# 微積分の新しいアプローチ

志賀浩二

## はじめに

私はいま数学の入門的な本を執筆しています。ここで私は改めて微分積分を、形式的な既成の枠組みから脱却させて、もっと知的な好奇心をよび起こすようにするには、どのように導入したらよいかという問題に立ち向かわざるを得なくなりました。私は、広く行き渡っている大学初年次の微積の教科書にかなり前からあきたりない想いを抱いていました。教える方も、教えられる方もこれで本当に学ぶ楽しさを感じられるのだろうか。一度そう思って覚めた眼で見ると、微積の教科書に盛られていることは、あまりにも形式的で、緑の少ない乾燥した砂地のように見えてくるのです。

しかし、そうはいってもなにか動機がなくては、この堅牢な微積の体系をどのように書き直してよいのかわかりません。かなり長い間あれこれ考えた末、私は関数を見る視点を、数式からグラフへと移すことを思い立ちました。いま若い人たちはパソコンを使いなれていますし、そこにはいろいろな曲線が現れます。その動きを捉えるところに微積分の働きがある、ということを関知させるような道があってもよいはずです。グラフの方に重点を移すと、自動車の運行グラフのようなものが、まず最初に眼に入ってきます。高速道路を走るたくさんの自動車のさまざまな運行が、グラフを通して関数となって登場してきます。確かにこれらの関数の方が、日常的な経験をよりどころとしながら最初に数学を学ぶ人たちから見ると、３次関数や三角関数、指数関数より、今でははるかに身近なものとなっているに違いありません。

このとき、私はふと妙なことに気がつきました。それは自動車を実際運転しているとき、運転している実感というのは、アクセルやブレーキの操作にあるのではないかということです。そう思って自動車の運行グラフを見直すと、私たちがこのグラフを見て最初に眼に入るのはグラフの凹凸であり、グラフの傾きに眼がいくにはもう少し注意深い観察がいるということでした。アクセル、ブレーキの作動はグラフの凹凸に関係し、それは $f''(x)$ の変化によって表わされます。このことは微積の対象をグラフで表わされる関数 — 数学的にいえば $C^\infty$ 関数 — へと移すと、$f'(x)$ と同時に $f''(x)$ も同じウェイトで見なくてはいけないことを意味しています。（それはモース理論などを見ても首肯されることです。）

そのような視点に立つと、実際いままでのものとは少し違った流れで、微分積分を語ることができます。それに対するひとまずの考えがまとまったので、その一端を５月に開

かれた大阪私学中学高校数学教育研究会の例会において話してみました。たまたまその席に、京都大学の上野健爾さんがおられて、私の話に興味をもたれ、今回「数学通信」に載せるようにとのご依頼があったのです。

詳しい内容は、最初に述べた私の著書（『数学まなびはじめ』1997年刊行予定）の中に明らかにするつもりで、それに対する率直なご意見やご批判を頂きたいと思いますが、ここでは私の所属する桐蔭学園において、4月から隔週5回にわたって「広がりゆく微分・積分」と題して行われた、社会人、高校生向けの数学セミナーの内容を報告する形式で述べてみることにします。

## 1. 講義のスタート地点

まず次の3つの問題を考えることから始めた。

問1　自動車A, 自動車Bが、同じ道を同じ方向に走っている。Aはアクセルを踏み続けている。Bは80km/時で定速運転をしている。時間 $x_0$ のときには、AはBの前を走っていた。それからしばらくして時間 $x_1$ のときには、AとBは一瞬並んで走った。このときAの速度計の針は85km/時を指し示していた。このときこれより少し前の時間 $x_2$ のとき（すなわち $x_0 < x_2 < x_1$ をみたすある $x_2$ で）、Aの自動車はBの自動車に追い越されていることを、グラフを用いて示しなさい。

問2　(1)　1台の自動車が、時間 $a$ のときA地点から出発して、しばらくして時間 $b$ になって再びA地点に戻ってきたという。このとき $a$ と $b$ の間のある時間 $x_0$で、運行グラフの接線の傾きが0になる、すなわち

$$f'(x_0) = 0$$

となる $x_0$ があることを示しなさい。

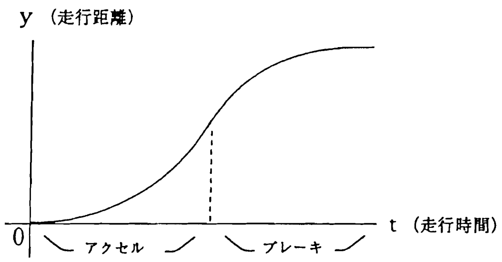
(2)　実際、自動車を運転してみれば、道幅さえ十分あれば、速さを0にすることなく、ターンしてもとに戻ることができる。この事実は上のことと矛盾しないか。

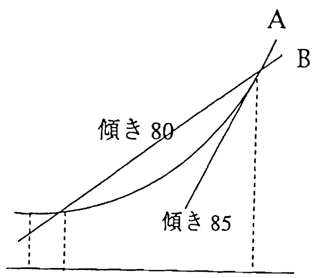
問3　ある自動車Aが、同じ方向に80km/時で定速運転をしている自動車Bと、時間 $a$ と $b$ ですれ違ったとする。このとき $a$ と $b$ の間のある時間 $x_0$では、自動車Aの速度計の針は80km/時を指していたことを示しなさい。

問1は一読しただけでは何をいっているのかわかりにくいだろう。問1を解くためには、各瞬間、各瞬間における速度計の目盛りや、アクセル、ブレーキを踏むという操作が、グラフの上でどのように測られ、表わされているかを知る必要がある。

★ ここで微分の説明をし、定速運転のときは、グラフは直線となることを注意する。そのことからアクセルを踏み続けているときは、運行グラフはつねに接線より上にあり、したがって（下に）凸となっており、ブレーキを踏み続けるときはグラフは凹になっていることを示す。特に‘変曲点’は、アクセルからブレーキへ、ブレーキからアクセルへと踏みかえたところを表わしている。

問 1 は次のグラフを見れば一目瞭然である。問 2 はロルの定理、問 3 は平均値の定理の前哨戦となっている。




★ 微分の最初に問 1 のような問題を設定しておくことは、微分という考えが local なものに止まるだけでなく、global なものに対しても適用される自由性をもつことを暗示することになるだろう。問 2 (2) は、ロルの定理に注意を向けさせるのに役だつ。

このあと、微分の演算規則、

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (\alpha f)' = \alpha f', \quad (fg)' = f'g + fg'$$

の証明を与えたが、ここでも $(f+g)' = f' + g'$ は、二つの直線の式の和では傾きは和となること、あるいは列車の中を歩く人の速さなどのたとえをひとこと述べるだけでも、形式さから少し脱することができるだろう。私自身は、微分の積の公式から $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を導いた際、微分の階段と称して

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
x^n & & \vdots \\
 & \searrow & \\
x^{n-1} & & nx^{n-1} \\
 & \searrow & \\
\vdots & & (n-1)x^{n-2} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

のような図を、黒板上に縦に長く書いて、$1/x$ におりてくる関数だけが左側に欠けていることに注意を喚起しておいた。

## 2. 平均値の定理からテイラーの定理へ

講義のスタート地点としておいた問２、問３を一般的な立場で見るという形で、ロルの定理と平均値の定理の証明をふつうのように行なった。ここでも問２、問３と見かけ上まったく別の状況が、グラフを通して一つの視点にまとめられていくという注意が重要のように思う。

グラフの凸凹と接線の関係を知るためには、平均値の定理

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h), \quad 0<\theta<1 \tag{1}$$

をもう一歩進める必要がある。実際、２次式の場合から公式を推測させ、アクセル、ブレーキの例からこのような方向の必要性を十分理解してもらった上で

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2!}h^2f''(a+\theta h), \quad 0<\theta<1 \tag{2}$$

を厳密に証明する。もちろんこの公式が示されればアクセルを踏んでいる間は（$f''(x)>0$ のところでは）

$$f(a+h)>f(a)+hf'(a),$$

すなわち、グラフは接線の上を走ることがわかる。

講義では、(1) と (2) の違いを次のように説明した。(1) も (2) もロルの定理の考えを適用したものだが、(1) はいわばスタート・ラインについたところで、まだスタートを切ったわけではない。(2) はスタート・ラインから一歩踏み出した式となっている。すなわち (1) の証明はグラフから直接読みとれるが、(2) の証明には数式を処理するアイディアがいる。しかし、一度このアイディアを得れば、まったく同じ考えで、３階、４階の高階導関数へ向けて一歩、一歩進んでいくことができることを示している。そしてそれは、一般のテイラー展開

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n, 0<\theta<1$$

の証明へと直結するのである。

## 3. 指数関数の導入

微分しても変わらない関数はどんな関数であろうか。まず次の問題をおいてみる。

$$f'(x)=f(x), \quad f(0)=0 \tag{3}$$

このとき $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ となることに注意すると、テイラーの定理から

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \\ &= \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad (0<\theta<1) \end{aligned}$$

となる。

いま $x$ を一つとめておくと $0<|\theta x|<|x|$ となり、したがって $[-x,x]$ での $|f(x)|$ の最大値を $M$ とすると

$$\left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| \leq M\frac{|x|^n}{n!} \tag{4}$$

となる。たとえば $x=100$ としてみると、$n>200$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{100^n}{n!} &= \frac{100}{1}\cdot\frac{100}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{200}\cdot\frac{100}{201}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{n!} \\ &< \frac{100}{1}\cdot\frac{100}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{200}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-200} \end{aligned}$$

となる。したがって $n\to\infty$ のとき $100^n/n!\to 0$ である。同じような考えで、$x$ を一つとめたとき、(4) から、$n\to\infty$ とすると

$$\left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

となる。

したがって (4) の式で $n\to\infty$ とすると、(3) をみたす関数 $f(x)$ は、定数関数 0 しかなかったことがわかる。

結論を見れば、(3) のような関数を求めようとする問題設定はあまり意味がなかったようにみえるかもしれないが、それはそうともいえないのである。(3) のかわりに

$$f'(x)=f(x), \quad f(0)=C \quad (C\text{は定数}) \tag{5}$$

という関数を求めよ、と問題をおくと、こんどは

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=\cdots=C$$

となり、上の議論をそのまま使うと

$$\begin{aligned} f(x) &= C+\frac{C}{1!}x+\frac{C}{2!}x^2+\cdots+\frac{C}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \\ &\longrightarrow C(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots) \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

となることがわかる。

私たちはここで

$$\mathrm{e}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \tag{6}$$

とおくことにする。そうすると私たちは次の定理を示したことになる。

**定理 1** (5) をみたす関数 $f(x)$ はただ一つで、それは

$$f(x) = C\mathrm{e}(x)$$

と表わされる。

★ 実際は、$\mathrm{e}(x)$ という関数が well-defined で、これが微分可能のことを示さなくてはならないが、これはこの段階では注意として述べておけば十分のように思う。

(6) の関数 $\mathrm{e}(x)$ は、$\mathrm{e}'(x) = \mathrm{e}(x)$, $\mathrm{e}(0) = 1$ をみたすただ一つの関数を表わしているが、この関数は一つのきわだった性質をもっている。すなわち

**定理 2**

$$\mathrm{e}(x+y) = \mathrm{e}(x)\mathrm{e}(y)$$

が成り立つ。

証明 $y$ を一つとめてそれを $y_0$ とし

$$f(x) = \mathrm{e}(x + y_0)$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}(x + y_0) = f(x) \\ f'(0) &= \mathrm{e}(0 + y_0) = \mathrm{e}(y_0) \end{aligned}$$

したがって前の定理を見ると、$f(x) = \mathrm{e}(y_0)\mathrm{e}(x)$ となることがわかる。すなわち $\mathrm{e}(x+y_0) = \mathrm{e}(x)\mathrm{e}(y_0)$ が成り立つ。$y_0$ は何でもよかったのだから、$y_0$ を改めて $y$ とおくと、これから定理が成り立つことがわかる。

[一般の巾]　$0 < a(\neq)1$ を一つとる。このとき自然数 $n$ に対して巾 $a^n$ は

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n}$$

と定義するが、このとき指数法則

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

が成り立つ。これを巾に対する‘交通規則’のように考える。たとえていえば、自然数 $n$ に対して $a^n$ を定義したのは‘巾道路’に乗用車を通したようなものと考える。次に $a^0, a^{-n}(n=1,2,3,\ldots)$ を定義したい。これは‘巾道路’にトラックも通すようなものである。このときも指数法則— 交通規則—を遵守するようにすると、$a^0=1,\ a^{-n}=1/a^n$ となることがわかる。正負の有理数 $n/m$ に対しても、同じように指数法則を遵守するように要請することにより、$a^{\frac{n}{m}}$ の値が決まる。

そして最後に、連続性を用いて、すべての実数 $x$ に対し $a^x$ が決まる。

すなわち $\varphi(x)=a^x$ とおくと巾 $\varphi(x)$ は

$$\varphi(1)=a, \quad \varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y), \quad \varphi \text{ は連続}$$

という３つの性質で完全に決まる。

このことから上の定理を参照すると、$\mathrm{e}(x)$ は連続な関数なので、この巾に対する３つの性質をみたしていることがわかる。したがって

$$\mathrm{e}(x)=e^x$$

と表わされることがわかる。ここで

$$e=\mathrm{e}(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=2.71828\ldots$$

である。

**定義 1** $y=e^x$ を指数関数という。

★ 講義では、このあと $y=e^x$ のグラフをかき、それを直線 $y=x$ に対して対称に移すことにより、グラフを通して $y=\log x$ を導入し、$\log x$ の基本性質を導いた。そして $\log x$ が微分することにより $1/x$ と結びつくことを強調した。

## 4. 円関数（三角関数）の導入

ラジァンの説明からはじめ、ふつうのように、単位円周上の点を $P(\cos x, \sin x)$ と表わす。$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ は明らかであり、したがって $\sin x$ の微分ができれば、この関係から $\cos x$ の微分がわかる。

$(\sin x)'=\cos x$ は加法定理を使わないで次のように説明した。

図で

$$RS = \sin(x + \Delta x) - \sin x, \quad \angle OQS \doteqdot \text{直角}$$

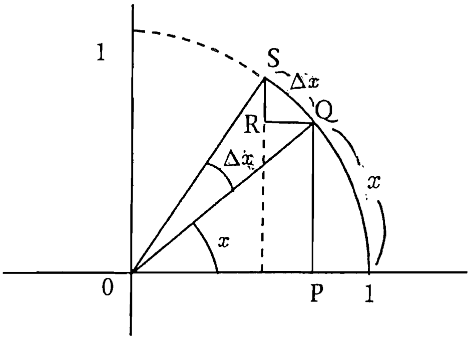
したがって

$$\angle QSR \doteqdot x$$

となり

$$\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \doteqdot \frac{RS}{QS} = \cos x$$

これから $\Delta x \to 0$ として、$(\sin x)' = \cos x$ となる。$(\sin x)'' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$ である。




この性質が基本的には円関数の特性となっている。すなわち、まず次の定理を証明する。

**定理 3** (1) $f''(x) = -f(x)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ をみたす関数 $f(x)$ はただ一つであり、それは $\sin x$ に限る。実際 $f(x)$ は必ず

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

と表わされる。

(2) $g''(x) = -g(x)$, $g(0) = 1$, $g(1) = 0$ をみたす関数 $g(x)$ はただ一つであり、それは $\cos x$ に限る。実際 $g(x)$ は必ず

$$g(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

と表わされる。

この証明は (5) をみたす関数は $Ce^x$ に限るということを示したのと同様に、テイラーの定理を用いて示すことができる。

さらに次の定理を示す。

**定理 4** $\varphi''(x) = -\varphi(x)$ をみたす関数は

$$\varphi(x) = A\cos x + B\sin x$$

と表わすことができる。ここで $A = \varphi(0)$, $B = \varphi'(0)$ である。

この定理を示すには $\Phi(x)=\varphi(x)-\{A\cos x+B\sin x\}$ とおくと、$\Phi''(x)=-\Phi(x)$, $\Phi(0)=0$, $\Phi'(0)=0$ となることに注意するとよい。実際、このことからテイラーの定理を使うと $\Phi(x)=0$ が導ける。

この定理を特に、$y$ をとめて

$$\varphi(x)=\sin(x+y)$$

に適用してみると、$\varphi''(x)=-\varphi(x)$, $\varphi(0)=\sin y$, $\varphi'(0)=\cos y$ により、加法定理

$$\sin(x+y)=\cos x\sin y+\sin x\cos y$$

が成り立つことがわかる。同様にして cos の加法定理も得られる。

★ 講義では、これに引き続いて、$y=\sin x$, $y=\cos x$ のグラフを、直線 $y=x$ に関して対称に移すことにより、逆三角関数 $y=\sin^{-1}x, y=\cos^{-1}x$ について述べた。ここでも $y=\log x$ のときと同様に、逆関数へ移ることにより、微分を通して超越関数から無理関数へと ‘落ちてくる’ 道があることを注意した。またもちろん $y=\tan x$ や $y=\tan^{-1}x$ についても述べた。

もし、微分についての初等的知識を仮定できるならば、ここで $\sin^{-1}x$ の積分表示から、$\sin^{-1}x$ の巾級数展開を求めることなども話題として盛り込むことは、興味を惹くかもしれない。(『無限のなかの数学』(岩波新書) 参照)

## 5. 指数関数と三角関数

$f'(x)=f(x)$ をみたす関数は $f(x)=Ce^x$ と表わされ、これから指数法則が導かれた。一方 $f''(x)=-f(x)$ をみたす関数は $f(x)=A\cos x+B\sin x$ と表わされ、これから円関数 – 三角関数 – の加法定理が導かれた。指数法則と加法定理という数学にとって重要な二つの公式が、このように導かれてくるようすをじっと見ていると、深い海の底では指数関数と円関数とが一緒になっていて、それが海面に現れたときには、異なる二つの関数の姿をとったのではなかろうかと思わせるものがある。

この隠された海底の謎をもう少し追ってみることにしよう。そのためまず

$$\tilde{f}''(x)=\tilde{f}(x) \tag{7}$$

をみたす関数はどのようなものがあるか考えることにしよう。一般に

$$(e^{\alpha x})''=\alpha^2e^{\alpha x} \tag{8}$$

だから、$e^{\alpha x}$ という形をした関数の中から、(7) をみたすものを探そうとすると、(8) で $\alpha^2 = 1$ すなわち $\alpha = \pm 1$ となり

$$e^x \text{ と } e^{-x}$$

しかないことになる。

そこで一般に (7) をみたす関数 $\tilde{f}(x)$ をとり

$$\Phi(x) = \tilde{f}(x) - (Ae^x + Be^{-x}),$$
$$A = \frac{\tilde{f}(0) + \tilde{f}'(0)}{2}, \quad B = \frac{\tilde{f}(0) - \tilde{f}'(0)}{2}$$

とおくと、

$$\Phi''(x) = \Phi(x), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 0$$

となることがわかる。これから前のようにテイラー展開を使うと $\Phi(x) = 0$ となり、したがって結局 (7) をみたす関数は

$$\tilde{f}(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

と表わされることがわかった。

一方、$f''(x) = -f(x)$ をみたす関数は

$$f(x) = A\cos x + B\sin x$$

である。

なぜ、$f''(x)$ が $f(x)$ に等しいか、$-f(x)$ に等しいかにしたがってこのような劇的な変化が関数に対して引き起こされるのだろうか。(8) を見るとわかるように、指数関数を使う限り、円関数 $f''(x) = -f(x)$ の方へ渡れない絶対的理由というべきものは

$$\alpha^2 \geq 0$$

という実数の符号の制約があったからである。2 次方程式でも学んだように、数学はこの‘実数の壁’を打ち破るために虚数

$$i = \sqrt{-1}$$

を導入してきた。$i^2 = -1$ となる！

したがって、大胆な発想だが

$$e^{ix}$$

という関数を導入したらどうなるだろうか。このときも今までと同じ微分の規則が成り立つとするならば、

$$(e^{ix})'' = i^2 e^{ix} = -e^{ix}$$

となる。すなわち $e^{ix}$ は円関数の世界の方へと入ってきて、したがって

$$e^{ix} = A\cos x + B\sin x$$

と表わされるに違いない。

このとき $A$ と $B$ は一般論にしたがえば、$e^{ix}$ の $x$ に 0 を代入したものが $A$ であり、$e^{ix}$ を微分して $x$ を 0 とおいたものが $B$ である。このことから

$$A = 1, \quad B = i$$

となることが予想される。

実際、このようにして私たちが発見的に見出した公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

は正しい公式であって、これは1730年代、オイラーにより発見されたものである。最初に'海の底へ'とたとえをいったのは、実数の世界から虚数の世界へと入っていくことを意味していたのである。実際、オイラーがこの公式を発見した1730年代は、虚数の世界はなお闇に包まれ、光の十分届かない深海のような感を呈していた。

このオイラーの公式を使うと、実数の世界ではまったく離ればなれであった指数法則と加法定理が結びつき、一つの数学的実相の二つの表現であったという事が判明してくる。

それは指数法則、

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$$

をオイラーの公式を通して cos, sin を用いて書き直してみると、実数部分から

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

虚数部分から

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

が得られることからわかる。

★ 講義ではこのあと複素数の話をし、巾級数を用いて改めて $e^{ix}$ の定義を与えておいた。それによってオイラーの公式に対し、もう一度巾級数を用いるふつうの証明を与えることにしたのである。

## むすび

これが、桐蔭において私が行なった５回の講義の概要です。講義に出席していた社会人の人たちの感想をきくと、いままでの平均値の定理からオイラーの定理へと移る、初学者にはよくわからない形式的に述べられている微分の根幹の部分は、かなり違った感じで受けとられたようです。

しかし、微積分の新しい導入と題しながら、積分については触れることができませんでした。またグラフという視点に立つといいながら、結局はテイラー展開を活用してオイラーの公式へと辿りついたということに批判があるかもしれません。私はグラフという視点に立つと、微積分の導入部分ですでに関数空間のような考えを入れざるを得ないのではないかと思っています。有理関数の不定積分のアルゴリズムなどに時間をさくよりは、20世紀が導入した新しい視点を、もっと思いきって微分積分の中に取り入れた方がよいし、そうすることによって微分積分の中に新しい風を入れることができるのではないかと思っています。ここに述べた内容に続くそのような考えの一端は、前に触れた私の本の中で明らかにしていくつもりです。

（しが　こうじ、桐蔭学園横浜大学工学部）