高校生のための数学春季特別講座

曲面にはどんな模様が描けるか

諏訪　立雄

これは 1998 年 3 月 24 日 - 26 日，北海道大学理学部で行われた「高校生のための数学春季特別講座」の筆者の表題の講義草稿に加筆したものです.

1.　曲面のオイラー数

この話は, 数学の分野では幾何学のうちの「特性類」と呼ばれるものに関係したものです.　特性類というのは, 空間あるいはその上の幾何学的対象の大域的な性質を表す量です.　最も基本的なもののうちの一つとしてとしてオイラー数と呼ばれるものがあります.　ここでは特に曲面の場合を考えてみましょう.　曲面は 2 次元の空間で, 次のようにいろいろなものが考えられます.

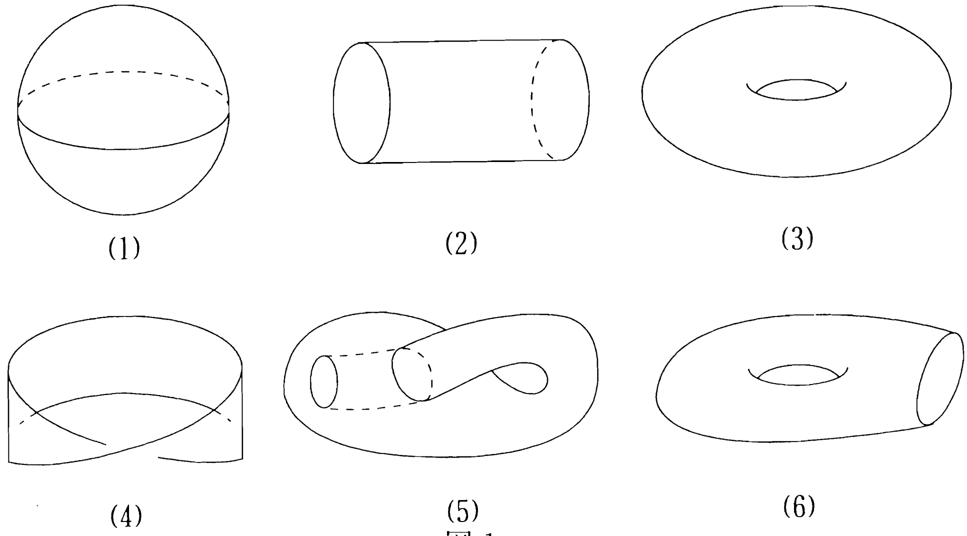


図 1

(1) は球面です.　以後これを S^2 と書きます.　(2) は円筒でこれはつぎの図 2 (1) の四辺形 ABCD の辺 AB と CD をはりあわせて得られます.　(3) はトーラスと言われるもので, 円筒からさらに二つの円 AC と BD をはり合わせて得られます（図 2 (2)）.

以後これを T と書きます. ここで図 2 (4) のように AC と BD の向きを変えて張り合わせると, (5) の図形を得ます.　これはクラインの壺といわれるもので 3 次元空間のなかでは, 自分自身に重なってしまうような絵しかかけません.　図 2 (3) のように, 四辺形 ABCD の辺 AC と DB をはりあわせると (4) のようなメービウスの帯が得られます.　(6) はトーラスから円盤を取り除いた曲面でこれには縁があります.　(2), (4) の曲面にも縁があります.　また (4), (5) は裏表の区別は付けられませんが, 他の例で

は裏表の区別を付ける事が出来ます.

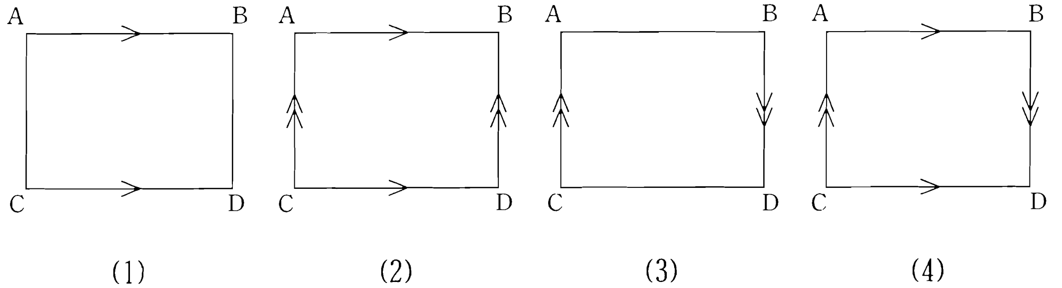


図 2

ここでは主に, 裏表の区別がつけられる曲面でしかも縁のないものを考えます. このような曲面は “向き付け可能な閉曲面” といわれるものですが, 以下単に曲面というときはこのようなものを指すことにします. このような曲面にはどのようなものがあるか考えるのですが, その際曲面は柔らかいゴムのような物質で出来ているとし, 連続的な変形で移り変われるものは同じと考えることにします. ただし変形の際, 自分自身に重なることはないとします（図 3）. 曲面の曲がり方を問題にする立場もありそれはまた重要で興味深い問題です. 実際後に述べるオイラー数はこの曲がり方とも深く関係します. 前者の立場を位相幾何学的, 後者を微分幾何学的ということにします.

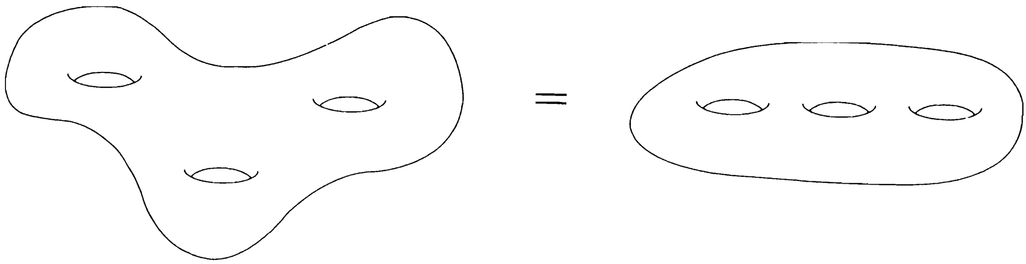


図 3

そうすると, 位相幾何学的立場では向き付け可能な閉曲面全体は “穴の数” で分類できることが分かっています.

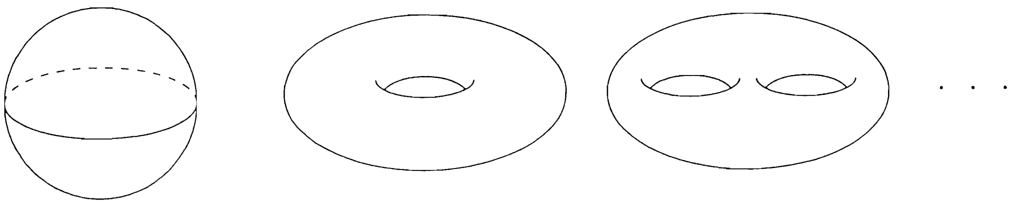


図 4

トーラスの作り方はすでに述べましたが, 穴の二つある曲面は図 1 の (6) の曲面を二つ用意して, 縁に沿ってはり合わせて作ることが出来ます. あるいは次のような 8 角形の各辺を指定したようにはり合わせても得られます. 一般に穴の数（これを曲面の種数といいます）が g 個の曲面は $4g$ 角形の各辺を適当にはり合わせることによって作ることが出来ます.

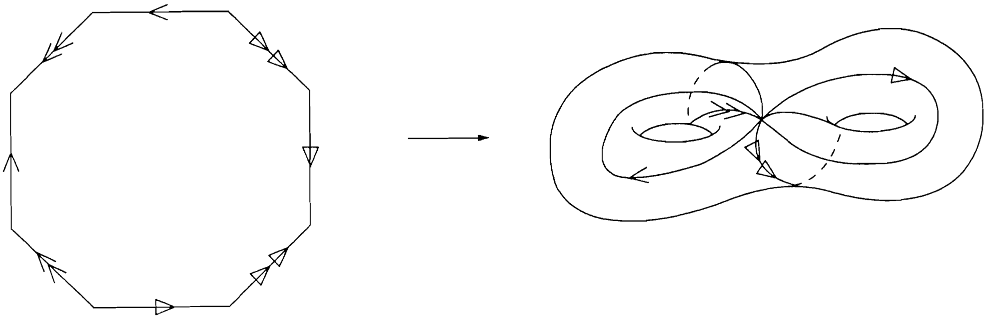


図 5

このように, 穴の数が曲面の "複雑さ" を表していると考えられます. 曲面 S の種数を g とすると, これは S の最も基本的な特性類である "オイラー数" $\chi(S)$ と呼ばれる数と次のような関係があります：

$$\chi(S) = 2 - 2g. \tag{1}$$

オイラー数は様々な解釈ができ, それを定義する方法にも色々あります. 普通, 空間の骨格から作られるホモロジー群と呼ばれるものを用いて定められますが, 今の場合, 曲面の "三角形分割" により求められます. 曲面を次のように三角形に分割し,

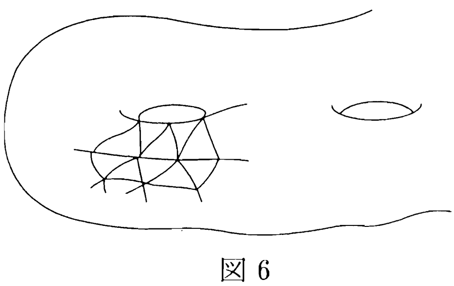


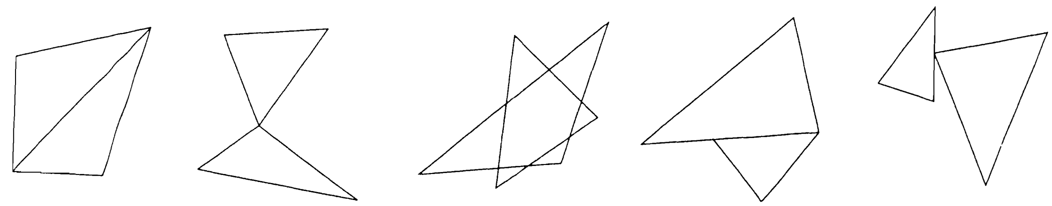
図 6

頂点の数, 辺の数, 面の数をそれぞれ n_0, n_1, n_2 とすると

$$\chi(S) = n_0 - n_1 + n_2 \tag{2}$$

として計算できます. ここで, 曲面を三角形に分割する際, 二つの三角形が共通点をもてば, 共通部分は一つの頂点または一つの辺となるようにします. 例えば二つの三角

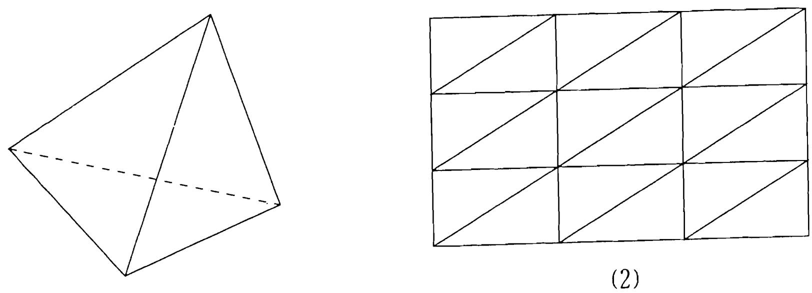
形の位置関係のうち，つぎの (1), (2) はよいのですが (3), (4), (5) のようにはならないようにします．



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

図 7

このように曲面を分割すると (2) 式の右辺は分割のとりかたによらないことが示されます．　例えばつぎの図において



(1)　(2)

図 8

(1) は球面 S^2 の三角形分割を与えるので，$\chi(S^2)=4-6+4=2$ となります．　また (2) はトーラス T の三角形分割を与えるので，$\chi(T)=9-27+18=0$ となります（いくつかの頂点と辺は同一視されるので，数えるとき注意して下さい）．　これらはまた，(1) 式とも整合しています．　オイラー数はまた，“胞体分割” といわれるものを考えても計算できます．　これは先に述べた曲面を $4g$ 角形から構成する方法に直接関係したもので，これによると (1) 式は直ちに示すことが出来ます．

オイラー数は曲面だけではなくもっと次元の高い空間についても考えることが出来，その空間の性質をあらわす重要な量です．　また，さきに位相幾何学的立場，微分幾何学的立場について述べましたが，これらの曲面は代数幾何学においては代数曲線，複素解析幾何学においてはリーマン面（一次元複素多様体）と呼ばれるもので，種数 g は代数的，あるいは複素解析的な量としても解釈できます．　このようにオイラー数は数学の多くの分野と深く関わっています．

2.　ベクトル場

つぎにオイラー数の全く別の解釈を与えます．　それは空間上のベクトル場の特異点の指数と関係させるもので，今ではポアンカレ - ホップの定理と呼ばれています．

これは歴史的には，ポアンカレが曲面の場合を証明し，ホップが一般の次元について証明したものです．

ベクトルというのは，例えば速度とか力のように，大きさと方向と向きをもった量で，普通矢印で表されます． 曲面 S の各点 p で S と接するベクトル $v(p)$ が定まっており，それらのベクトルが連続的に変わっているとき，S 上に（連続な）ベクトル場 v が与えられているといいます． 例えば地球上の各地で風力，風向の水平成分を観測して，それをベクトルで表すと，地球上にベクトル場が定まります．

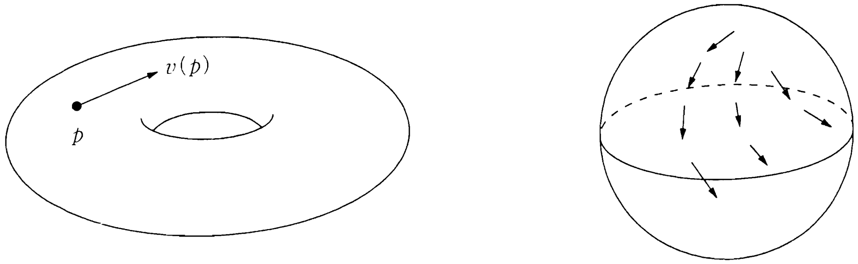


図 9

少し考えると，曲面 S 上に存在しうるベクトル場はある種の規制を受けることが分かります． 例えば，球面上では，どの点でも 0 にならないベクトル場を構成することは不可能ですが，トーラス上ではこれが可能であることなどです． そこでベクトル場が 0 になる点（このような点をベクトル場の特異点といいます）に注目してみます． 次に (x, y) 平面の原点に特異点を持つベクトル場の例をいくつか挙げてみます．

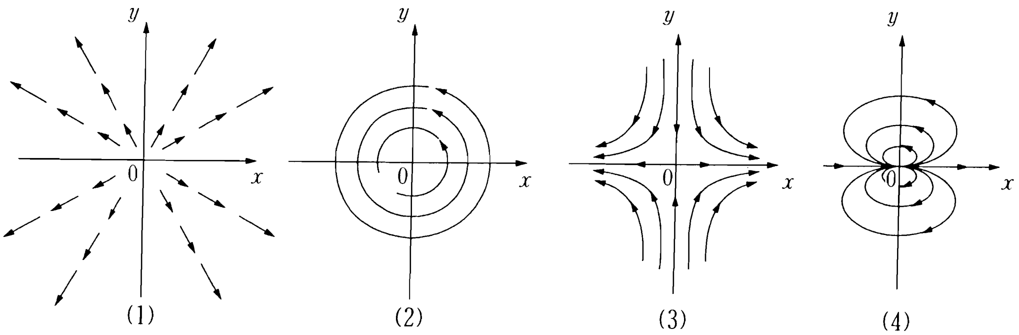
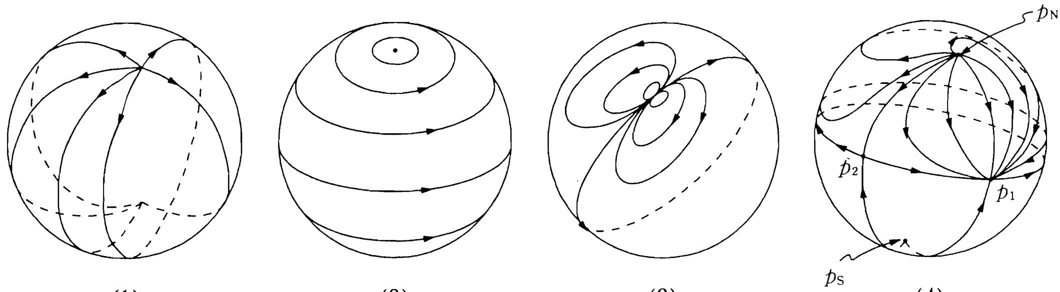


図 10

点 (x, y) に於けるベクトルの成分は，(1)，(2)，(3)，(4) ではそれぞれ (x, y)，$(-y, x)$，$(x, -y)$，$(x^2 - y^2, 2xy)$ で与えられます． ベクトル場を表すのにその積分曲線を書いた方が分かりやすいことがあります． 積分曲線というのは各点での接ベクトルがベクトル場のその点でのベクトルに一致するような曲線です． これは数学的には，ある微分方程式を解くことによって求めることができます． ベクトル場が曲面上与えられると，曲面はそのベクトル場の積分曲線で埋め尽くされます． 図 10 においても (2)，(3)，(4) は積分曲線で表してあります． 例えば球面上には次のようなベクトル場が考えられま

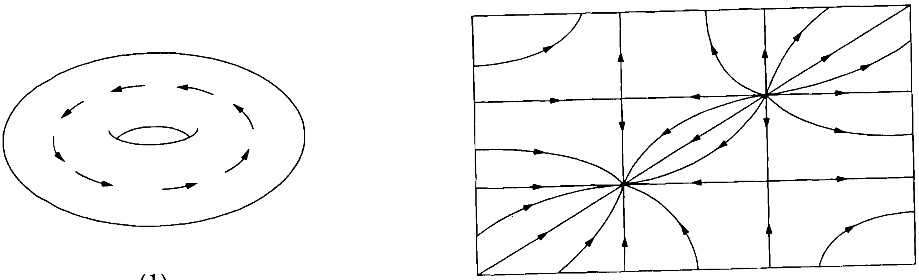
す（(4) の南半球では北半球のと対称とします）：



(1)　(2)　(3)　(4)

図 11

またトーラス上には次のようなベクトル場が考えられます：



(1)　(2)

図 12

(2) はトーラス上に描くと複雑になるので展開図です.

特異点の近くでのベクトル場の複雑さを量るものとして，次のような "ポアンカレ - ホップの指数" があります.　ベクトル場 v の特異点 p が孤立しているとし, その周りに小さい円を考えます.

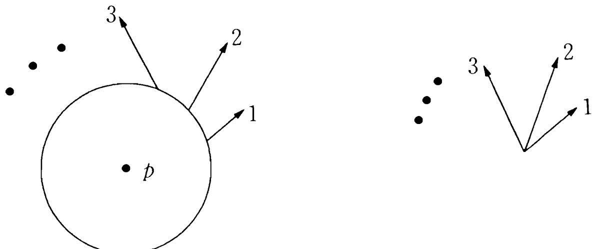


図 13

円周上の点でのベクトルを反時計回りに追跡し, 点が一周したときベクトルが何回まわるかを数えます.　もし, 反時計回りに n 回まわったら, ベクトル場 v の p における（ポアンカレ - ホップ）指数 $\mathrm{PH}(v,p)$ を n とし, 時計回りに n 回まわったら, $\mathrm{PH}(v,p) = -n$ とするのです.　例えば図 10 では, $\mathrm{PH}(v,p)$ はそれぞれ，(1) 1, (2) 1, (3) -1, (4) 2 となります.

次に述べる公式はオイラー数のような大域的な量と指数のような局所的な量の間の関係を与え, 両者がどのように互いを規定しあうかを表すものです：

定理（ポアンカレ - ホップ）． 曲面 S 上のベクトル場 v は孤立特異点のみを持つとし, それらを $p_1, \dots, p_r$ とすると,

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{PH}(v, p_i) = \chi(S) \tag{3}$$

が成り立つ.

この公式は色々な解釈が出来, また様々な方法で証明出来ます. 例えば, 左辺がベクトル場に依らないことを認めれば, 三角形分割をとり, 次のようなベクトル場を考えれば確かめられます.

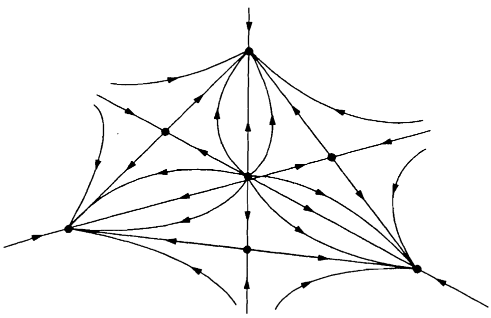


図 14

つまり, 上のベクトル場は各頂点で指数が 1, 各辺の中点で 指数が -1, 各面の重心で指数が 1 の特異点を持つので, 指数の和は丁度オイラー数になるのです（(2) 式参照）. 図 11, 12 の各例について (3) 式が成り立っていることを確かめてみて下さい.

課題：種数 2 の曲面上に, 指数が 1 の特異点を二つ持ち, 指数が -1 の特異点を四つ持つベクトル場を構成してみて下さい.

さきにオイラー数は曲面の曲がり方とも関係するといいましたが, これは曲面の曲率といわれるものを曲面上で積分するとオイラー数になるという公式で, ガウス - ボンネの定理といわれるものです. ポアンカレ - ホップの定理, ガウス - ボンネの定理などはいろいろな場合に拡張されており, 多くの重要な結果を生み出す源となっています.

3. 特異点を持つ曲面

今まで考えた曲面はつぎのような大きな特徴を持っています. つまり, 曲面のどの点 p をとっても, その点の近くは円盤と同じと考えられるのです.

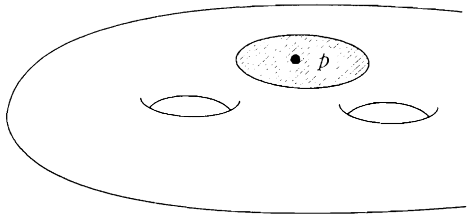


図 15

一般にもっと次元の高い場合にもこのような空間を考えて，これを（特異点のない）多様体といいます． つまり n 次元の多様体というのは各点の近くが n 次元のユークリッド空間（の超球）と同じようになっている空間で，曲面は 2 次元の多様体というわけです． ところがいわゆる特異点を持った空間も自然に沢山現れてきます． 例えば関数の零点集合などはこの典型的な例です． このような空間の解析幾何学的構造は大変興味深い問題なのですが，ここでは位相幾何学的側面をみてみましょう． 例えばトーラス上の円 C を一点 p につぶすと次のような図形を得ます：

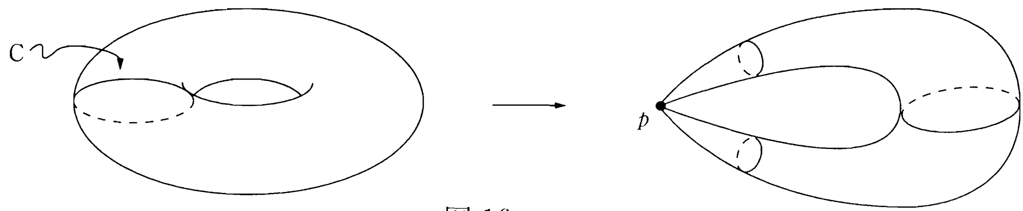


図 16

この曲面では p 以外の点の近くは円盤と同じですが p の近くでは二つの円盤が一点 p でくっついたものとなっています． 特異点には様々なものがありますが，これはその一例です． 特異点でない普通の点を通常点といいます． なお，上の例はまた，球面の二点 p_N と p_S をくっつけて得る事もできます：

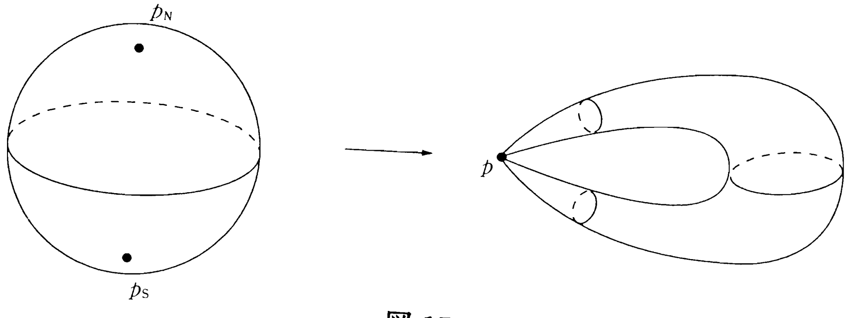


図 17

図 16 のように見ると，特異点を持った空間は，特異点を持たないものが "退化" したものとも考えられ，また図 17 は特異点の解消の（逆の）操作と見ることも出来ます．

このような特異点をもった曲面についてもポアンカレ - ホップの定理を拡張してみましょう． まずオイラー数ですがこれはやはり三角形分割をとることにより同様に定義出来ます． 但しこの際, 各特異点が三角形の頂点になるようにします． 適当な三角形分割をとることにより図 16 の曲面のオイラー数が 1 であることを確かめてみて下さい． つぎに特異点の近くで与えられたベクトル場の指数について考えてみましょう．

それはベクトル場の性質のみならず, 空間の特異点の性質をも反映しているはずです．

ポアンカレ - ホップの指数にはいろいろな解釈があり, それらに応じて自然にこれを拡張する方法があるのですが, ここでは, ポアンカレ - ホップの定理がそのままの形で成り立つように拡張してみましょう． それは "シュワルツ指数" と呼ばれるものです．

簡単のため図 16 の例を考えます．

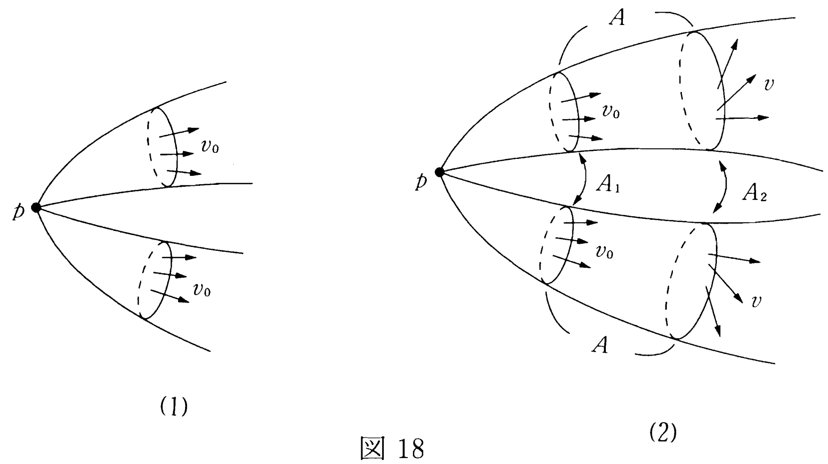


図 18

まず, (1) のように点 p から "放射状" に出ているベクトル場（このようなベクトル場をラジアルベクトル場と言います）を v_0 とし，そのシュワルツ指数 $\mathrm{Sch}(v_0, p)$ を 1 とします（実はこれは 1 点 p のオイラー数と解釈出来るのですが）． 一般に v を p の近くで特異点を持たないベクトル場とするとき, (2) のように縁を持った曲面 A を考え，縁 A_1 の近くではラジアルベクトル場 v_0 を, 縁 A_2 の近くではベクトル場 v を考え, これらを A の内部に拡張することを考えます． そうすると, 一般に有限個の特異点 $p_1, \ldots, p_s$ を持つベクトル場 $\tilde{v}$ に拡張出来ることがわかっています． そこで v の p におけるシュワルツ指数 $\mathrm{Sch}(v, p)$ を

$$\mathrm{Sch}(v, p) = 1 + \sum_{i=1}^{s} \mathrm{PH}(\tilde{v}, p_i)$$

により定めます． p が S の通常点の時は, $\mathrm{Sch}(v, p) = \mathrm{PH}(v, p)$ となります． そうすると, つぎの公式が証明できます：

定理． 曲面 S は孤立特異点 $p_1, \ldots, p_s$ を持つとし, v を S の非特異な部分のベクトル場で, $p_{s+1}, \ldots, p_r$ に孤立特異点を持つとすると,

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Sch}(v, p_i) = \chi(S) \tag{4}$$

が成り立つ.

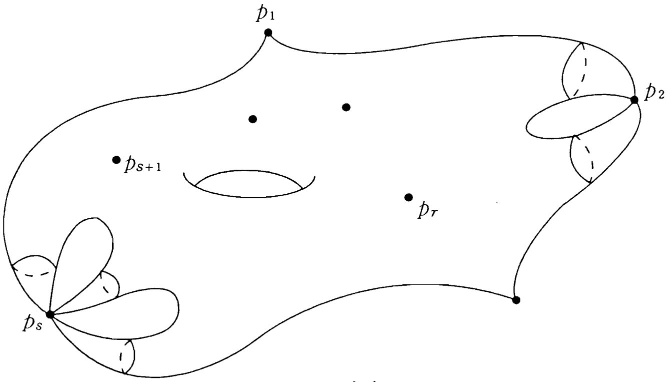


図 19

次の例は図 16 の曲面上のベクトル場の例です. (1) ではベクトル場は p 以外に特異点を持たず, p でのシュワルツ指数は 1 です（これを定義から確かめてみて下さい）.

(2) は図 11 (4) の二点 p_N と p_S をくっつけて p として得られます. この例ではベクトル場は p 以外に p_1, p_2 に特異点を持ち, p, p_1, p_2 での指数はそれぞれ 1, 1, −1 なので, 和は 1 となります. これはもちろんこの曲面のオイラー数です.

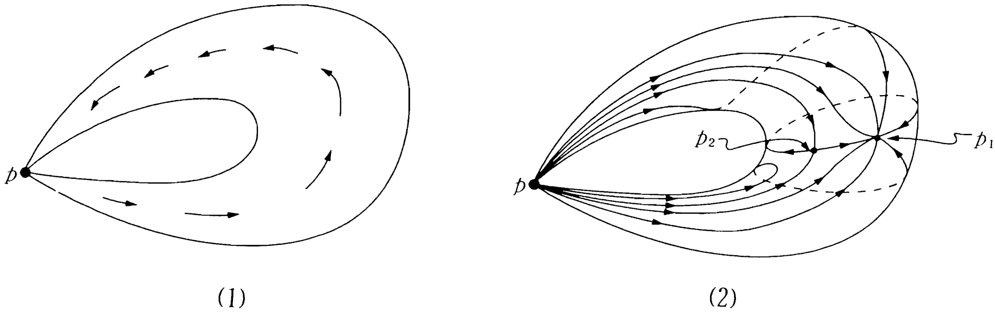


図 20

上の公式 (4) はポアンカレ - ホップの公式 (3) を曲面が特異点を持つ場合に拡張したもので, これはさらに一般次元の特異点を持つ多様体とその上の（任意の特異点を持つ）ベクトル場についても同様に行えます.

ポアンカレ - ホップの指数の別の拡張である “仮想指数” と呼ばれるものを考えると, ポアンカレ - ホップの定理の別の形の拡張が得られます. ただしこの場合, 仮想指数の和はオイラー数とは別の大域的な量となります. これと先の公式 (4) を組み合わせると, ガウス - ボンネの定理の拡張が得られます. ここには, 特異点に付随した重要な不変量であるミルナー数と呼ばれるものが自然にあらわれます. J.-P. Brasselet,

D. Lehmann, J. Seade および筆者による最近の特異点を持つ多様体の特性類に関する研究はこの延長線上にあります.

上に述べたオイラー数は特性類と呼ばれるもののほんの一例です．　一般に多様体（特異点を持つものを含め）を考えると, それの大域的性質を表す量がその多様体のホモロジー（あるいはコホモロジー）群の元として定められます．　ベクトル場のような幾何学的な対象がその空間上に存在すると，その特異点に対して定まる局所的な量があり，さきの大域的な特性類と微妙に絡み合ってくるのです.

参考文献

関連した参考書としては多数あり, どれをリストすべきか難しいところですが, 例えば

[1] 加藤十吉, 位相幾何学, 裳華房

[2] 河田敬義, 位相数学, 共立出版

[3] I. M. シンガー, J. A. ソープ, トポロジーと幾何学入門, 培風館

を挙げておきます．　本稿に直接関係したこと, また最近の進展についてはつぎの [4] あるいは [5] 及びその文献表を参照して下さい．　本稿は特に [4] と重複する部分があります.

[4] 諏訪立雄, 特性類の局所化とは ?, 数学のたのしみ, no. 6, April, 1998, pp. 101-111.

[5] T. Suwa, Indices of Vector Fields and Residues of Singular Holomorphic Foliations, Hermann, Paris,1998（志賀浩二氏による紹介 : 数学のたのしみ, no.11, February, 1999, p.136.）

（すわ たつお，北海道大学大学院理学研究科数学専攻）