

「リンゴが落ちたって万有引力は発見できないさ」

今の学問、社会のニーズに惑わされてない？

九大・数理学・松本 眞

<http://www.math.keio.ac.jp/matumoto>

1999年3月28日数学会市民講演会@学習院大学

1 「知の時代・情報の時代」の虚像

みのも×た・思いっきりテ×ビ

僕はお酒が好きで、実家に帰ると母に「飲みすぎないよう」くぎをさされます。ところが、ある日。実家に帰ると、赤ワインが買ってあり、「どんどん飲みなさい」と言われました。聞くと、「思いっきりテレビ」という番組で、医者が「赤ワインは体にいい」といったのだそうです。僕が「ポリフェノールのことか」と言うと、「なんかそんな名前のもの。お医者さんが言ったんだから本当よ。」と母は答えます。もちろん、ガンマGTPが高い（つまり、アルコールで多少肝臓が苦しんでいる）僕にとって、赤ワインが体にいいはずはありません。世の中には血中尿酸値が高い人もいるでしょうし、例えば奥さんがこの番組を見て、だんなに毎日ワインを飲ませて、結果痛風になる、という例も多々ありましょう。一言で言えば、この番組は恐るべき「えせ医学番組」であり、ワインやチョコレートメーカーの陰謀的広告番組であります。そして、見えない悲劇をたくさん生んでいるでしょう。しかし、母は、これを「知」「情報」として受け取って、僕に「応用」「発信」しています。

さて、これを聞いて笑うひとびとに、僕は問いたいです。「ニュートンは、どうやって万有引力を発見しましたか？」

2 万有引力とリンゴ

問い「ニュートンは、どうやって万有引力を発見しましたか？」

答え「...リンゴが落ちたのを見て。」

正解、もし、テレビのクイズ番組なら。

でも、真実は、違うのです。真実と正解は違う。正解は人間が作ったもので、存在しない虚像なんです。

ニュートンのリンゴとコロンブスの卵

今回の市民講演を引き受けてから、僕はたくさんの友人に次の質問をしました（聞かれた人、ごめんね）。

「ニュートンのリンゴ」と「コロンブスの卵」はどこが違うか。

大抵の友人は「質問の意図がわからない」といいます。なんか同じような話だと思う、といひます。以下は、とてもこころおだやかな友人たちの答を総合したもの。（普通は途中で会話が破綻します。）

松本 では、コロンブスの卵って、どういう話ですか。

友人 ... 卵を、割って立てたっていう話。

松本 そのとおり（なんか自分がいやな奴になってるな、と思いつつ）。何かの会議で、「アメリカなんてだれでも発見できる」といわれたコロンブスは、会議に出ている人々に「卵を立てられるか」と聞いた。みんなが「できない」といったとき、卵の底を割って置いて立てて見せた。「そんなのだれにでもできる」と反論されて、「自分がするまでは、だれもできなかったじゃないか。」と言った。

では、ニュートンのリンゴって、どういう話ですか。

友人 ニュートンは、リンゴが落ちるのを見て万有引力を発見した。

松本 そのとおり。では、ニュートンが発見したのは何ですか。

友人 だから、万有引力だって。

松本 それはなに。

友人 地球がリンゴを引っ張っているっていう法則。

松本 地球がかはともかく、リンゴが下に引っ張られているっていうのは、それまでもだれでも知っていたと思うんだけど。

友人 ... えーと、二つの物体の間に働く力は、それぞれの物体の質量の積に比例し、距離の自乗に反比例する。 $F \sim Mm/r^2$ 、ここに M, m はそれぞれの物体の質量、 r は距離。 F が力。

松本 そのとおり。では、どうしてリンゴが落ちるのを見てそんなことがわかるの。

友人 ニュートンが頭が良かったから。

松本 いや、いくら頭が良かったって、距離の自乗に反比例するとか、地球の質量とかわかんないと思うんだけど。例えば、リンゴが地球を引っ張っているとか、わかんないじゃない。

友人 ... そうそう、惑星の運行をみて。

松本 運行をみてどうした。

友人 するどい洞察で $F \sim Mm/r^2$ に気付いた。

松本 気付いたっていったって、その根拠はなに。

友人 なんか証明したんだと思う。

松本 そう、なんか証明したんですね。あなたはリンゴが落ちるのを見て、万有引力の法則が発見できますか。

友人 できない。

松本 それはなぜ。

友人 ニュートンみたいな天才じゃないから。

松本 ニュートンだって、リンゴが落ちるのを見ただけで $F \sim Mm/r^2$ を説明することはできないと思うぞ。まず、地球をその中心にある一点だというのが思考のすごい抽象化、大ジャンプ。だって、この足下にある大地だけ。

さて、地球の中心からリンゴまでの距離 r は計れる（その計り方も数学の応用で面白いけど）として、力が r^2 に反比例することを調べるには、 r を1パーセントくらい変えないと測定できない。それでは、60キロメートルくらいリンゴを投げ上げないとならない。

ましてや、地球の質量なんてどうやって計るの。

友人 ...

松本 実際には、ニュートン君は、随分いろんな現象の観察結果と、本質的には微積分を使って、「 $F \sim Mm/r^2$ としか思えない」という理由をいくつもいくつも上げているんだ。プリンシピア、という本の中でね。それらはユークリッドの公理論の形でかかれていて、リンゴなんてどこにも出てこない。

友人 ... じゃあ、リンゴの話は何。

松本 私見だけど、他人の創作か、ニュートン自身の創作ではないかと思うんだ。¹王侯貴族に「どうやって見つけたんですか」と聞かれて、どう説明してもうまくいかない。で、「リンゴが落ちるのを見て」といったら、みんな納得してよろこんで、その話が広まってしまった。

さて、今いったような話を、「コロンブスの卵」に対してできますか。

¹いや、知人が教えてくれたが、本当だという証拠もあるそうです。詳しくは足立恒雄先生「ニュートンのリンゴ学」数学セミナー 1989年10月号 pp.64-71 およびその参考文献を参照して下さい。松本は、はなはだ無責任ですが、「ニュートンのリンゴ」が本当の話だったのかどうかについて、まったく調査していません。それよりも、リンゴの話の現代社会における働き方、に興味があります。なお、くらべられるようなものではないですが、松本は西村 拓士さんと「メルセヌス・ツイスター」という疑似乱数発生法を開発しました。その作動原理を、人々は興味を持って尋ねてくれます。しかし、有限体の説明などを始めると、だんだんみんなひいていきます。で、「ツイスターというジェットコースターを見て思いついた。高速でひねりながら進んでいく。」と説明すると、みんな満足してくれます。社会のニーズに答えるって、こういうことかしら。

友人 ... コロンブスの卵は、だれにでも立てられて、よくわかる話。その発見には数学も現象の観察も何も必要ない。... なんか、全然違うね。

松本 でしょ？って、本当はどうやって万有引力の法則を発見したのか、知りたくならない？

友人 でも、難しいんじゃないの？

松本 いや、高校数学の知識があれば、一時間もあれば説明できる。それに、ニュートンはいろんな例、惑星の運行だけでなく、木星の衛星の蝕の周期、木星の自転による円からの歪み具合、彗星の運行、潮の満ち引きなど、数多くの実例を上げて、 $F \sim Mm/r^2$ を仮定して微積分の計算によって得られる結果と、実際の観測値とのずれを調べていて、とても面白いよ。

友人 じゃあ、説明してみて？

松本 う。痛いところを。まだ、人に説明できるほどちゃんと読んでないので、市民講演会までには準備を。

友人 自分もわかってないのね。

松本 すいません。

3 万有引力の法則の見つけ方

3.1 背景・惑星の運行

というわけで、万有引力をニュートンがどうやって発見したか、についての私見を述べます。僕の知識は、全てニュートンの書いた「プリンシピア」（初版 1687 年ラテン語、日本語訳講談社中野猿人訳 1977 年）というただ一冊の本に依存しています²。他の伝記も調べましたが、あまり役に立ちませんでした。

でも、ニュートンが簡潔に書いて 100 ページくらい（までで引力の項目はまあ終わる）の内容を、僕がここで短く書き直すなどということは不可能です。この原稿を読んで、「万有引力の法則の発見の経緯がわかった」などとはゆめゆめ思わないでください。ほんとにわかりたい人は、原典を読んで下さいね。

まず、ここで、みなさん、地球が丸いとか、太陽の周りを回っているとか、そういう、自分で確かめもしないで信じている知識を、全部消去して下さい。できれば、普通感覚、大地は平らで、太陽は東から昇って西にしずむ、という感覚で聞いて下さい。だって、地図を見るときには大地は平らだと思っているし、日当たりのいい部屋を探すときは地球が回っているなんて思っていないでしょう。

²チャンドラ・セカールのプリンキピア講義（監訳中村誠太郎、講談社 1998 年）という本もあるそうです。

さて、夜、星を見ます。すると、毎晩見上げて大体おんなじところにおんなじ星の並びがあるんだな。オリオン座とか。で、季節によって時間と星の出る時間が決まっている。これを観測すると、今が一年のうちのどの時期（春夏秋冬）かが、わかります。これは、種まきなんかに本当に大切なものです。星は神様が創ったもので、それぞれ意味があるから、生まれた時に太陽がどの星座にいるかで、その人の運命がわかります。これが、人の誕生日からきまる星座。（そうして思うと、占星術と暦とは切り離せないもので、非科学的とはいきれませんよね。）

でも、それらのなかに、妙な動き方をする星があります。日々、入っている星座を変えていく星が、ちょうど5つ見られます。水星、金星、火星、木星、土星。これらの星々が、行きつ戻りつ動く理由は为什么呢？神様が人間に、何かを伝えようとしているに違いありません。そうやって、占星術が発展しました。占星術師は、王侯貴族が抱える、高い観測と計算の能力をそなえた科学者だったのです。今では天文学、数学、物理学と呼ばれていても、当時は占星術、錬金術との明確な区別はなかったようにおもえます。彼らの目標は、真摯に神と交信することであったようにおもえます。

太陽が地球の周りを回るのではなく、太陽の周りを地球が回っているという、いわゆる地動説をとらえたコペルニクスもその一人でした。それまでは、地球が止まっていて、惑星が複雑な多重円運動をするために行きつ戻りつする、とする天動説が主流でした。

コペルニクスの意見は、天球にはりついているように見える惑星たちが、実は一つの球面にはりついているのではなく、太陽の周りをまわる単純な円軌道を動いているとすれば、多重円運動は使わずに惑星の運行が説明できるというものでした³。少し遅れて、チコ・ブラーエは16世紀末、30年にわたる膨大で正確な惑星の運行データをつくりました。この運行データはケプラーの手によって吟味され、「やはり、惑星は太陽の周りを回っていると考えるのが自然だ」という結果を得ました。ケプラーのすごい所は、さらに、「惑星の軌道は楕円である」といい切ったところにあると思います。だって、円じゃなくて楕円なんですよ。神が創ったものだから、完全なものであるはずである。完全なものは、誰が見たって円と直線しかない。なのに、30年分の観測データから、「円からちょっとずれた楕円である。」と断言した。（このことで、ケプラーは宗教的に批判を受けたようです。神の完全さを信じないのかと。しかし、ケプラー自身は神を自分の自然科学研究の動機としていたようです。）

そして、惑星が5つあることと、正多面体が5つあることを対応づける法則など、あまたの法則を見つけました。そのうち、現在良く知られているのが次のケプラーの3法則です。

1. 惑星は太陽の周りを楕円軌道をえがいて運動し、太陽はこの楕円の一方の焦点のところにある。
2. 惑星と太陽を結ぶ線分は、ある一定の時間の間には等しい面積を覆う。この時間あ

³これも、聴衆の方からご指摘を受けたが、コペルニクスの段階では、地動説のほうが観測とのずれが大きいなど難があったらしい。コペルニクス以前の地動説の存在とか、チコ・ブラーエは天動説であったとか、ケプラーとチコは仲が悪かったとかいろんな説があるらしいのですが、正直松本は何も調べてないです。すいません。

たりの面積（面積速度）は、惑星のみに依存する。

- 惑星の公転周期（太陽の周りを一回りする時間）を T 、楕円軌道の長軸の半分の長さを a とすると、 T の自乗は a の 3 乗に比例する。この比例定数は、惑星によらない。

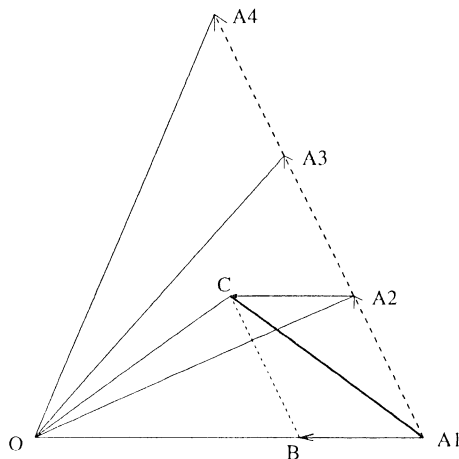
この法則以前は、太陽を中心とする線路のようなもの、もしくは球面があって、惑星はそれにそって走るものだと考えられていました。ところが、楕円となると、それは受け入れがたい感じになります。

この三つの法則を説明するにはどうすればいいのか。これは多くの科学者の主要な課題となりました。ニュートンは、今で言う「力学の基本定理」を仮定すれば、働いている力は、距離の自乗に反比例する引力しかない、ということ以下にのべるようにして証明しました。彼はこの発見をすぐには公表しませんでした。発見から十数年後、天文学者ハレーが惑星の運行の問題について意見をニュートンに求めたとき、「その答えは知っている」と答えて、ハレーはびっくりしました。それからハレーの尽力でニュートンはプリンシピアを書くに至ったようです。

3.2 太陽と地球を結ぶ線分に平行な力であること

最初のステップは、回転力ではなく引力だということを示すことでした。だって、太陽が地球を引っ張っているだけで、ぐるぐる回っているのって変じゃないですか。回っている方向に押さなければ回らないのを、僕たちは経験上知っているはず（小学校の校庭にあるあのぐるぐる回るやつなどで）。

プリンシピアを読んで初めてわかったのですが、「面積速度一定」（第二法則）と、「点と点の間にまっすぐに向かう力による軌跡」とは、同値なのです。そして、その証明は、「底辺を共有し高さの同じ二つの三角形の面積は等しい」という、あの、今は小学校で習う定理に基づいています。



中心力では面積速度を変えられない

そもそも、面積速度とは、不動の一点 O と、移動する一点 X に対して定義される量で、線分 OX が単位時間当たり覆う面積のことで、時刻 0 に X が点 A_1 の位置にあり、単位時間に A_1 から A_2 に向かう速度ベクトルで運動していたとします。もし、力が全く働かなかつたら、慣性の法則により X は単位時間経過ごとに A_1, A_2, A_3, A_4 と同じ距離同じ向きに動き、面積速度は三角形 $OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4$ の面積で、高さを共有して底辺の長さが同じだから一定です。ここで、出だしに、点 O が A_1 の位置にある X を自分の方に引っ張ったとします。引っ張る力を A_1B とすると、 X は力が働かなければ A_2 に行くべきところを、力に引っ張られて C に動いてしまいます。力が働かなければ面積速度は面積 OA_1A_2 だったものが、面積 OA_1C となります。しかし、線分 A_1B は A_2C と平行で、これら二つの三角形は底辺と高さを共有しているから面積は同じです。よって、一回一瞬力が働いただけでは、面積速度は変わりません。

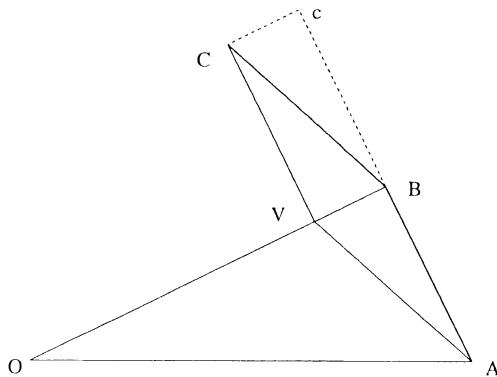
同じ議論によって、何度力が働いても面積速度は変わりません。力が連続的に不断に働き続けているときには、 A_1A_2 を無限に小さくにとって、曲線を折れ線で近似し、極限をとる必要があります。これは、まさに積分のアイデアですが、ニュートンはその極限(補助定理 3)を $\epsilon - \delta$ 論法(第一章補助定理 1)も使って定式化しています。

以上が、プリンシピア第二章の最初に示されている命題 1, 定理 1 です。

(これを読んで、自分が何にもわかっていなかったことを認識したなあ。自分の方向に引っ張るか押すしかできない時には、自分の回りの質点の運動は「面積速度一定」という呪縛から逃れられないんですね。よく考えてみると、「角運動量保存」を使っても、直ちに出てくる帰結なんだけど。)

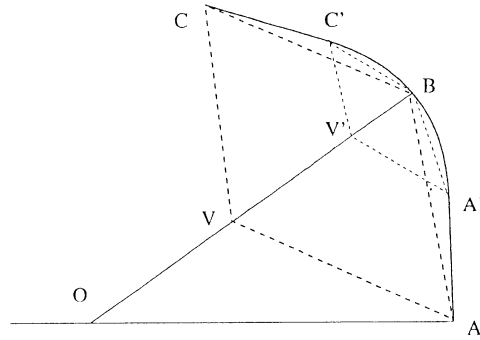
この系として、「ある物体が不動の一点に対して面積速度一定に運動していたら、その物体が受ける力はその不動の一点に向けての引力か反発力である」ことが言えます。そうでなければ、面積速度を増やすか減らす成分があるからです。(図で、力 A_1B の向きが少しでも上にずれれば面積速度は増加し、下にずれれば減少します。)

また、力の大きさと向きも次のようにして求めることができます。



系. 点 X が A, B, C と運動し、 B にいる瞬間に O から力を受けて方向を変えた時、うけた力はベクトル BV である。

ここまでは理解しやすいのですが、曲線を動く物体にかかっている力を推定することにはもうひと頑張り要ります。

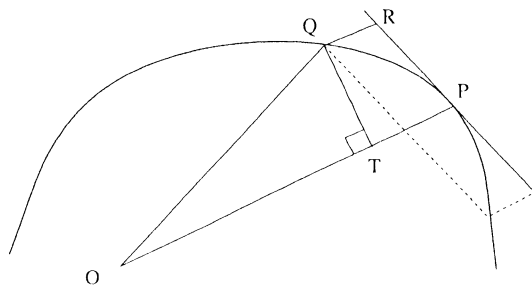


物体が A, B, C と動いた間に受けた力は、 BV で近似することができるでしょう。これを小さくして、 A', B, C' と動いた間に受けた力は BV' であらわせるでしょう。では、 B にいた瞬間に受けている力は、 A', C' が B に近づく極限で、 0 になってしまうのでしょうか？ なんとなく、「時間当たりの力」で、 A' から B' に動くのにかかる時間を Δt として、 $BV'/\Delta t$ の $\Delta t \rightarrow 0$ の極限にすればいいような気がしますが、これは計算すると 0 になってしまいます。例えば、円でやると、 $(1 - \cos(\Delta t))/\Delta t$ で、 0 に収束します。これは、「力が引き起こすのは加速度である」すなわち、 $F = ma$ 、 a は速度の変化率、という式を誠実に計算しなかったために起きた混乱です。図でいうと、もしベクトル AB が速度ベクトル、つまり単位時間あたりの移動をあらわすならば、 $A'B$ なる動きにおける速度ベクトルは $A'B/\Delta t$ 、ここに Δt は $A'B$ 間の移動にかかった時間、となるからです。したがって、速度の変化ベクトルは相似を使って $BV'/\Delta t$ となり、これが時間 Δt に間に受けた力の合計（時間についての積分）だから、点 B で受ける力は $BV'/(\Delta t)^2$ となります。これをニュートンは

命題6 定理5 抵抗のない空間内において、もし一物体がある不動の中心のまわりの任意の軌道上を公転し、かつ微小時間内に、ちょうどその時生まれたばかりの弧を描き、その弧の正矢（弧とは図でいうと曲線 $A'C'$ のこと、正矢とはベクトル BV' のこと）が弦（直線 $A'C'$ ）を二等分してひかれ、力の中心を通過して延長されたとすれば、その弧の中点における求心力は正矢に比例し、かつ時間の自乗に半比例するであろう。

と表現しました。

系 I（曲線運動の力）物体 X が曲線運動していて、中心 O に向けての力しか働いていないとき、その大きさを求めるには、まず、次の図を書く。



ここに Q は P に近付いていく点、 T は OP への Q から下ろした垂線の足、 R は QR が

OP に平行になるようにした P の接線上の点である。すると、比 $QR/(OP \cdot QT)^2$ の、 Q が P に無限に近づく時の値が、 P において X が受ける力の大きさに比例する。

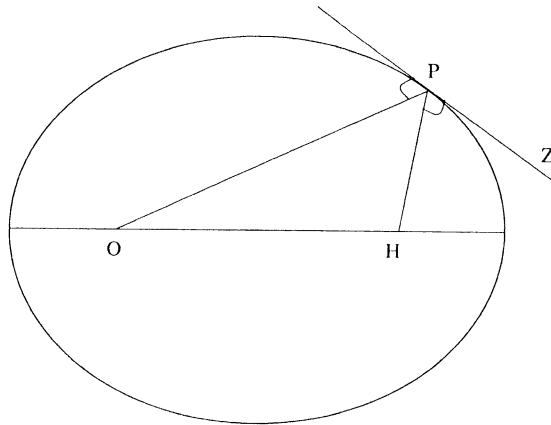
ここで、「比例する」というのは、 X がこの軌道上で動いた時、 P をいろいろな点にとりかえて、受けている力の大きさを比べた時どうか、という意味です。違う軌道、違う物体はとりあえず考えていない。

証明：面積速度は一定だから、三角形 PQO の面積は Δt に比例する（ P の場所によらず）。よって、この間に受けた力 QR を PQO の面積 $OP \cdot QT/2$ の自乗で割ったものに、力は比例する。

3.3 力が距離の自乗に反比例すること

以上の準備と、二次曲線（円錐曲線とも言う）の幾何を用いて、ニュートンは、惑星が楕円軌道を動き、太陽がその一つの焦点にいて、面積速度が一定であれば、少なくともその惑星の軌道上のどの点でも、惑星が受ける力は太陽に向かうもので、その大きさは距離の自乗に反比例することを示しました。

補助定理 A.⁴（円錐曲線論として当時すでに知られていた）楕円上の一点 P に接線 Z を引く。楕円の二つの焦点を O, H とするとき、 OP と Z のなす角は HP と Z のなす角に等しい。



証明：高校数学でできますが、それほど簡単でもありません。直観的には次の「証明」が納得力がある。「角が等しくないとしたら、開いている方に微小に P を動かすと、 $OP+HP$ が少し増加する。これは、楕円の定義： $OP+HP=一定$ 、に違反する。」（実は重りと糸と釣り合いを使って正当化できます。）

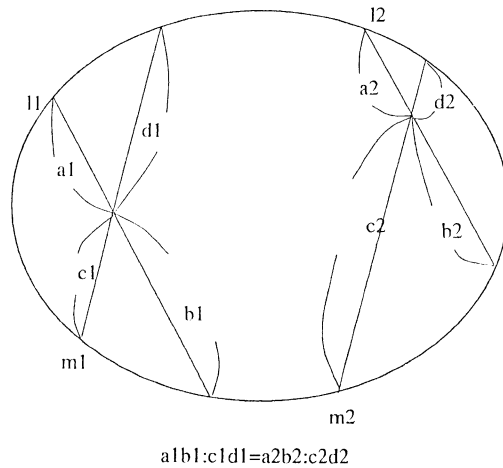
補助定理 B. 楕円上に点 P をとり、楕円の中心を結ぶ径の逆側の点を G とする。 PG に平行で楕円に接する二点を D, K とする。 P, D, G, K で接する楕円の外接平行四辺形の面積は、 P に選び方によらない。（次のページ下の図。）

証明：楕円を横方向にのみ拡大縮小して円にします。接する、交点という条件はこの変換で変わりません。すべての図形の面積は一定の定数倍されます。すると、円に外接する

⁴偶然にも、上野健爾先生が去年98年の数学会市民講演でこれに触れています。数学通信98年8月号P.18。

正方形の面積の一定さから、定理が従います。（ PG と DK を互いに共役直径といいます。）

補助定理 C 一つの楕円において、平行な二本の弦の組 l_1, l_2 , および m_1, m_2 がある。 l_1 と m_1 が交わり、 l_2 と m_2 が交わるとする。このとき l_1 と m_1 の交点が互いを二分するが、 l_1 における二分されたそれぞれの長さの積と、 m_1 における二分されたそれぞれの長さの積との比は、 l_2 と m_2 から同様に得られるものに等しい。

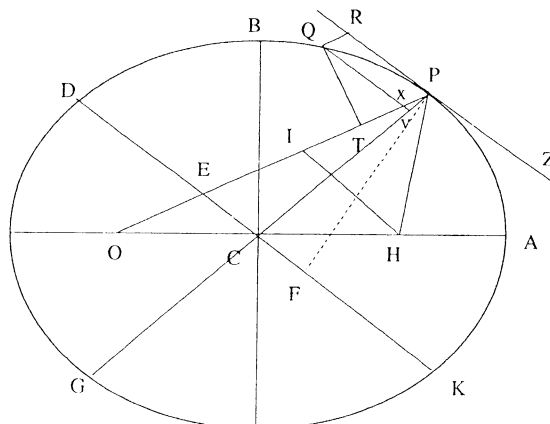


証明：円の場合は、円周角の定理を用いて、この比が 1 になることがわかります（中学の数学です）。横だけ拡大して楕円にすると、平行な直線の長さの拡大率はみな同じですから、 l_1, l_2 の長さの拡大率は同じ、 m_1, m_2 の長さの拡大率は同じです。ここから、比の等しさが従います。

では、ニュートンの、惑星の楕円軌道を説明する定理

命題 11 問題 6. 1 物体が楕円上を公転するとして、楕円の焦点に向かう求心力の法則を見出すこと

にトライしてみましょう。



命題6 定理5系Iを使えば、目標は、加速度に比例する $QR/(OP \cdot QT)^2$ が、距離の自乗の逆数 $1/OP^2$ に、 P に依らない一定の比例定数で比例することを示すことです。実は、

$$QR/(QT^2) = AC/(2BC^2)$$

となります。(厳密には極限で。)これを言えばよろしい。

まずは、 Q にまつわるものを他の言葉で書こうとします。だって、 Q は最後には P へと消える点ですから。

QR をやっつけましょう。三角形 Pxv と PEC の相似から、

$$QR : Pv = PE : PC = AC : PC \quad (1)$$

です。ここで、 $PE = AC$ は次のように示せます。 P での接線に平行に径 DK を引き(共役直径)、その OP との交点を E としました。 H を通って DK に平行な線 HI を引くと、 $OC = CH$ より $OE = EI$ 、よって PE は $(PI + OP)/2$ 。ここで補助定理Aにより、 $PI = PH$ 、よって $PE = (PH + OP)/2 = AC$ 。では、(1)の Pv をやっつけねばなりません。

補助定理Cから

$$Gv \cdot Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2 \quad (2)$$

ここで、共役直径の性質から、 Qv を延長して得られる弦の midpoint が v であることを使いました。(円では自明、その一次変換です。)そして、極限では $Gv = 2PC$ 、 $Qv = PR$ と思ってよいから $2PC \cdot Pv : PR^2 = PC^2 : CD^2$ 。これを(1)に辺同士掛けると

$$2QR : PR^2 = AC : CD^2 \quad (3)$$

です。これで QR が P, R の言葉で書けました。

QT の方は、 $QT : PR = QT : Qx = PF : PE = PF : AC = BC : CD$ で求まります。最初の $=$ は自明、次は三角形 QTx と PFE の相似から (Qv を延長して PF にぶつける補助線を引く)、最後は補助定理Bにより $AC \cdot BC = CD \cdot PF$ からです。これで QT の方も P, R の言葉で書けました。

では、目標の $QR/(QT)^2$ を計算します。 $QR = AC \cdot PR^2/(2CD^2)$ および $QT = BC \cdot PR/CD$ を代入すると、目標の式は

$$\begin{aligned} & AC \cdot PR^2 / (2CD^2) \cdot CD^2 / (BC^2 \cdot PR^2) \\ &= AC / 2BC^2 \end{aligned}$$

となります。やった、終わった。これで第二、第一法則を使って、それぞれの惑星はその軌道上で距離の自乗に反比例する引力を得ていると言える。

さてここで、複数の惑星が一つの太陽の回りを回っているような状況を考えてみます。同じ微小時間 Δt の間に受ける加速度的力はベクトル QR であらわされます。太陽の起こすこの加速度的力が、全ての惑星で距離の自乗に反比例し、比例定数が惑星に依存しないと仮定します。(万有引力の法則を認めると、 G を万有引力定数、 M を太陽の質量とす

れば、 GM が比例定数。 GM/r^2 が加速度。)すると、惑星によらない⁵ある定数 U があって $QR = U/OP^2$ とあらわされ、 $U/(OP \cdot QT)^2 = AC/(2BC^2)$ となります。面積速度は $OP \cdot QT$ に比例し、その比例定数は惑星によりません (Δt に依存しますがそれは全ての惑星に共通にとる)。周期を T とすると $T \sim AC \cdot BC/(QT \cdot OP)$, 故に $T^2 \sim AC^2 \cdot BC^2 \cdot AC/(2BC^2) = AC^3$, すなわちケプラーの第三法則が得られます。

以上により、第三法則を使って「どの惑星も、距離の自乗に反比例する太陽への加速度を得ている」ことが確かめられました。(というか、理論と観察が一致するということが確かめられました。)

3.4 双方の質量の積に比例すること

これについては、ニュートンはある程度思考実験的な方法で議論を進めています。あまり深く立ち入りませんが、まず、太陽を固定して、回りを回る惑星の受ける力が、惑星の質量に比例することを考えます。

1. 例えば惑星を上半分と下半分に分けても、太陽の回りの同じ軌道を描くであろう(そうでなければ、分解するはず)。ということは、質量に比例する力が働いているに違いない。
2. ケプラーの第三法則によれば、どの惑星も、加速度で見て距離の自乗に反比例する力を太陽から受けている。つまり、加速度 $a = C/r^2$, ここに C は比例定数、 r は距離。 $F = ma$ とすると、 $F = Cm/r^2$ となる。
3. これは、太陽に固有の引力なのかも知れない、という疑問が当然起きる。しかし、望遠鏡の発達により、そのころ木星の4衛星の周期と長軸が観測されケプラーの3法則が成立することがわかった。ここで、第三法則における比例定数は、木星4衛星と太陽をめぐる惑星では、一致しない。したがって、上の C は太陽、木星といった引っ張っている方にも依存した定数である。
4. 潮の満ち引きは月の引力により引き起こされるのが確認される。つまり、月も地球を引っ張っている。
5. これに対称性を加えると、 $F = GMm/r^2$ と思える。

3.5 あまたの実例

ケプラーの第三法則に現れる長軸の長さの半分 a と周期 T は、かなり正確に測定できます。これらの値から、万有引力の方程式を使うと $4\pi^2 a^3/T^2 = GM$ が得られます。ここに、 G は万有引力定数で、 M は楕円の焦点にあるほうの物体の質量です。この値は、回りを回るほうの物体の質量に依存しませんので、「回りを回る星をもつ星」の質量(の比)を特定することができます。これにより太陽(惑星による)、地球(月による)、木

⁵ Δt には依存する

星（衛星による）土星（衛星による）の質量の比を求めることができ、これらの間の万有引力を求めて観測と対比させることができます。

また、ハレー彗星を始め、数多くの彗星の軌道が長楕円軌道であることが確認され、再びケプラーの法則に合致しました。

赤道におけるふりこ時計の狂いを計算し、地球の遠心力と円からの潰れ方を推測しました。

磁力は半径の自乗に比例しません。「あたりまえのこと」ではないのです。

地球は大きな物体ですが、積分により、重心一点に質量が集中しているものだと考えても引力のみあつかう限り大丈夫なことを証明しました。

4 リンゴと卵・真実の隠蔽

このように、万有引力の法則の発見には、深い数学的洞察、物理学的洞察、数多くの地道な観測とそこから導かれる法則がありました。とても豊かな体系だと思います。

僕は、「リンゴが落ちた」という話は、真実から人々を分離する、メディアの持つ作用の典型ととらえます。僕はたくさんの人に「ニュートンはどうやって万有引力を発見したのか」と聞きました。ほとんどの答えは「リンゴが落ちたから」です。多少惑星の運行と関係がある、ということを知っている人もいますが、ほとんどの人は万有引力の法則そのものを正確に知りません。にもかかわらず、「だれでも知っている事実」になってしまっています。知らないのに、知っていることになっている。この恐ろしい状況を、現代のマスメディアはすごい勢いで押し進めている。

ワインの体にいいポリフェノール、と同じ図式です。自分にわかるところだけわかって、真実を知った気になる視聴者。知りもしないのに、真実を教えているふりをして、視聴者をかにもするメディア。もしかしたら、メディアの側も本当に真実を教えているつもりになっているのかも知れない。

リンゴ、とは、真実を隠蔽する、メディアがつくり出した呪文なのです。そして、ほとんどの人がそれによって真実を見ることがない。ここでの真実とは、万有引力の発見に、一見全く無駄に見えるような観察、実験、数学、物理学が、どれほど使われてきたか。それを見つけた叡知がどんな深いものか。ということです。

ひるがえって、「コロンブスの卵」はわかりやすい話です。聞いたまんま、の話。そして、ここに卵があれば、だれでも復元できます。

僕が主張したいのは、「もはや我々の社会文化は万有引力を発見しえない。見つけれられるのは、コロンブスの（金の）卵だけになってしまった。」ということです。僕はこの退廃を、「真理の死」と表現したい。

5 社会のニーズに惑わされる学問

コロンブスの卵は、「気付けばだれにもできるけれど、気がつかなければできないこと」です。気付くことが大事で、社会にも容易に認められる。

一方、ニュートンの万有引力は、膨大なデータ、計算、実験に、永年発達してきた円錐曲線論などの数学体系を応用し、そこにニュートンの靈感が働き、微積分学の成立とともに発見された物理法則です。こちらは、社会みんなには理解されない。理解できないから、リンゴの話にすりかえて、真実をみないでわかった気になる。

なぜそんなことを強調するかというと、まさにわれわれの学問が瀕している危機というもの、このすり替えなのだということを主張したいからです。社会の与える評価が、コロンブスの卵や、リンゴに向けられて、ニュートンの万有引力の発見の真の原動力になったものへと向けられないのが、今ここにある学問の危機、「真理の死」なのです。人々、とりわけ学生たちの興味が、金もうけ、人を出しぬくこと、コロンブスの卵に向けられ、真理へと向けられないこの状況を、僕は「真理は死んだ」といいたい。

抽象と具体の分離と融合

先ほど見たように、ニュートンは極めて多くの具体的観察事項を検討し、それらのすべてがある抽象化された簡単な方程式、つまり万有引力の法則と力学の基本方程式という微分方程式によって説明がつくことを示し、理論と観測の誤差の評価も行いました。

この、具体と抽象を行き来するということが、数学の本質であると僕は思います。世の中の趨勢は、

- 抽象的な学問＝役にたたない、閉じこもったもの、不自由なもの、非人間的なもの、非社会的なもの
- 具体的な学問＝役に立つ、開いた、自由な、人間的な、社会的なもの

と思っています。みんな、「基礎学問の重要性はわかっている」と口先では述べているけれど、大学から数学のような基礎学科は減らされていきます。抽象的な思考は「机上の空論」で、そういうものを最小化して、できるだけ早く「先端」の「実学」へ学生を導くシステムをつくらうというのが社会の本音でしょう。

それでうまくいくでしょうか。

ニュートンはプリンシピアの冒頭 P.17 で、「これらの法則から、次のことがわかる。もし、ものを高速に打ち出せば、ものの着地点はどんどん遠くなる。そして、ある一定の速度を超えて射出すれば、そのものは着地することなく、地球の周りを楕円軌道にのって周回することになる。また、さらに一定の速度を超えれば、地球からどんどん遠ざかって、永久にもどってこない軌道を動かさせることもできる。」と、いっています。ここに、抽象化によって得られる自由が鮮やかにあらわれています。

ぼくたちは人工衛星の存在を知っています。が、彼の時代には、まだ地球が丸いのかどうか、星は天球にへばりついているのか、太陽が地球の周りを回っているのか、といったことすら議論が完全に尽きてはいなかったのです。しかし、ニュートンは、「惑星も、地球にある石も同じ、質量をもつ物体である」、と抽象化したのです。あの、輝く明星が、石と同じである。質量をもち、万有引力の法則にしたがうという点で、同じ性質を持っている。だから、石も惑星と同じように動かすことが、原理的にはできる。この、「惑星＝石」という抽象化の上に、「それは一点に質量が集中した質点と思って良い」というさら

なる抽象化が行われ、万有引力の法則にいたるのです。この、「抽象化」による大きな飛躍－線路もないのに、惑星が、円ではなく楕円軌道で太陽を回り、月は地球の回りを回っている。その現象の全てが、万有引力の法則でぴったり説明できる－を、いまいちど、心を静めて追体験してみれば、「抽象化＝役に立たない、閉じた、不自由なもの」という、「社会の洗脳」がいかにか虚構であるかを、見つめることができます。

抽象化の与えてくれる極たる自由の例として、ニュートンは「二度と同じところに戻ってこないような速度がある」と言明しているのです。これは、もはや具体例では到達できない、抽象化によってのみ到達できる真実というしかない。人類は、二度と同じところに戻ってこない速度で動いている天体を知らないからです。このような結論は、いかなる具体的観察によっても得ることはできないでしょう。しかし、抽象化された方程式の解を求めることで、ニュートンはこの具体的真実に到達した。抽象化こそが、思考を自由にしてくれるという良い例だと思います。「抽象化は社会の役に立たない」という考えの狂いがわかります。

プリンシピアが出版されたころには、人々は、いや、ニュートン自身が、このような速度で地球上からものを射出することは不可能だと思っただろうと思います。社会は、この言明は無益だ、と思ったでしょう。ところが、つい最近になって人間はやっと、例えばボイジャーという探査衛星のように、永久にもとのところにもどってこない物体を宇宙に打ち上げることが可能になりました。

ニュートンの時代の社会のニーズに、もしニュートンが答えていたら、万有引力は発見されたでしょうか？ニュートンの発見は、当時の社会のニーズにこたえていたでしょうか？

ニュートンの法則のうち、数学的に抽象化された部分である微積分学は、さらに抽象的に自由に発達を重ねています。根幹の微積分法は現在では高校でも教わり、およそ理工学を支える礎となっています。しかし、微積分学の現代の先端のものは、かならずしも社会のニーズに答えそうなものではありません。それをさばくちからがあるのは、この社会なのでしょう。昨今、大学は「社会のニーズにあった研究をせよ・学生を育てよ」といわれ、産学共同、官学共同、社会に還元、を要求されていますが、それでいいのですか。

同時に、大学自身の研究・教育の動機からも、真理は失われてきているように思えます。客観評価の導入により、教員も学生も「論文をたくさんかける」「特許のとれる」研究を行なうようになり、「何を面白いと思うか」という問いかけは行なわれにくくなっています。これも、ある種、客観評価という社会の「ニーズ」に答えた結果です。「真理の死」は大学の内部をも暗く覆っています。

毎年毎年癌の特効薬が報道されます。数学にも「社会のニーズに答える」ことが要求され、数学科は数理科学科やら多元数理学科やら数理学科になって、金融シミュレーションやら計算機やらを研究せねばなりません。これが「現実路線」です。

でも、これが本当の意味で学問の果たすべき役割でしょうか。

僕は、1997年に西村 拓士さんと一緒に、メルセンヌツイスターという疑似乱数発生法を作り、Cプログラムとしてただでホームページ上で配布しました。

一方で、万有引力の法則を、「知っている」といえるレベルで分かっている人はほとんどいない。分かっていない。なのに、みんなが分かっていると思っている。初等的知識と思っている。分からないことはブラックボックスに入れて、「とるにたらないこと」と考え、「本質は知っている」と思う。

そういう土壤の社会からは、物理や数学や哲学や神学への畏怖は生まれません。興味も生まれません。その状態を、僕は「真理は死んだ」と表現したい。それが、学問の深い危機だと思っております。

りんごの質量、は簡単に理解できるとしても、「地球の質量」という概念はコペルニクスどころではない、概念の超越的飛躍、自由な抽象化です。この、足の下にある大地の質量ですよ。しかも、それを点と置いていい。

万有引力の法則を確かめるには、どうしても三つ以上の物体であって、互いに他を回るものを比べる必要があります。そうでなければ、「質量の積に比例」することが確かめられない。

ニュートンは、 $F = GMm/r^2$ が成り立つであろう根拠として、

1. 30年に渡る他人（チコ・ブラーエ）の惑星の観察から導かれたケプラーのあまたの惑星運動の法則のうちの三つ
2. 当時新しく発見された彗星の動き
3. 木星の衛星の蝕の周期
4. 木星の歪み方
5. 潮のみちひきとその度合
6. 赤道における降り子時計の狂い

などなど、あまたの例をあげ、実験観測しました。そして、1. に対して綿密な微積分を含む計算を行ない、二点間に働く力は Mm/r^2 に比例するとしか思えない、という結論に達しています。そこで使われている幾何学・解析学は、かなり高度なものです。

しかし、これを理解するのは高校の微積分で十分なのです。高校の微積分を学べば、ニュートンの結論を理解するのはたやすい。いわば、高校の数学をきちんと理解すれば、僕たちはニュートンに匹敵する数学的道具を持ったといっている。だがしかし、文部省は高校の数学は抽象的過ぎる、もっと具体化してやさしくしろと言ってくる。抽象化と具体化の両方ができて初めて、万有引力が発見できるのだなどということにはリングで蓋をして。

以上、くどいけど三つにまとめると

1. 我々の現代の文化は、ニュートンの結果のような深みのある真理の探求を受け入れるだろうか？真理をリングで隠し、「役に立たない」研究を排斥して、「楽して儲ける」コロンブスの卵を追求していないか？（これは、特許に対して僕が感じる嫌悪の一つです。東大学長経験者の文部大臣が、なんと「特許一本は論文十本に値す

この発生法は周期が桁数で従来のものの30倍はあり($2^{19937} - 1$ であることが証明されています)、高次元に渡って均等分布しています(623次元に均等分布することが証明されています)。そして、従来の標準的生成法より4倍速いのです。

結果、このプログラムは世界中で使われています。たくさんの銀行、証券会社が金融シミュレーションに利用しているし、物理の素粒子シミュレーションでも使われています。これの内容はここでは触れられませんが、ともかく、「100年程前に研究された、当時は有益とは思えなかった代数学」を使って、従来の方法にちょっとコロンブスの卵的な工夫をただけのものです。社会のニーズに惑わされずに研究された古い代数学が、今、社会のニーズに答えている、という小さな実例です。

今、社会のニーズに答えようとして研究されている学問は、本当に社会のニーズに答えられるのでしょうか？

6 真理は死んだ

僕たちの社会は、「真理」を知りたいという心を失ったように見えます。むしろ、「真理」そのものが、実は存在しないものだったのだ。昔の人がばかだったから、そんなものがあると思っていたのだ。われわれ現代人はもっといろいろわかったから、「真理」なんて存在しないことがわかったのだ。

上の「真理」を「神」におきかえると、そのままニーチェがツアラトウストラに語らせた言葉「神は死んだ」になります。あつたと思っていたものが、実はなかった。この喪失にどう対処するのか、がニーチェの「超人思想」に継っています。

エーリック・フロムは、ニーチェの言葉を引用した上で、現代社会は「人間は死んだ」という状態であろう、と言っています。人間的な人間・いいひと・誠実さ、といったものが、あつたと思ひ込んでいて実はなかった。そして人間は、価値（自分に付ける付加価値や、他人の評価）を追求するロボットとなり、市場で取り引きされる対象（成績がいいとか論文をたくさん書くとか美人だとか肝臓が悪いとかで、「値段」が決まって売り買いされるもの）としてしか、自分自身を体験できない、と言っています。

僕は、このフロムの指摘した人間の退廃が、学問の世界で引き起こしている退廃を、「真理は死んだ」と表現したい。

学生たちはA,B,C,Dの評価を気にして、たくさんAをとって自分を高価な商品にすることに熱心です。学生「このくらいの理解で、この数学はAがとれますか」松本「...たぶんとれると思うけど。」学生「じゃあ数学の勉強はもうやめて、Bになりそうなフランス語を勉強してAにしよう。」この学生の話に違和感を感じる人が、もうほとんどいないように思えます。

先端情報環境学際人間総合政策メディア学部あたりでは、盛んに「社会のニーズに答える」研究がされているように見えます。しかし、それらが発信する情報は、ニュートンで言ったらリングの情報のように見えます。みのもんたのワインのように見えます。みんな、たくさん、新しいんだか古いんだかわかんないようなことを、役に立つ役に立つ時代の先取り柔軟実学すごいすごい、って宣伝している。

る」などと発言しているのを知って、めんたまひんむいて驚いています。元東工大学長の「特許は国が認めた唯一の論文」なんてコピーをパクって知的財産セミナーを開く私立大学もあります。）だから、この世界では、学問は尊重されえない。尊重されるのは、経済であり、わかりやすいことです。論文の数です。消費した量です。流通した情報の量です。

2. 我々の教育は、ニュートンの発見を高校で教えられるほど深く発達してきたが、それを「見直し」て、空虚な「実学」を教える方向に動いていないか？（語学やコンピュータの使い方や情報の伝達の仕方、議論の仕方や会の開き方、といった、役に立つと錯覚しているものを教えて、肝心の伝えるべき学問を殺してしまっていないか？無意味な情報のやりとりの方法を学ぶことが学問だと思っている人を大量生産している。）
3. 「りんご」とは、単に、ニュートンの発見した真理を隠蔽するための、マスコミ的手段ではないか？マスコミは意図してかせざるか、全ての人に真理の不在を植え付けていないか？

人間は神を殺した。同様に、今、人間は真理（例えば数学）を殺そうとしているように思えます。バブルな経済で熱帯雨林を畑化して、貴重な生態系を破壊し、やがて畑自身も荒廃させたように。バブルな研究によって。

まとまりがないように見えますが、僕にとってはこれでまとまる、という、あるニュートンの言葉を引用してこの原稿を閉じます。実際、多くの人が「ニュートンこそ神を殺した人だ」と思っています。彼の科学原理によって、惑星の運行は神秘的ではなくなり、神がいなくても人間は全てを理性で知ることができるようになった。よって神はいらなくなったのだと。しかし、ニュートンのこの知的探求は、ケプラー（彼は王室の占星術士でもあった）と同様、「森羅万象、特に星の運行を観察することによって、神と交信しよう」という動機によって行なわれたのだと、僕には思えるからです。

ケプラー以前は、地動説でも、惑星は太陽の回りのある軌道に「はまって」動いているという考えが支配的でした。ケプラーは「楕円だ、どうやら円じゃないぞ」といった。それでも、惑星は何かの力で軌道からそれることなく、線路の上を走るように安全に動いているように思われていた。そこに、ニュートンがあらわれて、惑星はすごく自由な動きをしていて、ただ、引力という力で楕円軌道を描いている。速度を落とせば地球が太陽に落ちることもあるのだ、ということがわかった。もし、宇宙空間にもう少し塵が多ければ、摩擦で速度は落ちて、地球は太陽に飲みこまれていたことでしょうか、と彼自身が指摘している。ニュートンは、この自由さの中で不安を感じ、そして、畏怖を感じたに違いありません。だって、もう何億年も、これらの惑星は安定した軌道を動いているのですから。しばし心を止めて、この奇跡を感じてください。

プリンシピア第三編 一般注よりちょっとだけ抜粋「これらの物体はなるほど単なる引力の法則によってそれらの軌道上を動き続けているとはいえ、しかもそれらはけっして最初にそれらの法則によって軌道自身の規則正しい位置を取りえたのではなかった。6個の主要な惑星は、太陽のまわりに、太陽と同心の円周上を、同じ向きの運動でもって公転し

ており、しかもほとんど同一平面内にある。地球、木星、および土星の回りには、それらと同心の円周上を、同じ運動方向で、かつほとんどそれら惑星の軌道面内において、10個の月が公転している。しかし、彗星は思いきり偏心的な軌道に沿って、天空のあらゆる部分にわたっているのであるから、単なる力学的な原因がこれほどにも多くの規則正しい運動を生み出しえたとは考えられない。... 中略... このまことに壮麗な体系は、叡知と力にみちた神の深慮と支配とから生まれたものでなくてほかにありえようはずがない。そしてもし諸恒星が他の似たような諸体系でのそれぞれの中心であるならば、これらも同じ叡知の意図のもとに形づくられたものであって、やはりすべて「唯一者」の支配に服さなければならない。... 後略。

僕がいたいのは、「神を信じろ」ということではなく、「自分の知識を疑って、真理へ近付こう」ということです。僕がここにいる理由、数学をする理由、かすかな光を、少しでも伝えられたらとても幸せです。

こんなに強く主張するのは、きっと、自分自身の研究が、社会のニーズに惑わされていると感じているからです。社会のニーズ=経済原理は、世界の存在意義をむなしくします。かすかな光さえも覆い尽くします。

しかし、光そのものは、隠されはしても、輝きを失わないと思います。

御静聴ありがとうございました。

7 蛇足：こうもりのボヤキ、主張の台無し

以上は市民講演会用に作ったものです。

さて、松本は二律背反を抱えている。そのうち、世間で受け入れられない方「数学は役に立たなくてしかも意義がある」ということを世間に主張するのがこの文章の眼目でした。

でも、この通信が数学の社会に向けてのものであるならば、もう一つの主張も書いておくのが公平でしょう。

それは、「純粋数学はそれだけで他のものより意義がある」という主張に対する抵抗です。応用数学や情報科学や工学より、純粋数学は上である、という主張は滑稽だ。高い山に登れる人が、経済を安定させる人より崇高だ、とは思わない。ニュートンは実験家だったし。

ぼくは、応用数学や計算機や経済やもろもろの理工学の中にも、すごい！面白い！と思うものがあり、つまらないと思うものもある。同じように、いろんな純粋数学があり、すごい！面白い！わかんないけど！と思うものもあれば、なんかつまらないなあと思うものもある。他の人は他の見方をする。この多様さを、ばらばらに放置したままで、なんでもかんでも「数学はイイ！」と言って、数学ギルドになって無批判に守りあっていくことになると、一見、数は守っているようでも内部からまずい状態になっていくような気がしてしまいます。そして、いつか一気にリストラされちゃうんじゃないかと。

では、「開放、改革、融合」を前面に押し出すと、今度は逆に多様性が失われるのではないかと心配です。こっちの方の心配が、前章までの文章です。

生物の「多様性」っていうのは、純粋種が純粋さを保ちつつ、雑種をつくったり減んだり生まれたりして保たれています。人工的に純粋種を掛け合わせて作った雑種は強くて目立って有利です。しかし、そういう「開放、学際、社会のニーズ」に突き進むと、雑種ばかりを優遇して、純粋種を減ぼして取り返しのつかないことになるような気がします。ぼく自身が、数学をきちんとは知らないで、いろいろなものの雑種を作ってやってきました。優れた純粋種の人たちたくさん知恵を借りて、混ぜて依存して暮してきました。だから、純粋種が迫害されそうな感じがとてもコワイのです。多様にしようとして掛け合わせた結果、なんだか種類は増えたものの、エントロピーが増えちゃって多様性が失われるのではないかと。

多様性における理想っていうのは、純粋種が純粋なままで、しかも豊かに交流し影響しあって、新しい種ができる、っていう感じなのですが。なんかそういう風になりにくいところがある。純粋でいよう、といって他を排斥するうちにしばんじゃうところもあるかもしれないし。学際、っていう混ざっている間にわけわかんなくなっちゃうところもあるかもしれないし。いっほう、交流しなくてもすごいエントロピーの低い、深みのある研究を積み上げる人にはあこがれてしまうし。

また、文部省が数学など基礎学問を中高で減らしていくのにも危機感を感じるので、「数学は何をするにも大切」という主張を数学の外の社会にしますが、いっほうで「私には数学は暗い思い出しかない」という人がたくさんいるのも知っているし、その人たちの気持ちもわかります。これもなんとかした方がいいでしょう。

きっと、それに答えようとして「教育の多様化」っていうのがとなえられているんだろうけど、なんか視点が「社会のニーズ」的で苦しい。だれにでもわかるように、っていうのは多様化と相容れない。対応措置としていろんな選択科目を作っても、経済効果的な動機で学生が選択し、先生が教えるんだったら、やっぱり多様にならない。

自分にできることは、恨み、軽蔑、自己卑下、自分の利益、周囲の評価、といったものにとらわれないようにして、なれあわず批判しあいつつしかも尊敬し合って進んで行くしかないのだが、それがなかなかむずかしくてはやいてしまいました。

自分が感じるこの数学のおもしろみ・広がり、少しでも人々に伝えることを願って、文章を終えます。