極座標と鋸

９州大学 ６本松 数理 吉田正章

平成１３年１０月６日 秋季総合分科会 市民講演会 於９州大学

今までの市民講演会の記録を眺めますと、皆様よおっく準備されたのでしょう、本当にやさしい処から始められて、興味深い例などを交えながら、漸進的に高級になっていきまして、終った時にはその分野の歴史から発展の過程そして今後の展望まで明らかになっておりまして、誠に立派なのですが、果たしてこの内容が一時間に収まったのか、聴衆はどの程度理解できたのかと考えますと、私は甚だ懐疑的になるのであります。まあ、講師は卓越した技量を持ち、聴衆は高い理解力を持っておられたのでしょう。

私は今まで色々な講演を聞いてきましたが、理解できた記憶がありません。何が退屈と言って、分からない講演ほど退屈なものはない訳ですし、途中で出るのも気が引けるし、と言う理由で、もう最近は殆んど人の講演を聞かなくなりました。

と言う経験を持つ私が喋るのですから、難しいことは一切述べません。だからと言って今日の話が全員に完全に理解してもらえるとは思っておりません。驚かれることはありませんよ。私は大学の１年生と２年生に線形代数と微分積分を教えるのを生業にしております。学生は白蓮（しらばす）と称する詳細な授業計画を前もってわたされてますし、教科書も指定してありまして、長年の経験のある教師が丁寧に教えるのですが、残念ながら理解してくれる学生は半数にも満たないでしょう。勿論私の学生の時を思い出しても、状況は全く同じでした。よう御座いますか、教師が何を喋るのかがあらかじめ分かっていて心の準備が出来ていても人の理解度というのはこの程度なので御座いますよ。まして今日は私が何を言い出すのやらさっぱり分からない状態でいきなり始める訳ですから、どんなに私が努力してやさしく話をしても、聴衆がいかに熱心でも、何かの都合で御理解頂けない人がいらっしゃるでしょう、あなたがたまたまそうでも決して悲観なさる必要はありません。

今日は平面の座標を二通り述べてそれらを比べます。皆さんが多分よくご存知の普通の座標と、極座標と言われる奴です、ちゃんと今から復習し

ますから、心配しないで下さい。これら２つの比較それだけをします。数学のある分野を大所高所から眺めるのでなく、なんでこんな特殊なことだけをしゃべるのかと思われるでしょう；別に深い理由はありません、市民講演会で喋れという命令の電話がかかってきた時、私はある友達と何年来の問題を極座標変換を利用して解こうと努力していたのでした。それだけです。

平面上の座標とはなんでしょうか？ 数学とは何か出てきた時に

「そもそも＊＊とは何であろうか」

と元に帰って考える学問ですから、と言うよりもこの考えこそが数学を直接利用しない人達にも学校で数学を教えている理由でしょう。と言う訳で座標が出てきたら「知ってる」とか「習った」とかで済まさずに「そもそも座標とは何であろうか」と考えるのです。

平面の点の場所を数字を２つ使って表すこと

です；１つでは足りません、３つは要らないでしょう。何を阿呆なことを言っておるのか、俺を馬鹿にする気かとおっしゃる方は、認識不足です。このことに初めて気が付いたのはDescartes(1596 - 1650)ということになってます。しかし、京都の町の住所を見ますと、そんなことは昔から日本で、中国ではずっと前からみんな知っていたことだと思います、欧州の数学者だけが特別に頭が悪かったのでしょうか、私は数学史には疎いので本当のことは知りませんが、何しろそう言われておりまして、日本語でデカルト座標、英語では冠詞desを省いてCartesian coordinatesと言います（発音に気を付けて下さい、いい加減にやると「母ちゃん」になります)。原点をここにとりまして、東にx北にy行った点を(x,y)と表そうと言う訳です。ここで落ちこぼれられると私も辛い、分からなかったら手を挙げて下さい。ほっほう、今日の聴衆は理解が早いですねえ。じゃあ、ちょっと発展しまして、西に行ったらxは負だと思いましょう、南に行ったらyは負だと思いましょう。２１世紀になったのですから、俺は数は正の奴しか認めないという人はいらっしゃいませんよね、ああ、よかった。この座標が入った平面を(x,y)平面と言いましょう。方向と言えば、欧州では日の出ずる方向orient即ち東、中国（とその属国の一つである日本）では指南と言う位で南でしたが、いつ頃から北が代表みたいなことになったのでしょうね、私は知りません。

場所を表すのには、東にいくら行って北にいくら行くという流儀だけでなく、原点を通る傾きθの直線上を原点からr行くというやりかたもあります；京都札幌等の都会でなく海や砂漠の上とか草原で羊を追って生活している人だとこの方が自然でしょう。このように点を(r,θ)で表すのをモンゴル座標と言うかというと、言いません、極座標表示といいます。polar coordinatesの訳ですが、いつも私が気になるのはpolar bearの訳が何故北極熊なのか「極熊」でしょうに、確かに発音しにくいですねえ。ここでちょっとお約束をしておきます：直線の傾きθは-90度から90度までとし、rが負の時はこの直線を逆向きに行くと考えます。この座標が入った平面を(r, θ)平面と言いましょう。度付きはいやだ、俺は弧度法を知っているというインテリの方はθは$-\pi/2$から$\pi/2$までと考えて下さい、何も変わりません。なんで角度が出てくると突然ギリシャ文字θを使うのか、私は知りませんが、高等学校の教科書はすべてそうなっているので、それに従いました。θはthetaと綴りまして英語を除くすべての欧州語では「テタ」と発音すると思いますが、英語では舌を歯と歯の間に挟んですき間から息を出すと言う、至難のことをしなければいけないので、余り実際的ではありません、かと言って「した」と発音してはいけません舌は挟むものです。笑って頂き有難う御座います。

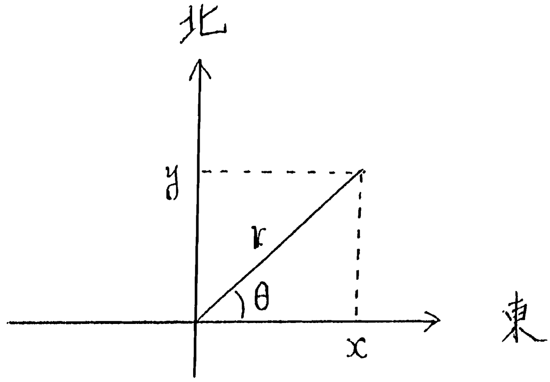

Figure 1: (x, y)平面

今日の話題はこれら二種類の座標の関係を調べることです。というと受験数学をまだ忘れてない人は、知ってる知ってる

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

でしょう、とおっしゃるでしょうが、ここには受験数学なんか何十年も前に忘れたとか、そんなこと知らんとおっしゃる人も大勢いらっしゃるでしょう。ですから、こんな三角関数なんて難しいものは今日は使いません。大体三角関数が出てきた処で数学が嫌いになったと言う人は多いのですよ。

「sine, cosineとかタンゼントというのもあったわねえ」

「ええ？タンジェントよね」

「うちの高校の先生はタンゼントと言ってたもん」

「ねえ、ねえ、あなた黙ってないで教えてよ」

という手合いの会話に何度私は泣かされたでしょう、私は町で三角関数を話題にするのは嫌いです。何しろ上の変換公式を書いてもうこの２種類の

座標の関係はすべて分かったと思ってしまう人はかなり頭の軽い人です、もしそういう言い方があればです。「点を表すのに (x, y) でも (r, θ) でもどっちでもよかろうもん、それがどうかしたと」と言うのが普通の反応でしょう。よく使う変換だけど、なんとなく気持ちの悪い関係だ、しかし深く考えないでも一応計算は出来るから他のことで色々忙しいことでもあるし今までほっておいた、というのが数学を道具・技術として使う職業に付いていらっしゃる多くの方の反応でしょう。

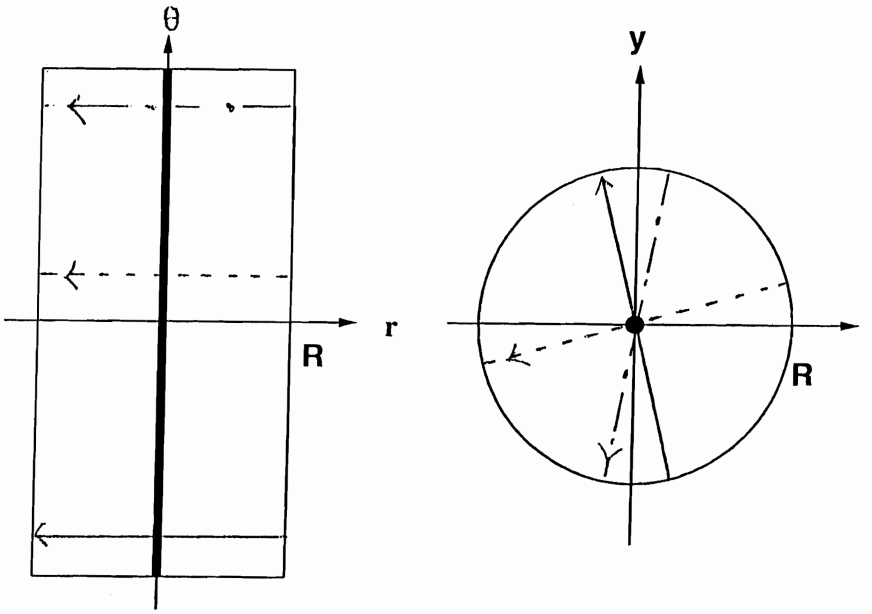

Figure 2: (r, θ) 平面と (x, y) 平面

さあ、関係を調べてみましょう。(x, y) 平面は東西南北に無限に広がっております、(r, θ) 平面は下は -90 度上は 90 度までですから左右に無限に伸びた帯みたいになっていますね。無限に広がってますと図が描きにくいので (r, θ) 平面は左は $-R$ 右は R までとしましょう。すると対応するする点は (x, y) 平面では半径が R の円内です。(r, θ) 平面のこの帯と (x, y) 平面の円内部の点の対応をよっく調べましょう。(x, y) 平面の傾き θ の直線上を東北から原点に向かって行って原点を通り過ぎて行きますと (r, θ) 平面では右上方から水平に左に向かって行きますね。(x, y) 平面の傾き 0 の直線即ち x 軸上を東から原点に向かって行って原点を通り過ぎて行きますと (r, θ) 平面では右辺真中から水平に左に向かって行きますね。(x, y) 平面の傾き $-\theta$ の直線上を南東から原点に向かって行って原点を通り過ぎて行きますと (r, θ) 平面では右辺下方から水平に左に向かって行きますね。(x, y) 平面の原点は

近付き方によって、(r,θ) 平面の θ 軸即ち r 座標が零のこの直線の色々の点に近付きますね。別のいい方をすれば θ 軸は (x,y) 平面の原点一点に対応してますね、

「原点からの距離が零やけんどっちの方を向いとっても原点たい、当たり前やろもん」

といわれればそれまでですが、(r,θ) 平面では θ 軸は何か特別な直線なのです。

次に (x,y) 平面の直線の傾き θ が 89 度 90 度となっていきますと直線は立ってきまして遂に y 軸になりますね、これを北から原点に向かって行って原点を通り過ぎて行きますと (r,θ) 平面では帯の上端を右から水平に左に向かって行きますね。また (x,y) 平面の直線の傾き θ が -89 度 -90 度となっていきますと直線は立ってきまして遂に y 軸になりますね、これを南から原点に向かって行って原点を通り過ぎて行きますと (r,θ) 平面では帯の下端を右から水平に左に向かって行きますね。「あんたもくどかねえ」とおっしゃらずに聞いて下さいここが肝心の所ですから。y 軸に対応する所が (r,θ) 平面の帯の下縁と上縁にありますね、しかも y 軸のこの当たりに対応するのが、ここところ、この当たりに対応するのが、ここところですから、帯の下縁と上縁は左右が丁度逆の点が y 軸の同じ点を表している訳です。(r,θ) 平面の帯を、或電視遊戯で画面の上縁のこの当たりにぶつかると下縁のこの当たりから出てくる電視台の画面だと思ってもらうとちょうどいいのです。電視遊戯が普及してこの説明がしやすくなりました。画面の上縁も下縁も別に特別のことは起こっていません；直線の傾きを -90 度から 90 度とする替わりに、例えば、-80 度から 100 度と採ったら画面を 10 度だけ上に巻き上げ（スクロールす）ればいいのです。

ここまでお聞きになって、私が相当努力して外来語をそのまま片仮名で表示するのを避けていることにお気づきのことと思います。ちょっとここで私が最近発見した統計的事実を述べさして下さい：

$$\text{片仮名使用頻度} \sim \text{頭脳劣化係数}$$

そうです、片仮名使用頻度と頭脳劣化係数は比例するのです。最近の外国映画の日本での題名もそうですが、大学に於きましても、この会場においでになる時に御覧になったかも知れませんが、新しい建物の名が「ベンチャービジネスラボラトリー」とか「リセウム」ですからね、大学のお偉方の頭もこのくらいになりますともう狂牛病なんか恐くない位劣化が進んでいると思われます。

電視台の画面を使ってもう少し対応を調べましょう。(x,y) 平面上に原点は通らないが原点の近くを通る直線を考えましょう。これを (r,θ) 平面に

描きますと、直線の傾きは何でもいいのですが、例えば45度としておきましょう、するとやってみれば分かりますが大体このようなθ軸と$\theta = 45$度の直線を漸近線にする双曲線みたいな曲線になります。そうして直線を平行

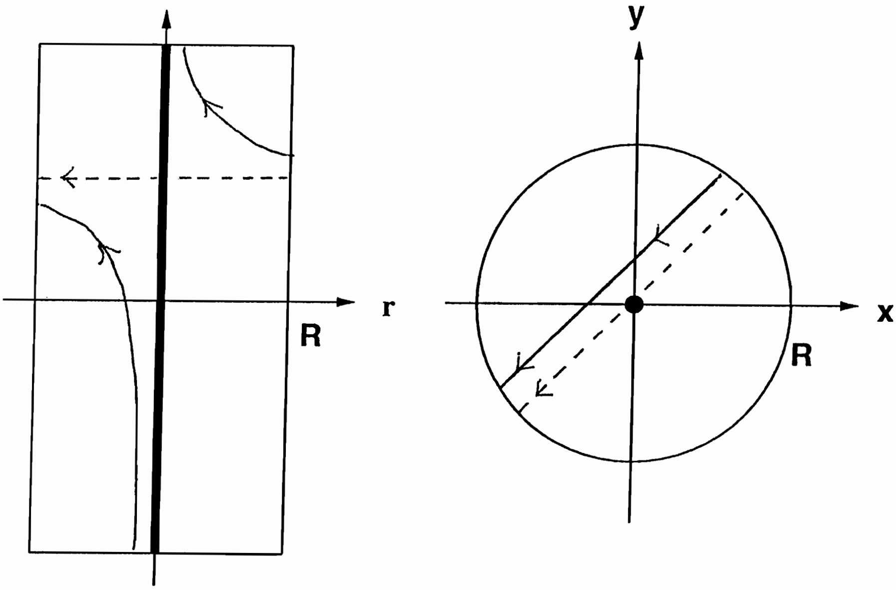

Figure 3: (x, y)平面の原点を通る直線に近い直線

移動して段々原点に近付けますとこんな風にθ軸と$\theta = 45$度の直線に近付き遂に切れてθ軸と$\theta = 45$度の直線そのものになってしまいます。（Figure 3参照。）これは

$$\text{方程式} \quad st = k$$

で表される(s, t)平面内のグラフ（反比例のグラフとして小学校で習います）がkを段々0に近付けると、双曲線が遂には2直線になっていまうのと、全く同じです。

もうちょっとこれら2つの座標の関係を調べましょう。(x, y)平面上に小さな円を描いてそれを(r, θ)平面でみてみましょう：殆んどの場合(r, θ)平面では少し歪むだろうけどまあこんなもんでしょう、しかしその円の中に原点が入ってますと、ここから始めましてね、θが0から90度、91度はこちらから読みますから-89度で半径rが負、180度はこちらから読んで0度で半径rが負、となって結局θ軸の近くを2重に通っていますね。

なかなか思いがけないことが起こっているでしょう、もっと色々あるのですが切りが無いですから、この辺で止めましょう。何しろ分かったこと

は、(x,y) 平面の原点とそれに対応する (r,θ) 平面の θ 軸では変なことが起こっているが、それらの外ではちゃんと１点には１点が対応していて何も変なことは起こっていないということです。

電視遊戯の仮想的画面で作業しないでも (r,θ) 平面の帯を切りとって上端と下端を逆方向に貼り付ければいいではないか、と思われる方が多いでしょ；またそうして出来上がったものは裏と表の区別が無いので有名な帯で目眉薄（Möbius）帯と言われるということまで（耳学問で）ご存知の方も多いでしょう。しかしですね、これは甚だややこしい問題を含んでいるのですよ。

話はちょっと変わりますが、私が極座標が出てくる度に思い出すことがあります。それは子供の頃製材所に行って見た鋸です。製材所には大きな木を切る丸鋸 — こんなかっこうをしていて、ここに歯が付いていて、ぐるぐる回っているのです — と余り大きなものは切らない帯鋸です。この帯鋸は薄い鋼で出来てまして、回転する所が上と下にこういう風になっていまして、ぐるぐる回っていまして、材木をここに当てて切るのです。製材所のおじさんというよりも帯鋸を作ってるおじさん — おばさんかも知れません — は何も目眉薄先生に教えられなくても、帯鋸は筒には作りませんで、一度こんな風に捻って我々の言葉でいうところの目眉薄帯にしてあります。何故なら、そうすれば歯が倍の長さ取れますし、従って発熱が押えられますし、摩耗が少なくなるからです。今我々が問題にしている円盤と (r,θ) 平面の帯が丁度製材所の２種類の鋸に似てますね、それで私は極座標が出てくる度にあの大きな部厚い丸鋸をぎゅうと伸ばして薄い帯鋸を作っている様な気がするのです。ですからこの講演の題目が鋸になっているのです。

先ほど「(x,y) 平面の円盤から原点を抜いたものと、(r,θ) 平面の帯の上下を反対に貼りつけて、θ 軸を抜いたものの各点はちゃんと対応している」と言いました。それでは、丸鋸の中心に穴を開ければ（普通は穴が既に空いてますが）ぎゅうと伸ばして帯鋸を真中から切ったものになるかというと、そうはなりません。勿論帯鋸を真中から切っても二つに分かれたりはしませんが、円筒にはならないで捻られているのです。ちょっとやってみましょうか（といって、目眉薄帯を切って見せる）。

「各点がちゃんと対応している」

ということと

「我々の住んでるこの空間内で変形できる」

ということは違うのです。最後になって何を訳の分からんことを言うのかと叱られそうですが、この区別を分かって頂きたい。

そのために暫く帯に付いた虫になったと思いましょう。虫にとって帯が生活空間のすべてなのです、帯の外に何か空間があることは想像も出来ないのです。こいつには円筒状になった帯と目眉薄帯の区別はつきます；二匹で手を繋いで這って元に帰ってきた時左右がひっくり返っているか否かで判断できます。しかし、虫には円筒状になった帯と二回捻りの帯（これが目眉薄帯を真中で切った奴です）の区別はどうしても付かないのです。ですから、穴あき丸鋸をぎゅっとひっぱった円筒状のものと帯鋸を中心線で切り開いたものは虫には全く同じものだけれど、我々の住んでいるこの空間に置かれている状態は違うのです。

最後は少し難しい話になりましたが、普段簡単・当たり前と思っていることも、よく考えると分からぬことがあり、発見があるということを、平面の座標を例えに説明しました。この市民講座をお聞きになって、普通の座標と極座標の関係は決して自明なものではないのだなあ、丸鋸と帯鋸の関係に似てるということだったなあといつか思い出して下されば望外の幸せです。

（よしだ　まさあき，九州大学大学院数理学研究院）