書　評

M. ケッヒャー　著　　長岡昇勇　訳
『数論的古典解析——歴史を訪ねて』　シュプリンガー・フェアラーク東京、
１９９６年刊、２７２ページ、　３５００円

この本は『Klassische elementare Analysis』という本の翻訳で、原著は1987年にドイツで出版されました。もともとのタイトルを見ても、その和訳である『数論的古典解析』という書名を見ても、まず頭に浮かぶのはかなり難解な内容をもった専門書のイメージかもしれません。私自身、編集部から書評の依頼があったとき、この書名に恐れをなしてどんな理由をつけてお断りしようかと考えたのですが、図書室でこの本を手に取ってみて、これなら引き受けてもよいと思った次第です。

実際、この本は大変やさしく書かれています。著者の緒言に「この本は中級までのゼメスターを消化した学生や数学教師、さらには専門外ではあるが関心を持つ人達のために書かれたものである」と書かれていますが、これはそのとおりだと思います。日本のレベルでいうなら、例えば理系の教養課程で教わる『解析学』程度の知識があれば十分読んでゆけるでしょう。教える側から言えば、この本を大学教養の教科書として使う事も十分可能だと思います。

また、本書には『歴史をたずねて』という副題がついていますが、これにふさわしく、歴史に関する言及が非常にたくさん織り込まれています。ほとんどの章に『歴史的覚え書き』という項目が設けてあって、その問題の歴史が語られていたり、歴史的な文献が挙げてあります。しかし決して『数学史』の方を向いた本ではありません。また随所に『課題』という形で演習問題がつけてあります。ただし解答は載っていません。

まず全体の構成を見てみましょう。本書は６つの章からなっています。

第１章 黄金分割
第２章 実数列と実級数
第３章 リーマン積分と対数関数
第４章 代数学的応用と数論的応用
第５章 無限級数による関数の構成
第６章 初等解析学の真珠

この中で、重要な章・特徴的な章について、その内容を大雑把に見てみます。

第１章は導入部分です。$g = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を黄金比と呼ぶことは良く知られていますが、この一つの数を糸口にして、多くの数学的題材を並べて見せたのがこの章の内容です。

まず「定木とコンパスによる作図問題」。そして　$g = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$　と見れば

「実の無限数列の極限」になり、無限連分数展開してみれば

$$g = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

という特殊な形になり、これを有限で切れば、「無理数を有理数で近似する問題」につながってゆきます。この数はフィボナッチ数列とも関連があり、さらに整数環 $\mathbf{Z}$ に g を付け加えた環 $\mathbf{Z}[g]$ を考えると非常にやさしい代数的整数環の例になっていて、素因数分解の一意性の類似を考えることもできます、等々。確かに、たった一つの数からでも随分多くの問題が見えてくるものなのです！

ここに列挙された話題は、ほとんどがこの本の後の部分で再び取り上げられています。つまりこの最初の章は、様々な問題への誘いになっていると同時に、後の章へ重要なテーマを提供する場にもなっているのです。

第２章では、「実数列の収束判定法」「収束の速さに関する議論」「収束値の性質を調べる幾つかの方法」について書かれています。この本ではどの章にも非常に数多くの実例が用意されているのですが、特に第２章は豊富で、全体が実例で埋めつくされていて所々に一般論が顔を出しているような印象を受けます。この章の一番特徴的な部分は「収束の速さに関する議論」でしょう。数列の収束の速さというのは非常に大切な考え方で、これはほとんどの計算を手計算でやらなくてはならなかったガウスの時代でも、パソコンを利用して手軽に数値実験できるようになった現代でもその重要性は変わっていません。それにもかかわらず、この事に関して詳しく書いた本はほとんど見当たらないのです。この本では、幾つかの具体例に即して「収束の速さを上げる工夫」が紹介されており、この部分だけでもとても面白い読みものになっています。

第３章で積分に関する基礎知識を仕入れたあと、第４章では早くも「約数問題—— n 以下の自然数の約数の個数の総数 $T(n)$ を n のやさしい関数で近似する問題」「素数の分布問題」といった、整数論の古典的な問題が取りあげられています。

そして第５章で、関数の展開方法として代表的な「べき級数展開」や「部分分数展開」が紹介されたあと、最後の第６章では、これまで準備してきた道具を使って、

1　テータ級数の関数等式（テータ変換公式）、

2　ガンマ関数の特徴づけなど、ガンマ関数に関する比較的詳しい議論、

3　ゼータ関数の関数等式、

といったトピックスが、丁寧な証明つきで紹介されています。この部分の計算をフォローするには多少の慣れがいるかもしれません。そのかわり、これまでの章で登場してきた様々な関数や色々な特殊な数値が最後に再び全員で登場してきて、それらが互いに絡み合ってびっくりするような華麗な姿を見ることができます。このフィナーレは、『真珠』というよりもっときらびやかな宝石で形容したいような場面です。

以上、ざっと内容を見渡してきましたが、６章まで読んでみると、級数論・微分積分論に関する主要な定理のうち、かなりの部分が本書に収録されていることに気がつきます。

その意味ではこの本を『解析学』の教科書だと思ってもよいでしょう。例えば、代表的な教科書である高木貞治氏の『解析概論』と比較してみると、『数論的古典解析』がカバーしている理論的内容は、『解析概論』の第５章『解析函数、特に初等函数』までの部分をダイジェストしたものだと言えます（なお、『解析概論』にも円周率πの近似値を例にとって収束の速さに関する記述がありましたし、第５章の最後に特にガンマ関数に関する節が設けてありましたし、両者にはかなり共通した雰囲気があるように私は感じました）。

では『数論的古典解析』の特徴はどこにあるのでしょうか？　この本は他の本とはちょっと違った姿勢で書かれていると思います。通常の教科書は、大なり小なり理論の構成の方に力点が置かれ、実例は理論の理解のための副次的なものとされるのが普通です。ところがこの本の場合は実例の方が主役になっていて、（いい意味で）泥縄式に理論を補充する方針が採られています。このため、「この定理にはどんな意味があるんだろう？」といったことを考える必要はまったくありません。そして少ない知識で比較的深い内容に踏み込むことができ、数学の現象の面白さを早く実感できるようになっています。

「少ない知識で早く問題に踏みこむ」点がこの本の長所なのですが、その弊害もないわけではありません。例えばこの本は「複素数」にはなるべく触れないようにしています（さすがに第６章の一部分では「複素関数に関する知識」が仮定されています）。このせいで理論的準備が大幅に簡略化できたことは確かですが、その反面、若干の見通しの悪さも抱え込んでしまったようです。最終章のガンマ関数に関する部分とかゼータ関数の関数等式といったテーマは、やはりこれらを複素関数として見た時にその面白さが強く実感できるのではないでしょうか。

この本は「黄金分割」から話が始まっていますが、黄金分割数は一応問題提起をすませた時点で御役御免になり、第２章以後第６章まで、新しい手段が紹介されるたびに、ロンド形式の主題のように繰り返しゼータ関数が例として登場します。また第４章・第６章の「応用例」を見てもおわかりの通り、この本の中で扱われている重要な例は大半が解析的整数論の分野から採られています。ですから、この本は解析数論への大変優れた入門書であると言えるでしょう。著者はドイツの有名な解析数論学者であるWolke氏のお弟子さんだったそうですから、こうした経歴を反映しているのかもしれません。ところで私の専門は解析数論で、これは日本では比較的研究者が少ない分野なのです。この『数論的古典解析』は、収束の速さを考えたり、級数を変形したり、不等式を華麗に使ったり、Σ記号を増やしてみたり、そういった解析数論の楽しさを満喫させてくれる書物です。この本に触発されて、将来同業者が増えてくれるのではないかと考えるのは、ちょっと楽観的すぎるでしょうか？

（村田　玲音、　明治学院大学）