物理と数学の出会い

— 数理解析研究所における可解格子模型の研究 —

三輪　哲二

数学はその発展の仕方において、二つの面を持っている。第一に、数学は自己完結的に深化していく。第二に、数学は他の学問との相互作用によって新しい発展を生み出す。かつ、この両面は絡み合っている。「数理解析」とは、その全体を指す言葉である。数理解析に対するこのような視点から、可解格子模型における研究の歴史を振り返ってみよう。その歴史の中で、数理解析研究所における研究を位置付けてみたい。

それは、物理と数学の、そして研究者と研究者の出会いの物語である。

1930 – 40 年代に、Bethe と Onsager は磁性に関する統計力学的な模型を考察し、Bethe は 1 次元の量子統計力学の模型であるハイゼンベルグ模型を、Onsager は 2 次元の古典統計力学の模型であるイジング模型を解いた。数学的にはどちらも、大きなサイズ N の行列の固有値、固有ベクトルを求める問題であるが、勝手な N の値に対して厳密な解が求まるのは驚きであった。彼らは偉大な物理学者であり、特別最先端の数学理論を応用するでもなく、N の値の小さいものから順にいじくっているうちに解いてしまったらしい。

驚きは感動を生み、人々はそのことをもっと深く知りたいと思う。そしてその中から、さらに大きな驚きが生まれる。

以後、ハイゼンベルグ模型とイジング模型は、物理学者にとって無限自由度（N が無限大）の解ける模型として数学的な意味での実験室となる。1970 年代に、この実験室から二つの成果がもたらされた。それらは、思いがけない数学とのつながりを示していた。Wu, McCoy, Tracy, Barouch は、イジング模型の相関関数が 20 世紀初頭に数学者によって発見されたパンルヴェ超越関数であることを発見した。Baxter は、ハイゼンベルグ模型の拡張である XYZ 模型を、19 世紀数学の花形である楕円関数を駆使することによって解いた。Wu たち、そして Baxter は偉大な応用数学者であり、彼らが丹青込めて磨きあげた宝石が、数学の古池に投げ込まれたのである。このあとに数学者の出番がやってくる。

1975 年頃、佐藤幹夫（数理研教授、当時）は、物理学におけるグリーン関数の重要性に着目し、自由場でない例を求めて、学生時代に興味を持ったイジング模型を再検討していた。いくつかの幸運と天才の直観に導かれて、彼は Wu たちの論文と出会う。そして、1977 年の春、数理研での若い協力者（神保道夫、三輪哲二）との毎日朝 10 時から晩 10 時までの研究の日々の末に、イジング模型とモノドロミー保存変形理論のつながりを確立する。無限自由度の物理から古典的な解析学へ一本の橋が掛けられた。

1977 年頃、Faddeev は逆散乱法の量子化の試みの中で、Baxter の論文に出会う。彼は、場の理論と格

子模型の可解性の根底にある基礎方程式として、ヤン バクスター方程式を提唱し、レニングラードに若い強力な研究者集団を育て上げる。

この時期、数理研における研究は、グリーン関数の、数学における別名として佐藤が名付けたτ 関数に向かっていた。非線形波動における可解模型であるソリトン理論と、モノドロミー保存変形理論との構造的類似性から、ソリトン理論における広田の方法がτ 関数理論に他ならぬことが理解され、1980 年の終りに、佐藤は無限次元グラスマン多様体の理論を建設する。これを見てすぐに柏原正樹、伊達悦朗、神保、三輪は、表現論において注目を集め始めていたアフィンリー代数が、解の変換群としてτ 関数に作用していることを見ぬいた。

1983 年、超新星が爆発した。2 次元共形場理論の誕生である。モスクワ郊外のランダウ物理学研究所の研究員宿舎のこわれかけた黒板に初めて書かれた方程式は、またたくまに世界中に拡がっていった。ひと昔前のストリング理論で活躍したヴィラソロ代数が、臨界点における場の理論と統計物理の両方を無限次元の対称性の立場から統合する原理として甦ったのである。

物理学者たちのこの研究を、数学者として支えたのが Feigin であった。ヴィラソロ代数の表現論。日本で、数学者の立場から共形場理論に正面切って取り組み、そしてアフィン代数の表現論としてそれを完成させたのが土屋、蟹江である。彼らの努力によって物理の情熱が、数学の理性に結露した。

非臨界的な場合も含めての可解格子模型の研究の進展は、ひそかではあったが、確実に発火点に近付いていた。Baxter は 1980 年頃、いくつかの模型で磁化率がある変数 q の関数として書いた時、組合せ論で知られていた Rogers–Ramanujan の等式と一致していることを発見した。Faddeev が数理研にひと月滞在したのは、1982 年の春である。彼は、モスクワでもそうしたように、発火装置をそれとなく仕掛けて帰っていった。

1985 年、火うち石が撃ち合わされた。モスクワではDrinfeld が、京都では神保が、Faddeev の仕掛けに火をつけた。量子群の発見である。自然現象を数学的に理解するための概念のひとつとしての対称性が、古典的なリー代数を越えて、パラメタ q を含む形に拡張されたのである。

量子群は表現論に新たな材料を与え、表現論は格子模型に新たな手段を与える。

伊達、神保、三輪は, Baxter の仕事を追跡していくうちに、$q=0$ で起こる組合せ論との奇妙なつながりに気がついた。しばらくして、柏原はこの現象を表現論的に解明し、結晶基底という名を与えた。同じ頃、Lusztig は、全く別のルートから、同じような基底にたどり着いていた。これとは別に Lusztig は、モジュラー表現の指標公式に関するある予想の証明に、q が 1 の巾根の量子群の表現論を用いるという雄大な構想を提出する。

共形場理論と格子模型は、研究者の数において圧倒的な違いがあったが、その中身は奇妙な平行性を見せていた。土屋、蟹江は相関関数を表現論でとらえた。Smirnov は、非臨界的な場の理論の形状因子を記述する方程式を、孤独な苦闘の末に解いた。潮は満ちていた。格子模型で、何ができるのか。

1991 年夏、数理研では「無限解析」をテーマに、3 カ月の長期国際研究集会が行なわれた。そこに、共形場理論の基礎方程式である KZ 方程式が Frenkel と Reshetikhin により q 変形されたというニュースが伝わった。それは、土屋、蟹江 と Smirnov をアフィン量子代数の表現論によって見事に統一して見せたものだった。暑いそして熱い夏であった。そして夏が過ぎる頃、q 変形された対称性を用いて格子模型を解く方法が、我々の前に姿を現していた。—Bethe の方法による複雑な固有ベクトルや、Baxter による魔法のような計算が、ひとつひとつ表現論の言葉に置き換えられて。

（みわ　てつじ、京都大学数理解析研究所）