ルベーグ積分と面積 0 の不思議な図形たち

新井仁之

1　はじめに

本稿は，2001 年 12 月 23 日と 24 日の二日間にわたって開催された第 7 回湘南数学セミナーでの講義の概要です．この講義では,「面積とは何であろうか」という中学生でも理解できる問いかけからはじめ，前半ではいわゆるジョルダン測度の定義を変形したものを紹介しました．この変形はルベーグ測度とジョルダンによる面積の定義の違いを浮き彫りにするために導入したもので，通常のジョルダン測度の定義と同値になっています．さらにルベーグ測度の考え方をできるだけ丁寧に説きました．講義の後半では，ハウスドルフ測度，面積 0 のフラクタル図形を動画を見せながら解説し，最後に掛谷問題に関連した動画・静止画を用いて，ベシコヴィッチ集合の構成ならびに実解析学の未解決問題について説明しました．

「面積とは何か」という初等的な問いかけから，実解析学の最先端の話題まで紹介するこの講義プランは,『数学のたのしみ 11 号』(日本評論社，1999 年 2 月) に掲載された拙稿『測度』をもとにして立てたものです．なお講義では，聴衆が主として中学生，高校生であること，それから二日間という時間的な制約もあるため，定理の証明はほとんど述べませんでした．そのかわり，定理の意味と背景，定理がどうして成り立つかを詳しく説明しました．

2　面積とは何か

この講義では，長さ，面積，体積に関する解析学について，特に面積に焦点を絞ってお話したいと思います．

面積とは何であり，どのように求めることができるしょうか？

広辞苑によれば，面積の定義は次のものです：

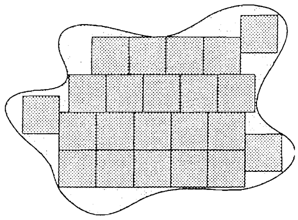

図 1: 一辺 ε の正方形による敷き詰め

「一定の面の広さ．閉曲線で囲まれた平面・曲面などの広さを表す数値」

しかし，ここでいう「広さ」の数学的な定義が何かといわれると，それに答えることは難しいのではないでしょうか．19 世紀末，この問題をジョルダン[1]という数学者が研究しました．

2.1 面積の数学的な定義 (ジョルダン測度)

ジョルダンによる面積の定義を紹介しましょう．ただし，話をわかりやすくするために，もともとのジョルダンの定義とは表現等を変えています．

まず，$R = [a, a+\varepsilon) \times [b, b+\varepsilon)$ を一辺 ε の正方形といい，その面積 $|R|$ を ε^2 と定めます．ただし便宜上，空集合 $\varnothing$ も正方形の一つと考え，$|\varnothing| = 0$ と定めます．ここで注意すべきことは，一般の図形の面積の定義があり，正方形 R の面積が ε^2 になるというのではなく，正方形 R に対して ε^2 をその面積と決めたのです．これを元に一般の図形の面積を定義していきます．たとえば平面内の図形 D を考えます．

まず，小さい正の数 $\varepsilon > 0$ に対して，一辺 ε の正方形を互いに重なり合わないように，D の中に並べます (図 1 参照)．ただし，正方形は x 軸に平行になるように並べることにします．並べ方にはいろいろあり，それによって正方形の面積の総和も変わりますが，一辺 ε の正方形の面積の総和のうち最も大きい値を $\underline{a}_\varepsilon(D)$ とおきます．もし図形 D が小さく，このような正方形が一つも入らない場合は $\underline{a}_\varepsilon(D) = 0$ とします．

[1]Camille Jordan, 1838–1922, フランスの数学者.

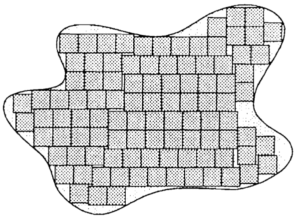

図 2: 一辺 $\varepsilon/2$ の正方形による敷き詰め

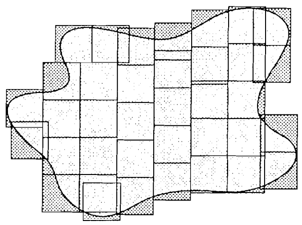

図 3: 外側からの被覆

さてここで，図形 D が複雑であれば，どうしてもすき間ができてしまいます．しかし，より小さな正方形，たとえば一辺 $\varepsilon/2$ の正方形で敷き詰めれば，すき間は前よりも少なくなります[2]．

そこで，ε をより小さくしていって得られる $\underline{a}_\varepsilon(D)$ の中で一番大きい値を

$$\underline{a}(D)$$

とおきます[3]．

$\underline{a}(D)$ は図形 D の面積の内側からの近似としては非常に良い値を取っています．しかし，それが本当に D の面積に到達しているかどうか，すなわちすき間が完全に埋まっているかどうかは保証できません．そこで，今度は一辺が ε の正方形を x 軸に平行になるように並べて D を覆います．ただし正方形どうしは重なっていてもよいことにします．

[2]正確にはすき間が大きくはならないというべきかもしれません．

[3]正確には「上限」と呼ばれている値です．本稿ではその定義は省略します．上限は数学の記号では，$\sup\limits_{\varepsilon} \underline{a}_\varepsilon(D)$ と書かれます．

そして，いろいろ覆ってみて，その一辺 ε の正方形の面積の総和の最も小さい値を $\overline{a}_\varepsilon(D)$ とおきます．

さらに ε をいろいろ取って得られる $\overline{a}_\varepsilon(D)$ の中で一番小さい値[4]を

$$\overline{a}(D)$$

とおきます．すると，感覚的には

$$\underline{a}(D) \leq \text{“}D\text{ の広がりの大きさ”} \leq \overline{a}(D)$$

ということがわかると思います．そこで次のような定義が考えられます．

定義 1 (ジョルダンの意味の面積)　D を平面内の有界な図形[5]とする．もし

$$\underline{a}(D) = \overline{a}(D) \tag{1}$$

であるとき，D はジョルダンの方法で面積が測定可能，あるいは**ジョルダン可測**な図形であるという．そして (1) の値 $\underline{a}(D) = \overline{a}(D)$ を $m_J(D)$ と表し，D のジョルダンの意味での面積，あるいは**ジョルダン測度**という．

2.2　ジョルダンの方法で面積が測定不可能な図形

ジョルダンの方法によって多くの図形の面積を測定することができます．しかしこの方法で面積の測定が不可能な図形もあります．その一つとして 2 次元ハルナック集合を紹介しておきましょう．

2 次元ハルナック集合 H は図 4 のように一辺 1 の正方形から十字の帯を除くという操作を何度も繰り返し行なって，この操作を無限回続けた極限として得られる図形です．

図 4 の操作で作られていく正方形の面積の総和を考えると

$$\overline{a}(H) \geq 1/4$$

[4]正確には下限を取ったものです．数学の記号では，$\inf_{\varepsilon} \overline{a}_\varepsilon(D)$ と書かれます．

[5]有界な図形とは，十分大きな正方形で囲むことができる図形のことです．

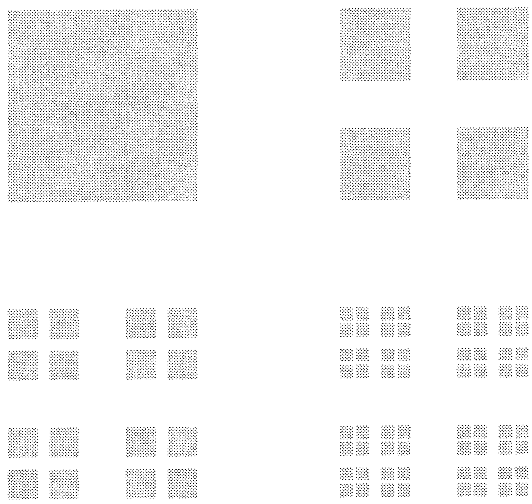

図 4: 2 次元ハルナック集合

となることがわかります．ところが，H はどんな小さな正方形も内部に含みえないので

$$\underline{a}(H) = 0$$

です．したがって，ハルナック集合はジョルダンの方法で面積測定不可能となります．

一般にあるパターンの操作を無限に繰り返して作られる図形の場合，ジョルダンの方法では面積が測定可能でなくなることがあります．

3　ルベーグの方法による面積の測定

1902 年にフランスの数学者アンリ・ルベーグは，無限の操作によって作られた図形の面積をも測定できる方法を考案しました．ここではジョルダンの面積の定義と比較しながら，ルベーグの方法を解説します．

ジョルダンによる面積の測定方法 (復習)

たとえ話でいうとジョルダンの方法では，一辺の長さがある正の数 ε より小さな正方形を作れない「ε の有限世界」というものがあると考えます．この世界で，一辺の長さ ε の正方形を使って図形 D を測定して

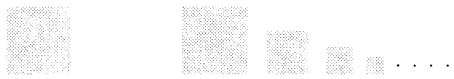

図 5: 左: ε の有限世界，右：ルベーグの無限の世界

もらったデータが $\underline{a}_{\varepsilon}(D)$, $\overline{a}_{\varepsilon}(D)$ です．そしてさまざまな「ε の有限世界」を訪ねてデータ $\underline{a}_{\varepsilon}(D)$, $\overline{a}_{\varepsilon}(D)$ を集め，それらの上限と下限をとったものが $\underline{a}(D)$, $\overline{a}(D)$ です．この二つの数値が一致するかどうかで面積の測定可能性を判定するのでした．

ルベーグによる面積の測定方法

これに対して，ルベーグはどんな小さな正方形をも作れ，しかも可算無限個の正方形を自由に扱うことのできる「無限の世界」があると考えます.「無限の世界」で図形 D を可算無限個の正方形で覆ってもらいます．そして可算無限個の正方形によるすべての覆い方を考え，D を覆う正方形の面積の総和の下限をとり，$\Gamma(D)$ と表します．

数学の記号で書けば,

$$\Gamma(D) = \inf\left\{ \sum_{j=1,2,\cdots} |Q_j| \ : \ D \subset \bigcup_{j=1,2,\cdots} Q_j,\ Q_j \text{ は } x \text{ 軸に平行な正方形} \right\}$$

です．ただし便宜上 $\varnothing$ も x 軸に平行な正方形の一つとみなし，$|\varnothing| = 0$ とします．$\Gamma(D)$ を D の**ルベーグ外測度**といいます (外側から近似して測った測定値という意味です)．明らかに

$$\Gamma(D) \leq \overline{a}(D)$$

となっています．次にジョルダンの考えたように，図形を内側から近似していきます．ただし，ハルナック集合のようにどのように小さい正方形も含まない図形もあるので，少し工夫がいります．まず有界閉集合を定義します (定義は本稿では省略します)．そして,

$$\gamma(D) = \sup\left\{\Gamma(K) : K \subset D,\ K \text{ は有界閉集合}\right\}$$

とします.

定義 2 (ルベーグの意味の面積) [6] D を平面内の図形で，$\Gamma(D) < \infty$ とする．もし

$$\gamma(D) = \Gamma(D) \tag{2}$$

であるとき，D はルベーグの方法で面積が測定可能，あるいは**ルベーグ可測**であるといい，(2) の値 $\Gamma(D) = \gamma(D)$ を $m(D)$ と表し，これを D のルベーグの意味での面積，あるいは通常**ルベーグ測度**という．

$\Gamma(D) = \infty$ の場合は，すべての $N = 1, 2, \cdots$ に対して，

$$D \cap Q_N \qquad (\text{ただし} \quad Q_N = [-N, N] \times [-N, N])$$

がルベーグ可測であるとき，D はルベーグの方法で面積が測定可能，あるいはルベーグ可測であるといい，

$$m(D) = \infty$$

を D のルベーグの意味の面積，あるいはルベーグ測度という．

D が有界図形の場合，次のことが成り立ちます：

$$\underline{a}(D) \leq \gamma(D) \leq \Gamma(D) \leq \overline{a}(D) \tag{3}$$

したがって，有界図形 D の面積が

ジョルダンの方法で測定可能 $\Longrightarrow$ **ルベーグの方法で測定可能**

であり，

$$m_J(D) = m(D)$$

であることがわかります．

また，ルベーグ測度については次の定理が導かれます．

---

[6] ただしルベーグがもともと考えた定義ではなく，それと同値なよく知られた条件を定義として採用してます．

定理 3　$E_1, E_2, E_3, \cdots$ がルベーグの方法で面積が測定可能であり，$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$ であれば $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ もルベーグの方法で面積が測定可能であり，$m(E_1) < \infty$ ならば

$$m(E) = \lim_{n \to \infty} m(E_n)$$

である．

この定理から，ハルナック集合 H はルベーグの方法では面積が測定可能であり

$$m(H) = 1/4$$

となることがわかります．

ここで，ジョルダンの方法とルベーグの方法がもたらす最も大きな違いをまとめておきましょう：

> **ジョルダンの方法は (可算) 無限回の操作で作られる図形に対してはあまり有効ではないのに対して，ルベーグの方法は (可算) 無限回の操作に耐え得る．**

4　ルベーグの理論と 20 世紀の解析学

ルベーグの理論は 20 世紀の解析学に大きな影響を与えました．たとえば，フーリエ解析，関数解析，確率論，偏微分方程式などです．本稿ではその詳細は述べられませんが，その一端はたとえば [新井] に紹介してあります．

5　掛谷問題とベシコヴィッチ集合

少し話題を変えて，変わった図形を紹介しましょう．それはベシコヴィッチ集合と呼ばれる面積 0 の不思議な図形です．じつは 20 世紀後半より，このベシコヴィッチ集合が実解析学の発展に多大な影響を与えております．

5.1　掛谷問題

次のような問題があります．

[掛谷問題]　長さ 1 の線分を一回転するのに必要な図形の中で面積が最も小さくてすむものは何か？

この問題は，大正から昭和初期に活躍した掛谷宗一[7]という数学者が考えた問題です．

掛谷問題の考えられた経緯を掛谷宗一の研究ノート，大正5(1916) 年 11 月 23 日の部分からの引用しておきます．

> 『§10 Smallest domain of revolution[8].　　5, 11, 23
>
> 藤原君[9]ガ正三角形ノ内転形ノ一ツノ model ヲ食堂ニテ一同ニ紹介セラシ時北条總長[10]ガ何心ナク発セラレタル奇警ノ一句アリ曰ク「此内転形ガ一回転スルニ要スル最小ノ場所ハ此正角形ナルカ」ト．予ハ側ニ在リテ之ヲ非常ニ興味アル質問ナリト感ジ直チニ自ラ次ノ如キ一般的ノ問題ヲ創作セリ．即
>
> 与ヘラレタル平面図形 X アリ．之ガ平面ニ一度回転シ得ル為ニ必要ナル最小面積ノ domain $D(X)$ ヲ求メヨ．
>
> 回転シ得ル domain ヲ凡テ X ノ domain of revolution ト呼ベバ問題ハ其内ノ smallest ノモノヲ求メントスルニ在リ.』

掛谷は最初図 6 のような図形が答えであろうと考えました．

しかし，その後，すぐに藤原と窪田によってこれよりも小さな図形があることが指摘されました：

> 『只今窪田[11]，藤原両君ヨリノ御注意ニヨリテ p.82 第一図ノ example ハ誤リナル事ガ発見セラレリ即高サ ℓ ノ正三角

[7] 掛谷宗一，1886–1947．掛谷は東京帝国大学理科大学を卒業後，第一高等学校，東北帝国大学を経て，昭和 10 年より東京帝国大学教授，また昭和 19 年からは初代統計数理研究所所長も兼任した．

[8] 最小の回転領域．

[9] 藤原松三郎，1881–1946．

[10] 北条時敬，第 2 代東北帝国大学総長．

[11] 窪田忠彦，1885–1952．

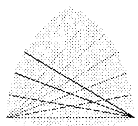

図 6: 掛谷の答え

図 7: 藤原，窪田の答え

形ノ方ガ尚 area ノ小ナル domain of revolution ナルヲ注意セラレタリ．尚窪田君ハ更ニ之ヨリ小ナル然レドモ convex ナラザル例ヲ示サレタリ.』(掛谷研究ノートより)

藤原は正三角形が最小の凸図形であろうと予想しました．そして，1921 年に J. Pál という人によって藤原の予想の正しいことが証明されました．しかし凸という条件を落とした場合の答えはわかりませんでした．この問題に，非常に興味深い解決を与えたのが，ロシアの数学者ベシコヴィッチ[12]です．

定理 4 (ベシコヴィッチ, 1928)　どんな小さな正の数 ε に対しても，面積が ε より小さく，しかもその図形の中で長さ 1 の線分を連続的に一回転できるものが存在する．

この定理は，じつは 1919 年に掛谷の問題とは無関係に，全く別の問題を考えている際に思い付いた次の定理から，容易に導かれるものでした．

定理 5 (ベシコヴィッチ, 1919)　あらゆる方向の長さ 1 の線分を含むような面積 0 の図形[13]が存在する．

[12] Abraham Samoilovitch Besicovitch, 1891–1970.
[13] 特に有界閉集合として構成される．

特に定理 5 で構成された集合のことをベシコヴィッチ集合といます．この集合はその構成方法と合わせて，20 世紀後半の実解析に多大な影響を与えました．

5.2 ベシコヴィッチ集合

講義では定理 5 の図形の作り方を紹介しました．紹介したのはペロンの木というものを母体に作っていく方法です．この方法自体がまた，多くの応用をもっています．(たとえば [新井] 参照）．

5.3 ベシコヴィッチ集合と多変数関数の解析

ベシコヴィッチ集合の構成方法から，1 変数関数と 2 変数関数の解析が本質的に違うことを示す例が 1971 年に C. フェファーマン[14]によって発見され，さらにそのアイデアを使っていくつかの応用も得られました：

1) 円板予想の否定的解決 (C. Fefferman, 1971)

2) 2 変数関数のある種のルベーグの基本定理が成立しないこと (Stein, Harmonic Analysis, Princeton Univ. Press, p.445 参照)

3) 2 変数の L^p 関数 $(p < 2)$ でフーリエ級数の球形和 (あるいは一般的にある種の楕円型作用素のスペクトル分解) が発散するものの存在 (B. S. Mitjagin, E. M. Nikišin, 1973)

etc.

5.4 ハウスドルフ次元とフラクタル図形

ベシコヴィッチ集合と現代の実解析との関わりをさらに述べておきましょう．次の定義をしておきます．

定義 6 (掛谷集合)　2 次元ユークリッド空間において，すべての方向の長さ 1 の線分を含むコンパクト集合を 2 次元掛谷集合という．また 3

[14]Charles Luis Fefferman, 1949–. 実解析，複素解析に関する業績で，1978 年にフィールズ賞を受賞．

次元ユークリッド空間において，すべての方向の長さ1の線分を含むコンパクト集合を3次元掛谷集合という．

ベシコヴィッチ集合は面積0の2次元掛谷集合の例です．

さて，複雑な図形の大きさを測るのに，**ハウスドルフ次元**[15]というものが使われます．これは，最近フラクタル幾何学でよく使われているもので，通常の次元を一般化したものです．

たとえば，点は0次元，直線は1次元，平面は2次元，空間は3次元です．ハウスドルフ次元は，0.4次元とか1.5次元などのように，整数でない次元を測ることができる尺度です．

$U \subset \boldsymbol{R}^d$ に対して，

$$d(U) = \sup\{d(x,y) : x, y \in U\}$$

とおきます．ただし $d(x,y)$ は x と y のなすユークリッド距離です．なお便宜上 $d(\emptyset) = 0$ とします．$\delta > 0$ と $A \subset \boldsymbol{R}^d$ が与えられたとき，$\boldsymbol{R}^d$ の部分集合 U_j $(j = 1, 2, \cdots)$ が

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j, \quad d(U_j) \leq \delta$$

をみたすとき，U_j $(j = 1, 2, \cdots)$ を A の δ-被覆であるといいます．

定義 7 (ハウスドルフ次元)　n 次元空間内の図形 E を考える．$t > 0$, $\delta > 0$ に対して

$$H_\delta^t(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} d(U_j)^t \ : \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j,\ U_j \text{ は } E \text{ の} \delta\text{-被覆}\right\}$$

とし，

$$H^t(E) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^t(E)$$

とする．このとき，ある $s \geq 0$ が存在し

$$s < t \implies H^t(E) = 0\ ; \quad 0 \leq t < s \implies H^t(E) = \infty$$

が成り立つ．この s を E のハウスドルフ次元という．

[15]ハウスドルフ・ベシコヴィッチ次元ともいう．

本稿では省略しますが，講義ではハウスドルフ測度，ハウスドルフ次元がどのような理由でこのように定義されるのかを解説し，いわゆる自己相似集合のハウスドルフ次元の求め方(Hutchinson の定理)と，カントル集合，2次元カントルダスト，コッホ曲線，シェルピンスキー・ガスケット等のフラクタル図形が生成されていく様子を動画を見せながら説明しました．解説は[新井]に，また動画は

http://www4.ocn.ne.jp./~arai

にあります．

6 掛谷問題

デーヴィスが次のことを証明しました：

定理 8 (デーヴィス, 1971) 2次元掛谷集合のハウスドルフ次元は2である．

さて，空間でも掛谷集合が考えられます．体積0 の掛谷集合も作ることができます．次の問題が現在専門家により研究されています．

[掛谷予想] 3 次元掛谷集合のハウスドルフ次元は3 か？

この問題は今のところ未解決です．現在，次のことは知られています．

定理 9 (ヴォルフ, 1995) 3次元掛谷集合のハウスドルフ次元は少なくとも5/2 以上である．

掛谷予想は，実解析のいくつかの未解決問題と関連していることが最近わかってきました．たとえば3 次元空間において，

1) フーリエ変換のボッホナーリース総和法に関する問題が肯定的に解ければ，掛合予想が肯定的に解ける (T. Tao, 1999).

2) フーリエ変換の制限問題が肯定的に解ければ，掛谷予想が肯定的に解ける (J. Bourgain, 1991).

3) 掛谷極大関数の L^p 評価に関する予想が肯定的ならば，掛谷予想が肯定的に解ける (J. Bourgain, 1991).

etc.

これらの問題は，2 変数関数の解析と 3 変数のそれとは違うことを示しています．

7 あとがき

講義ではいくつかの動画をプロジェクターを使って見せながら講義を進めました．講義に使った動画はHP

http://www4.ocn.ne.jp./~arai

に載せてあります．

また，講義ならびに本稿では定理の証明は省略しましたが，証明ならびにさらに詳しい解説は

[新井] 新井仁之，ルベーグ積分講義，— ルベーグ積分と面積 0 の不思議な図形たち—， 日本評論社

として刊行予定です．これは前掲の拙稿『測度』を本に膨らませたもので，湘南数学セミナーはこの本の原稿をもとに講義しました．

最後になりましたが，湘南数学セミナーでは日本数学会学術委員の小島定吉教授に多大なお世話をいただきました．深く感謝いたします．また，セミナーのチューターを務めてもらった東京大学の澤野嘉宏君ならびにさまざまなサポートをしていただいた湘南国際村センターのスタッフの方々にこの場を借りて感謝の意を表したいと思います．それから本稿に関して『数学通信』編集委員長の坪井俊教授には様々なお世話をいただきました．お礼申し上げます．なお本稿の図版の作製は新井しのぶによります．

（あらいひとし，東京大学大学院数理科学研究科）