - X_1\}$$

$$\geqq E\{X_1\} - E|X_n|$$

が成立つ。

(2.1) は Kolmogorov の不等式の拡張になっている。今 $\{Y_1 \cdots Y_n\}$ を独立な確率変数列とし $EY_j = 0$、$EY_j^2 < \infty$ $1 \leqq j \leqq n$ とする。$X_j = Y_1 + \cdots + Y_j$ とおくと $\{X_1 \cdots X_n\}$ は martingale で従って、$\{|X_j|^2 ; 1 \leqq j \leqq n\}$ は submartingale である。
$\lambda = \varepsilon^2$, $\varepsilon > 0$ とおき (2.1) を使えば

$$P\{\max_{1\leqq j\leqq n} |X_j| > \varepsilon\} = P\{\max_{1\leqq j\leqq n} |X_j|^2 > \varepsilon^2\} \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} E X_n^2$$

となるがこれは Kolmogorov の不等式である。

$\boxed{2.3}$ $\{X_j \ 1 \leqq j \leqq n\}$ を非負 submartingale とすると

$$E\{\max_{1\leqq j\leqq n} X_j^p\} \leqq \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} E\{X_n \log^+ X_n\} \qquad p = 1$$

$$\leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E X_n^p$$

が成立つ。

次の不等式は upcrossing 不等式と云われ、martingale で基本的な役割を果す。$\xi_1 \cdots \xi_n$ を実数, r_1, r_2 を $r_1 < r_2$ なる実数とする。このとき、$\xi_1 \cdots \xi_n$ による区間 $[r_1, r_2]$ の upcrossing number を次のように定義する。ξ_{ν_1} を(もし存在すれば)$\xi_j \leqq r_1$ となる最初の ξ_j とし、一般に、$\xi_{\nu_{j-1}}$ が既に定義できたとき、ξ_{ν_j} を(もし存在すれば)$\xi_{\nu_{j-1}}$ より後で、もし、j が偶数なら、$\xi_i \geqq r_2$, もし j が奇数なら $\xi_i \leqq r_1$ となる最初の ξ_i とする。このとき

$\xi_{\nu_1} \leqq r_1,\ \xi_{\nu_2} \geqq r_2, \cdots \xi_{\nu_3} \leqq r_1, \cdots$

となるが、$\xi_1 \cdots \xi_n$ による $[r_1, r_2]$ の upcrossing number が β であるというのは、2β が ξ_{ν_j} が定義できる最后の ν_j となることである。もし ξ_{ν_2} が定義されなければ $\beta = 0$ としておく。upcrossing 不等式は martingale の場合 Doob [3]、submartingale の場合 Snell [1] によって得られた。

$\boxed{2.4}$ $\{X_j(\omega), 1 \leqq j \leqq n\}$ を submartingale とし、$\beta(\omega)$ を $X_1(\omega), \cdots X_n(\omega)$ による $[r_1, r_2]$ の upcrossing number とすると

(1) $$E(\beta) \leqq \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{\{X_n \geqq r_1\}} (X_n - r_1)\, dP \leqq \frac{E\{|X_n|\} + |r_1|}{r_2 - r_1}$$

が成立つ。

uprossing 不等式の精密化が、Hunt [4] P. 318 (1.17) で、approximate P-chain (→ markov 過程) の excessive function が sanple sequence の上で極限をもつことに有効に用いられている。次の定理は Doob [11] による。

$\boxed{2.5}$ $\{X_j;\ \mathcal{F}_j, 1 \leqq j \leqq n\}$ を submartingale, $\beta(\omega)$ を $X_1(\omega) \cdots X_n(\omega)$ による $[r_1, r_2]$ の upcrossing number とすると、

(2) $$E\{\beta | \mathcal{F}_1\} \leqq \frac{E\{(X_n - r_1)^+ | \mathcal{F}_1\} - (X_1 - r_1)^+}{r_2 - r_1} \qquad (a.s)$$

が成立つ。

両辺の平均をとれば

$$E\{\beta\} \leqq \frac{1}{r_2 - r_1} \{E(X_n - r_1)^+ - E(X_1 - r_1)^+\} \leqq \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{\{X_n \geqq r_1\}} (X_n - r_1)\, dP$$

となり (1) を得る。

又 $\{Y_1 \cdots Y_n\}$ を非負 supermartingale, $\gamma(\omega)$ を $\{Y_1(\omega), \cdots Y_n\}$ による区间 $[s_1, s_2]$ $(0 \leqq s_1 < s_2)$ の down-crossing number とする。$X_j = -Y_j$ とおき (2) に代入すると

$$E\{\gamma | \mathcal{F}_1\} \leqq \frac{E\{(s_2 - Y_n)^+ | \mathcal{F}_1\} - (s_2 - Y_1)^+}{s_2 - s_1} \leqq \frac{Y_1 \wedge s_2}{s_2 - s_1}$$

となり、これが Hunt の不等式である。

§3. 収束定理

martingale において変換の理論と並んで重要なのは収束に関する定理である。martingale (submartingale) と云う一見ゆるやかな仮定から、確率変数列の収束が出ることは、非常に重要なことで確率論の各分野に応用される。証明には前§の upcrossing 不等式が基本的役割を果す。

$\boxed{3.1}$ $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geqq 1\}$ を submartingle とする。もし、

$\sup_{n\geqq 1} E|X_n| < \infty$ なら $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ が確率1で存在し、$E|X_\infty| < \infty$ である。

<u>注意1</u> $X_n \leqq 0$ $(n \geqq 1)$ (a.s) であれば $E|X_n|$ は単調減少であるから $\sup_{n\geqq 1} E|X_n| < \infty$, 従って無条件に $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ が存在する。martingale のときは $X_n \geqq 0$ $(n \geqq 1)$ (a.s) でも同様。

<u>注意2</u> submartingale のとき $X_n \geqq 0$ $(n \geqq 1)$ (a.s) なら、$\lim_{n\to\infty} EX_n < \infty$ と $\sup_{n\geqq 1} E|X_n| < \infty$ と同値で Fatou の不等式から

$EX_\infty \leqq \lim_{n\to\infty} EX_n$ である。

$\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geqq 1\}$ を submartingale (martingale) とし、$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{B}(\bigcup_{n\geqq 1} \mathcal{F}_n)$ とする。$\sup_{n\geqq 1} E|X_n| = K < \infty$ とすると、$\boxed{3.1}$ により、X_∞ が存在するが、X_∞ を最后の元としてつけ加えても $\{X_n, \mathcal{F}_n, 1 \leqq n \leqq \infty\}$ は必ずしも submartingale (martingale) にはならない。このことに関しては次の定理がある。

$\boxed{3.2}$ $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geqq 1\}$ を submartingale とする。

a) もし、$\{X_n ; n \geqq 1\}$ が一様可積分なら

$$\sup_{n\to\infty} EX_n < \infty, \quad 且つ、\lim_{n\to\infty} E|X_n - X_\infty| = 0$$

で $\{X_n, \mathcal{F}_n, 1 \leqq n \leqq \infty\}$ は submartingale である。

b) もし $\sup_{n\geqq 1} E|X_n| < \infty$ なら $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ が存在するが、$\{X_n, \mathcal{F}_n, 1 \leqq n \leqq \infty\}$ が submartingale なら

$$\lim_{n\to\infty} EX_n \leqq EX_\infty$$

であり等号の成立つ為の必要且つ充分条件は $\{X_n ; n \geqq 1\}$ が一様可積分なことである。特に、$X_n \geqq 0$ (a.s) $(n \geqq 1)$ なら、常に等号が成立つ。

上の定理の特別な場合であるが、martingale の場合は、一様可積分性と $\{X_n, \mathcal{F}_n, 1 \leqq u \leqq \infty\}$ が martingale となることは全く同値になる。又これは、L_p における強収束，弱収束にもなっているので、まとめて次

のように云うことができる。(Helms [1] 参照)

$\boxed{3.3}$ $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geqq 1\}$ を martingale で $E|X_n|^p < \infty$ $(p \geqq 1)$ とする。このとき次の a) b) c) d) は同値で，いずれからも $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ (a.s) が出る。

a) $X_\infty \in L_p(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ が存在して $\{X_n, \mathcal{F}_n\ 1 \leqq n \leqq \infty\}$ は martingale になる。

b) $p=1$ のときは $\{X_n, n \geqq 1\}$ が一様可積分、$p>1$ のときは $E|X_n|^p$ $(n \geqq 1)$ が一様有界である。

c) $X_n \in L_p$ $n = 1, 2, \cdots$ は L_p で強収束する。

d) $X_n \in L_p$ $n = 1, 2, \cdots$ は L_p で弱収束する。

時間の parameter が $\{\cdots -2, -1, \}$ となっている submartingale (martingale) を以后逆向きの submartingale (martingale) と呼ぶ。逆向き submartingale の収束定理は，むしろ簡単になる。

$\boxed{3.4}$ $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \leqq -1\}$ を submartingale として $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \leqq -1} \mathcal{F}_n$ とおく。

a) $\lim_{n\to\infty} X_{-n} = X_{-\infty}$ (a.s) が存在し、$-\infty \leqq X_{-\infty} < \infty$ (a.s) である。

b) 特に $\lim_{n\to-\infty} EX_n = K > -\infty$ であれば $X_{-\infty} \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty}, P)$ で $\lim_{n\to\infty} E|X_{-n} - X_{-\infty}| = 0$、更に $\{X_n, \mathcal{F}_n, -\infty \leqq n \leqq -1\}$ は submartingale である。

c) 又 $X_n \geqq 0$ (a.s) かつある $p > 1$ に対し $EX_{-1}^p < \infty$ であれば $X_{-\infty} \in L_p$ で $E|X_n - X_{-\infty}|^p \to 0$ $(n \to -\infty)$ である。

<u>注意</u> $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \leqq -1\}$ が martingale であれば $EX_n = EX_{-1}$ であるから無条件に $\{X_n, \mathcal{F}_n, -\infty \leqq n \leqq 1\}$ は martingale になる。

次の定理は I §2 例2 参照。

$\boxed{3.5}$ $Z \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, $\cdots \mathcal{F}_{-1} \subseteqq \mathcal{F}_0 \subseteqq \mathcal{F}_1 \subseteqq \cdots$ を $\mathcal{B}$ の σ-subfield, $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \geqq 1} \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_{+\infty} = \mathcal{B}(\bigcup_{n \geqq 1} \mathcal{F}_n)$ とすると

$$\lim_{n\downarrow-\infty} E\{Z|\mathcal{F}_n\} = E\{Z|\mathcal{F}_{-\infty}\}$$

$$\text{(a.s)}$$

$$\lim_{n\uparrow+\infty} E\{Z|\mathcal{F}_n\} = E\{Z|\mathcal{F}_{+\infty}\}$$

が成立つ。

<u>系</u> $Z \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ $Y_1, Y_2 \cdots$ を確率変数の列とする。

$\mathcal{G}_n = \mathcal{B}(Y_n, Y_{n+1} \cdots)$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} E\{Z \mid Y_n, Y_{n+1} \cdots\} = E\{Z \mid \cap_{n\geq 1} \mathcal{G}_n\}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\{Z \mid Y_1 \cdots Y_n\} = E\{Z \mid Y_1, Y_2 \cdots\}$$

が成立つ。

次の定理は $\boxed{3.5}$ と関係が深く *parameter* の集合を広げる方法を与えている。

$\boxed{3.6}$ a) $Y, \cdots X_{-2}, X_{-1}$ が σ-*field* $\mathcal{F}_Y, \cdots \mathcal{F}_{-2}, \mathcal{F}_{-1}$ に関し *submartingale* とし、$\mathcal{F}_{-\infty} = \cap_{n\geq 1} \mathcal{F}_{-n}$ とおくと

$$\lim_{n\downarrow -\infty} X_n = X_{-\infty} \quad (a.s)$$

が存在し、$Y, X_{-\infty}, \cdots, X_{-2}, X_{-1}$ は $\mathcal{F}_Y, \mathcal{F}_{-\infty}, \cdots, \mathcal{F}_{-2}, \mathcal{F}_{-1}$ につき *submartingale* になる。

b) $X_1, X_2, \cdots, Z$ が σ-*field* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \cdots, \mathcal{F}_Z$ につき *submartingal* とし，$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{B}(\cup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n)$ とおくと

$$\lim_{n\uparrow\infty} X_n = X_\infty \quad (a.s)$$

が存在し

$$\lim_{n\to\infty} E\{X_n\} \leqq E\{X_\infty\} \leqq E\{Z\}$$

が成立つ。$X_1, X_2 \cdots X_\infty, Z$ が $\mathcal{F}_1 \cdots \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_Z$ に関し *submartingale* になるための必要充分条件は $\lim_{n\to\infty} E\{X_n\} = E\{X_\infty\}$ となることでこれは $\{X_n; n \geqq 1\}$ が一株可積分となることと同値である。

<u>注意1</u>　$X_n \geqq 0$ $(a.s)$，又は $X_1, X_2, \cdots, Z$ がある *submartingale* で *dominate**) されているときは $\{X_n, n\geqq 1\}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} E\{X_n\} = E\{X_\infty\}$ が成立つ。

<u>注意2</u>　*martingale* のときは

a)　$X_{-\infty} = E\{X_{-1} \mid \mathcal{F}_{-\infty}\}$ となり $Y, X_{-\infty}, \cdots X_{-2}, X_{-1}$ は *martingale*.

b)　$X_{+\infty} = E\{Z \mid \mathcal{F}_{+\infty}\}$ となり無条件に $X_1 \cdots X_\infty\, Z$ は *martingale* になる。

Ω 全体ではなく，特定の集合の上での収束に関しては次の定理がある。

b) は *martingale* の場合 *Lévy* により得られた。

---

*) $\{X_n; n\geqq 1\}$ が $\{Y_n; n \geqq 1\}$ で *danirate* されるとは $P(|X_n| \leqq Y_n) = 1$ $(n \geqq 1)$ が成立つことである。

$\boxed{3.6}$ $\{X_n(\omega), \mathfrak{F}_n, n \geqq 1\}$ を submartingale とする。

a) もし $E\{\sup_{n\geqq 1}[X_{n+1} - E\{X_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n\}]\} < \infty$ であれば $\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) < \infty$ となる殆んどすべての ω に対し $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ が存在し、有限である。

b) もし

$$E\{\sup_{n\geqq 1}[X_{n+1} - E\{X_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n\}]^2\} < \infty$$

であれば

(1) $\sum_1^\infty [E\{X_{n+1}^2 \mid \mathfrak{F}_n\} - E^2\{X_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n\}] < \infty$

(2) $\sum_1^\infty [E\{X_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n\} - X_n] < \infty$

となる殆んどすべての ω に対し $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ が存在し有限であり、又逆も正しい。

注意　martingale の場合 b) の (1), (2) は一つの条件

$$\sum_1^\infty E\{|X_{n+1} - X_n|^2 \mid \mathfrak{F}_n\} < \infty$$

におきかえることができる。

§4 応用

A 独立変数の和

a) Kolmogorov の 0−1 法則

$\{X_1, X_2 \cdots\}$ を独立な確率変数列、$\mathfrak{F}_n = \mathcal{B}(X_1 \cdots X_n)$ $\mathfrak{G}_n = \mathcal{B}(X_n, X_{n+1}, \cdots)$ とおく。0−1 法則というのは、もし確率変数 $X(\omega)$ がすべての n に対し、$\mathfrak{G}_n$ 可測であれば $X(\omega) =$ 定数 (a.s) となる主張である。これは次のようにして $\boxed{3.5}$ から直ちに出る。先ず最初に $E|X| < \infty$ と仮定する。X はすべての n に対し、$X_1 \cdots X_n$ と独立であるから

$$E\{X \mid \mathfrak{F}_n\} = EX$$

一方 X は $\mathfrak{F}_\infty = \mathcal{B}(\bigcup_{n\geqq 1} \mathfrak{F}_n)$ 可測で $\boxed{3.5}$ により

$$\lim_{n\to\infty} E\{X \mid \mathfrak{F}_n\} = E\{X \mid \mathfrak{F}_\infty\} = X \qquad (a.s)$$

故に、$X = EX =$ 定数 (a.s) である。$E|X| = \infty$ のときは、X の代りに、$\mathrm{Tan}^{-1} X$ を考えればよい。

b) 独立変数の和に関する Lévy の定理

$\{X_1, X_2 \cdots\}$ を独立変数列とすると、$\sum_{n=1}^\infty X_n$ の概収束，確率収束，法則収束は同等であることが知られている。一般に概収束 ⇒ 確率収束 ⇒ 法則収束となっているから、法則収束 ⇒ 概収束を云うことが証明の眼目であるが、Doob はこのことに次のように martingale 理論を用いている。

X_n の特性函数(→特性函数)を $\varphi_n(z)$ とするともし $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ が法則収束するとすれば $\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(z)$ は、すべての $z\in(-\infty,+\infty)$ に対し、ある特性函数 $\varphi(z)$ に収束する。$\varphi(z)$ の連続性、及び $\varphi(0)=1$ であることから、必要があれば最初の方の項を落して、$\prod_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(z)|>\frac{1}{2}$ が正の Lebesgue 測度をもつ集合 A の上で成立っているとしてよい。ここで $z\in A$ に対し、

$$\tilde{X}_n=\frac{e^{iz\sum_1^n X_j}}{\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(z)}\qquad n=1,2,\cdots$$

とおくと、$\{\tilde{X}_n,\ n\geqq 1\}$ は martingale で $|\tilde{X}_n|<2$ (a.s) である。従って、$\boxed{3.1}$ により各 $z\in A$ に対し、$\lim_{n\to\infty}\tilde{X}_n(\omega)$ が存在する。$\prod_{j=1}^{\infty}\varphi_j(z)$ は $\varphi(z)$ に収束するから、$z\in A$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} e^{iz\sum_1^n X_j(\omega)}\qquad (a.s)$$

が存在する。故に Fubini の定理から、P 測度 0 の ω を除き、$\lim_{n\to\infty} e^{iz\sum_1^n X_j(\omega_0)}=f(z,\omega_0)$ が殆んどすべての A の元 z に対して存在する。後、$\limsup_{n\to\infty}|\sum_{j=1}^{n}X_j(\omega_0)|<\infty$ なることは $|f(z,\omega_0)|=1$ と、Riemann-Lebesque の定理から、$\sum_{j=1}^{\infty}X_j(\omega_0)$ の極限が一通りにきまることは、$\lim_{n\to\infty} e^{iz\sum_1^n X_j(\omega_0)}$ の存在する z が A の中に dense にあることから出る。

c) 平均収束と概収束

'$\{X_1, X_2\cdots\}$ を独立で $EX_j=0$ $(j\geqq 1)$ の確率変数列とすると、$S_n=X_1+\cdots+X_n$ $(n\geqq 1)$ は martingale。もし、$X_j\in L_p(\Omega,\mathcal{B},P)$ $(p\geqq 1)$ とすると、$\{|S_n|^p\ n\geqq 1\}$ は submartingale になる。このことに martingale の収束定理を用いればいくつかの独立変数の和に関する定理が導かれる。例えば $\boxed{3.2}$ $\boxed{3.3}$ と 0-1 法則を使うと、

(i) もしある $p\geqq 1$ に対し、$\lim_{n\to\infty}E|S_n|^p<\infty$ であれば $\lim_{n\to\infty}S_n=S_\infty$ (a.s) が存在し、$E\{\sup_{n\geqq 1}|S_n|^p\}<\infty$ 且つ $\lim_{n\to\infty}E|S_n-S_\infty|^p=0$. 又 $\{S_n\ 1\leqq n\leqq+\infty\}$ は martingale である。逆に $\lim_{n\to\infty}S_n=S_\infty$ (a.s) が存在し、ある $p\geqq 1$ に対し $E|S_\infty|^p<\infty$ なら, $\lim_{n\to\infty}E|S_n|^p<+\infty$ である。

(ii) $E\{\sup_{n\geqq 1}X_n\}<\infty$, $P(\limsup_{n\to\infty}X_n<\infty)>0$ であれば

$\lim_{n\to\infty}S_n=S_\infty$ (a.s) が存在する。

(iii) $E\{\sup_{n\geqq 1}|X_n|^2\}<\infty$ とすると, $\lim_{n\to\infty}S_n=S_\infty$ (a.s) が存在する.

ための必要充分条件は $\sum_1^\infty E|X_n|^2<\infty$ である。

$EX_j=0$ でないときは、X_j-EX_j を改めて考えると、$S_n=\sum_1^n X_n$ とおくとき $\{S_n-ES_n,\ n\geqq 1\}$ が martingale になるから (i) に対応して

(ii) $\lim_{n\to\infty} S_n=S_\infty$ (a.s) が存在し、$p\geqq 1$ に対し $E|S_\infty|^p<\infty$ とすると $E|X_j|^p<\infty$ $(j\geqq 1)$ で

$$ES_\infty=\sum_1^\infty EX_j$$

且つ $\lim_{n\to\infty} E|S_n-S_\infty|^p=0$

が成立つ。

d) 大数の強法則

$\{X_1, X_2 \cdots\}$ は独立で同じ分布をもち、$E|X_1|<\infty$ とする。大数の強法則は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{X_1+\cdots+X_n\}=EX_1 \qquad (a.s)$$

となることで、これを martingale の収束定理から導くことが矢張り Doob によってなされている。

今 $S_n=X_1+\cdots+X_n$, $\mathfrak{F}_{-n}=\mathcal{B}(S_n, S_{n+1},\cdots)$ とおくと、$E\{X_1|\mathfrak{F}_{-n}\}$ $n=1,2,\cdots$ は martingale になり $\boxed{3.5}$ により $\lim_{n\to\infty} E\{X_1|\mathfrak{F}_{-n}\}=E\{X_1|\mathfrak{F}_{-\infty}\}=X_{-\infty}$ が存在する。($\mathfrak{F}_{-\infty}=\bigcap_{n\geqq 1}\mathfrak{F}_{-n}$) 更に $\boxed{3.6}$ によれば $\{X_{-\infty}, E\{X_1|\mathfrak{F}_{-n}\}\}$ は martingale であるから $E\{X_{-\infty}\}=E\{X_1\}$. しかるに 0−1 法則によれば $X_{-\infty}=E\{X_{-\infty}\}$ (a.s) であるから結局

$$\lim_{n\to\infty} E\{X_1|\mathfrak{F}_{-n}\}=EX_1 \qquad (a.s)$$

が成立つ。一方 $X_1, X_2\cdots$ が独立で同一分布に従うことから、

$$\begin{aligned} E\{X_1|\mathfrak{F}_{-n}\} &= E\{X_1|S_n, S_{n+1},\cdots\} \\ &= E\{X_1|S_n, X_{n+1}\cdots\} \\ &= E\{X_1|S_n\}=E\{X_j|S_n\} \quad 1\leqq j\leqq n \end{aligned}$$

故に

$$E\{X_1|\mathfrak{F}_{-n}\}=\frac{1}{n}\sum_1^n X_j$$

このようにして大数の法則が示された。

この型の大数の法則は強定常過程 (discrete parameter) に関するエルゴード定理の特別なもので、エルゴード定理を martingale から証明することは興味のあることである。これについてはIV§2参照。

B) Fubini-Jessen の定理

無限直積確率空間上での積分の研究が Jessen により行われている。一種の Fubini 型定理で、その定理を述べたのち、それが簡単な martingale の収束定理であることと関連した話題について述べる。（Doob [3] p. 342、及び Dunford and Schwarz [1] p 207〜209 参照）

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間の列 $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$ $n=1,2,\cdots$ の無限直積とする。自然数の全体を N で表わし、$\pi \subseteq N$ のとき $\bigotimes_{j\in\pi}\Omega_j, \bigotimes_{j\in\pi}\mathcal{B}_j, \bigotimes_{j\in\pi}P_j$ をそれぞれ $\Omega_\pi, \mathcal{B}_\pi, P_\pi$ と表わすことにし，Ω から Ω_π への射影を e_π、又 $e_\pi\omega=\omega_\pi$ と書くことにする。又 π の N に関する余集合を π' として，$\omega=\omega_\pi\times\omega_{\pi'}$ $P=P_\pi\times P_{\pi'}$ 等と略記することにする。

Fubini-Jessen の概収束定理というのは，$\pi_n=\{1,2,\cdots n\}$, $X(\omega)\in L_1(\Omega,\mathcal{B},P)$ とするとき

$$X_{\pi_n'}(\omega)=X_{\pi_n'}(\omega_{\pi_n}\times\omega_{\pi_n'})=\int_{\Omega_{\pi_n}}X(\omega_{\pi_n}\times\omega_{\pi_n'})\,P_{\pi_n}(d\omega_{\pi_n})$$

$$X_{\pi_n}(\omega)=X_{\pi_n}(\omega_{\pi_n}\times\omega_{\pi_n'})=\int_{\Omega_{\pi_n'}}X(\omega_{\pi_n}\times\omega_{\pi_n'})\,P_{\pi_n'}(d\omega_{\pi_n'})$$

とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}X_{\pi_n'}(\omega)=\int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega)\qquad(a.s.\ P)$$

$$\lim_{n\to\infty}X_{\pi_n}(\omega)=X(\omega)\qquad(a.s.\ P)$$

が成立つことである。

今 $\mathcal{F}_n=e_{\pi_n}^{-1}(\mathcal{B}_{\pi_n})$ $\mathcal{F}_{-n}=e_{\pi_n'}^{-1}(\mathcal{B}_{\pi_n'})$ $n\geqq1$ とおくと，

$\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\subseteq\cdots$ $\mathcal{B}(\bigcup_{n\geqq1}\mathcal{F}_n)=\mathcal{B}$, 又 $\mathcal{F}_{-1}\supseteq\mathcal{F}_{-2}\supseteqq\cdots$ で

$\bigcap_{n\geqq1}\mathcal{F}_{-n}=\{\phi,\Omega\}$ (a.s) である。又

$$E\{X|\mathcal{F}_n\}=X_{\pi_n},\quad E\{X|\mathcal{F}_{-n}\}=X_{\pi_n'}\qquad(a.s)$$

であることも容易に分るので $\{X_{\pi_n},\mathcal{F}_n,\ n\geqq1\}$ $\{X_{\pi_n'},\mathcal{F}_{-n},\ n\geqq1\}$ はそれぞれ一様可積分な martingale で $\boxed{3.5}$ により定理を得る。

N の有限部分集合 π の全体 Δ は包含関係で順序をつけると有向集合になる。$X\in L_1(\Omega,\mathcal{B},P)$ に対し，$\mathcal{F}_\pi=e_\pi^{-1}(\mathcal{B}_\pi)$、$X_\pi=\int_{\Omega_{\pi'}}X(\omega_\pi\times\omega_{\pi'})P_{\pi'}(d\omega_{\pi'})$ とおくと、$E\{X|\mathcal{F}_\pi\}=X_\pi$ (a.s) で $\{X_\pi,\mathcal{F}_\pi,\pi\in\Delta\}$ は有向集合を parameter にもつ一様可積分な martingale になる。しかし、一般には概収束の意味では Moore-Smith 式極限 $\lim_\pi X_\pi(\omega)$ を持たないことを Dieudonné [1] が反例を作って示した。$X\in L_p(\Omega)$ $(p\geqq1)$ のときは L_p-norm の意味で収束し、これを Fubini-Jessen の平均収束定理といい，martingale の収束定理からも出る。これについて

は IV §3参照。

c) derivative

既にI§2例5で述べたように、確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$上の集合函数φのPに関するderivative の議論をmartingale の収束定理で取り扱うことができる。もう一度書くと、

$$\pi_n : \Omega = M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \cdots \qquad M_j^{(n)} \in \mathcal{B}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

をΩの分割とし、π_{n+1} が π_n の細分になっているとする。$\mathcal{F}_n$ を$\{M_j^{(n)}, j \geq 1\}$ を含む最小の σ-field、$\mathcal{F}_\infty = \mathcal{B}(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n)$ とおくと、$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_\infty$ である。今φを $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ 上の集合函数で、その$\mathcal{F}_n$ 上への制限 φ_n が完全加法的と仮定する。このとき

$$\begin{aligned} X_n &= \varphi(M_j^{(n)}) / P(M_j^{(n)}) & \omega \in M_j^{(n)}, \quad P(M_j^{(n)}) > 0 \\ &= 0 & \omega \in M_j^{(n)} \quad P(M_j^{(n)}) = 0 \end{aligned}$$

とおくと、$\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$はmartingale になる。特に$\Omega = [0, 1)$、$\mathcal{B} = [0, 1) \cap \bar{\mathcal{B}}'$ ($\bar{\mathcal{B}}'$; 1次元のLebesgue可測集合) P = Lebesgue 測度のときは重要でLebesgue case と云うことにする。

例1 (絶対連続な場合)

φが $\mathcal{F}_\infty$上でPにつき絶対連続な加法的集合函数で、そのRadon-Nikodym derivative を $X_\infty(\omega)$ とする。即ち

$$\varphi(\Lambda) = \int_\Lambda X_\infty \, dP \qquad \Lambda \in \mathcal{F}_\infty$$

とすると、$E\{X \mid \mathcal{F}_n\} = X_n$ (a.s) となり、$\{X_n \ \mathcal{F}_n \ 1 \leq n \leq \infty\}$ は martingale, $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ (a.s) が得られる。従って、このとき$\{X_n, n \geq 1\}$ は一様可積分である。逆に martingale $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$が一様可積分とすると $\boxed{3.3}$ により、$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ (a.s) が存在し、$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X_\infty| = 0$. $\{X_n, \mathcal{F}_n, 1 \leq n \leq \infty\}$ は martingale になる。ここで φ_1 を

$$\varphi_1(\Lambda) = \int_\Lambda X_\infty \, dP$$

と定義すると、$\varphi_1(\Lambda) = \varphi(\Lambda) \quad \Lambda \in \mathcal{F}_\infty$ が得られる。
従ってφは $\mathcal{F}_\infty$上で絶対連続な加法的集合函数である。即ちφが $\mathcal{F}_\infty$ 上で絶対連続であるための必要充分条件はmartingale $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$が一様可積分なことで、Radon-Nikodym derivative は $X_\infty = \lim X_n$ で与えられる。

φが$\mathcal{B}$上の加法的集合函数で P につき絶対連続とする。φの$\mathcal{B}[\mathcal{F}_\infty]$に関するdensity を $\tilde{X}[X]$ とすると、

$E\{\tilde{X} \mid \mathfrak{F}_\infty\} = X$, $E\{\tilde{X} \mid \mathfrak{F}_n\} = E\{X \mid \mathfrak{F}_n\} = X_n$ (a.s) である。$\tilde{X}$ が $\mathfrak{F}_\infty$ 可測であれば $\tilde{X} = X$ (a.s) となる。Lebesgue case で $M_j^{(n)} = [a_j^{(n)}, b_j^{(n)})$, $\delta_n = \sup_{j \geq 1} |b_j^{(n)} - a_j^{(n)}|$ とおき、$\delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ とすると、$\mathfrak{F}_\infty = [0, 1) \cap \mathcal{B}'$ ($\mathcal{B}'$ は1次元 Borel field) となるから、$\tilde{X} = X$ (a.s) である。

例2 (特異な場合)

φ が $\mathfrak{F}_\infty$ 上の加法的集合函数で P につき特異 (singular) とする。即ち特異集合 $M \in \mathfrak{F}_\infty$ があって、ある $\Lambda \subseteq M$ $\Lambda \in \mathfrak{F}_\infty$ に対し $\varphi(\Lambda) \neq 0$、$P(M) = 0$、$\varphi(\Lambda) = 0$ $\Lambda \subseteq M^c$ $\Lambda \in \mathfrak{F}_\infty$ となっているとする。最初に $\varphi \geq 0$ とすると、$\{X_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ は非負 martingale になるから $\boxed{3.1}$ 注意1により、$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ (a.s) が存在する。Fatou の不等式から

$$\int_\Lambda X_\infty \, dP \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Lambda X_n \, dP \qquad \Lambda \in \mathcal{B}$$

であるが

$$\varphi(\Lambda) = \int_\Lambda X_n \, dP \qquad \Lambda \in \mathfrak{F}_m, \quad m \leq n$$

であるから、

$$\int_\Lambda X_\infty \, dP \leq \varphi(\Lambda) \qquad \Lambda \in \textstyle\bigcup_{n\geq 1} \mathfrak{F}_n$$

が成立つ。従って Hopf の拡張定理から

$$\int_\Lambda X_\infty \, dP \leq \varphi(\Lambda) \qquad \Lambda \in \mathfrak{F}_\infty$$

となるが、特に $\Lambda = M^c$ とおくと

$$\int_{M^c} X_\infty \, dP \leq \varphi(M^c) = 0$$

従って、$X_\infty = 0$ (a.s) である。一般の φ は $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ $\varphi^+, \varphi^- \geq 0$ とかけるから、同様に $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ (a.s) である。

例3 (一般の場合)

φ を $\mathfrak{F}_\infty$ 上の加法的集合函数とし、φ の全変動を $K = \|\varphi\|$ とする。martingale $\{X_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ は、$E|X_n| = \sum_{j\geq 1} |\varphi(M_j^{(n)})| \leq K$ をみたすので $\boxed{3.1}$ により、$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ (a.s) が存在する。一般に φ は絶対連続な部分 φ_a と特異な部分 φ_s により $\varphi = \varphi_a + \varphi_s$ と一通りに分解されるから、例1, 例2より X_∞ は、φ_a の P に関する。net $\{M_j^{(n)}\}$ による derivative を与える。特に、φ が $\mathcal{B}$ 上の加法的集合函数で、分割の列 π_n が充分に細かく、φ の絶対連続な部分の P による density が

$\mathcal{F}_\infty$ 可測、又特異集合 M が $\mathcal{F}_\infty$ に属するならば，X_∞ は，Φ の絶対連続な部分の P による *density* になる。

D) 尤度比

Neymann-Pearson は一様最強力検定が存在しない場合に望ましい検定を求める一方法として尤度比を用いるやり方を考えた。(*Neymann-Pearson* [1] [2]) この方法は大標本の場合にはよく知られているようにいくつかの有利な漸近的性質をもっている。J. L. *Doob* は *martingale* の応用として大標本の場合における尤度比の行動を調べている。その方法を単純仮説の場合についてみると次のようになる。

確率変数列 $\{Y_1, Y_2 \cdots\}$ 及び $\{Z_1, Z_2 \cdots\}$ があり各々の n 次元結合分布を

$$P_n(A) = P((Y_1 \cdots Y_n) \in A)$$
$$Q_n(A) = P((Z_1 \cdots Z_n) \in A) \qquad (A \in \mathcal{B}^n)$$

とする。もし，各 n に対し，Q_n が P_n につき絶対連続とすると *Radon-Nikodym derivative* $\Phi_n = \Phi_n(\xi_1 \cdots \xi_n)$ が存在して

$$Q_n(A) = \int \cdots_A \int \Phi_n(\xi_1 \cdots \xi_n)\, dP_n(\xi_1 \cdots \xi_n)$$

とかける。ここで

$$X_n = \Phi_n(Y_1, Y_2 \cdots Y_n) \qquad (n \geqq 1)$$

と定義すると，$\{X_n, n \geqq 1\}$ は非負 *martingale* になる。簡単のために、P_n, Q_n 共に *Lebesgue* 測度につき絶対連続として、その *density* を $p_n(\xi_1 \cdots \xi_n)$. $q_n(\xi_1 \cdots \xi_n)$ とする。上の主張はもし $p_n(\xi_1 \cdots \xi_n) = 0$ であれば $q_n(\xi_1 \cdots \xi_n) = 0$ をみたすとき

$$X_n = \frac{q_n(Y_1 \cdots Y_n)}{p_n(Y_1 \cdots Y_n)} \qquad n \geqq 1$$

が *martingale* であることを示している。この条件を落しても $\{X_n\ n \geqq 1\}$ は一般に非負 *supermartingale* になるから，収束定理 $\boxed{3.1}$ により

(1) $\lim_{n \to \infty} X_n = X_\infty \quad (a.s)$

が存在。

(2) $1 \geqq E(X_1) \geqq E(X_2) \geqq \cdots \qquad E(X_\infty) \leqq \lim_{n \to \infty} E(X_n)$ が成立つ。

即ち，もし $\{Y_1 \cdots Y_n\}$ の分布密度函数が $p_n(\xi_1 \cdots \xi_n)$ であればある平均的な意味で $X_n \leqq 1$ 即ち

$$q_n(Y_1 \cdots Y_n) \leqq p_n(Y_1 \cdots Y_n)$$

が成立っている。特に，$\{Y_1, Y_2 \cdots Y_n\}$ を Baire density $p(\xi)$ をもつ母集団からの任意標本とすると次のことが成立つ。

$p_n(\xi_1 \cdots \xi_n)$ を仮説 $p = p_1$ の下での $Y_1 \cdots Y_n$ の同時分布密度，
$q_n(\xi_1 \cdots \xi_n)$ を仮説 $p = q_1$ の下での $Y_1 \cdots Y_n$ の同時分布密度とすると、

a) (1) の X_∞ は $X_\infty \equiv 0$ (a.s) 又は $X_\infty \equiv 1$ (a.s) である。

b) $X_\infty \equiv 1$ (a.s) となるための必要充分条件は，$p_1(\xi) = q_1(\xi)$ (a.e) である。

この結果を用いると，上の場合の尤度比

(3). $$\lambda_n = \frac{p_n}{\max(p_n, q_n)}$$

は $\lambda_n = \min\left(1, \frac{1}{X_n}\right)$ とかけるので，帰無仮説 $p = p_1$ が真なるとき ($p_1 \neq q_1$ であるから) $X_n \to 0$ (a.s) 即ち $\lambda_n \to 1$ となる。
これが尤度の考えから期待されることであった。

Ⅲ 連続 parameter

§1 可分 martingale

$T \subseteq (-\infty, +\infty)$ を非可算無限集合とし、T を parameter としてもつ $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率過程 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ があったとする。

<u>定義</u>　$\{X_t(\omega), t \in T\}$ が<u>可分</u>（separable）であると云うのは可算集合 $S \subseteq T$ が存在し、すべての開区間 I, すべての閉区間 A に対し,

$\{\omega;\ \forall t \in T \cap I,\ X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}$ かつ

$$P\{\forall t \in T \cap I,\ X_t \in A\} = P\{\forall t \in S \cap I,\ X_t \in A\}$$

が成立つことである。

<u>注意</u>　$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ が完備でないときは，すべての開区間 I, すべての閉区間 A に対し

$$\{\forall t \in S \cap I,\ X_t \in A\} - \{\forall t \in T \cap I,\ X_t \in A\}$$

が零集合であると云い表わすことができる。

確率過程で可分性を仮定することによって，著しく一般性が失われることがないのは，次の定理による。

$\boxed{1.1}$　(Doob [3], P.57)

$\{X_t, t \in T\}$ を $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率過程とする。このとき同じ空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上に可分確率過程 $\{\hat{X}_t, t \in T\}$ で $P(X_t = \hat{X}_t) = 1$ $(\forall t \in T)$ となるものが構成できる

この $\hat{X}_t$ を X_t の<u>可分変形</u>（separable modification）と云う。可分な submartingale に対しては Ⅱ の §2, §3 の多くの結果が直接に拡張される。証明も可算個の parameter で条件を書きなおして離散 parameter の場合に帰着させて容易に得られる。対応する定理に ′ をつけてかくことにすると

$\boxed{2.1}'$　$\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in T\}$ を可分 submartingale, λ を実数とする。もし T が最大元 b を持てば

$$\lambda P\{\sup_{t \in T} X_t \geq \lambda\} \leq \int_{\{\sup_{t \in T} X_t \geq \lambda\}} X_b \, dP \leq E|X_b|$$

$$\lambda P\{\inf_{t \in T} X_t \leq \lambda\} \geq \int_{\{\inf_{t \in T} X_t \leq \lambda\}} X_b \, dP - EX_b + \inf_{t \in T} EX_t$$

$$\geq \inf_{t \in T} EX_t - E|X_b|$$

$\boxed{2.2}'$　上と同じ条件のもとで $X_t \geqq 0$（$t\in T$）（a.s）とすると

$$E\{\sup_{t\in T} X_t^p\} \leqq \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} E\{X_b \log X_b\} \qquad p=1$$
$$\leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E X_b^p \qquad p>1$$

が成立つ。

$\boxed{3.1}'$　$\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ を可分 submartingale．$b=\sup\{t; t\in T\}\notin T$ とし，$\mathfrak{F}_{b-}=\mathcal{B}(\bigcup_{t\in T}\mathfrak{F}_t)$ とおく。もし，$\sup_t E|X_t|<\infty$ とすると，$X_{b-}\in L_1(\Omega, \mathfrak{F}_{b-}, P)$ が存在して

$$\lim_{t\uparrow b\ (t\in T)} X_t(\omega) = X_{b-} \qquad (a.s)$$

が成立つ。

注意　可分性がない場合，結論の部分は，$s_1\leqq s_2\leqq\cdots, s_n\in T$，$s_n\uparrow b$ となるすべての数列 $\{s_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} X_{s_n}=X_{b-}$（a.s）と弱められる。以下の定理も，可分性がないときには，同様に云いかえをする必要がある。

$\boxed{3.2}'$　$\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ を可分 submartingale，$b=\sup\{t; t\in T\}\notin T$ とする。

a)　もし $\{X_t, t\in T\}$ が一様可積分であれば

$$\sup_t E X_t < \infty \qquad かつ，\quad \lim_{t\uparrow b,\ t\in T} E|X_t - X_{b-}| = 0$$

が成立ち，$\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T, X_{b-}, \mathfrak{F}_{b-}\}$ は submartingale である。

b)　$\sup_t E|X_t|<\infty$ とすると（$\lim_{t\uparrow b,\ t\in T} X_t = X_{b-}$（a.s）が存在することは $\boxed{3.1}'$ より分る）もし $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\ X_{b-}, \mathfrak{F}_{b-}\}$ が submartingale であれば

$$\lim_{t\uparrow b\, t\in T} E X_t \leqq E X_{b-}$$

である。特に等号の成立つのは $\{X_t, t\in T\}$ が一様可積分なときで且つ、そのときに限る。

$\boxed{3.3}'$　$\boxed{3.3}$ も $\boxed{3.2}'$ と同様に云い代えられる。

$\boxed{3.4}'$ a)　$\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ を可分 submartingale とし，$a=\inf\{t; t\in T\}$，$\mathfrak{F}_{a+}=\bigcap_{t\in T}\mathfrak{F}_t$ とおくと

$$\lim_{t\downarrow a,\ t\in T} X_t = X_{a+} \quad (a.s)$$

が存在し、 $-\infty \leqq X_{a+} < \infty$ (a.s) である。

b) 特に $\lim_{t\downarrow a\ t\in T} EX_t = K > -\infty$ であれば $X_{a+}\in L_1(\Omega, \mathcal{F}_{a+}, P)$ で $\lim_{t\downarrow a\ t\in T} E|X_t - X_{a+}| = 0$ が成立ち、 $\{X_{a+}, \mathcal{F}_{a+}, X_t, \mathcal{F}_t, t\in T\}$ は submartingale である。

c) 又 $X_t \geqq 0$ (a.s) である $p>1$, $t_0\in T$ に対し $EX_{t_0}^p < \infty$ であれば $X_{a+}\in L_p(\Omega, \mathcal{F}_{a+}, P)$ で $E|X_t - X_{a+}|^p \to 0$ $(t\downarrow a)$ が成立つ。

注意　可分でないときは $\boxed{3.1}'$ の注意と同じように修正する必要がある。
又,可分 martingale のときは常に b) が成立つ。

次に $\boxed{3.5}$ の拡張を述べるが，その前に次のことを注意する。$Z\in L_1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, $T\subseteq(-\infty, +\infty)$ とし、各 $t\in T$ に対し, $\mathcal{B}$ の σ-subfield $\mathcal{F}_t$ が与えられ, $t\leqq s$ なら $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}_s$ となっているとする。$X_t = E\{Z|\mathcal{F}_t\}$ とおくと, $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in T\}$ は一称可積分な martingale となることは明らかであるが条件つき期待値の version を適当にとり可分 martingale にすることができる。従って

$\boxed{3.5}'$　$a = \sup\{t;\ t\in T\}$, $b = \inf\{t;\ t\in T\}$, $\mathcal{F}_{a+} = \bigcap_{t\in T}\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_{b-} = \mathcal{B}(\bigcup_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ とおくと

$$\lim_{t\downarrow a,\ t\in T} E\{Z|\mathcal{F}_t\} = E\{Z|\mathcal{F}_{a+}\} \qquad (a.s)$$

$$\lim_{t\uparrow b\ t\in T} E\{Z|\mathcal{F}_t\} = E\{Z|\mathcal{F}_{b-}\} \qquad (a.s)$$

となるように $E\{Z|\mathcal{F}_t\}$ の version をとれる。

$\boxed{3.6}$　は連続 parameter のときはそのままでは意味を持たないか

$\boxed{3.6}'$　$\{X_t, t\in[a, b]\}$を可分 submartingale とし、殆んどすべての見本過程が連続とする。そのとき $\limsup_{t\uparrow b} X_t(\omega) < \infty$ となる殆んどすべての ω に対し, $\lim_{t\uparrow b} X_t(\omega)$ が存在し, 有限である。

§2　見本過程の正則性

前§の応用として連続 parameter の submartingale の見本過程の性質を可成りよく知ることができる。$\{X_t, t\in T\}$を確率過程とし, T'をTの極限点 (limit point)の集合とする。$t_0\in T\cap T'$ が $\{X_t, t\in T\}$ の固定不連続点 (fixed point of discontinuity)と云うのは $s_n\in T$, $s_n\to t_0$

$(n\to\infty)$ なる数列 $\{s_n\}$ があって、$P(\lim_{n\to\infty} X_{s_n}=X_{t_0})<1$ となることである。もし $\{X_t, t\in T\}$ が可分であればこれは $P(\lim_{s\to t_0, s\in T} X_s = X_{t_0})<1$ と同値であり、又、見本過程が t_0 で不連続になる確率が正と云うこともできる。(固定不連続点でない見本過程の不連続点は移動不連続点と呼ばれる。)

可分性を仮定しない一般な場合次の定理がある。

$\boxed{2.1}$ $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ を submartingale, $a=\inf\{t; t\in T\}$ $b=\sup\{t; t\in T\}$, T' を T の極限点の集合とする。(ただし, $b\notin T$ なら b を T' から除き, $\inf_{t\in T} EX_t=-\infty$ なら a を T' から除いておく)

そのとき

a) $t\in T'$ が T の左(右)からの極限であれば $X_{t-}[X_{t+}]$ が存在し, $s_n\in T$, $s_n\uparrow t\ [s_n\downarrow t]\ (n\to\infty)$ なるすべての数列に対し、

$$\lim_{n\to\infty} X_{s_n}=X_{t-}\quad [\lim_{n\to\infty} X_{s_n}=X_{t+}]\qquad (a.s).$$

が成立つ。

b) 高々可算個の点(固定不連続点及び左右両方からの極限になっていない T' の点の全体)を除き各 $t\in T'$ に対し、$X_{t+}=X_{t-}$ $(a.s)$ でもし $t\in T$ なら $X_{t-}=X_t=X_{t+}$ $(a.s)$ が成立つ。

<u>注意</u> $\boxed{2.1}$ において(定義される限り)

$$\lim_{s\uparrow t} EX_s \leqq EX_{t-} \leqq EX_t \leqq EX_{t+} = \lim_{s\downarrow t} EX_s$$

が成立つ。

$\boxed{2.1}$ に立脚して一様可積分性を次のように必要充分の形に云い表わすことができる。

$\boxed{2.2}$ $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ を submartingale, $t_1\in T$ とする。このとき $\{X_t, t\in (-\infty, t_1]\cap T\}$ が一様可積分であるための必要充分条件は $\inf_{t\in T} EX_t>-\infty$ かつ, T の左からの極限になっている $t\leqq t_1$ に対し、$\lim_{s\uparrow t, s\in T} EX_s=EX_{t-}$ が成立つことである。

$\boxed{2.1}$ を使って submartingale の定義されている parameter の集合を拡張することができる。この定理により parameter 集合を区間としても一般性を失わないことになる。

$\boxed{2.3}$ $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ を submartingale (martingale) $a=\inf\{t; t\in T\}$ $b=\sup\{t; t\in T\}$ とする。このとき $t\in(a, b)-\ldots$ $(a, b)\cap T$ (もし存在すれば)に対し、X_t、$\mathfrak{F}_t$ を定義し、$\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in$

$(a, b)\}$ を submartingale（martingale）にすることができる。更に $b \in T$ なら b を、$\inf_{t \in T} EX_t > -\infty$ なら a を含ませることができる。

実際構成の仕方は

(i) $t \in (a, b) - (a, b) \cap T$ でしかも T の右からの極限のとき

$X_t = X_{t+}$　$\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$

(ii) $t \in [c, d]$　$c, d \in \overline{T}$,　$(c, d) \cap T = \phi$　のとき

$X_t = X_d$　$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_d$　　$c < t < d$

$X_c = X_d$　$\mathfrak{F}_c = \mathfrak{F}_d$　　$c \notin T$　のとき

とおけばよい。

可分 submartingale の見本過程は次のように著しい性質をもつ。

$\boxed{2.4}$　$\{X_t, \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ を可分 submartingale とすると殆んどすべての見本過程は次の性質をもつ。

a) $\forall a_1, b_1 \in T$ $(a_1 < b_1)$ に対し、$X_t(\omega)$　$t \in [a_1, b_1] \cap T$　は t の有界函数であり、特に martingale であれば $t \in (-\infty, b_1] \cap T$ で有界函数である。

b) $t \in T$ が T の右（左）からの極限点であれば有限な右（左）極限 $X_{t+}(\omega)$ $[X_{t-}(\omega)]$ が存在する。

c) 固定不連続点を除き不連続点は高々第一種不連続点である。

注意1　第一種不連続点はここでは次の意味にとる。$t = t_0$ が函数 $f(t)$ の第一種不連続点とは、$f(t_{0+})$, $f(t_{0-})$ が存在し、$f(t_0)$ は $f(t_{0+})$, $f(t_{0-})$ の間にあることである。

注意2　Dobrushin [1] は可分確率過程 $\{X_t(\omega),\ t \in [0, 1]\}$ がある $\varepsilon > 0$ に対し

$$(*)\quad \sup_{t \in [0, 1-\Delta t]} P(|X_t - X_{t+\Delta t}| > \varepsilon) = o(\Delta t)$$

をみたすなら、第一種不連続点をもたないことを示している。従って可分 submartingale $\{X_t(\omega)\ t \in [0, t]\}$ が連続な見本過程をもつためには、(*) が一つの充分条件である。

markov 過程と関係して右連続な martingale は特に重要である。簡単のために $T = [a, b)$ とあるが $\boxed{2.3}$ により一般性は失われない。

$\boxed{2.5}$　(Meyer [4])

$\{X_t, \mathfrak{F}_t, t \in [a, b)\}$ を submartingale とする。

(4−30).

a) もし EX_t が t の右連続函数であれば、殆んどすべての見本過程が右連続な submartingale $\{\hat{X}_t, \mathcal{F}_t, t\in[a,b)\}$ で $P(X_t=\hat{X}_t)=1$ となるものが構成できる。

b) $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in[a,b)\}$ の見本過程で確率1で右連続であれば $\mathcal{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$ ($t\in[a,b)$) とするとき $\{X_t, \mathcal{F}_{t+}\ t\in[a,b)\}$ も submartingale である。

従って EX_t が右連続であれば $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in[a,b)\}$ の見本過程は確率1で右連続又、$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ として一般性を失わない。

§3 optional sampling

連続 parameter の確率過程に対しても II §1 と同様に optional sampling を定義することができ，特に martingale (submartingale) という性質は適当な条件の下でこの変換により不変なことが示される。しかし解析的には事情は大変複雑になるので、ここでは大体見本過程で確率1で右連続な場合の定式化を目標にし、より一般の場合は注意にとどめることにする。

$\mathbb{T}$ を $[-\infty,+\infty]$ に含まれる区間とし、各 $t\in\mathbb{T}$ に対し、$\mathcal{B}$ の σ-subfield $\mathcal{F}_t$ が対応していて、$\forall s,t\in\mathbb{T}\ s<t$ に対し、$\mathcal{F}_s\subseteqq\mathcal{F}_t$ をみたすとする。今迄通り、$\mathcal{B}$、$\mathcal{F}_t$ はすべて P−0 集合を含むとしておく。

今 Ω 上で定義され、$\mathbb{T}$ 又は $\sup\{t;t\in\mathbb{T}\}$ を値とする確率変数 $\tau(\omega)$ が $\{\tau(\omega)<t\}\in\mathcal{F}_t$ $(\forall t\in\mathbb{T})$ $[\{\tau(\omega)\leqq t\}\in\mathcal{F}_t, (\forall t\in\mathbb{T})]$ をみたすとき <u>stopping time</u> (<u>strictly stopping time</u>) と云う。

勿論 strictly stopping time は stopping time である。又、stopping time は $\mathcal{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$ に関して strictly stopping time である。従って $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ $(t\in\mathbb{T})$ のとき両者を区別する必要はない。

$\tau(\omega)$ が stopping time のとき $\mathcal{F}_{\tau+}=\{A;A\in\mathcal{B}$, かつ $\forall t\in\mathbb{T}$ に対し、$A\cap\{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t\}$ と定義すると，$\mathcal{F}_{\tau+}$ は $\mathcal{B}$ の σ-subfield である。確率過程 $\{X_t, t\in\mathbb{T}\}$ にもし $\forall t\in\mathbb{T}$ に対し、X_t が $\mathcal{F}_t$ 可測なとき、$(\mathcal{F}_t)$ に整合した確率過程と云うことにする。$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ に関する stopping time の全体を $\tilde{S}$ と表わすと

$\boxed{3.1}$ a) $\tau(\omega)\equiv t\in\tilde{S}$ かつ $\mathcal{F}_{\tau+}=\mathcal{F}_{t+}$

b) $\tau\in\tilde{S}$ は $\mathcal{F}_{\tau+}$ 可測

c) $\tau,\ \sigma \in \tilde{S} \Rightarrow \tau \vee \sigma,\ \tau \wedge \sigma \in \tilde{S}$

d) $\{X_t,\ t\in T\}$ が $(\mathcal{F}_t)$ に整合した確率過程で見本過程が確率1で右連続、又 $\tau(\omega)\in T\ (\forall\omega\in\Omega)$ とすると X_τ は $\mathcal{F}_{\tau+}$ 可測である。

注意　τ が strictly stopping time のとき

$\mathcal{F}_\tau = \{A\,;\ A\in\mathcal{B}\,;\ A\cap\{\tau\leqq t\}\in\mathcal{F}_t\}$

とおき、$\mathcal{F}_{\tau+}$ を $\mathcal{F}_\tau$ とおきかえれば、d) 以外はすべて成立つ。特に、$\mathcal{F}_{t+}=\mathcal{F}_t$ のときは $\mathcal{F}_{\tau+}=\mathcal{F}_\tau$ である。

$I\subseteqq(-\infty,+\infty)$ とし、各 $\alpha\in I$ に対し、stopping time $\{\tau_\alpha(\omega),\ \alpha\in I\}$ が与えられていて，

(O.S.1)　$\forall\omega\in\Omega$、$\forall\alpha\in I$ に対し、$\tau_\alpha(\omega)\in T$

(O.S.2)　$\alpha,\beta\in I$、$\alpha<\beta \Rightarrow \tau_\alpha(\omega)\leqq\tau_\beta(\omega)$、　$(\forall\omega\in\Omega)$

をみたすとき sampling process と云うことにする。$\{X_t,\ t\in T\}$ を $(\mathcal{F}_t)$ に adapt された見本過程が右連続な確率過程とし、$\{\tau_\alpha,\ \alpha\in I\}$ を sampling process とする。このとき

$\check{X}_\alpha(\omega)=X_{\tau_\alpha(\omega)}(\omega)$,　$\check{\mathcal{F}}_\alpha=\mathcal{F}_{\tau_\alpha+}$　$(\alpha\in I)$

と定義すると $(\check{\mathcal{F}}_\alpha)_{\alpha\in I}$ は増加する σ−subfield の列で $\{\check{X}_\alpha,\ \alpha\in I\}$ は $(\check{\mathcal{F}}_\alpha)$ に adapt された process になる。これを $\{X_t,\ t\in T\}$ の $(\tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ による optional sampling と云う。又、$\tau(\omega)\in\tilde{S}$ に対し、$I=T$ とし、$\alpha\in I$ に対し、$\tau_\alpha=\tau\wedge\alpha$ とおくと、$\{\tau_\alpha,\ \alpha\in I\}$ は (O.S.1) (O.S.2) をみたすので optional sampling が考えられるが、このときは optional stopping と云う。

特に supermartingale (martingale) に対しては、次の定理が成立つ。T を $[-\infty,+\infty]$ に含まれる（閉，開，半開）区間とするがこれは $\boxed{3.3}$ により制限にはならない。又 $\{X_t,\ t\in T\}$ の見本過程は確率1で右連続としておく。

$\boxed{3.2}$　$\{X_t,\ \mathcal{F}_t,\ t\in T\}$ がある submartingale により dominate[*)] されている submartingale (martingale) で $b=\sup\{t\,;\ t\in T\}\in T$ とする。このとき optional sampling により得られた process $\{\check{X}_\alpha,\ \check{\mathcal{F}}_\alpha\ \alpha\in I\}$ も submartingale (martingale) で

$\inf_{t\in T} EX_t \leqq E\check{X}_\alpha \leqq EX_b$　$(\inf_{t\in T} EX_t = E\check{X}_\alpha = EX_b)$

---

*) $\{X_t,\ t\in T\}$ が $\{Y_t,\ t\in T\}$ で dominate されると云うのは $P(|X_t|\leqq Y_t)=1$　$(t\in T)$ となることである。

及び

$$E|\check{X}_\alpha| \leqq 3 \sup_{t\in T} E|X_t|$$

が成立つ。又特に $X_t \geqq 0$ (a.s) であれば

$$E\check{X}_\alpha \leqq \sup_{t\in T} EX_t$$

が成立つ。

最后の元をもたない submartingale に対しては Ⅱ $\boxed{1.2}$ と同称な次の定理が成立つ。

$\boxed{3.3}$ $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ をある submartingale で dominate されている submartingale で $b=\sup\{t, t\in T\} \notin T$ とする。更に

a) $E|\check{X}_\alpha| < \infty$ $\alpha\in I$

b) $\displaystyle\lim_{s\uparrow b}\inf \int_{\{\tau_\alpha \geqq s\} \atop \{X_s>0\}} X_s\, dP = 0$ $\alpha\in T$

をみたすならば $\{\check{X}_\alpha, \check{\mathfrak{F}}_\alpha, \alpha\in I\}$ も submartingale で

c) $\displaystyle\inf_{t\in T} EX_t \leqq E\check{X}_\alpha$ $\alpha\in I$

が成立つ。

注意 $\boxed{3.3}$ において b) を更に強い条件

b') $\displaystyle\lim_{s\uparrow b}\inf \int_{\{\tau_\alpha\geqq s\}} |X_s|\, dP = 0$ $\alpha\in T$

でおきかえると、c) は

c') $\displaystyle\inf_{t\in T} EX_t \leqq E\check{X}_\alpha \leqq \sup_{t\in T} EX_t$ $\alpha\in I$

に強められる。このとき $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ が martingale なら $\{\check{X}_\alpha, \check{\mathfrak{F}}_\alpha, \alpha\in I\}$ もそうで $E\check{X}_\alpha = EX_t$ が成立つ。

submartingale で dominate されていなくても $\{|X_t|\ t\in T\}$ が全体として大きくなければ $\{\check{X}_\alpha\}$ は submartingale になる。$T=[a,b)$ として

$\boxed{3.4}$ $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ を submartingale とし、もし (c.1) (c.2) (c.3) のどれかが成立てば $\{\check{X}_\alpha, \mathfrak{F}_\alpha, \alpha\in I\}$ は submartingale である。

(c.1) $\{X_t, t\in T\}$ は一称可積分

(c.2) $\tau_\alpha(\omega)$ は確率 1 で T のある元より小

(c.3) $X_t \leqq 0$ (a.s)

以上 X_t を右連続と仮定したが、単に確率 1 で $X_{t+}(\omega)$ が存在する場合 (submartingale では separable であれば $\boxed{3.1}$ によりこれは制限

にならない。) strictly stopping time から成る sampling process $(\tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ による optional sampling が定義でき submartingale (martingale) に対し、$\boxed{3.2}$ $\boxed{3.3}$ が成立する。変更する所だけ書くと τ を strictly stopping time とし、$S=\{t\,;P(\tau=t)>0\}$ とおくと、S は高々可算集合であるから $S=\{a_1, a_2\cdots\}$ とする。このとき $\tau(\omega)\in T$ であれば

$$X_\tau = X_{\tau(\omega)}(\omega) \qquad \tau(\omega)\in S$$
$$\quad = X_{\tau(\omega)+}(\omega) \qquad \tau(\omega)\notin S$$

と定義し、$\mathcal{F}_\tau$ の定義は、先ず任意の正整数 g に対し

$$\mathcal{F}_\tau^g = \mathcal{B}\{\{\Lambda\cap\{a<\tau\leqq b\},\ \Lambda\in \textstyle\bigcup_{c\leqq b}\mathcal{F}_c\}$$

(但し、a、b は $(a, b)\not\ni a_1,\cdots a_g$, $\tan^{-1} b-\tan^{-1} a<\frac{1}{g}$ なる a, b を動くものとする。) とおき

$$\mathcal{F}_\tau=\bigcap_g \mathcal{F}_\tau^g$$

と定義する。こうすると、X_τ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測になり、optional sampling を今と同様に定義すると、$\boxed{3.2}$ $\boxed{3.3}$ が成立する。詳しくは Doob [3] 参照。

§4 supermartingale の分解定理

このSでは連続 parameter の supermartingale の Doob の分解問題に関する Meyer の研究について述べる。主として Meyer [2] [4] [5] による。

$\{X_t(\omega), \mathcal{F}_t, t\in[0,\infty]\}$ を見本過程が確率1で右連続な supermartingale とする。このような場合 $\{X_t(\omega), \mathcal{F}_{t+}\ t\in[0,\infty)\}$ も supermartingale になるので $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ としておいても一般性を失わない。(→ Ⅲ $\boxed{2.5}$ 参照) 従って strictly stopping time と stopping time を区別する必要もない。又、$\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ が一様可積分であれば $\lim_{t\uparrow\infty} X_t = X_\infty$ が存在し、$\mathcal{F}_\infty=\mathcal{B}(\bigcup_{t\geqq 0}\mathcal{F}_t)$ とおくと、$\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in[0,\infty]\}$ は supermartingale で任意の stopping time τ に対し、$X_{\tau(\omega)}(\omega)$ は確率変数になる。

今 $0\leqq a\leqq+\infty$ として

$\tilde{S}_a=\{\tau(\omega)\,;\ \tau(\omega)$ は stopping time で $P(\tau\leqq a)=1\}$

とおく。$\tilde{S}_\infty$ は stopping time の全体でこれを $\tilde{S}$ とかく。

<u>定義 4.1</u> $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in[0,\infty)\}$ が $[0, a]$ で <u>class D に属する</u>と云うのは $\{X_\tau\,;\ \tau\in\tilde{S}_a\}$ が一様可積分なことである。又<u>局所的に class</u>

Dに属するというのは、$\forall a \in [0, +\infty)$ に対し、$\{X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leqq t < \infty\}$ が $[0, a]$ で class D に属することである。

以后 $[0, \infty]$ で class Dに属する supermartingaleを単に class D の supermartingale と云うことにする。class D の supermartingale は一様可積分であるが逆は必ずしも正しくない。

反例 (Guy Johnson and L. L. Helms [1])

$M = \{x_t(w), P_x \; x \in R^3\}$ を3次元 Brown 運動とし，$u(x) = 1/\|x\|$ とおく。$x_0 = (1, 0, 0)$ とし，$X_t(w) = u(x_t(w))$ とおくと、$u(x)$ が superharmonic function であることから，$\{X_t(w), t \geqq 0\}$ は確率空間 $(W, \mathcal{F}, P_{x_0})$ 上の supermartingale である。$0 < t < \infty$ に対し，

$$E_{x_0}(X_t) = \frac{4\pi}{(2\pi t)^{\frac{3}{2}}}\left[\int_0^1 r^2 e^{-\frac{r^2}{2t}}\,dr + t e^{-\frac{1}{2t}}\right]$$

$E_{x_0}(X_0) = u(1, 0, 0) = 1$、又 $P_{x_0}(\lim_{t\uparrow\infty} x_t = \partial) = 1$ であるから $\lim_{t\uparrow\infty} X_t = X_\infty = 0$ $(a.s.\ P_{x_0})$ であるから $E_{x_0}(X_\infty) = 0$ 従って $E_{x_0}(X_t)$ は $0 \leqq t \leqq \infty$ で連続になり III $\boxed{2.2}$ より $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ は $\{W, P_{x_0}, \mathcal{F}\}$ 上で一様可積分である。一方 $0 < \alpha < 1$ とし，

$$\tau_\alpha(\omega) = \inf\{t;\ X_t > \tfrac{1}{\alpha}\}$$
$$= +\infty \qquad (\text{上の}t\text{が存在しないとき})$$

と定義すると、τ_α は stopping time で Brown 運動の性質から $\int_{\{X_{\tau_\alpha} > \frac{1}{\alpha}\}} X_{\tau_\alpha}\, dP_{x_0} = 1$ であることが分る。故に $\{X_{\tau_\alpha};\ 0 < \alpha < 1\}$ は一様可積分ではなく、従って $\{X_t, 0 \leqq t < \infty\}$ は class D ではない。

class D になるための条件として

$\boxed{4.1}$ a) 右連続 martingale $\{X_t, \mathcal{F}_t\ t \geqq 0\}$ は局所的に class Dに属する。

b) 上から有界な右連続 supermartingale は局所的に class Dに属する。

c) 右連続 supermartingale が局所的に class D に属し、しかも一様可積分であれば class D に属する。が知られている。

又、stopping time を使わない表現としては

$\boxed{4.2}$ (G. Johnson and L. L. Helms)

a) 非負右連続 supermartingale $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, \infty]\}$ が class D な

ら

$$\lim_{n\to\infty} n\, P\{\sup_{0\leqq t\leqq\infty} X_t \geqq n\} = 0$$

b) $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in[0,\infty]\}$が非負連続な supermartingale なら逆も成立つ。

がある。

<u>定義 4.2</u>　$\{A_t(\omega), t\geqq 0\}$が（右連続）<u>increasing process</u> というのは

a) A_t は $\mathcal{F}_t$可測

b) $A_0 = 0$　(a.s)

c) 殆んどすべての ω に対し、$t \longrightarrow A_t(\omega)$ は非負、右連続，単調増加函数

となっていることである。特に $EA_\infty < \infty$ のとき可積分な increasing process という。

今 $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in[0,\infty)\}$を右連続で一様可積分な supermartingale とすると、$\lim_{t\uparrow\infty} X_t = X_\infty$ (a.s) が存在し、$X_\infty \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ であるから、

$$X_t = E\{X_\infty | \mathcal{F}_t\} + (X_t - E\{X_\infty | \mathcal{F}_t\})$$

とかくことができる。特に $E\{X_\infty|\mathcal{F}_t\}$ は右連続な martingale となる version がとれ、そのとき $Y_t = X_t - E\{X_\infty|\mathcal{F}_t\}$ は非負右連続 supermartingale で $\lim_{t\uparrow\infty} Y_t = 0$ (a.s) となる。potential 論との analogy でこれを X_t の <u>Riesz 分解</u>と云い、一般に$\{Y_t, \mathcal{F}_t, t\in[0,\infty)\}$が非負右連続 supermartingale で $\lim_{t\uparrow\infty} Y_t = 0$ (a.s) となっているとき、<u>potential</u> と云う。$\{A_t, t\geqq 0\}$を可積分な increasing process とすると$\{-A_t, \mathcal{F}_t, t\in[0,\infty)\}$は上に有界な supermartingale でしかも一様可積分である。従って $\boxed{4.1}$ b) c) により $Y_t = E\{A_\infty|\mathcal{F}_t\} - A_t$　$(t\geqq 0)$ は class D の potential になる。これを$\{A_t\}$で生成された potential と云う。次の定理が成立つ。

$\boxed{4.3}$　potential $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in[0,\infty)\}$ が class D に属するための必要充分条件は積分可能な increasing process $\{A_t\}$ が存在して

$$X_t = E\{A_\infty|\mathcal{F}_t\} - A_t$$

と表わされることである。

又 Doob の分解問題は次の形で解決される。

$\boxed{4.4}$ 右連続な supermartingale $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in[0,\infty)\}$が局所的にclass D に属するための必要充分条件は、右連続な martingale $\{X'_t, \mathfrak{F}_t, t\in[0,\infty)\}$ 及び increasing process (A_t)が存在して

$$X_t = X'_t - A_t$$

とかけることである。

この分解は必ずしも unique ではないが後で見るように、或る意味では最も滑らかな increasing process をとれば unique になる。非負submartingaleは $\boxed{4.1}$ 6) によれば局所的に class Dに属するから必らず $X_t = X'_t + A_t$ の形に分解できる。1次元標準 Brown運動 x_t に対して、$|x_t| = x_t + A_t$ と分解すると A_t は 0 における local time と考えられる。

特に $\{A_t\}$ が連続にとれる supermartingale の classを特徴ずけるために次の定義をする。

<u>定義 4.3</u> $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in[0,\infty)\}$ を class D の supermartingale とし、もし $\tau_1(\omega) \leqq \tau_2(\omega) \leqq \cdots$ $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = \tau(\omega)$ となるすべての $\{\tau_n\} \subseteqq \tilde{S}$ に対し、$EX_\tau = \lim_{n\to\infty} EX_{\tau_n}$ となるとき $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in[0,\infty]\}$ を <u>regular</u> と云う。

$\boxed{4.5}$ $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in[0,\infty)\}$を class D の potential とする。これが連続な increasing process で生成されるための必要充分条件は、regular な potential となることである。

次に分解の一意性について述べる。今 (A_t) を increasing process とし、更に $(Y_t)\ t\geqq 0$ を見本過程が、確率1で右連続、且つ $+\infty$ もこめて左からの極限をもち、各 $t\in[0,\infty)$ に対し Y_t が $\mathfrak{F}_t$ 可測となる確率過程とする。$0 < s \leqq +\infty$、$\varepsilon > 0$ として

$$\Xi_\varepsilon(s,w) = \sum_{t\leqq s,\ |Y_t(w)-Y_{t-}(w)|>\varepsilon} (A_t(w)-A_{t-}(w))(Y_t(w)-Y_{t-}(w))$$

とおく。(Σは実際は有限和である)。もし (A_t) が可積分で $P(|Y_t|\leqq K) = 1$ となる $K>0$ が存在すれば $|\Xi_\varepsilon(s,w)| \leqq 2KA_s(w)$ より $\Xi_\varepsilon(s,w)\in L_1(\Omega)$ であるが、更に $\varepsilon\downarrow 0$ のとき L_1 で強収束する。その極限を

$$\Xi(s,w) = \sum_{t\leqq s} (A_t(w)-A_{t-}(w))(Y_t(w)-Y_{t-}(w))$$

と表わす。

<u>定義 4.4</u> 可積分な increasing process (A_t)が、もし $\forall s\in(0,\infty]$, 及びすべての右連続、左からの極限をもつ有界な martingale $\{Y_t,$

$\mathfrak{F}_t, t \geqq 0\}$ に対し

$$E(\Xi(s)) = E(\Sigma_{t \leqq s}(A_t - A_{t-})(Y_t - Y_{t-})) = 0$$

をみたすとき、<u>natural increasing process</u> と云う。

$\boxed{4.6}$ $\{X_t, \mathfrak{F}_t, t \in [0, \infty)\}$ を class D の potential とすると、natural increasing process $\{A_t\}$ が唯一通りに定まって $X_t = E\{A_\infty \mid \mathfrak{F}_t\} - A_t$ (a.s) と表わされる。

$(\mathfrak{F}_t)$ が次に述べるような意味の不連続点を持たないときには natural increasing process のより適切な特徴ずけが得られる。stopping time $\tau \in \tilde{S}$ はもし、$\tau_n \in \tilde{S}$, $\tau_n \uparrow \tau$ (a.s) が存在して

$$\mathfrak{F}_\tau \neq \mathcal{B}(\cup_{n \geqq 1} \mathfrak{F}_{\tau_n})$$

となるとき $(\mathfrak{F}_t)$ の不連続時間と云う。例えば $(\mathfrak{F}_t)$ が standard Markov process の $(\mathfrak{F}_t)$ であれば (→ I §2 例3) 左擬連性により不連続時間をもたない。以后 $(\mathfrak{F}_t)$ は不連続時間をもたないとする。$\tau (\in \tilde{S})$ が $P(\tau < \infty) = 1$ で $\tau_n \in \tilde{S}$, $\tau_n \uparrow \tau$ となるすべての $\{\tau_n\}$ に対して

$$P(\tau(\omega) < \infty, \tau_n(\omega) < \tau(\omega), \forall n \geqq 1) = 0$$

となるとき <u>tatally inaccessible</u> と云う。$\tau \in \tilde{S}$ に対し $A \in \mathfrak{F}_\tau$ $(P(A) > 0)$ が存在し、stopping time

$$\tau_A(\omega) = \tau(\omega) \quad (\omega \in A), \quad = \infty \quad (\omega \notin A)$$

が tatally inaccessible のとき τ を <u>inaccessible</u> と云う。$\tau(\omega) (\in \tilde{S})$ は inaccessible でないとき <u>accessible</u> と呼ばれる。$\tau(\omega) \equiv \infty$ は accessible としておく。standard Markov process の場合、$\tau(\omega)$ が accessible になるのは path $x_t(w)$ が $\tau(\omega)$ で連続になる確率が 1 であることと同値である。一般に τ が accessible であると、$(\tau_n) \in \tilde{S}$

$$P(\tau_n < \tau, \text{且つ}, \lim_{n \to \infty} \tau_n = \tau) = 1$$

となるものが存在する。increasing process $\{A_t\}$ はもし、すべての tatally inaccessible な stopping time τ に対して、

$$A_\tau = A_{\tau-} \quad (a.s)$$

となるとき accessible な不連続性をもつと云う。natural increasing process というのは increasing process の中で 高々 accessible な不連続性しかもたない increasing process と云うことで、その意味で最も滑らかな increasing process と云うことができる。以上詳しくは Meyer [5] を見られたい。

§5 supermartingale と additive functional, supermartingale の energy.

前§の分解定理は markov 過程の additive functional と関係が深く、事実 excessive function の additive functional による表現の一般化されたものである。standard Markov process について一通りの記号と説明は I§2 例3 で与えてあるのでそれを利用することにする。次の結果は Meyer による。$M = (W, P_x, \zeta(w))$ を state space が E であるような standard Markov process とし、簡単のために、$\zeta(w) \equiv \infty$ としておく。又特に

仮定 (L) E 上に測度 γ が存在し、$\forall$ excessive function $f(x)$ に対し、$f(x) = 0$ (a. e. γ) なら $f(x) \equiv 0$ ($\forall x \in E$)

とおく。

excessive function の分類

1° potential

excessive function $f(x)$ は $\forall x \in E$ に対し

$\lim_{t \uparrow \infty} H_t f(x) = E_x(f(x_t)) = 0$ となるとき potential と云う。

2° class D excessive function $f(x)$ は $\forall x \in E$ $\forall \tau_n \in \tilde{S}$ に対し $\{f(x_{\tau_n});\ n \geqq 1\}$ が $(W, \mathcal{F}, P_x)$ 上で一様可積分なとき class D に属すると云う。

3° regular $f(x)$ が regular excessive というのは、すべての初期分布 μ に対し、P_μ 測度1で、$t \to x_t(w)$ が連続な点で $t \to f(x_t(w))$ が連続になることである。

一般に $f(x)$ が excessive function のとき、$X_t(w) = f(x_t(w))$ とおくと、$\{X_t, \mathcal{F}_t\ t \geqq 0\}$ は $(W, \mathcal{F}, P_\mu)$ 上の (generalized) supermartingale になるが $E_\mu X_t < \infty$ とすると、上の3つの分類は対応する (X_t) の同名の概念に対応する。(いくつかの定理は必要である)

次に $(t, w) \in [0, \infty) \times \Omega$ で定義された $\varphi(t, w) = \varphi_t(w)$ が

(φ.1) $\forall \mu$ に対し $t \to \varphi_t(w)$ が $\geqq 0$、増加, 右連続、$\varphi_0(w) = 0$ (a.s. P_μ)

(φ.2) $\varphi_t(w)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測

(φ.3) $\forall \mu$ に対し

$$P_\mu\{\forall u, v \geqq 0 \quad \varphi_{u+v}(w) = \varphi_u(w) + \varphi_v(\theta_u w)\} = 1$$

(但し $(\theta_u w)(s) = w_{u+s}$)

をみたすとき (非負右連続) additive functional と云う。

又 additive functional (φ_t) が natural (又は class $(\mho)$, unicity class) と云うのは、すべての μ に対し、P_μ 測度 0 を除き $t \to x_t(w)$、$t \to \varphi_t(W)$ が共通の不連続点をもたないことである。

定理　$f(x)$ を有限な excessive function とする。

a). $f(x)$ が class (D) の potential である必要充分条件は additive functional (φ_t) が存在して $E_x(\varphi_\infty) = f(x)$ とかけることである。
$(\varphi_\infty = \lim_{t \uparrow \infty} \varphi_t)$

b) a) において natural additive functional (φ_t) が唯一通りに定まり $f(x) = E_x(\varphi_\infty)$ とかける。

c) $f(x)$ が regular で class D であるための必要充分条件は、連続な additive functional (φ_t) が存在して、$f(x) = E_x(\varphi_\infty)$ とかけることである。

§4との関係は大体明らかであるが、§4のことを markov 過程の場合に表現すると次のようになる。$f(x)$ を有限な excessive function とすると $\{X_t = f(x_t)\ t \geqq 0\}$ は $(W, \mathcal{F}, P_x)$ 上で非負 supermartingale であるから $\boxed{3.1}'$ により $\lim_{t \uparrow \infty} X_t = X_\infty$ が存在し、$E_x(X_\infty) \leqq f(x) < \infty$ である。$X_\infty(W)$ を $f(x)$ の stochastic boundary function と云い、$C(x) = E_x(X_\infty)$ とおくと、$C(x)$ は class D の excessive function で $H_t C = C$ をみたす。即ち、$C(x_t)$ は class D の martingale で、これを stochastic boundary function X_∞ の Dirichlet solution と云う。$g(x) = f(x) - C(x)$ とおくと、$g(x)$ は potential で従って有限な excessive function $f(x)$ は $f(x) = g(x) + C(x)$; $g(x)$ は potential, $C(x)$ は調和函数 $(H_t C = C)$ と分解され、これを f の Riesz 分解と云う。f, g, C に x_t を代入すると super martingale $X_t = f(x_t)$ の Riesz 分解になる。

次に $f(x)$ を class D の potential とすると、定理 a) より $f(x) = E_x(\varphi_\infty)$ とかけるが markov 性と additive functional の性質を使えば $(W, \mathcal{F}, P_\mu)$ 上の super martingale $\{f(x_t)\ \mathcal{F}_t,\ t \geqq 0\}$ に対し、

$$f(x_t) = E_\mu(\varphi_\infty \mid \mathcal{F}_t) - \varphi_t \qquad (a.s.\ P_\mu)$$

が成立つ。これが $\boxed{4.3}$ の分解定理であり、b)、c)はそれぞれ $\boxed{4.5}$, $\boxed{4.6}$ に対応している。

$\zeta(w) \neq \infty$ のときは、additive functional (φ_t) に対し、$\varphi_t(w) = \varphi_{\zeta-}(w)$ $(t \geqq \zeta)$ と云う仮定を加え、potential の定義も、$\tau_n \in \widetilde{S}$ $\tau_n \uparrow \zeta$ $(\tau_n < \zeta \ \ n \geqq 1)$ なる (τ_n) に対し、$\lim_{n\to\infty} f(x_{\tau_n}) = 0$ と修正すれば同様に出来る。

次に supermartingale の energy を次のように定義する。(以下 Meye [3] 参照)

定義　$\mathbb{X} = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \geqq 0\}$ を $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の potential とする。$\mathbb{X}$ の energy を $e = e[\mathbb{X}]$ と書き次のように定義する。

a)　$\mathbb{X}$ が class D に属しないときは $e[\mathbb{X}] = +\infty$

b)　$\mathbb{X}$ が class D に属するときは可積分な natural increasing process $\{A_t\}$ が唯一通りに定まり

$$X_t = E\{A_\infty \mid \mathcal{F}_t\} - A_t$$

とかけるが、そのとき　$e[\mathbb{X}] = \frac{1}{2} E A_\infty^2$　$(\leqq +\infty)$ と定義する。

以后主として class D に属する potential の energy について考える。

$\boxed{5.1}$　$\mathbb{X}$ を class D の potential とし、$\{A_t\}$ を $\mathbb{X}$ を生成する可積分な natural increasing process とする。このとき

$$e[\mathbb{X}] = \frac{1}{2} E\left\{\int_0^\infty (X_u + X_{u-})\, dA_u\right\}$$

が成立つ。

系　もし、$X_t \leqq c$　$(a.s)$ であれば $e[\mathbb{X}] \leqq c^2$ が成立つ。

注意　$e' = e'[\mathbb{X}] = E\{\int_0^\infty X_u\, dA_u\}$

$$e'' = e''[\mathbb{X}] = E\{\int_0^\infty X_{u-}\, dA_u\}$$

とおくと、$e' \leqq e''$ かつ $e' \leqq e = \frac{1}{2}(e' + e'') \leqq e''$ が成立つ。

一般に $e'' \leqq 2e$ であることも容易に分るので、e と e'' は同時に収束発散する。又 $\{A_t\}$ が連続のとき、即ち $\{X_t, t \geqq 0\}$ が regular のときは $e' = e = e''$ が成立ち、逆にこうなるのは $\{X_t;\ t \geqq 0\}$ が regular なときである。

$\boxed{5.2}$　$\mathbb{Y} = \{Y_t;\ t \geqq 0\}$ を energy が有限な potential とし、$\mathbb{X} = \{X_t;\ t \geqq 0\}$ を potential とする。もし $P\{X_t \leqq Y_t\} = 1$　$(t \geqq 0)$ とすると、$e[\mathbb{X}] < \infty$ で

$e[\mathbb{X}] \leqq 4e[\mathbb{Y}]$

が成立つ。

$\boxed{5.3}$ $\mathbb{X}^{(n)}=\{X_t^{(n)}; t\geqq 0\}$ を potential とし、$X_t^{(n)}\uparrow X_t$ $(n\to\infty)$ (a.s)。$\mathbb{X}=\{X_t; t\geqq 0\}$ も potential とすると、

$$e[\mathbb{X}] \leqq \liminf_{n\to\infty} e[\mathbb{X}^{(n)}]$$

が成立つ。

注意　証明の essential な部分は、$\mathbb{X}^{(n)}$、$\mathbb{X}$ を class D の potential とし、対応する natural increasing process を $\{A_t^n\}$, $\{A_t\}$ とすると、$X_t^{(n)}\uparrow X_t$ $(n\to\infty)$ (a.s) であれば弱位相 $\sigma(L_1, L_\infty)$ に関し、$A_\infty^n \to A_\infty$ となることである。

$\boxed{5.4}$ potential $\mathbb{X}^{(n)}=\{X_t^{(n)}, t\geqq 0\}$ が energy 有限な regular potential $\mathbb{X}=\{X_t; t\geqq 0\}$ に下から収束すれば energy norm

$e[\mathbb{X}^{(n)}-\mathbb{X}]=\frac{1}{2} E[(A^n_\infty - A_\infty)^2]\to 0$ $(n\to\infty)$。

energy の概念を markov 過程について考える。standard な markov 過程 $\mathbb{M}$ の semi-group

$$H_t f(x) = E_x(f(x_t); t<\zeta)$$

が Hunt の条件 (F) 及び (G) をみたすとする。

即ち、fundametal な excessive measure λ が存在して

$$H_t f(x)=\int_E p(t,x,y) f(y)\, d\lambda(y)$$

と表わされ、$\hat{H}_t f(y) = \int_E p(t,x,y) f(x)\, d\lambda(x)$ が H_t と同様に $C_0(E)=\{f; f\in C(\bar{E})$ 且つ $f(\partial)=0\}$ を $C_0(E)$ に写す強連続 semi-group ですべての compact set $K\subseteq E$ に対し

$$E_x\left(\int_0^\zeta \chi_K(x_t)\,dt\right)=\int_K U(x,y)\,d\lambda(y)$$

$$\hat{E}_x\left(\int_0^\infty \chi_K(x_t)\,dt\right)=\int_K U(y,x)\,d\lambda(y)$$

が有界とする。($U(x,y)=\int_0^\infty p(t,x,y)\,dt$)

Meyer [6] によれば f が class D の potential とすると非負測度 μ が存在して

$$f(x)=U\mu(x)=\int_E U(x,y)\,d\mu(y)$$

とかける。一方 (5.1)-b) より natural additive functional $\{\varphi_t\}$ が一通りに定まり

$$f(x)=E_x(\varphi_\infty)$$

ともかける。一般に $g(x)\geqq 0$ に対し

$$U_\varphi g(x) = E_x\left(\int_0^\infty g(x_t)\,d\varphi_t\right) = \int_E U(x,y)\,g(y)\,d\mu(y)$$

が成立つ。初期分布 η の Markov process を考え supermartingale $\mathfrak{X} = \{f(x_t);\ t\geqq 0\}$ $f = U\mu$ に対し、energy を考えると

$$e'[\mathfrak{X}] = E_\eta\left[\int_0^\infty f(x_t)\,d\varphi_t\right]$$

$$= \int_E\left\{\int_E U(x,y)\,f(y)\,d\mu(y)\right\}d\eta(x)$$

$$= \int_E \hat{U}\eta(y)\,U\mu(y)\,d\mu(y) \qquad \left(\hat{U}\eta(y) = \int U(x,y)\,\eta(dx)\right)$$

ここで $\eta U(dy) = \hat{U}\eta(y)\lambda(dy)$ が下から $\lambda(dy)$ に収束するようにすると $e'[\mathfrak{X}] \to e'_{lim}(f)$ が定まる。同様に $e_{lim}(f)$ $e''_{lim}(f)$ が定義できる。特に M が positive boundary の Green 空間上の Brown 運動のときは

$$e'_{lim}(f) = e_{lim}(f) = e''_{lim}(f) = \langle \mu, U\mu\rangle$$

となり Newton potential に於ける μ の energy を与える。

次に supermartingale に対し Dirichlet 積分を定義する。stopping time の列 $\pi = \{\tau_n\}$ が $\tau_0 \equiv 0 \leqq \tau_1(\omega) \leqq \cdots \leqq \tau_n(\omega) \leqq \cdots$ かつ $\lim_{n\to\infty}\tau_n(\omega) = \infty$ (a.s) をみたすとき ($[0,\infty)$) の分割と云い分割の列 $\pi_p = \{\tau_n^p\}$ ($p = 1, 2\cdots$) があってこれが

$$\lim_{p\to\infty}\sup_{n\geqq 1} d(\tau_n^p, \tau_{n+1}^p) = 0 \qquad (a.s)$$

(但し、d は $[0, +\infty]$ の metric である) 細分列と云うことにする。

<u>定義</u> $\mathfrak{X} = \{X_t, \mathcal{F}_t, t\geqq 0\}$ を非負 supermartingale とし分割 $\pi = \{\tau_n\}$ に対し

$$I_\pi = E\left\{\sum_{n\geqq 1}\left(X_{\tau_{n+1}} - X_{\tau_n}\right)^2\right\}$$

とおく。もしすべての細分列 $\pi_p = \{\tau_n^p\}$ に対し、π_p のとり方に関係なく

$$\lim_{p\to\infty} I_{\pi_p}$$

が存在するとき、これを X の Dirichlet 積分と云い $D[\mathfrak{X}]$ で表わすことにする。

$\boxed{5.6}$ (Meyer)

a) $\mathfrak{X}$ が martingale で $E(X_\infty^2) < \infty$ であれば $D[\mathfrak{X}] = E\{X_\infty^2 - X_0^2\}$

b) $\mathfrak{X}$ が class D の potential で $e[\mathfrak{X}] < \infty$ ならば

$$D[\mathbb{X}] = 2e''[\mathbb{X}] - EX_0^2$$

が成立つ。

古典的な Dirichlet 積分との関係を見るために $\mathbb{M} = (W, \mathcal{F}_t, x_t, P_x, \zeta)$ を positive boundary の Green 空間上の Brown 運動とし、$v(x)$ を C_0^2-class の potential とする。η を初期分布として確率空間 $(W, \mathcal{F}, P_\eta)$ 上の supermartingale $\{v(x_t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\} = \mathbb{X}$ の Dirichlet 積分 $D_\eta[\mathbb{X}]$ を考えると

$$D_\eta[\mathbb{X}] = E_\eta[\int_0^\infty \mathrm{grad}^2 v(x_t)\,dt]$$

とかける。右辺は Lebesgue 測度を dx と書くと、

$$\int_E \{\int_E \eta(dx)\, U(x,y)\}(\mathrm{grad}^2 v)(y)\,dy$$

とかける。従って、$\eta U(dy) = (\int \eta(dx)\, U(x,y))\,dy$ が下から Lebesgue 測度 dy に近ずくようにすると、$D_\eta[\mathbb{X}] \to \int_E (\mathrm{grad}^2 v)(y)\,dy$ となり、v の古典的 Dirichlet 積分に収束する。

一般に $\mathbb{M}$ を λ を fundamental excessive measure にもつ Hunt の (F) をみたす process とし、f を class D の potential とすると、f の Dirichlet 積分 $D[f]$ は、

$$D_\eta[f] = 2E_\eta(\int_0^\infty f(x_{u-})\,d\Phi_u) - \int_E \eta(dx)(f(x))^2$$

$$\lim_{\eta U \uparrow \lambda} D_\eta[f] = D[f]$$

で与えるのが自然である。

調和函数の Dirichlet 積分も $\boxed{54}$ から導かれる。$\mathbb{M}$ を Green 空間の Brown 運動とし、$u(x)$ を Green 空間 E 上の調和函数とする。u^2 は優調和函数で $u^2 = h - v$ と Riesz 分解される。ここで h は調和函数 v は potential でそれぞれ

$$h(x) = E_x(u^2(x_\infty))$$

$$v(x) = U_\mu(x) = E_x(u^2(x_\infty) - u^2(x_0))$$

である。従って $X_t = u^2(x_t)$ の Dirichlet 積分は 初期分布を η とすると $D_\eta[\mathbb{X}] = \int_E v(x)\,\eta(dx)$、一方例えば超函数の意味で $\mu = -\frac{1}{2}\Delta v = -\frac{1}{2}\Delta u^2 = \mathrm{grad}^2 u\,dx$ であるから、μ の全測度が u の古典的 Dirichlet 積分を与える。従って $\int_E v(x)\,\eta(dx) \to \mu$ の全測度となるように η をとると

$$\lim_\eta D_\eta[\mathbb{X}] = \int_E (\mathrm{grad}^2 u)\,dx$$

である。

§6. stochastic integral

stochastic integral は K. Itô により Brown 運動の場合導入され、その后 Doob により特別な二乗可積分 martingale の場合に拡張された。supermartingale の increasing process による分解に対応して、一般な martingale による stochastic integral の定義は Meyer により導入され、P. Courrège が発展させた。ここで Courrège の研究について [1] [2] [3] に従って述べる。

$\{X_t\ \mathcal{F}_t,\ t\in R=(-\infty,+\infty)\}$ を確率1で見本過程が右連続、且つ2乗可積分な martingale とする。このとき一般に $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$ と仮定してよい（→ II §2）そのとき $\{X_t^2,\ \mathcal{F}_t\ \ t\in R\}$ は非負 submartingale で局所的に class D に属するが §4 の拡張として $A_0=0$、なる条件の下で natural increasing process $A=\{A_t\}$ が一通りに定まり $\forall, s,\ t\in R$ に対し、$s<t$ ならば

$$E\{(X_t-X_s)^2\mid\mathcal{F}_s\}=E\{A_t-A_s\mid\mathcal{F}_s\}$$

となる。これを (X_t) からきまる increasing process と云うことにする。

もし、$X_t(W)$ が standard Brownian motion であれば

$$E\{(X_t-X_s)^2\mid\mathcal{F}_s\}=t-s$$

即ち、$A_t\equiv t$ で、これが K. Itô により取り扱われたものである。Doob は、単調非減少な函数 $F(t)$ が存在し、

$$E\{(X_t-X_s)^2\mid\mathcal{F}_s\}=E(X_t-X_s)^2=F(t)-F(s)$$

の場合を扱っている。

stochastic process $\{\Phi_t(\omega),\ t\in R\}$ がもし、各 $t\in R$ につき Φ_t が $\mathcal{F}_t$ 可測のとき $(\mathcal{F}_t)$ に整合していると云い、すべての有界な stopping time τ に対し、Φ_τ が $\mathcal{F}_\tau$ 可測のとき強い意味で整合（strictly well adapted）と云う。

定義 6.1 $\Phi_t(w)$ $(t,w)\in R\times\Omega$ が、$-\infty<a=\tau_0(\omega)<\tau_1(\omega)<\cdots<\tau_n(\omega)=b<\infty$ なる stopping time (τ_k) と有界 $\mathcal{F}_{\tau_k}$ 可測函数 $\varphi_k(\omega)$ が存在して

(S.S) $\displaystyle \Phi_t(\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(\omega)\,\chi_{(\tau_k(\omega),\,\tau_{k+1}(\omega)]}(t)$

（$\chi(a,b]$ は $(a,b]$ の indicator）とかけるとき stochastic step function, 特に τ_k がすべて定数に等しいとき即ち

(S) $\displaystyle \Phi_t(\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(\omega)\,\chi_{(t_k,\,t_{k+1}]}(t)$

のとき step function と云う。

stochastic step function（step function）の全体をそれぞれ $\mathcal{E}_s(\mathcal{E})$ と書くことにすると

1° $\mathcal{E} \subseteqq \mathcal{E}_s$

2° $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_s$ は linear space

3° $\Phi_t(\omega) \in \mathcal{E}_s$ とすると、$\Phi_t(\omega)$ は強い意味で $(\mathcal{F}_t)$ に整合し、(t, w) 可測、有界、又見本過程は確率1で左連続，右からの極限をもつことが分る。

先ず $\Phi_t \in \mathcal{E}_s$ に対し stochastic integral を定義し、後は適当に L_2-norm を考えて極限をとって拡張して行く。拡張がどのような函数族に対してできるかが理論の essential な点である。

$\boxed{6.1}$ $\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in R\}$ を右連続二乗可積分な martingale とし、対応する natural increasing process を $A = (A_t)$ とする。$\Phi_t \in \mathcal{E}_s$ 即ち

$$\Phi_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(\omega)\, \chi_{(\tau_k \tau_{k+1}]}(t)$$

に対し

(I.S) $$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t\, dX_t = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k})$$

とおくと、

$\Phi_t \to \int \Phi_t\, dX_t$ は $\mathcal{E}_s$ から $L_2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ への linear mapping で

(I.S.1) $$E\left|\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t\, dX_t\right|^2 = E\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_t|^2\, dA_t\right)$$

(I.S.2) $$E\left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t\, dX_t\right) = 0$$

(I.S.3) もし、$\sigma, \tau \in \widetilde{S}$ $\sigma \leqq \tau$，且つ σ, τ が有界とすると、すべての有界 $\mathcal{F}_\sigma$ 可測函数 $Z(\omega)$ に対し

$$Z \int_\sigma^\tau \Phi_t\, dX_t = \int_\sigma^\tau \Phi_t \cdot Z\, dX_t \qquad (a.s)$$

が成立つ。（但し $\int_\sigma^\tau \Phi_t\, dX_t = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t\, \chi_{(\sigma, \tau]}(t)\, dt$）

$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t\, dX_t$ を Φ_t の (X_t) による <u>stochastic integral</u> と云う。

$\Phi_t(\omega)$ を (t, w) 可測且つ $\Phi_t(w) \geqq 0$ $(a.s.P)$ とすると $(R \times \Omega, \mathcal{B}' \times \mathcal{B})$ 上の measure $\nu_A \geqq 0$ が存在して

$$\int_R \int_\Omega \Phi_t(w)\, \nu_A(dt, d\omega) = E\left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t(w)\, dA_t\right)$$

とかける。一般の $\Phi_t(\omega) \in L_1(R\times\Omega, \mathcal{B}^1\times\mathcal{B}, \nu_A)$ に対しても

$$\int_R\int_\Omega \Phi_t \, d\nu_A = E\left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t \, dA_t\right)$$

が成立つ。$\mathcal{E}_0 \subseteq L_2(R\times\Omega, \mathcal{B}^1\times\mathcal{B}, \nu_A) = L_2(\nu_A)$ である。

$\mathcal{E}_0$ 上の stochastic integral $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t \, dX_t$ は $\mathcal{E}_0$ から $L_2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ への linear mapping であるが(I.S.1)により(I.S.1)(I.S.2)(I.S.3)を保ったまま $L_2(\nu_A)$ における $\mathcal{E}_0$ の closure $\overline{\mathcal{E}}_0$ 迄拡張できるのでそれを再び $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t \, dX_t$ とかく。$\overline{\mathcal{E}}_0$ の大きさが問題である。

$\mathfrak{S}$ を $(\mathcal{F}_t)$ に整合し、左連続なすべての stochastic process を可測にするような $R\times\Omega$ 上の最小の σ-field とする。

$\boxed{6.2}$ a) $\overline{\mathcal{E}}$ は $L_2(R\times\Omega, \mathfrak{S}, \nu_A)$ の中で dense

b) $\mathcal{E} \ni \Phi_t \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t \, dX_t$ は $L_2(R\times\Omega, \mathfrak{S}, \nu_A)$ から $L_2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ への linear mapping として(I.S.1)(I.S.2)(I.S.3)を保ったまま拡張される。

注意 $\boxed{6.2}$ は見本過程が確率1で左からの極限をもつとき示されるが、今の場合、X_t に対しそれと同値で左連続な version がとれるからよい。

次に $\mathfrak{M}$ を $(\mathcal{F}_t)$ に強い意味で整合し (t, w) 可測な process 全体を可測にする $R\times\Omega$ 上の最小の σ-field とする。

$\boxed{6.3}$ $\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in R\}$ が特に左擬連続であれば

a) $\overline{\mathcal{E}}$ は $L_2(R\times\Omega, \mathfrak{M}, \nu_A)$ で dense

b) $\int \Phi_t \, dX_t$ は(I.S.1)(I.S.2)(I.S.3)を保って $L_2(R\times\Omega, \mathfrak{M}, \nu_A)$ 迄拡張される。

注意 この証明の中で $\overline{\mathcal{E}}$ は $(\mathcal{F}_t)$ に整合し、見本過程が右連続、$E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_t(\omega)|^2 \, dA_t(\omega)\right\} < \infty$ なる process $\Phi_t(\omega)$ を含むことが分る。

しかしもし、$\{X_t, \mathcal{F}_t, t\in R\}$ が左擬連続をもたなければ $\overline{\mathcal{E}}$ は $L_2(R\times\Omega, \mathfrak{M}, \nu_A)$ で dense ではない。

$\boxed{6.4}$ もし、$a < b$ で stochastic process $\{\Phi_u \; u\in R\}$ が $\chi_{(a,b]}(t)\Phi_t(\omega) \in \overline{\mathcal{E}}$ ($\overline{\mathcal{E}}$ は $L_2(\nu_A)$ での closure)をみたすならば、$\left(\int_a^t \Phi_u \, dX_u\right)_{u\in(a,b]}$ のすべての version は二乗可積分な martingale である。

もし、$\{X_t \ t\in R\}$ の見本過程が連続なら、$\int_a^t \Phi_u \, dX_u$ は連続な version をもつ。

$\boxed{6.5}$ もし、$\{X_t, \mathcal{F}_t \ t\in R\}$ が左擬連続ならば
$\forall \Phi \in L_2(R\times\Omega, \mathfrak{M}, \nu_A)$ に対し

$$\rho\left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t \, dX_t\right) \leqq 4\left(\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_t|^2 dA}\right)^{\frac{1}{3}}$$

が成立つ，但し、$\rho(Z) = E\left\{\dfrac{|Z|}{1+|Z|}\right\}$ でこの metric は確率収束と同値である。

Ⅳ　その他の martingale

この章では martingale の種々の方向への拡張について述べる。

§1　Banach 空間における martingale

Banach 空間の元を値とする martingale の研究は主として chatterji [1] [2] Scalora [1] 等によって行われている。大体Ⅱ§2の収束定理の形式的拡張で証明の方法は確率論的と云うよりは位相解析的である。重要な応用がどこにあるかは不明であるが、Banach 空間が回帰的であるかないかによって差があり、位相との関係が興味の中心であるように思われる。主として chatterji の理論を紹介する。

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とし、$\mathfrak{X}$ を Banach 空間とする。$\Omega = A_1 + \cdots + A_n$　$A_i \in \mathcal{B}$ $(i=1, \cdots, n)$ と表わし、$X(\omega)$ が各 A_i の上でそれぞれ一定値 $\in \mathfrak{X}$ をとるとき階段函数と云う。もし Ω 上で定義され $\mathfrak{X}$ の値をとる函数 $X(\omega)$ に対し、階段函数列 $\{X_n(\omega)\}$ を選んで殆んどすべての ω に対し、$X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ (強) とできるとき $X(\omega)$ を強可測 (strongly measurable) であると云う。このとき実函数 $\|X(\omega)\|$ は $\mathcal{B}$ 可測である。特に $E\|X(\omega)\| < \infty$ のとき $X(\omega)$ を Bochner 可積分であるという。

$X(\omega)$ が Bochner 可積分のとき積分 $\int_\Omega X\,dP$ を次のように定義できる。まず X が階段函数で

$\Omega = \sum_{i=1}^n A_i$, $A_i \in \mathcal{B}$,　A_i において $X(\omega) = a_i \in \mathfrak{X}$ のとき

$$\int_\Omega X\,dP = \sum_{i=1}^n a_i P(A_i)$$

$X(\omega)$ が一般に Bochner 可積分のときは $\{X_n\}$ を X に強収束する階段函数列とし、

$$\int_\Omega X\,dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n\,dP \quad (強)$$

と定義する。(→ 吉田 [1] p. 81) これを X の Bochner 積分と云い、次の性質が知られている。

(1)　$X(\omega)$ が Bochner 可積分であれば任意の $A \in \mathcal{B}$ に対し、A 上でも Bochner 可積分で

$$\left\| \int_A X\,dP \right\| \leqq \int_A \|X\|\,dP$$

(2)　$A = \sum_{i=1}^\infty A_i$.　$A_i \in \mathcal{B}$　$(i \geqq 1)$　とすると

$$\int_A X\,dP = \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} X\,dP \quad (強)$$

(上掲書 p. 83)

従って $\int_A X\,dP$ は P につき絶対連続な完全加法的集合函数である。一般に Banach 空間の値をとる加法的集合函数に対しては Radon-Nikodym の定理は成立たない（反例は上掲書 p.84）が、条件つき期待値にあたるものは定義できる。今 $X(\omega)$を Bochner 可積分，$\mathfrak{F}$ を $\mathcal{B}$の σ-sub field とすると

$\boxed{1.1}$ 強 $\mathfrak{F}$-可測函数 $E\{X\mid\mathfrak{F}\}$ で

$$\int_A E\{X\mid\mathfrak{F}\}\,dP=\int_A X\,dP \qquad \forall A\in\mathfrak{F}$$

をみたすものが P測度 0 を除いて唯一通りに存在する。

この $E\{X\mid\mathfrak{F}\}$ を X の $\mathfrak{F}$ に関する条件つき期待値と云い、大体実数値の場合と同様な性質をもつ。特に $\|X\|\leqq E(\|X\|\mid\mathfrak{F})$ (a.s) が成立つ。

$L_p(\Omega,\mathcal{B},P,\mathfrak{X})$ $1\leqq p\leqq\infty$ を強可測且つ $\|X(\omega)\|\in L_p(\Omega,\mathcal{B},P)$ であるような $\mathfrak{X}$ 値函数 $X(\omega)$の全体とし，$X\in L_p(\Omega,\mathcal{B},P,\mathfrak{X})$に対し norm を $[X]_p=\{E\|X\|^p\}^{\frac{1}{p}}$ と定義する。よく知られているように $L_p(\Omega,\mathcal{B},P,\mathfrak{X})$ は Banach 空間になる。

$\boxed{1.1}$ によってきまる条件つき期待値により I の §1 と同様にして martingale を定義することができるがここでは discrete parameter の martingale $\{X_n,\mathfrak{F}_n,n\geqq1\}$及び$\{X_n,\mathfrak{F}_n,n\leqq-1\}$のみを考える。大体 $\mathfrak{X}$が回帰的な場合は実数値と同様な収束定理が成立ち、回帰的でないときは特殊な収束定理しか成立たない。

$\boxed{1.2}$ $Z\in L_p(\Omega,\mathcal{B},P,\mathfrak{X})$ $1\leqq p<\infty$, $X_n=E\{Z\mid\mathfrak{F}_n\}$ とおくと、$\{X_n,\mathfrak{F}_n,n\geqq1\}$は martingale で

$$\lim_{n\to\infty}[X_n-X_\infty]_p=0,\qquad \lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty \ (\text{強})\ (a.s)$$

ただし，$X_\infty=E\{Z\mid\mathfrak{F}_\infty\}$，$\mathfrak{F}_\infty=\mathcal{B}(\cup_{n\geqq1}\mathfrak{F}_n)$

$\boxed{1.3}$ $\{X_n,\mathfrak{F}_n,n\leqq-1\}$ を martingale，$X_{-1}\in L_p(\Omega,\mathcal{B},P,\mathfrak{X})$ $1\leqq p<\infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}[X_{-n}-X_{-\infty}]_p=0,\qquad \lim_{n\to\infty}X_{-n}=X_{-\infty}\ (\text{強})\ (a.s)$$

ただし、$X_{-\infty}=E\{Z\mid\mathfrak{F}_{-\infty}\}$ $\quad\mathfrak{F}_{-\infty}=\cap_{n\geqq1}\mathfrak{F}_{-n}$

以上二つは Banach空間 $\mathfrak{X}$ は任意である。$\mathfrak{X}$が回帰的な場合は I の $\boxed{3.1}$ に対応する定理が A.L.Tulcea and C.L.Tulcea [1] によりもっと一般な ergodic theorem から導かれている。

$\boxed{1.4}$ $\mathfrak{X}$を回帰的 Banach 空間、$\{X_n, \mathfrak{F}_n, n \geqq 1\}$を $\sup_{n\geqq 1} E\|X_n\| < \infty$ をみたす martingale とすると

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_\infty(\omega) \quad (\text{強}) \quad (a.s)$$

が存在し、$E\|X_\infty\| < \infty$ である。

Ｉの $\boxed{1.3}$ にあたる定理としては

$\boxed{1.5}$ $\mathfrak{X}$を回帰的 Banach 空間、$\{X_n, \mathfrak{F}_n, n \geqq 1\}$を $X_n \in L_p(\Omega, \mathcal{B}, P, \mathfrak{X})$ なる martingale とする。

a) $p = 1$ で $\{\|X_n(\omega)\| ; n \geqq 1\}$が一様可積分であれば $X_\infty \in L_1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P, \mathfrak{X})$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} [X_n - X_\infty]_1 = 0$$

b) $1 < p < \infty$ で $[X_n]_p$が一様有界であれば $X_\infty \in L_p(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P, \mathfrak{X})$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} [X_n - X_\infty]_p = 0$$

が成立つ。いづれの場合も $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_\infty(\omega)$ (強) $(a.s)$ で又、$\{X_n, \mathfrak{F}_n, 1 \leqq n \leqq \infty\}$は martingale である。

注意 $\boxed{1.4}$ $\boxed{1.5}$ 共に $\mathfrak{X}$ が回帰的でないときは成立たない例がある。(chatterji [1])

これらの定理からＩ§4と同様に Banach 空間における独立な確率変数の和に関するいくつかの定理、Derivative 等の定理が出るが、新しい事実は少ないと思われるので省略する。

§2 σ有限測度空間上の martingale

必ずしも有界でない測度空間の上でも条件つき期待値にあたるものを定義し、martingale 理論を展開することもできるが、ここでは確率論と関係深いもののみを取扱うので、エルゴード定理の定式化に必要な程度の議論にとどめる。

σ有限測度空間の上の条件つき期待値及び martingale 理論は Chow [1]に詳しい。

$(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$を σ有限測度空間、$\mathfrak{F}$を$\mu$につきσ有限な$\mathcal{B}$の σ−sub field とする。$X(\omega)$を非負$\mathcal{B}$可測函数で$(\Omega, \mathfrak{F})$上の測度

$$\int_A X\, dP \qquad (A \in \mathfrak{F})$$

がσ 有限とすると Radon−Nikodym の定理で、μ測度0を除き

$$\int_A X\,dP = \int_A Y\,dP \qquad (\forall A \in \mathcal{F})$$

となる$\mathcal{F}$可測函数が定まる。これを矢張りXの$\mathcal{F}$に関する条件つき期待値と云い $E\{X|\mathcal{F}\}$ と表わす。一般の$\mathcal{B}$可測函数 X に対しては、$X^+ = X \vee 0$, $X^- = (-X) \vee 0$ とおき、意味をもつ限り

$$E\{X|\mathcal{F}\} = E\{X^+|\mathcal{F}\} - E\{X^-|\mathcal{F}\}$$

と定義する。即ち X の $\mathcal{F}$ に関する条件つき期待値 $E\{X|\mathcal{F}\}$ は

(i) $E\{X|\mathcal{F}\}$ は$\mathcal{F}$可測

(ii) $\int_A X\,d\mu$ が意味を持つ限り $\int_A E\{X|\mathcal{F}\}\,d\mu = \int_A X\,d\mu \quad (A \in \mathcal{F})$

で特徴ずけられる函数(の class)である。

この条件つき期待値を用いて、martingale (super sub-) を I § 1 と同様に定義できるが、注意すべきことは、増加する σ-sub field の列はすべてσ有限なことが条件つき期待値の定義から必然的に要請されていることである。主な定理をいくつか主として Jerison [1], Chow [1] に従って述べる。

$\boxed{2.1}$ $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geqq 1\}$ をσ有限測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 上の martingale とし、$\sup_{n \geqq 1} \int_\Omega |X_n|\,dP < \infty$ とすると $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ (a.e) が存在する。

$\boxed{2.2}$ $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \leqq -1\}$ を martingale、且つ $\int_\Omega |X_{-1}|\,dP < \infty$ とすると、$\lim_{n\to -\infty} X_n = X_\infty$ (a.e) が存在する。

注意 $\boxed{2.2}$ において一般には $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \geqq 1} \mathcal{F}_{-n}$ はσ有限にはならない。特に $\mathcal{F}_{-\infty}$ がμ測度0を除き$\{\phi, \Omega\}$と一致し、$\mu(\Omega) = \infty$ のときは、$X_{-\infty} = 0$ (a.e) が成立つ。

それ自身興味があり、又エルゴード定理を martingale の収束定理として定式化する基礎になる例を挙げる。

例 $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\mathcal{N} = 2^N = \{N$ の中集合$\}$, $A \in \mathcal{N}$ に対し、Aが有限集合なら $\nu(A) = A$ の元の個数、Aが無限集合なら $\nu(A) = \infty$ とおくと $(N, \mathcal{N}, \nu)$ はσ有限測度空間になる。ここで $\mathcal{G}_{-n}$ を $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ 及び $\{k\}$ $(k \geqq n)$ を含む最小の σ-field とすると

$$\mathcal{N} = \mathcal{G}_{-1} \supseteqq \mathcal{G}_{-2} \supseteqq \cdots \qquad \bigcap_{n \geqq 1} \mathcal{G}_{-n} = \{\phi, N\}$$

となる。従って $X = X(j)$ を N上の函数(即ち数列)とし、$E\{X|\mathcal{G}_{-n}\} = X_{-n}$ が定義できたとすると $\{X_{-n}, \mathcal{G}_{-n}, n \geqq 1\}$ は martingale にな

る。又

$$X_{-n}(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X(i) \qquad 0 \leqq j < n$$
$$= X(j) \qquad j \geqq n$$

であるから、martingale $\{X_{-n},\ \mathcal{G}_{-n},\ n \geqq 1\}$ の収束と数列 $\{X(j)\ j \geqq 0\}$ の Cesaro 平均収束は同値になる。又この例より $\int_N |X_{-1}|\,d\nu = \infty$ のとき収束する例と、発散する例を容易に作ることができる。

ここでエルゴード定理の martingale による定式を Jerison に従って述べる。エルゴード定理の一つの型に $(S, \mathcal{O}, \sigma)$ を σ−有限測度空間、T を $L_1 = L_1(S, \mathcal{O}, \sigma)$ を L_1 に写す線型作用素とするとき、$X(s) \in L_1$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i X(s) \qquad (a.e)$$

の存在を主張するものがある。Dunford and Schwarz [2] では、$\|TX\|_1 \leqq \|X\|_1$, $\mathrm{ess\,sup}\,|TX(s)| \leqq \mathrm{ess\,sup}\,|X(s)|$ の仮定の下に上の極限が存在することが証明されている。

今 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = (S \times N,\ \mathcal{O} \times \mathcal{N},\ \sigma \times \nu)$, $\mathcal{F}_{-n} = \mathcal{O} \times \mathcal{G}_{-n}$ (N, $\mathcal{N}$, ν, $\mathcal{G}_{-n}$ は例と同じ) とおくと $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ は σ−有限測度で $\mathcal{F}_{-1} \supseteqq \mathcal{F}_{-2} \supseteqq \cdots$ である。従って $f = f(s, k)$ を Ω 上の函数として $f_{-n} = E\{f \mid \mathcal{F}_{-n}\}$ が存在すれば $\{f_{-n},\ \mathcal{F}_{-n},\ n \geqq 1\}$ は martingale である。

$\boxed{2.3}$ a) $X(s) \in L_1(S, \mathcal{O}, \sigma)$, $f(s, k) = T^k X(s)$ とおくと、各 $n \geqq 1$ に対し、$E\{f \mid \mathcal{F}_{-n}\} = f_{-n}$ が存在し

$$f_{-n}(s, k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i X(s) & k < n \\ T^k X(s) & k \geqq n \end{cases}$$

である。

b) $\{f_{-n},\ \mathcal{F}_{-n},\ n \geqq 1\}$ は $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 上の martingale で $\lim_{n\to\infty} f_{-n} = f_{-\infty}$ (a.e) の存在と $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i X(s)$ (a.e) の存在とは同値である。

その他 Hurewicz−Oxtoby のエルゴード定理の martingale による定式化も Jerison で論じられているがそれは省略して、有限測度空間の上での古典的な個別エルゴード定理について述べる。

$(S, \mathcal{O}, \sigma)$ を有限測度空間とし、ϕ を S の1対1保測変換とする。Birkoff によれば任意の $X(s) \in L_1(S)$ に対し、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}X(\Phi^i s)=E\{X\mid\mathcal{F}\}\qquad (a.e)$$

（$\mathcal{F}$は Φ-不変な集合の作る σ-*sub field*）が成立つ。これを $\boxed{2.2}$ から導くことはできないようであるが、*subsequence* に対する収束は、次のようにして $\boxed{2.2}$ に帰着できる。今 $I=[0,1)$, $\mathcal{J}=[0,1)\cap\mathcal{B}'$（$\mathcal{B}'$ は1次元 Borel *field*）、λを1次元 *Lebesgue* 測度として，$(\Omega,\mathcal{B},\mu)=(S\times I,\ \mathcal{O}\times\mathcal{J},\ \sigma\times\lambda)$ とおく。$\mathcal{F}_{-n}$を次のように定義する。$A\in\mathcal{B}$ が $A\in\mathcal{F}_{-n}$ と云うのは、すべての $s\in S$, $0\leqq\alpha<2^{-n}$, 及び $0\leqq k<2^{-n}$をみたすすべての整数kに対し

$(\Phi^k s,\ \alpha+k2^{-n})\in A$ と $(s,\alpha)\in A$

が同値になることと定義する。

$\boxed{2.4}$ a) $X\in L_1(S)$ に対し、$f(s,\alpha)=X(s)$と定義すると、$\int_\Omega|f|d\mu<\infty$. 且つ

b) $E\{f\mid\mathcal{F}_{-n}\}(s,\alpha)=2^{-n}\sum_{i=0}^{2^n-1}X(\Phi^{i-j}s)$

が成立つ。ここで j は $j\cdot2^{-n}\leqq\alpha<(j+1)2^{-n}$ よりきまる整数である。

この定理を用いれば $\boxed{2.2}$ の系として、$\forall X\in L_1(S)$ に対し、Nの部分列 $\{j_n\}$が存在して、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1}X(\Phi^{i-j_n}s)$$

が殆んどいたる所存在することが容易に導かれる。

その他 *norm* 空間の作用素の収束定理から、平均エルゴード定理と *martingale* の収束定理を導き出す研究もある。Jerison [1] Rota、Gian-Carlo [1] 参照。

§3 有向集合を *parameter* にする *martingale*

$(\Omega,\mathcal{B},P)$を確率空間、$\Delta(\leqq)$を有向集合とする。即ちΔは

(i) $\forall t\in\Delta$ に対し $t\leqq t$

(ii) $s,t,u\in\Delta$, $s\leqq t$且つ $t\leqq u$ なら $s\leqq u$

(iii) $\forall s,t\in\Delta$ に対し、$s\leqq u$、$t\leqq u$ となる $u\in\Delta$ が存在する。

という条件をみたす順序集合とする。各$t\in\Delta$ に対し、$\mathcal{B}$の σ-*sub field* $\mathcal{F}_t$、確率変数 X_tが与えられているとき $\{X_t,\mathcal{F}_t,t\in\Delta\}$ が *martingale*（*sub-super-*）ということを I §1 と同様に定義できる。又、$(\Omega,\mathcal{B},\mu)$を σ-有限測度空間とするとき、Δを *parameter* とする *martingale*

が前の§と同様にして定義できる。この martingale は Bochner [1] により、もっと一般な形で導入され、その后主として Helms [1] Chow [1] Krickeberg [1] [2] [3] 等により研究されている。元来 derivative の議論、Fubini - Jessen 型の定理を martingale の手法でするのが主要な動機なので、応用をかねて、基礎の空間も σー有限測度空間になっている（Chow、Krickeberg）場合が多いが、確率論とは余り関係がないので基礎の空間が確率空間の場合に限って、主な結果を紹介する・平均収束については簡単で Helms の研究を述べる。$\{X_t, \mathfrak{F}_t, t\in\Delta\}$ を martingale とし、Δ に extra point ∞ を加え $\Delta_\infty = \Delta \cup \{\infty\}$ をおき順序を $\forall t\in\Delta$ に対し $t \leqq \infty$ とすれば Δ_∞ も有向集合である。

$\boxed{3.1}$ $\{X_t, t\in\Delta\} \subseteqq L_p(\Omega, \mathcal{B}, P)$ $(p \geqq 1)$ とするとき次の a) b) c) d) は同値である。

a) $p = 1$ のときは $\{X_t, t\in\Delta\}$ が一様可積分、$p > 1$ のときは $E|X_t|^p$ が一様有界

b) $\{X_t, t\in\Delta\}$ は $L_p(\Omega)$ で弱収束

c) $X_\infty \in L_p(\Omega)$ が存在して $\{X_t, t\in\Delta_\infty\}$ は martingale

d) $\{X_t, t\in\Delta\}$ は $L_p(\Omega)$ で強収束。

注意　Δ が自然数のときは I の $\boxed{3.2}$ により、$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty$ (a.s) であるが一般の有向集合に対しては、これは正しくない（I§4B）参照）
応用として次のものがある。

例 1　（平均微分定理）Δ を Ω の分割の集合とし、$\Pi_1, \Pi_2 \in \Delta$ のとき $\Pi_1 \leqq \Pi_2$ を Π_2 が Π_1 の細分になっていることとする。又 $\mathfrak{F}_\Pi$ を分割 Π に出て来るすべての部分集合 $(\in\mathcal{B})$ を含む最小の σー field とすると明らかに $\Pi_1 \leqq \Pi_2$ なら $\mathfrak{F}_{\Pi_1} \subseteqq \mathfrak{F}_{\Pi_2}$，又 $\mathcal{B}(\bigcup_{\Pi\in\Delta} \mathfrak{F}_\Pi) = \mathcal{B}$ である。今 $X \in L_p(\Omega, \mathcal{B}, P)$ $p \geqq 1$ とし、$\Pi : \Omega = M_1 + M_2 + \cdots$ $(M_j \in \mathcal{B}\ \ j \geqq 1)$ とするとき

$$X_\Pi(\omega) = \int_{M_j} X\, dP / P(M_j) \qquad \omega \in M_j,\ P(M_j) > 0$$
$$= 0 \qquad \omega \in M_j,\ P(M_j) = 0$$

と定義する。$\{X_\Pi, \mathfrak{F}_\Pi\ \Pi\in\Delta\}$ は martingale で $\subseteqq L_p(\Omega)$ であるが $X_\infty = X$ と考えると c) をみたす。従って L_p の強収束の意味で $X_\Pi \to X$ である。これを平均微分定理と云う。

例2　（Fubini - Jessen の平均収束定理）

記号はすべて I §4 B) と同じものとする。

$X \in L_p(\Omega, \mathcal{B}, P)$ とすると martingale $\{X_\pi\ \mathcal{F}_\pi,\ \pi \in \Delta\}$ は L_p に属し $X = X_\infty$ と考えると c) をみたす。従って L_p の強収束の意味で

$$\lim_{\pi} \int_{\Omega_{\pi'}} X(\omega_\pi \times \omega_{\pi'})\, dP_{\pi'}(\omega_{\pi'}) = X$$

が成立つ。

既に注意したように $\boxed{3.1}$ から概収束は出ないので条件が必要である。結局可分性にあたる条件と Vitali の被覆定理にあたる条件を入れれば、概収束定理が出るようであるが相当複雑なので省略する。Krickeberg [1] は明快であるが束論的方法で証明してあり、測度空間の上の確率過程に適用すると、必ずしも簡単ではない。Chow [1] にはそのことの外に optional sampling についても論じられている。

§4　martingale に関する中心極限定理

特殊な martingale に対し、中心極限定理が成立つ。今 $\{X_n, n \geqq 1\}$ を martingale としてこれが

(A.1)　　$EX_1 = 0$

(A.2)　　$\sigma_1^2 \leqq \sigma_2^2 \leqq \cdots$ が存在し、$\{X_n^2 - \sigma_n^2,\ \mathcal{F}_n\ n \geqq 1\}$ は martingale

をみたすとする。$Y_1 = X_1,\ \ Y_n = Y_n - Y_{n-1}$ とおくと

$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$

と表わされ $\{Y_n\ \ n \geqq 1\}$ は

(B.1)　　$EY_1 = 0$　　$E\{Y_n \mid Y_1 \cdots Y_{n-1}\} = 0$

(B.2)　　$EY_1^2 = \sigma_1^2$　　$E\{Y_n^2 \mid Y_1 \cdots Y_{n-1}\} = \sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2$

をみたすので、X_n は独立変数の和の拡張になっている。このmartingale に対し、本質的には $\max_j |Y_j|$ が小さいという仮定のもとに、X_n の分布は漸近的に Gauss 分布になることが示される。（Lévy [1] p. 242）

又最近 Billingsley（[1] 1960）は（B.2）の代りに

(B.2)′ $\{Y_1, Y_2 \cdots\}$ はエルゴード定常過程で $EY_1^2 < \infty$

をおき、$n^{-\frac{1}{2}} X_n$ の分布が平均 0、分散 EY_1^2 の Gauss 分布に収束することを示している。

あとがき

Martingale の研究は P. Lévy, J. Ville に始まり、Jessen の積分の研究等も加わって、Doob により基本的な部分が体形化された。そして、Stochastic process という本の中に詳しく論じられていてこの手引きも基本的部分は殆んどすべて、それに従っている。(I, II, III の§3迄) martingale は数学の1つの道具として確率論の種々の分野に応用されたが、理論そのものを発展させたのは、Meyer による supermartingale の分解と考えられる。これにより、energy の確率的取扱い stochastic integral の一般化等の研究が進んで来た。(III, §4, §5, §6) 又、この note では殆んど触れることができなかったが有向集合を parameter にもつ martingale の研究は次々に発表され、測度論への応用の道をきり開いている。しかしそれは path の解析学とも云うべき確率過程論とは縁遠いものになりつつある。

なおこの「手引き」の作製は 池田信行、近藤亮司、清水、白尾恒吉、野本久夫、福島正俊の共同によるもので、最終的文責は近藤にある。

索　　引

「Martingale」文献表

Andersen. E. S and Jessen [1] Some limit thesrem on integrals in an abstract set. Donske Via. Selok. Mat-Pys. Medd 22 (1946)

[2] Some limit theorems on set functions. 25 (1948)

[3] On the introduction of measures in infinite product sets, id 25 (1948)

Billingsley. P. [1] The Lindeberg-Lévy theorem for martingales Proc. Amer. Math. Soc 12 (1961)

Blackwell, M. A and Girshick [1] On functions of sequences of independent chance vector with spplications to the probrem of the "random walk" in k dimension. Ann. Math. Stat. 17 (1946)

Bochner [1] Partial ordering in the theory of martingales Ann. of math. vol 62 (1955)

Chatterji. S. D [1] Martingales of Banach-valued random variables Bull. Am. Math. Soc 66 (1960)

[2] A note on the convergence of Banach-space valued martingales. Math. Ann. 153 Band. z Heft (1964)

Chow Y. S. [1] Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets. Trans. Amer. Math Soc. 97 (1960)

Chow Y. S. and Herbert Robins [1] A martingale system theorem and application Proc. of 4th Berk. Symp. vol I.

Chow. Y. S. Robins. Herbert [1] A renewal theorem for random variables which are dependent or non-identically distributed Ann. Math. Stat. 34 (1963)

Courrège, P. [1] Ensembles uniformement intégrables de functions et compacité faible L^1 Seminaire choquet t. 1 (1962)

[2] Decomposition des martingales de carré

intégrable Sem. Brelot-Choquet-Deny: Theorie du Potentiel t. 7 1962/63

[3] Integrales stochastiques et martingales de carré integrable. ib id 1962/63 N°7

[4] Integrales stochastique associées à une martingale de carré integrable, C. R. Acad. Sci Paris 252 (1963) P. P. 867 ~ 870

Dieudonné [1] Sur un theorèm de Jessen. Fund. Math. vol. 37 (1950)

Dobrushin [1] The continuity condition for the sample functions of a martingale. Teorya Veroyat. 3 (1958)

Doob J. L [1] Regularity properties of certain families of chance variables. Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940)

[2] Application of the theory of martingales. Le calcul des probabilités et ses applications. Coll. Int. du centre Nat. de la Rech. Sci, Paris (1949)

[3] Stochastic process. New york (1953)

[4] Continuous parameter martingles 2nd Berk. Symp. (1954)

[5] Semi-martingales and subharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc 77 (1954)

[6] A probability approach to the heat equation. Trans. Amer. Mach. Soc 80 (1955)

[7] Probability methods applied to the 1st boundary value probrem. Proc. 3rd Berk. Symp. (1955)

[8] Martingales and one-dimensional diffusion. Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1955)

[9] Brownian motion on a Green space Teorya. Veroyat. (1957)

[10] Conformally invariant cluster value theory. Ill J. of Mth, Vol 5. No. 4 (1961)

[11] Note on martingale theory. Proc. of 4th Berk. Sym. vol II. (1956)

[12] Boundary properties of functions with

finite Dirichlet integrals. Ann. Inst. Fourier. Grenoble t.12 (1962)

Dubins, L. E. [1] Rises and upcrossings of non-negative martingales. Ill. J. Math. 6 (1962).

Dunford and Schwarz [1] Convergence almost everywhere of operator averages. J. Rat. Mech. Anal. vol 5 (1956)

[2] Linear operators Part I (1958)

Helms [1] convergent probabilities of martingales - indexed by directed set (thesis) Purdue Univ. (1956)

[2] Mean convergence of martingales. Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958)

Hunt. G. E. [1] Markov processes and Potentials I Ill. J. of Math vol I (1957)

[2] ibid II. vol 2 (1957)

[3] i.b.i.d III vol 2 (1958).

[4] Markov chains and Martin bundaries. Ill J. of Math. vol 4 (1960)

Ito, K. [1] Sto chastic integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo (1944)

Jerison, M. [1] Martingale formulation of ergodic theorem Proc. Amer. Math. Soc. vol 10 (1959)

Johnson, Guy and Helms L. L [1] class D super martingles Bull, Amer. Math. Soc. 69 (1963)

Krickeberg. K. [1] Convergence of martingales with a dricted set. Trans. Amer. Math. Soc. vol 83 (1956)

[2] Stochastis che Konvergenz von Semimartingalen Math. Z. vol 66 (1957)

[3] Absteigende Semi-martingale mit filtierendem Parameterbereich. Abh. Semi. Univ. Hamburg 24 (1960)

Kanc. S. On the convergence of generalized discrete martingale proccss. Sci. Rep. Kagoshima (1958)

Lévy. P [1] Theorie de l'addition des variables aleatoires.

paris (1937)
Loeve, M. [1] Probability theory., New york. (1955)

Maharam [1] On two theorems of Jessen. Proc. Amer. Math. Soc vol 9 (1958)

Meyer P. A. [1] Theorie des martingales et des semi-martingales Sem. de B-C-D. (1960/61) n° 4.

[2] Decomposition des surmartingales. ibid (1962) n° 11

[3] Interprētation probabiliste de la notion d'energie id 1962/63

[4] A decomposition theorem for super-martingale. Ill. J. of Math (1962)

[5] Decomposition of supermartingales: The uniqueraess theorem Ill. J. of Math. vol 7 (1963)

[6] Fonctionnelles multiplicatives et additives de Morkov. Ann. de l'inst. Fourier t 12 (1962)

Moy. S. T. C [1] Measure extensions and the martingale convergence theorem, Proc. Amer. Math. Soc. vol 4 (1953)

M. Michel Metivien. [1] Martingale á valeurs vectorielles. application à la derivation des fonctions d'ensembles à valeurs vectorilles. C. R. Acad. Sci. Pari. N°18 256 (1963)

Neymann-Pearson [1] On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statiatical inference. Biometrica. Vol 20 A. Part I 175~240 Part II 263 ~294. (1928).

[2] On the probrem of most efficient tests of statistical hypothesis Trans. Roy. Soc. London. Ser A. Vol 231 (1933)

Rota, Gian-Carlo [1] Une théorem unifierée des martingales et des moyennes ergodiques. C. R. acad. sci. Paris. 252 (1961) p.p. 2064~2066.

Scalora F. S. [1] Abstract martingale convergence theorems Pac. J. Math. 11. 347~374 (1961)

Snell J. L. [1] Application of martingale system theorems Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952)

Snell J. L. and Wiliamson. R. E. [1] A martingale representation theorem. J. Math. Mech. 9 (1960) p.p. 653~662.

Tulcea A. L, and Tulcea. [1] Abstract ergodic theorems. Proc. Nat. Acad. Sci. (1962)

伊藤 清 [1] 確 率 論 (岩波)

[2] 確率過程 I、II (岩波)

吉田 耕作 [1] 位相解析 I (岩波)

本尾 実 [1] マルコフ過程の Additive functional. Sem. on prob. vol 15.