空間とはなにか

深　谷　賢　治

0．はじめに

このごろ，空間とはなにか，ということが，非常に気になっています．私は幾何学が専門ですが，空間とはなにか，は幾何学の最大の問題です．今日の話にもでてきますが，１００年以上も前に，リーマンという数学者が，空間という概念を大幅に変えました．それから，１００年以上たった今，いろいろな数学者がリーマンのつくった空間に対する枠組みが，もう狭すぎる，我々の時代は新しい空間概念を求めている，そういう風に感じています．

勿論，こんな大問題の，いかなる意味での答えも，ここで述べることはできません．この講演では，新しい空間概念を提出する・発見する，あるいはもっと平たくいうと，空間とはなにかに答える，とはそもそもどういうことなのかを説明したいとおもいます．（今日の話しは，数学をよく知っている人には，正統的すぎると見えるかもしれません．）

今日話したいのは，次のふたつの問題についてです．

１．空間は曲がっているか，真っ直ぐか？
２．空間は，デジタルかアナログか？

第１番目の問題は，すでに歴史に属します．つまり１９世紀の数学者リーマンと２０世紀の物理学者アインシュタインによって，答えがでている問題です．これをお話ししたいのは，さっき申し上げた，新しい空間概念を提出する・発見するとはどういうことなのか，に対する，最良の解答がそこにあるからです．

第２番目の問題は，未解決問題です．始めに述べたように，我々の時代は新しい空間概念を求めている，と感じている数学者が多くいます．新しい空間概念を考えるためには，なにを考えたらいいのか，つまり，どういう具体的な数学の問題が，空間概念の革新に通じているのか，は私には分かりません．

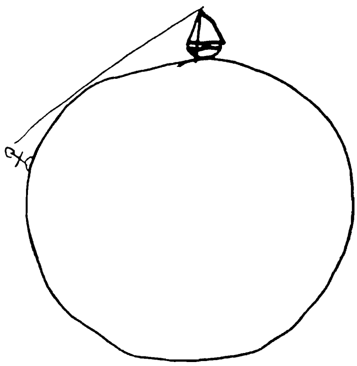
デジタルかアナログか，というのは，こういう場所で説明しやすい，一つの，必ずしも一番重要ではないかもしれない，切り口を持ってきたに過ぎません．こういう素朴な事を考えることが，現代数学の最前線の，おそらくもっとも抽象的に見える数学の部分に通じているのだ，そして，現代の数学者が難しげな，分けが分からないことをいっているのも，そういった基本的な問題を考えるためにのたうちまわる，ひとつのあらわれなのだ，そういうことを少しでも感じていただきたいのです．

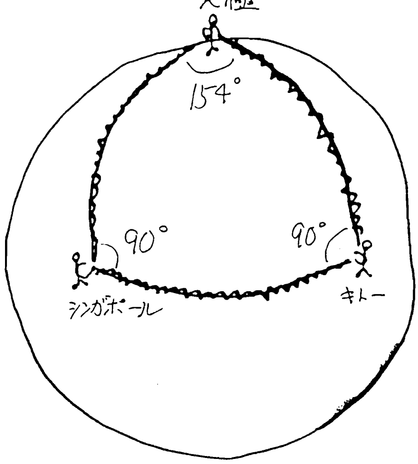
１．大地は平らか曲がっているか

空間は曲がっているか，が問題になったのは１９世紀ですが，それよりもっと古い，ルネッサンスの頃の問題を思い出しましょう．つまり，大地・地球は曲がって

いるか，です．

この答えは，もうご存じだと思います．地球は丸いんですから，大地は平らではない，曲がっているんです．しかし，これをどうやって証明するか，覚えていますか．





絵１：船がマストの先端から見えてくる．絵２：地球上の３角形の内角の和

もし大地が平らだったら，遠くから来た船のマストのてっぺんと甲板のどちらが先に見えるか分からないけれど，地球は丸いから，遠くから船が来ると必ず，まずマストのてっぺんが見える，というのが第１の証明です．

地球が丸いことを証明する，もう一つの方法があります．（月にいって眺めるというのもありますが，それはここではなしにします．何しろ，まだルネッサンスなんですから．）

大地の上に遠く離れた3箇所にそれぞれ，とっても長くてそして堅いロープを持った，人を派遣します．３人はそれぞれ遠くに行ってしまいますから，お互いにはよく見えません．

さて，３人が決められた地点に着くと，３人は持っていったロープをぴーんと張ります．そして，それぞれの地点でふたつのロープの間の角度を測ります．さて，３人の測った角度を足しあわせるといくつになるでしょうか？もし，大地が平らなら，この３人のはかった角度は３角形の内角の和ですから，１８０度の筈です．

しかし，曲がっていると違うのです．例えば，一人が北極に，もう一人が，シンガポールに２人目がキトー（エクアドル）にいるとすると（シンガポール，とキトーというのは，赤道直下の町です），シンガポールの経度がだいたい104度，キトーの経度が78度30分ですから，３人のはかった角度の和は

$$90+90+(180+78.5-104)=334.5$$

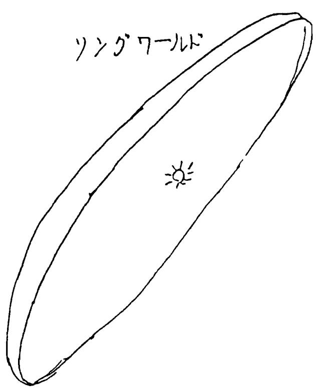
度になります．

ただしこれは（数学者の話に相応しく）全く現実みのない話です．これを実現するよりは，月から地球を眺めるほうがずーっと易しいんです．なぜかというと，こうやって３人のはかった角度が１８０度からわかるようにずれるには，３人の間の

距離が大きくないといけません．そして，角度を測れるにはロープが長くて，そして（これが大事ですが）完全にぴーんとはれるように，堅くないといけません．ちょっと計算すると，３人のはかった角度が１８０.０１度になるには，３人の間の距離が3つとも等しいとして，それぞれ大体３００キロメートルはないといけません．そんな長さの，堅いロープを作るのは（今でも）とうてい不可能です．

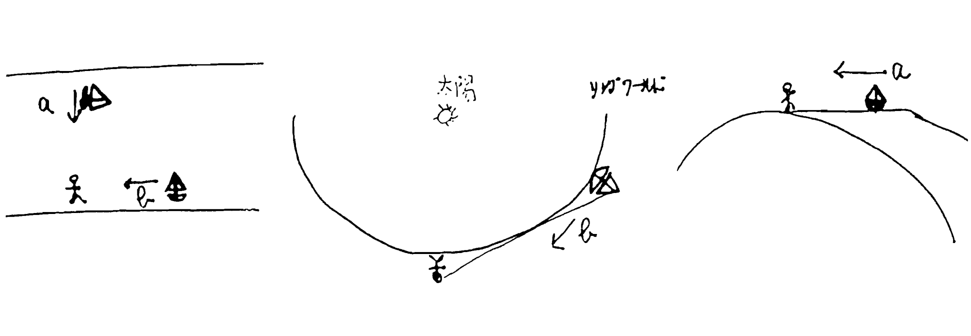
ところで，話は変わりますが，今説明した2つの方法には重大な違いがあります．それを説明してみましょう．

ラリー・ニーブンという作家の書いたリングワールドというSFがあります．リングワールドというのは，架空の世界で，大体，このようなものです．



絵３：リングワールド

つまり，太陽の回りを，幅の狭い円筒が回転しています．本当はニーブンのリングワールドでは，人間は円筒の内側にすんでいます（そうしないと太陽の光が当たらないので）．ここでは都合上人間は外側の方にすんでいることにさせて下さい．さて，あなたがリングワールドにすんでいるとします．リングワールドは広大ですから一寸見たところ大地は平らに見えます．ホントに平らでしょうか？



水平に見た図　　真上から見た図　　真横から見た図

絵４：リングワールドで船はどう見えるか

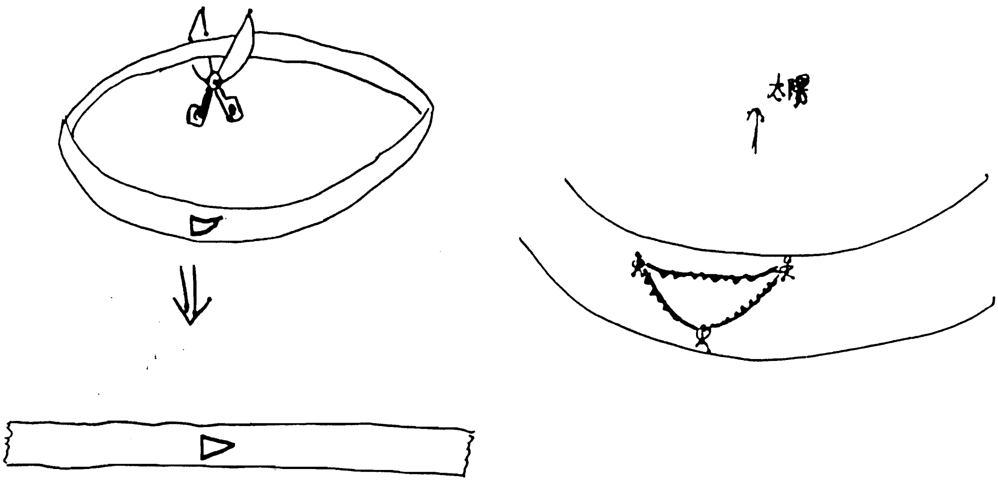
地球が平らでないことの，第１の証明をまねてみましょう．船はリングワールドで，どちらから先に見えてくるでしょうか．これは，方向によって違います．つまり，船がリングの横側の方向（図の(a)）から近づいてくると，その場合はマストと船体のどちらが先に見えるか分かりません．しかし，船がリングの回っている方向（図の(b)）から近づいてくると，船はマストの先端から先に見えてきます．

というわけで，地球の場合（丸い場合），と一寸違いますが，しかし，大地が平らでない（平らである場合と船の見え方が違う）というのは，確かです（(b)の場合．）

では２番目の方法で調べてみるとどうなるでしょうか．つまり，大地の上に遠く離れた３箇所に，とっても長くてそして堅いロープを持った，３人を派遣し，ロープをぴーんと張り，そして，それぞれの地点でふたつのロープの間の角度を測り，３人の測った角度を足しあわせるわけです．

ところが，この場合はこの角度の和はいつも１８０度になります．これは，下の絵のように，円筒を切り開けば分かります．

つまり，第２の方法では，リングワールドの上にいる人は，大地が平らでないことを，証明できないのです．



絵５：リングワールドの上の３角形の内角の和

２．空間は曲がっているか

１９世紀に話をうつしましょう．ここで一番いいたいことは次のことです．

空間が曲がっているか平坦か，それを決めるのは，哲学や数学の問題ではなくて，物理学の問題である．

そして，そのこと（哲学の問題ではなくて物理学の問題であること）を発見したのは，数学者（リーマン）である．

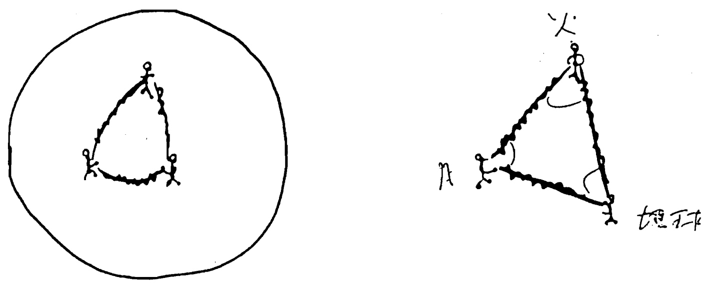
空間が曲がっている，というのはどういうことでしょうか．そして，物理学の問題だというからには，実験・観察で空間が曲がっているかどうか，確かめられなければいけません．どうやったら，確かめられるでしょうか．

宇宙船が遠くから見えるとき，（宇宙船にマストはないでしょうから）上の方と下の方のどっちが先に見えるか調べればいい，と考えた人がいたら，それは，センスの悪い類推です．大地が平かどうか考えた時は，大地が光を遮っているから，マストが先か船体が先かに意味がありましたが，空間は光を遮りませんから，宇宙船の何処の部分が先に見えるかは，空間が曲がっているかどうかとは関係がありません．

大地が平かどうか考えた時に，なし，にしたやりかた，つまり，月にいって眺める，というのも，今の場合は使えません．なぜなら，我々は空間の中にいつもいるわけで，大地が曲がっているかどうか調べるのに，地球を外から見るつまり月へいくことに当たる，空間の外に行くこと，はできないからです．

結局使えるのは３番目の方法，つまり，３角形の内角の和をはかる．という方法になります．

大地が平らかどうかを考えるときは，ロープを大地に沿ってぴんと張ったのに対して，今度は，そうでなく，ただ真っ直ぐに張ります．



絵７：地面に沿って張ったロープとただ真っ直ぐに張ったロープ

そうか，と納得していただいたでしょうか．本当は，あんまり簡単に納得しない方がいいのです．「地球に沿ったロープの方は，地球に沿うために曲がるから，内角の和は１８０度ではなくなるかもしれないけれど，ただ真っ直ぐに張ったロープの方は曲がっていなのだから，内角の和は１８０度ではないか」と思いませんか．

ギリシャ時代から１０００年以上みんなそう考えてきたのです．だから，「真っ直ぐに張ったロープの作る三角形の内角の和は１８０度である」というのを証明しようとして必死になった数学者がいっぱいいました．哲学者のカントはそれは，経験を抽象して得られるのではない直感，先験的直感である，といったりしました．

そうではなくて，内角の和が１８０度かどうかは，計ってみなければ分からない．これが，数学や哲学でなく，物理学の問題だ，という意味です．

もう一度申し上げます．

３角形の内角の和が１８０度であるかどうか，というのは，数学で証明することができることではない．数学的には１８０度であることも，そうでないことも可能である．１８０度であるかどうかは，実際に計ってみなければ分からない．

これが，大発見であったのです．

３角形の内角の和が本当に１８０度か，最初に本気で疑ったのは多分，リーマンより一世代前の大数学者ガウスで，実際にガウスは３角形の内角の和を測量で確かめようとしたそうです．

ところで，では数学者の仕事は，それは物理学の問題だ，と一言いっておわりか，というと，全然そうではないのです．

こういう場所で話をすると，大概「空間が曲がっているか平坦か，それを決めるのは，哲学や数学の問題ではなくて，物理学の問題だ」，などということまでは説明できるのですが，しかし，これを一言いっただけでは，中身がないのです．本当は，それでは，曲がった空間とはなにか，曲がった空間の幾何学とはなにか，それを具体的な数学として実行して，初めて，先の言葉が，単なる思いつきを越えて学問として定着する中身のあるものになるのです．しかし，それは，大概こういう場所では説明できません．それは，やはり，一歩一歩積み上げていく，勉強していくことを通してしか，学べない理解できないのだと思います．

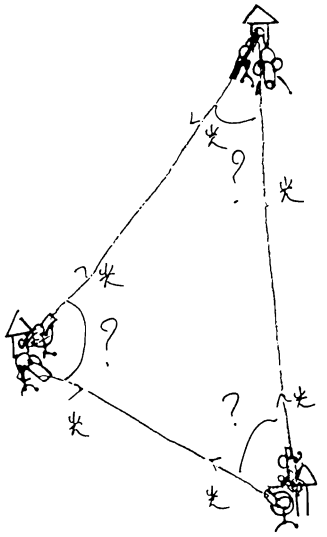
これは，一寸余談ですが，ですから，こういう講演会や，啓蒙的な書物で，数学を学ぶとき得られる知識ではどうしても，単なる思いつきと中身のある学問の研究の差が分かりづらい，ということを申し上げておきたいと思います．直ぐ後でお話ししますが，空間はアナログかデジタルか，という問題を考えるとき，普通はアナログに見える空間が，デジタルかもしれないと，などということは，今でも私などにでも簡単にできます．しかし，デジタルであったとしたら，デジタル空間の幾何学とはになのか，これに答えるのが難しいのです．そして，これに答えずに，ただ，空間がデジタルかもしれない，といってみても，まあしょうがないのです．

話を元に戻しましょう．「真っ直ぐに張ったロープでできた３角形」の内角の和が１８０度か，ということを知りたかったわけです．すると，前に注意したこと，つまり，必要なだけ長くて堅いロープがない，というのが，重大な障害になります．

この困難に対するアインシュタインの考えた答えは，ロープのかわりに光を使え，ということだったわけです．つまり，光がいつも真っ直ぐ進むとしたら，３点に光源をおいて，各々の点で他の２点のなす角をはかれば，３角形の内角の和が分かるわけです．

一般相対性理論の説明で，光が重力で曲がる，という言い方が良くされますが，これは，重力で空間が曲がる，といっても同じことです．

（一般）相対性理論を説明するのは，私の任ではないので，この話はここでおわり，２番目の話題に移ることにしましょう．



絵８：光を使って３角形の内角の和をはかる

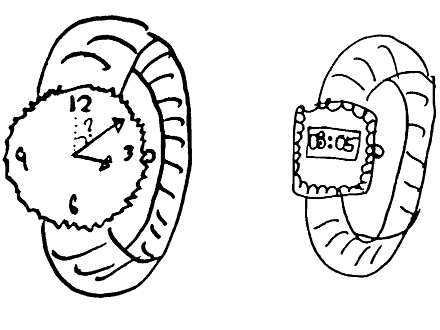
３．空間はアナログかデジタルか

アナログとかデジタルとかいう言葉は，最近例えばコンピューターなどとの関わりで，よく聞くことが多いと思います．しかし，空間はアナログかデジタルかといわれると，何のことか意味がはっきりしないと感じる方が多いと思います．

リーマンが曲がった空間という考えを明確にして，そして，空間という概念そのものを大幅に拡張した，ともうしました．そのリーマンが空間につけた一番大きな制限が，おそらく，それは連続体であるということでしょう．連続体であるというのは平たく言うとアナログであるという意味になります．

注：講演会のあとで砂田利一氏に注意されたのですが，リーマンの有名な講演記録「幾何学の基礎を成す仮定について」には，空間がデジタルである場合についての言及もあるそうです．

もうすこし具体的に言いましょう．アナログ量の代表は実数です．それに対してデジタル量の代表は整数です．

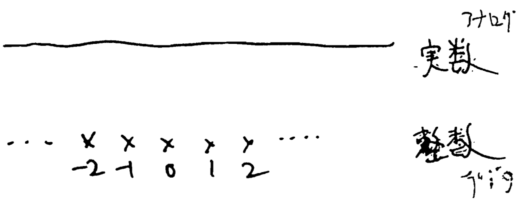


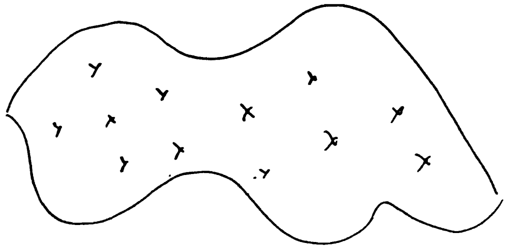
絵９：アナログ時計とデジタル時計

たとえば，アナログ時計では，今何分かは長針が１２時の方向となす角度で表されます．角度ですから，これは，２３度とか４５度とかぴったりとした数になるかは分からず，２３．１３４５６７８３５６・・・・というように，実数になります．それに対して，デジタル時計では何分かは文字盤に３５分というように数字，整数ででてきます．

整数と実数を絵で描くと，一方は，隙間が無くつまった直線で，もう一方はぽつぽつと点があるだけの，点の集まり，になります．

絵１０は，一次元の絵ですが，２次元だと，絵１１のようになります．





絵１０：実数と整数　　絵１１：２次元の連続体と格子

のようになります．さて，我々が住んでいる空間はアナログでしょうかデジタルでしょうか．

勿論，一番普通の直感では，アナログに見えますね．空間を動く物体，例えば，自動車を考えると，それは，滑らかに動いています．つまり，動きがとびとびになったりはしません．空間そのものがデジタルだったら，そこを動くものはみんな，滑らかに連続的には動けず，パッパッととびとびに動くはずです．

しかし，だからアナログだと言うのは，まだ早すぎると思います．前に考えた，空間は曲がっているかいないか，という問題を考えてみて下さい．一番普通の直感あるいは余り精度が良くない装置で見る限り，空間は平らで曲がっている気配はありません．しかし，やはり空間は曲がっているというのが結論だったのです．

もし，空間がアナログでも，その点と点の間が大変細かければ，ほとんどデジタルと同じに見えるでしょう．例えば，テレビを考えてみましょう．テレビでは，画像は連続的に変わりません．つまり，１秒間に３０回だったと思いますが，制止した絵がつぎつぎと変わってそれで，絵が連続的に動くように錯覚させているのです．ここでの言い方にあわせると，テレビでは時間はデジタルです．（ついでに言うと，空間の方も，つまり画像そのものも，デジタル的です．なぜなら，テレビの画面は，確か５００かける４００ぐらいだったと思いますが，の点の集まりですから．）

ですから，空間は，荒く考えるとアナログ的だけれど，実は，間隔の大変細かい点の集まりかも知れません．

すなわち問題はこうです．

リーマンが曲がった空間の上の幾何学とはなにかに答えたように，
デジタル的な空間での幾何学があるだろうか．

答えは知られていません．つまり，デジタル空間の豊かな幾何学を建設した人はまだいません．かなりの確率で，こういう問題のたてかた自身がまちがっている可能性もあります．

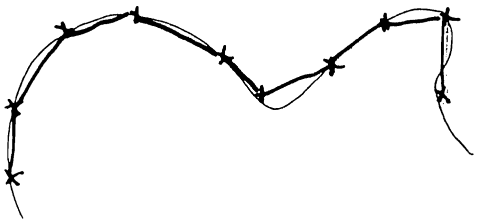
でもこういう話しをしていても，なかなかぴんと来ないと思います．何しろリーマンが曲がった幾何学を建設した，といっても，ただそう言っただけで中身には全く触れていないのですから．

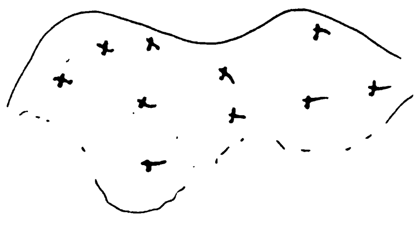
ですから，これから少し，空間をデジタル的に捉えるというのを，試みてみましょう．なにが難しいのかが，少しは見えてくるように．

4．折れ線・折れ面

まず，１次元の幾何学のデジタル化を考えましょう．というと高級そうに見えますが，ただ，曲線を考えるかわりに，その上の有限個の点を考えようというだけです．点だけでは心許ないので，それを結んで折れ線にしておきましょう．

折れ線は暫くおいておいて，次に２次元を考えましょう．つまり，曲面のかわりに，その上の点をポツポツと点をとってみましょう．

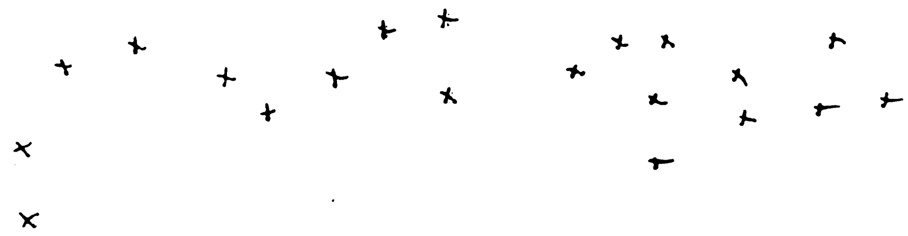




絵１２：折れ線　　　　　絵１３：折れ面

ところで，１次元の場合には，取った点を順番に，この一語は大事なので繰り返します，順番に結んで，折れ線を作ることができました．曲面のときはどうしたらいいでしょう．これは，見た目より深い問題です．

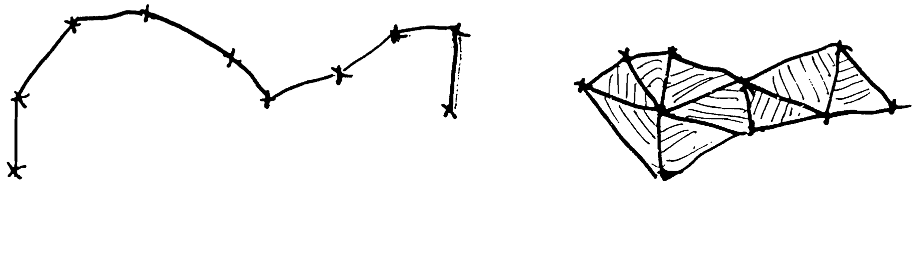
なぜそのまま，結ばずに，ほおっておいてはいけないんでしょう．それは，次のように考えると分かります．



絵１４：１次元？２次元？

この絵は，前の２つの絵から，曲線曲面だけ取り除いて，その上にあった点だけを残したものです．さあ，これだけ見て一つは，１次元で，もう一つは２次元とどうしていえるのでしょう．点をバラバラに考えたらダメですね．そうしたらこの絵は両方とも１０個の点で，同じものです．

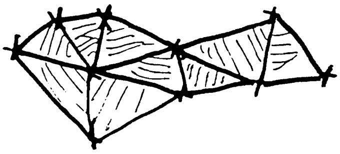
ではこうしてつなぐとどうでしょう．



絵１５：点をつなぐ

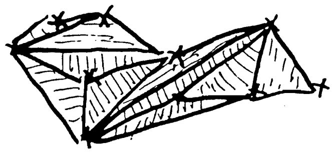
こうすると，一方は１次元にもう一方は２次元に見えるでしょう．ただ点だけ考えるのでなくつなぎ方まで考える，つまりつながり方まで考えて図形と思う，というのは，現代数学の用語を使って言えば，構造を与える，今の場合は，単体複体の構造を与える，といいます．

さて，もう一度，１次元の場合と２次元の場合の絵を見て下さい．この２つには重大な違いがあります．前に強調したのですが，曲線上の点を折れ線でつなぐときは，順番に，つなぐという，良いつなぎ方がありました．しかし，曲面上の点たちをつなぐ場合はどうでしょうか．前に，曲面上の点をこんな風につなぎました．



絵１６：２次元になるように点をつなぐ

しかし，同じ点をつないで「２次元」にするにはこんなつなぎ方もできるでしょう．

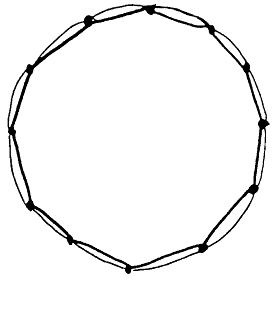


絵１７：別のつなぎ方

どちらが自然なつなぎ方か，はっきりしません．これは，決して易しい問題ではありません．この問題が，２次元の「デジタル幾何学」を１次元より難しくしている理由です．例えば，このせいで

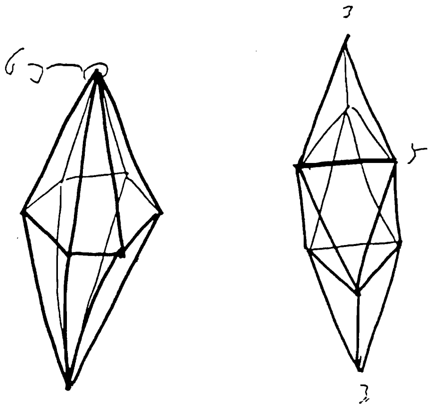
円をある与えられた数の折れ線で分けるやり方は１通りだが
球面をある与えられた数の３角形に分けるやり方は１通りでない

ということになります．これはどういうことか絵を描いて説明しましょう．



絵１８：円の折れ線分割

絵１８が円を１２本の折れ線に分割するやり方です．他のやり方はありません．



絵１９：球面の３角形への分割

絵１９は両方とも球面を１２個の３角形の和に分割するやり方です．これが違うやり方であることは絵を見れば分かります．あるいは，(a)には６個の３角形が１点に集まっているところがありますが，(b)にはそういうところはないということから分かります．

突然難しいことを言います．

定理　球面をn個の４角形に分けるやり方の数は

$$-\sum_{p=1}^{\infty}(-12n)^p\frac{(2p-1)!}{p!(p+2)!}$$

個である．

３角形の場合も計算されていますが，昨日の晩に調べた文献（D.Bessis, C.Itzykson & J. B. Zuber: A matrix integral solution to two dimensional, Advanced in Appl. Math. **1** (1980) 461 - 473）にたまたま４角形の方だけ書いてあったので，４角形の方をそのまま写してきました．

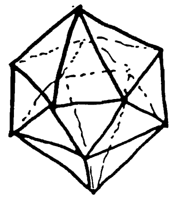
このような計算がされたのは最近のことです．申し訳ないことにいつ誰が計算したかは忘れてしまいました．計算したのは，残念ながら，数学者ではなくて物理学者で，２次元重力理論のためのランダム行列模型なるものをを使って計算します．３（４）角形に分けるわけ方の個数を数える問題は，２次元では今述べたように解けていますが，３次元以上では解けていません．解ければ，重力場の量子化に大きな応用があるはずです．

６．空間の曲がりぐあいをデジタルで表現する．

いままで，２次元のデジタル幾何学は１次元より難しいという話しをしました．しかし，３次元になるともっと難しくなります．そういう例を話しましょう．

今日の話の前半で，空間とか大地（あるいは曲面）が曲がっているかどうか，という話しをしました．それを，デジタル化する事ができるでしょうか．

例えば，２次元の「デジタル図形」が，曲がっているとはどういうことでしょうか．下の図のように，３角形からなる多面体を考えてみましょう．さらに３角形を全て正三角形になるようにしてみましょう．

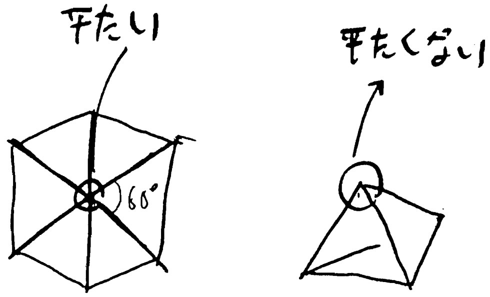


絵２０：正三角形からなる多面体

この絵を見ると，次のことが分かるのです．

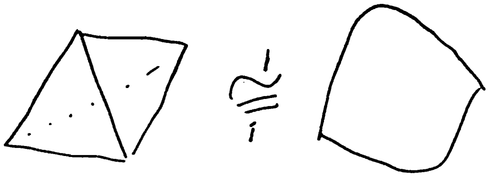
ある頂点の回りに３角形が丁度６つあると，その点の近くで，図形は平らである．

次の図を見て下さい．



絵２１：頂点の回りにくる三角形の数と曲率

図の左の場合が，頂点の回りに３角形が６つある場合で，その場合は，この頂点の近くで図形は平らです．一方，図の右の場合は頂点の回りに３角形が３つしかない場合です．少し目をぼかすと，これは，次の図に似ていることが見て取れるでしょう．



絵２２：頂点の回りにくる三角形の数と曲率（２）

つまり，この頂点の近くでは図形は曲がっていると考えていいのです．別の言説明をすると，正３角形の内角は６０度ですから，６個あれば丁度３６０度になるわけです．この考え方が正しいことの根拠として次の２つの定理を比べてみましょう．

定理　球面の３角形からなる分割があり，頂点vに対して，vを頂点とする３角形がn_vあるとする．このとき次の式が成り立つ．

$$\sum(6-n_v)=12$$

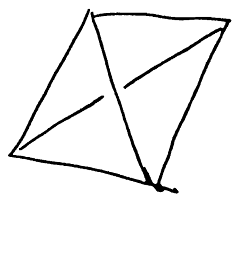
定理　（曲がった）球面のガウス曲率の積分は4πに等しい．つまり

$$\int_{S^2} K \ =4\pi$$

２番目の定理は有名なガウス・ボンネの定理です．左辺のKは曲率といって曲面の曲がり方を表す量です．

この２つの定理を見比べると，$(6-n_v)$が曲率に，12が4πに（どちらも定数），総和が積分に，置き換わっています．このことから，$(6-n_v)$がデジタル空間の曲がり方を表しているということが，納得がいくのではないでしょうか．

第１の定理を，下の図，つまり正４面体，の場合にたしかめてみましょう．それぞれの頂点に対して，それを頂点に持つ３角形は３つです．また頂点の数は4です．だから，定理の左辺は



絵２３：正４面体

$$(6\text{-}3)+(6\text{-}3)+(6\text{-}3)+(6\text{-}3)=12$$

となって，定理が成り立ちます．

さて，ここで説明したことは，ある頂点の回りでの，曲がりぐあいが，その頂点にを頂点に持つ３角形の数でわかる，ということでした．これは，２次元の場合，つまり大地が曲がっている，に対応する場合です．さて，最後に考えたいのは次の問題です．

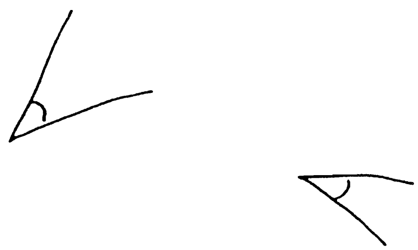
3次元の空間をデジタル化したとき，
その曲がりぐあいをどうやって理解したらよいか．

実は，これは未解決問題なのです．

これを，数学の問題として定式化する方法はいろいろありますが，一つは，組み合わせ多様体の特性類を純粋に組み合わせ的に求めよ，という問題です．（この言葉の意味を説明すると大変なので，やめます．）これは，多くの有名な数学者（例えばゲルファントやトム）がかかわった大問題なのですが，いまだに十分簡明な答えは見つかっていません．ひょっとしたらいい答えはないのかも知れません．

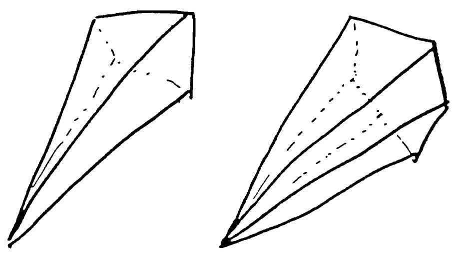
最後にこの問題の難しい理由を，一言述べて終わりにしましょう．

それは，例えば，立体角というのが，平面の直線の間の普通の角より難しいからです．まずこの絵の用に，平面上の角を考えると，角度が等しいことと，２つが動かしていってぴったり重なることとは同じことです．つまり，平面の頂点の回りの，２つの辺の関係は一つの数，つまり角度，だけで決まります．



絵２４：角度の等しい角は合同である．

しかし，空間の中の２つの角を考えてみると，その違いは多様で，平面のときのように数では表せません．これが，問題の難しさの１番の理由などだと思います



絵２５：立体角は難しい

５．結語

最後の方は段々難しくなってしまいましたが，素朴な問題のすぐ近くに，いまだに未解決な大問題が残っていて，それが，空間とはなにか，という，基本的な問題の現れなのだ，ということを，少しでも感じていたらけたら幸いです．

例えば，現代数学のもっとも抽象的な理論として有名な，グロタンディックのスキームの理論がありますが，その大きな一部は，有限集合（この場合は有限体上の方程式の零点の集合）に対して，何とか幾何学を考えよう，ということが目的です．これは，まさしく，デジタル空間が目指していることです．スキームの理論はそのようなものとしてはいままでで一番成功したものでしょう．

現代数学で一見マニアックで抽象的なもののかなりの多くが，実は，ここで述べた問題，新しい空間概念の創造にかかわっています．

それらの極めて抽象的な概念が，決して中身のない遊びで生み出されたものでないことが，少しは納得して頂けたでしょうか．

注：この点についての誤解があちこちにあるように思います．たとえば，岩波講座現代思想「精密科学の思想」チャンドラー・デイヴィス「２０世紀の数学はどこでおかしくなったか」では，「理解しがたいことを傲慢にも誇りとし」，「定義から導出されるものは何でも価値がある」という研究態度から生まれる，数学の典型例として，（フォンノイマン環の理論に現れる）「カルキン環」と（グロタンディック流の代数幾何に現れる）「スキームやトポス」を上げて非難し，同時に，「実数と多様体と微分可能関数と解を持つ微分可能関数からなるような，限定された意味での古典数学」を越える数学，すなわち，例えばここで述べたことばで言えば，アナログ空間（すなわち多様体）からデジタル空間へ，を将来の数学の進むべき道として示唆しています．デイヴィス氏はどうやら知らないようなのですが，グロタンディック流の代数幾何学と，フォンノイマン環の理論がその基礎をなす非可換幾何学は，実は，現時点でもっとも成功した，デイヴィス氏が推賞する方向へ向かう数学の成果なのです．

（ふかや けんじ・京都大学大学院理学研究科）