２００２年日本数学会秋季総合分科会　市民講演会

まっすぐに歩いてみよう
- 測地線のはなし -

吉川　通彦
(島根大学)

２００２年9月２８日（土）

はじめに

「数学はおもしろそう．だけど…」と思っているみなさんに今日は「だけど…」のところを忘れていただいて，受験にも関係ないし面倒な数式もあまり出てこない数学の話を聞いていただきましょう．

これから本格的な秋を迎えると山陰地方もいい天気が続くようになります．まわりの山々はくっきりと晴れ渡り，海も群青色に澄み透ってきます．こんな季節に野山へハイキングやドライブに行ったとしましょう．丘を越え谷を渡ってどんどん進んで行くときに，できるだけ近道を通るように「まっすぐに歩きたい」と思ったりすることがあります.「まっすぐに歩く」というのはどういう風に歩くことなのでしょうか？

平面の上を歩くときは「直線」上を歩けばいいでしょう.「人生は山あり谷あり」などということをよく聞きますが，平面でなく，山あり谷ありという地形のところをまっすぐに歩くにはどうすればよいでしょうか？もっと大きく，地球上をまっすぐに進むとどうなるでしょう．

こんな話をしてみたいと思います．想像をたくましくして，のんびりと聞いてみてください．[1]

[1] 講演会当日は略図を示して説明しましたが，本稿では図はすべて省略します．

1　一輪車に乗ってみよう

1.1　円弧の長さ

２０インチの一輪車は車輪の「さしわたし」がほぼ５０センチです．この一輪車に乗ってペダルを１回転踏むと何メートル進むでしょうか？

これは小学校高学年の算数の問題ですね．円の直径（さしわたし）とその円の円周（周りの長さ）との比は，どんな円でもいつも同じ値になる（だろう）ということは紀元前のはるか昔から人類の文化として知られていました．この比の値のことを**円周率**と呼んでいますね．円周率はギリシャ文字の π（パイ）であらわすことになっていて，π の値は 3.141592 $\cdots$ とどこまでも続いて繰り返しもなく終わりもない不思議な数であることが知られています.「新しい学習指導要領では，この円周率を３であると教えることになったので，学力が低下する」という噂が広まり，文部科学省では，大臣をはじめ省の皆さんが「それは誤解です」と打ち消しに懸命です.

さて，円周率をおおよそ３だと思えば直径５０センチの一輪車の円周は約１メートル５０センチですが，正確な値を書くとすれば ５０π センチメートルとあらわすことになります．この一輪車の円周を使えば，何回ペダルを踏んだかによって走った距離が測れます.

1.2　曲がりくねった道（曲線）の道のり（弧の長さ）

地上に曲がりくねった道すじ**（曲線）**を描いておいて，それに沿って一輪車を転がせて行けば，一輪車の車輪がどれだけ回ったかを測ることによってこの道の**道のり（弧の長さ）**を測ることができます．このように考えれば，１つの曲線の上のある点から出発してどの地点まででも弧の長さを測ることができます．逆に，出発点からの道のり（弧の長さ）がわかれば，その曲線の上のどの地点にいるかがわかります．このようにして，曲線の上の点をあらわすのに，ある点からの弧の長さをパラメーター（変数）として使うことができるわけです**（弧長パラメーター）**．このとき，弧の長さが s である点を $\mathbf{x}(s)$ のようにあらわすことができます.

そのほかにも，ある点から出発してどれだけの時間で進んだかによって曲

線の上の点を決めることもできます(**時間のパラメーター**).この場合は,それぞれの点で通過した速さ(速度)と向きが決まるとその曲線が決まります.このときは,時間 (time) の頭文字 t を使って,曲線の上の通過時刻 t の点を $\mathbf{x}(t)$ のようにあらわします.このようなあらわし方をしておけば,微分積分学の手法をつかうことができます.

曲線や曲面のような図形の性質を微分積分学をつかってしらべる学問分野を**微分幾何学**と呼んでいます.

(微分積分をつかうと …)

(最初の約束を少しだけ破って,数式を使った説明を小さい文字で入れておきます.小さい文字の部分は飛ばして読んでも大丈夫です.)

通過時刻 t の点での速さと向きをあらわすのに微分法の記号を使って $\dot{\mathbf{x}}(t)$ のようにあらわすと便利です.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) \tag{1}$$

このとき,$\dot{\mathbf{x}}(t)$ は大きさと向きの両方をあらわしているのでベクトルと見なされます.これをこの曲線の**接線ベクトル**(または**速度ベクトル**)と呼びます.接線ベクトルの大きさ(通過した速度)をあらわすのに $|\dot{\mathbf{x}}(t)|$ という記号を使います.また,速度が変化する様子をあらわすベクトルは**加速度ベクトル**と呼ばれ,

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) \tag{2}$$

であらわされます.

時間のパラメーター t であらわされた曲線の上で,$t = 0$ の点(出発点)から $t = t_0$ の点までの弧の長さは,積分法を用いると次のようにあらわされます.

$$s = \int_0^{t_0} |\dot{\mathbf{x}}(t)|dt \tag{3}$$

同じように,弧長のパラメーター s であらわされている場合も接線ベクトルが得られます.

$$\mathbf{x}'(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{x}(s) \tag{4}$$

このときは,接線ベクトル $\mathbf{x}'(s)$ の大きさは曲線の上のどの点でもつねに一定で

$$|\mathbf{x}'(s)| = 1 \tag{5}$$

となっています.

2　マウンテンバイクで行こう

2.1　曲がり具合（曲率）

原っぱをマウンテンバイクで走ってみましょう．たとえば，マウンテンバイクの前輪に注目すれば，一輪車と同じ原理で地面に曲線を描きます．ハンドルを動かすことによって前輪が描く曲線は左右に曲がりながら進みます．

国道を走っていると，カーブにさしかかったときに $R = 200m$ などの道路標識（警戒標識）を見かけることがあります．これは，この道路の曲がり具合が半径２００メートルの円の曲がり具合と同じ程度であることをあらわしています．のこのとき，この地点でのカーブの**曲率半径**（道路技術者は曲線半径）が２００メートルであるといいます．曲率半径 R が大きいほど曲がり具合はゆるやかです．そこで，曲率半径の逆数を考えると曲がり具合のきつさをあらわすことができます．これを**曲率**と呼びます．曲率が大きいほどきつくカーブしているということになります．曲率を K であらわすとつぎの式になりますね．

$$K = \frac{1}{R}$$

曲線の上のどの点でも，その点を通って曲線にぴったり接している円を１つ描くことができます．この円のことを**接触円**といい，この円の中心を**曲率中心**といいます．　この円の半径が曲率半径なのです．曲率半径はこの点での進行方向（接線）と直角になっています．

ジェット機に乗って旅行するときも，その航路の時刻ごとの曲がり具合は同じように円の曲がり具合で近似することができます．そうすると，飛行航路の各点で曲率半径の逆数として曲率が測れます．このときの曲がり具合というのは，飛行距離の増加に対して飛行方向（すなわち接線ベクトル $\mathbf{x}'(s)$ ）がどれだけ変化したか，どれだけブレたかという量を示していると考えることもできます．

（微分積分をつかうと…） したがって，このベクトルを弧長パラメーター s でもう１回微分すればどの方向に向かってどれだけ曲がったかということをあらわせます．このベクトル

$$\mathbf{x}''(s) = \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{x}(s) \tag{6}$$

を**曲率ベクトル**と呼びます．このベクトルは進行方向すなわち接線ベクトル $\mathbf{x}'(s)$ と直交しています．ということは，曲線の上の点 $\mathbf{x}(s)$ から曲率中心の方向を指しているベクトルです．

飛行距離が s である点での曲率を $K(s)$ であらわすことにすれば

$$K(s) = |\mathbf{x}''(s)| \tag{7}$$

とあらわされることがわかっています．

マウンテンバイクで牧場の原っぱを走っているときは，ハンドルの切り具合によって曲率を実感することができます．

2.2 左右への曲がりと上下への曲がり

ところで，平らな面の上を走っているときは，マウンテンバイクの前輪が通った道すじは左右に曲がっているだけですが，山あり谷ありの原っぱを走ったときは地形の凹凸によってその道すじは左右だけでなく上下にも波打ち曲がってしまいます．このような場合に曲率を測ろうとすれば，この道すじにぴったり接している接触円は地面に水平ではなく傾いてしまうでしょう．

ある地点まで進んだときの接触円の半径を，地面に水平な方向と地面に垂直な方向に分解してみましょう．左右への曲がりは水平方向の成分であらわされ，上下の曲がりは垂直方向の成分であらわされることになります．

この接触円の半径の長さが曲率半径 R でしたから，曲率 $K = 1/R$ をこの半径の上に目盛るには，半径を $1/R^2$ 倍に縮尺（拡大または縮小）してみればいいはずです．実際，$R \times (1/R^2) = 1/R = K$ ですから．これに従って水平成分と垂直成分も $1/R^2$ 倍に縮尺してみれば，それらの成分の長さがそれぞれ左右の方向への曲率（**測地的曲率**）と上下方向への曲率（**法曲率**）をあらわしています．

2.3 「まっすぐな道」とは？(測地線)

いよいよ今日のお話の表題「まっすぐに歩いてみよう」について考えてみましょう．いま調べたように，山あり谷あり凹凸のある地面を進んで行くときには，その道すじのそれぞれの地点での曲がり具合（曲率）を地面に対して水平方向の成分（測地的曲率）と垂直方向の成分（法曲率）に分けること

ができます．実際の感覚でいえば，測地的曲率というのは左右の方向への曲がり具合をあらわし，法曲率というのは上下の方向への曲がり具合をあらわしていました．

このとき,「まっすぐに進む」というのはどういう意味でしょうか？

みなさんの普通の考え方が通用しそうです．まっすぐに進むというのは左にも右にも曲がらずに進むということですね．これを上の言葉でいえば，まっすぐに進むというのはその道すじのどの地点でも測地的曲率がつねにゼロになるような進み方をするということです．数学では，曲面の上を走るいろいろな曲線のうちで，どの点でもつねに測地的曲率がゼロであるようなものを**測地線**と呼んでいます．測地線にはどんなものがあるでしょうか．

例１．平面

平面の上では，左右に曲がらずまっすぐに進むと直線を描きます．すなわち，平面の上の測地線は直線です．

例２．円柱面

配管工事などでつかわれるパイプの表面のような曲面のことを**円柱面**といいます．円柱面の上では測地線はどんな曲線になるでしょう．

例３．球面

ボールの表面のように，中心から一定の距離にある点でできている曲面を**球面**といいます．球面の上では測地線はどんな形をしているでしょうか．

一般に，でこぼこがあるけれど表面が滑らかな物体を考えると，その表面は数学で曲面と呼ばれるものです．原っぱをマウンテンバイクで走ったときも，原っぱという曲面の上を走っていたと思うことができます．このような曲面の上で測地線というのは右にも左にも曲がらずに走ったときできる道すじのことです．

ある曲面があったとき，その上の測地線がどのような形をしているかをきちんとしらべるのは簡単ではありません．それでも，曲面の上のどのような点であっても，その点を通る測地線の方向を決めるとその方向に進む測地線がちょうど１本決まることがわかっています．これは平面の上の直線の場合

と同じですね.

3　地図と現地をくらべてみよう

3.1　地図の上に道を描いてみると

私たちは日ごろの生活の中で，実際の地形を地図に描いて活用しています．地図というのは，山あり谷ありという立体的な地形を平面の上に写した図形です．したがって，地図の上に描いてある道すじと実際の道すじとはその道のりもくい違ってくるでしょうし，曲がり具合も違っています．たとえば，地図の上で直線を描いたとすると，それを実際に現地で調べてみれば高い山の頂上を通過しているかもしれませんので，この直線に沿った道すじは現地では必ずしも直線にはなっていません．それでは，現地で山や谷を走って進む測地線を地図の上でしらべることができるでしょうか？

数学の歴史を遡れば，曲面の性質をしらべるためにその曲面の一部分を地図に描き，それを微分積分学を用いてしらべる方法（曲面の微分幾何学）が１８世紀にはすでに確立されています．この方法によると，測地線は地図の上では２階の連立常微分方程式の解としてあらわされることが示されます．

（微分積分をつかうと ⋯ ） 平面の座標は普通 (x, y) のようにあらわされますが，複雑な計算式を簡単な記号で処理することができるようにするために (u_1, u_2) と座標に番号をつけてあらわすことにします．x 軸の代わりに u_1 軸を，y 軸の代わりに u_2 軸をつかうのです．

このとき，$(u_1,\ u_2)$ 平面であらわされている地図の上に描かれた曲線は弧の長さのパラメーター s を用いるとつぎのようにあらわされます．

$$\mathbf{x}(s) = (u_1(s),\ u_2(s))$$

このとき，２つの関数 $u_1(s)$ と $u_2(s)$ がどんな関数かがわかれば地図の上の曲線が描けますから，それによって現地の道すじが決まるわけです．

くわしいお話は微分幾何学のテキストを見ていただくことにして，とりあえず測地線を求めるのがどんなに面倒なことなのかをご覧ください．

地図の上で１つの曲線 $\mathbf{x}(s) = (u_1(s),\ u_2(s))$ が測地線であるための必要十分条件は，２つの関数 $u_1(s)$, $u_2(s)$ がつぎの連立微分方程式をみたすことです．

$$\frac{d^2u_k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \left\{ {k \atop ij} \right\} (u_1(s),\ u_2(s)) \frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2.$$

ただし，

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right)$$

ここで，(g_{ij}) は曲面の第一基本量と呼ばれる関数であり，$\left\{ {k \atop ij} \right\}$ はクリストッフェル記号と呼ばれる関数です．

3.2 いちばん近い道

曲面の上の２つの地点を決めておきます．仮にこれらをＡ，Ｂとしておきましょう．地点Ａから地点Ｂまでを結んでできる曲線すなわち道すじはいろいろあるでしょう．これらの曲線のＡからＢまでの道のり（弧の長さ）をくらべてみましょう．

いま，１つの曲線 $x(s)$ がＡから出発してＢまで走っているとして，弧の長さのパラメーター s であらわされているとしましょう．これを地図の上に描いておきます．この曲線のまわりに，点Ａと点Ｂを結ぶ曲線の束を描いてみます．このき，この束の中の曲線についてＡからＢまでの弧の長さを比べてみましょう．

どんな束をつくっても，ＡからＢまでの弧の長さをくらべると元の曲線の長さが一番短いとすれば，元の曲線はＡとＢを結ぶ最短曲線であるということができます．すなわち，地点Ａから地点Ｂへのいちばん近い道です．実は，地図の上にこの曲線の束を描いておいて「変分法」と呼ばれる微分積分学の手法をつかうと，つぎのことが証明されます．

「ある曲線が２つの点を結ぶ最短曲線であるならば，それは測地線でなければならない」

すなわち,「いちばん近い道は測地線である」ということです．とくに平面の場合は測地線というのは直線のことでした．直線のときは上のことはわれわれが経験上よく知っていることですね．このことからも，測地線という概念は平面の上での直線という概念を曲面の上にまで一般化したものであることがわかります．

3.3 地球の歩き方

地球上のある地点に立つと，そこからの方位，すなわち東西南北が定まります．われわれが普通につかっている世界地図では，上が北の方位で下が南，

左が西の方位で右が東をあらわしています．横軸に緯度を縦軸に経度を目盛った地図です．ここ島根大学は北緯３５度２９分，東経１３３度４分の地点にあります．

この地図は文明社会の日常生活には便利なものとして活用されていますが，グローバリゼーションの時代には不便な面も出てくるようになりました．実際，国際線の航空路線をこの地図で描いたときは，地球上の２つの地点を結ぶ航空路の遠さを見当ちがいしてしまうこともあります．

そこで，今日は人工衛星から青い惑星「地球」を眺めてみましょう．すると，地球は１つの球面とみなすことができます．例３ で見たように，球面の測地線は大円弧でした．たとえば，赤道や子午線は地球上の測地線です．地球上のどの地点でもその点でそれぞれの方向に１本づつ測地線（＝大円）が通っています．ところで，２つの地点を結ぶ最短路線は測地線であるということでした．この事柄をつかうと，地球上の２つの地点を結ぶ最短路線が容易に描けます．

しかし，この最短路線を普通の世界地図の上に描くと一般には曲線になってしまいます．赤道と二回交わる波形の曲線になります．

地球を周回している人工衛星の通過経路をテレビなどで知らせるときの画面でおなじみのように，人工衛星の場合は一回りして元のところへ戻ってみると地球の方が自転によって動いていますので，少しづつずれて波打つ曲線で示されることになります．

逆に，世界地図の上で直線上を進んでも，それは必ずしも最短路線を進んでいないことになります．たとえば，島根大学から出発して地図を見ながら東へまっすぐに進んである地点に到着したとしましょう．人工衛星から眺めると地球上の北緯３５度２９分という小円の上を回ってきたことになります．地球上の最短曲線すなわち測地線は大円でしたから，実はもっと近道があったということがわかります．地図の上での「まっすぐ」と現地での「まっすぐ」の違いが出てくるわけです．

4　数学とは

4.1　人類のたからもの

私たちがものの個数をかぞえるとき，それがどんな品物であっても１，２，３，… と共通の呼び方で共通の記号を使っています．これは，われわれの日常体験を通じて頭の中に「ものの個数」という考え方があって，それは対象となる品物には関係なく共通する事柄であり，しかも，どんな時代のどんな人でも共通して経験する考え方であるということに基づいています．すなわち，「ものの個数」「個数をかぞえる」というのは人類の共通経験から生まれたひとつの抽象的な概念であり，これを共通の呼び方，共通の記号であらわすことによって簡単にお互いの意思を（数千年のときを超えてでも）伝えることができます．このようにして「数の概念」ができあがってきました．

これをつかえば，別の共通経験から「足し算」という概念もできあがります．２つのグループを１つにまとめると，そのグループに属している「もの」の個数はそれぞれのグループの「もの」の個数から「足し算」によって求めることができるという概念を共有し，記号化すれば簡単にそして誤解のないように伝え合い，また，自分でも計算してみて納得することができます．

このような身近な例でもわかるように，「個数」「足し算」というような人類が頭の中に共通に持っている概念を抽象化し，記号化することによって時代を超えた文化が生まれます．このような文化としての「算数」は人類の共有財産としてすばらしいたからものであることがわかります．

われわれの日常的な経験の中から，ある「共通の形」を取り出して，これを１つの概念として一般化し，さらに記号化することによって，人類が共通に理解できる論理的な作業を可能にするという頭脳の活動は，紀元前数世紀の昔から，いや，人類の精神活動が開始された当初から現代に至るまで行われてきました．このようにしてできている文化を，われわれは「数学」と呼んでいます．

実際，この講座の中でも「まっすぐに歩く」という日常の共通経験を「測地線」という曲面上の一般的な曲線の理論としてかたちづくり，これを記号であらわす方法を発見することによって，この概念をより深く理論的に追求できるようにしただけでなく，微分積分を使った計算によって実際的な応用ま

で可能な方法を提供しているのです．そして，測地線というのは平面の上の直線という概念を曲面というより広い範囲にまで一般化したものでした．それによって，直線の性質と共通の性質をもつ新しい概念が書きあらわされているのです．

数学の内容がどんなに難しいものでああっても，それはわれわれ人間に共通の経験に基づく何かを表現しているものなのです．ということは，人間の経験が元にあるわけですから，何かのきっかけで「数学」という文化は人類の活動に直接的な影響・効果をあらわす可能性をつねに秘めている文化であるということがわかります．

「人類のたからもの」として「数学」という文化を再認識しましょう．

4.2　未知への挑戦

「数学」という文化を上のように理解すると，われわれの日常経験をもっと深く観察することによってさらに新しい真実が，新しい数学が生まれてくるであろうということが予想されます．新しく発見された数学は，その共通性・抽象性の故に非常に一般的な自然界の，いや，宇宙の真実を書きあらわしています．そして，適用できる範囲は発見当初に予想された範囲を遙かに超える広がりをもつことができます．また，時代を超えて人類共通の文化として伝えることができます．

人類の長い歴史のそれぞれの時代に，数学という文化を通してつねに新しい概念の発見とその理論展開に挑み，宇宙に存在する真実を見つけ，それを書きあらわすために未知への挑戦に人生を捧げた多くの人たちがいます．そして，今もなお未知の真実が新しい発見を待っています．

これから数学を勉強される方は，数学というのは暗記科目などではなく，深い意味を秘めた真実を書き表している魅力溢れる文化であることを忘れないでください．

(きっかわみちひこ，島根大学学長)