書　評

R．クーラント，H．ロビンズ共著，
I．スチュアート改訂，森口繁一　監訳

数学とは何か
—考え方と方法への初等的接近—
〔原書第２版〕

岩波書店，２００１年２月
ｘｘｉｘ＋６００　ページ，￥５８００＋税

本書は数学解説書として，２０世紀の古典である．初版は１９４１年であり，何回か版を重ねている．監訳者による日本語訳（岩波書店）が刊行されたのが１９６６年であり，どちらも長寿だった．１９９５年にI．Ｓｔｅｗａｒｔ教授の手になる原著の増補第２版が刊行され，その日本語訳が本書である．そのような「時代物」であるにもかかわらず，内容は極めて新鮮である．特に初版の序文の冒頭にあるいくつかの批判：例えば，数学教育が問題解決の空虚な訓練に堕している，数学の研究は過度に抽象化を強調している，応用や他分野との関連を無視している，などの言は，残念ながら現在の状況にもそっくりあてはまる．

もちろん「数学とは何か?」を定義することはできない．この本は多少の予備知識の下に，数学的に考えてみようという意慾をかきたてつつ，数学専攻の学生・教員にとって，必要最低限度の内容をまとめた著述である．

今回の改訂では，Ｓｔｅｗａｒｔ教授が第Ⅸ章．最近の発展（内容は後述）を追加した．訳は単に日本語に直すだけでなく，原著者と連絡の上，不備を訂正したり，パソコンによる立体視できる図を加えたりして，原著以上の本になっている．

このような本の書評に，内容の項目を羅列しても意味が少ないが，概要を眺めるために，まずそれを記述する．

第Ｉ章　　自然数（数列，数学的帰納法など）
第Ｉ章 への補足 整数論（素数，互除法など）
第Ⅱ章　　数学における数系（有理数，実数，複素数）
第Ⅱ章 への補足 集合の代数
第Ⅲ章　　作図法, 数体の代数（作図不能問題，作図法）
第Ⅳ章　　射影幾何学，公理論，非 Ｅｕｃｌｉｄ 幾何学
　　　　（含，円錐曲線；付録．４次元以上の幾何学）
第Ⅴ章　　位相幾何学（曲面のトポロジー）
第Ⅵ章　　函数と極限
第Ⅶ章　　最大と最小（初等幾何学的な問題から変分法まで，最後に石鹸膜の実験）
第Ⅷ章　　微分積分学（含，微分方程式）

第Ⅷ章への補足（無限級数と無限乗積など．末尾に，素数定理の統計的方法による求め方，がある）

第Ⅸ章　最近の発展（節は順に，素数表現多項式，Ｇｏｌｄｂａｃｈの予想と双子素数，Ｆｅｒｍａｔの最終定理，連続体仮説，集合論の記号，４色問題，Ｈａｕｓｄｏｒｆｆ次元とフラクタル，結び系，力学の一問題（後述），Ｓｔｅｉｎｅｒの問題，石鹸膜と最小曲面，超準解析）

付録．補足，問題，および演習問題．

もちろんこのような項目名だけでは，内容の紹介に十分でない．多少補足すると，第Ⅰ章や第Ⅳ章，非Ｅｕｃｌｉｄ幾何学の節には，数の体系や数学思想に関する歴史的な記述がある．第Ⅱ章には，実数論のほか，無限集合の濃度，超越数などの話題も含まれている．第Ⅲ章にはいくつかのルーレット曲線も論ぜられている．第Ⅴ章には次元の概念，不動点定理，Ｊｏｒｄａｎの曲線定理，回転指数に基づく代数学の基本定理の証明なども含まれている．第Ⅵ章には，無限連分数の例なども記述している．

これらの素材は，初版当時に，米国での高等教育への一つの提言ないし貢献として，Ｃｏｕｒａｎｔの野心的な意図に基づくものであろう．

時代が変わって，特に近年の日本では，この本のうち第Ⅲ章～第Ⅴ章の幾何学方面の題材が手薄になってきた．もしかすると，数学専攻の学生でさえ，小学校から大学までどこでも正規の課程では，まったく教わった記憶のない内容が多いかもしれない．しかし評者はあえて，この本の内容は，これからも数学および関連分野にたずさわる者にとって，最低必修課目といいたい（もちろん十分条件ではない）．

帯にあるとおり，「読むたびに新しい発見がある」本である．例えば与えられた３円に接する円を作図する，Ａｐｏｌｌｏｎｉｕｓの問題について，反転法を活用した鮮やかな作図法（Ｐ．１７２）は，評者にとって一つの驚きだった．

第Ⅸ章の補充のうち，Ｆｅｒｍａｔの最終定理と４色問題とは，永らく未解決の問題の代表だったから，それに対する解決の解説は当然だろう．もちろん詳しい証明は，高度に専門的だが，一般的な輪郭をよく解説している．

第Ⅸ章で「力学の一問題」というのは，中間値の定理による存在証明として，昔からよく論ぜられている（実はＷｈｉｔｎｅｙの提出）次の問題である：

列車が出発駅から次の駅まで任意の仕方で動く．ただしその運動は前もって正確にわかっているとする．車両の床に軸で固定され，前後に摩擦なしに自由に回転する棒がある．列車が出発する瞬間にある角度におけば，着駅まで棒が床に倒れないように置くことができる．

ただしこの結論について，１９７６年にＰｏｓｔｏｎが異議を唱えた．ある角度で出発したとき，最終的に，ある臨界角以上では前に，それ以下では後に倒れるとしても，その臨界角の付近で最終値が不連続になり，中間値の定理が使えないという趣旨である．

しかし監訳者は，初版の議論を誤りときめつけ，疑念の残る図を入れたような増補の記述は，読者に誤った印象を与え，改訂者にもマイナスになると感じ，何回か郵便やｅメールで交換した結果，改訂者の同意をえて，この批判は生かしつつも，原著の議論も条件つきで正しいことを明らかにするよう，訳を修正している．図もパソコンで計算し直したものに置き換えている．これは一例にすぎないが，このように細部までゆきとどいた名訳で

ある．

最終章の増補はお話し的である．最後の超準解析の解説もある意味では「物足りない」．しかし超準解析が広く受け入れられない理由を，「それを評価するのに，伝統的な解析学とは非常に違った数理論理学に重点を置いた素養を必要とするため」と述べているのは卓見と思う．

改訂者が述べている通り，この半世紀の数学の進展は大きく，ある程度「常識」として知っていて損はしない題材も豊富である．カオス，対象性の破れ，などの他，離散数学，計算量の理論，微分位相幾何学，など思いつくままに多くの項目を挙げることができよう．ただしこれらについては，他にも解読書があることだし，内容についてある程度の妥協はやむをえないであろう．

ともかく，これだけの大著をまとめ，増補して読者の心のかてとした著者たちの意図は見事である．「このような本を書ける人は日本にも大勢いる」かもしれないが，「実際に書く人はいないだろう」という批判は（監訳者あとがきより），痛烈である．

大部の本であるが，単なる教養書でなく，幾何学や解析学の入門教科書としても有用だし，専門の学者にも多くの示唆を与える名著といってよい．

（一 松　信）