原田 耕一郎 著,『群の発見』
岩波書店,２００１年,２４８ + xiv 頁

本書が出版された２００１年１１月，生協の書籍部で見付けて直ぐに，これは素晴らしい本だと感じた．以来（特に教室内部では学生，院生たちに）「日本の数学書の中でも特筆すべき名著」などと宣伝していたら，とうとう書評の依頼が来てしまった．改めて読んでみても，最初の印象に間違いはない．この書評などどうでもよいから，とにかく読んで頂きたい，というのが筆者の偽ざる気持ちである．特に若い人には是非読んでもらいたい数学書である．しかも，この本自体が若者たちに読んでもらいたがっているのだ．筆者も（残念ながらまるで若くはないのだが）大きな，しかも多くの意味で感銘を受けた．しかし一度筆者の頭を冷やすため，この本から受けた感銘を述べる前に，先ずはおおよその内容を見てみる．

第１章 シンメトリー，第２章 代数方程式の解法と群の誕生，第３章 ガロア理論，第４章 群論の基礎，第５章 ガロアの最後の手紙，第６章 アーベルとガロア，という構成である．最後に２頁の群の発見の歴史年表も付いている．５次以上の代数方程式が一般にはベキ根に依る解法を持たないこと（ルフィニ，アーベル，第２章），より一般にベキ根による解法の有無をガロア群の可解性により特徴づける（ガロア, 第３，４章），この辺りが本書の山場であろう．従って，基本的に有限群を中心として扱う．

第１章では群の概念を図形や集合の持つシンメトリーとして導入する．読者層としては（もちろん筆者も十分に楽しんだが）高校生も含めることができよう．全くの初学者への配慮は随所に十分なされている．特に群の概念の導入はゆったりとしており，対称性を前面に打ち出していて，数の演算による例を引き合いに出すことには注意がうまく配られている．対称群，交代群，正多角形のシンメトリー（有限巡回群，２面体群），正多面体のシンメトリー（多面体群）などがこの章の主役なのである．

第２章は３，４次方程式の解の公式と，それらに対してラグランジュが根の置換という概念を導入してベキ根解法の意味を考えたこと，さらにアーベル，ルフィニにより示された５次以上の一般方程式に対するベキ根解法の不可能性が語られる．ここまで必要とされる群論からの内容は，ラグランジュの定理や５次までの対称群の簡単な計算程度なので, それ以上の群論の基礎は後回し．４章までは寧ろ方程式論を中心に物語を進め，その中で群論を見事に動機付けてゆく．

第３章も，正規部分群などの概念の説明を次章に譲りながらも，方程式論を先に進めるためにガロア理論に入門する．一般的なガロア理論の解説としては，より多くの基礎を解説したくなるのであろうが，ここでも，方程式論をエサに，即ち「ベキ根解法」の意味を体論的に明確に定式化するためにガロア理論を勉強してしまう．

いよいよ群論の基礎を導入しなければ話が先に進まなくなったところで，第４章でラグランジュの定理，コーシーの定理から始めてシローの定理，対称群の共役類，５次までの対称群の部分群などについて学ぶ．これに続けて，ガロア理論-第２部-としてガロア群の可解性によるベキ根解法の可否の判定という，ガロアによる歴史的な仕事が述べられ，一件落着，一山超えるのである．

第５章は，楕円曲線の等分点のベキ根表示へと話が進む．ガロアが射影変換群，特に有限体上の２次の射影変換群の単純性などにまで決定的な理解をしていたことにはやはり驚かされる．この章は線形代数の丁寧な復習から始まる．第６章は手短かにまとめられたアーベルとガロアの伝記物語で，時代背景などを織り交ぜながら，本書全体を支配して持続するある種の緊迫した熱のような（スリルや興奮に似たというか，それを遥かに超えた）感動を裏打ちすることに見事に成功している．

「こういう風に教えてくれれば，僕にもガロア理論はもっと素直に生き生きと分かったに違いない！」本書を手にして最初に強く感じたことである．学生時代の自分のできの悪さを棚に上げるのは，教えて頂いた先生に失礼なのは百も承知であるが，正直な気持ちである．（そもそも編集委員会は何故代数の専門家ではなく，私に書評を依頼してきたのだろうか？お陰で精読してみることになり, 感銘は倍増, 大変感謝しております.）

例えば，おおむね同じような内容の本を書くとしてみよう．代数学の標準的な教科書にある内容を準備した上で，それに雰囲気を付け加えるため随所に歴史的なトピックなどを挿話としてはめ込む，という様なスタイルが考えられる．それは既に，味気ない本よりは結構優れた数学書となりうるだろう．ところが本書はそういうレベルを遥かに超えた名著なのである．

既にきちんと整備された無駄のない論理構成を持つ理論（若しくは方法論）の展開に則した記述や講義は，効率よく進むであろうし，総てを忘れても局所的には分かり易いかもしれない．しかし本書では，それらが発生・成長・進化してきた跡を，「数学を分かる・感じる」ことを主眼に置いて，無駄（回り道）をいとわずに辿っている．確かに抽象的で整備された表現の方が読者・聴衆の個人の感じ方・理解に従ってより深くより遠くへ理解が進む，ということも忘れてはいけないし，それこそ数学の持つ抽象性の有意義な面でもある．初学者に対する講義や書物においては，個々の数学概念が生まれてきて定式化されるまでにどれだけの努力と時間が費やされたかということを考えれば，このような配慮がなされていることを高く評価したい．しかし，本書はこの視点すら超えて，更に絶妙な構成を持つ．

著者は『小説群論』というようなものを胸に描いていた，と冒頭にある．それだけに，物語の縦糸がかなりしっかりと準備されている．定式化されるのに歴史的にも時間がかかる様な概念の説明などが, このスタイルにうまく適合しているようだ. 良い例として，『ベキ根による解法』の意味が数学的にはどのように定式化されるのかということが，第２章から第４章までの間で何度も繰り返し述べられ，徐々に進化していく．方程式論の立場からは明らかにベキ根拡大を早く定式化したいのだが，体論・ガロア理論の立場

からは色々な注意が必要となる．その準備が完了するまで一言も出さずに待つのではなく，少しずつ説明しながら，体論に方程式の側から動機を与え続ける．動機となる問題意識と方法論の間にある多少の差異を逆手にとってうまく縦糸にしている訳だ．実根のみを持つ実係数三次方程式の根が複素数抜きではベキ根表示できないことも，第２.３節で既に問題として提示されているが，その後何度か言及された後に，第４章の最後にガロア理論の応用として説明してある．多面体のシンメトリーも群の概念の導入に使われるだけではなく，体のシンメトリーを視覚化するために再登場するなど，有機的に素材の取捨選択がなされている．群論の立場からは，５次対称群の構造を調べるいろいろな方法を縦糸に使っているようである．

一方，初学者を意識して，説明は時折かなりペースダウンもする．重要なことは噛んで含めるほど丁寧に，繰り返し言葉を変えて説明される．逆に，どうせ直ぐには深いところまで分かる筈がないのだから，繰り返して読む必要があることも説いている．無理をせずに，概念の説明や証明が厳密でなく多少あまいままに放っておかれる場合も幾つかある．流れを重視しているところと，此処はどうしても譲れないので徹底的に説明するというところがはっきりしていて,読者は自分の理解に応じて読み進めばよいだろう．縦糸がしっかりしている分だけ，各部での筆致や数学的速度・密度が大きい自由度を持っていても全体がまとまっている．

本書は高校生でも（いや中学生でも），頑張ればかなりのところまで読み進めることができると思う．少し難しくなってきたと感じても，兎に角先へ進み，しばらくして（何年後でもよい）から戻ってくればよいであろう．また，どこからでも読み始められそうな印象も受ける．各章ごとにかなり基礎的な導入・復習がなされている．

大学１・２年程度の読者が一人でじっくり読むのにはまさに適しているが，自主セミナーなどに使うのもまたよいだろう．その際には（無理をするのは良くないが）積極的に先へ進むことを意識しながら行うべきである．（本誌の読者諸兄は恐らくそれよりはかなり年上であろう，身近の学生諸君に勧められては如何？）

本書には，<ちょっと考えてみよう>と称する問題が９３問，更に進んだレベルの‘ 研究課題 ’が１２問，全編にちりばめられている．それらのうち幾つかは，内容をよりよく理解するための演習問題のようものであるが，多くは，読み進むために実際必要な事柄をまとめたものである．研究課題は兎も角，<ちょっと考えてみよう>は全部解いてみる，少なくともトライする必要がある．そのうち幾つかは後から本文中で説明されている．第１章の<ちょっと考えてみよう>のひとつに「正１２面体の中にシンメトリー群が解に作用する５個のものを見出せ.」というのがある．正１２面体群を５次対称群に埋め込みたいのであるが,「苦労して探すより群論を用いた方がよいであろう」とあるので，幾何を専門と標榜する筆者は却って群論を使わずにこのクイズを考えさせられ，面白かった．

第４章で話がクライマックスにさしかかると，定理として改めて記述すべきと思われる事柄でも，ガロアの定理を証明する流れの中に埋没してしまっていることが幾つかあ

る．第３章にも，既約多項式が重根を持たないことや，有限次拡大が単純拡大になることの説明では, 既約多項式についてもう一言きちんと説明すればよいのに, と感じる（尤も，これはどんな体論の教科書を読んでも筆者が同様に感じるところなので，此方の頭の構造が余程不適合なだけかもしれない）．その様に感じたら<ちょっと考えてみよう>と同様に自分なりに補って読み進むのがよい.

既に述べたように，代数方程式の解のベキ根表示をめぐってラグランジュが根の置換を導入したところに群の概念の萌芽を見出し，代数方程式論を縦糸に群の概念の生成を物語るのが本書の中心部である．代数方程式の中に『隠れた対称性』を見出し，それが『群』の概念若しくは『群論』に昇華していく様子を物語る，それがこの『群の発見』という本の主題である．最初から明確な群の概念があったわけではなく，いきなり「目から鱗が落ちるように説明する」のは難しく，「群の公理を見ることは完成された結晶を見ること」，「初めて群の公理を学ぶことはこれから登る山の頂を遠くから見つめることと同じ」と著者も述べている．これから本書を手にする若い読者はこれらの注意を頭の片隅に置きながら読まれるとよいであろう．（薹の立った読者も，深い感銘を受けるとともに，学生に対する日々の講義などにもどのような工夫をすればよいかという大きな示唆を受けるに違いない.）

ところで本書はそれだけでは終わらず，第５章で楕円曲線にまで話を進める．ガロアが既に有限体上の２次の射影変換群の構造をかなり精密に理解していたことや，アーベルが『虚数乗法』という対称性を持つ重要な楕円曲線のクラスを発見したことなどが語られている．この部分は現代数学の発展にもつながり，更に未来へ開かれている．隠れた対称性を見出すことが数学を大きく発展させることを示唆している．そのような意味での更なる『群の発見』を期待して第５章は終わる．

（三松　佳彦，中大理工）