集合教育試論

—集合の大きさをめぐって—

本橋信義

かつて，高校数学の教材として“集合”が華々しく登場したことがありました．しかし，教える側に集合についての成熟した知識が不足していたためでしょうか，多くの混乱を教育現場に残して集合は表舞台から消えていきました．

最近，高校数学の表舞台に集合が再び登場する兆しがあるようですが，集合を取り巻く環境は少しも変化していません．相変わらず，集合についての理解不足という状況は改善されていません．このままでは，昔の過ちを繰り返すことになりそうです．

一方，集合についての教科書がある程度出版されています．それらは，次の２種類に分類されます．その一つは，集合を数学用の単なる文法規則として扱っている教科書です．この種の教科書では，掛け算の九九を教えるように，集合算法という計算技術を教えています．もう一つは，公理的集合論を扱う教科書です．この種の教科書でも，集合は形式的論理体系の中の形式的な対象として扱われています．

この２種類の教科書で扱われている集合は，いわば，“固定された集合”，“死んだ集合”です．本来，集合は必要に応じてその場で作るモノです．その意味で，常に生の存在です．数学の個々の需要に応じて必要な集合を作り出すシステムが,本来の集合論です.ですから，集合論の教科書で扱うべき集合は，“状況に応じて作り出される集合”，“生きた集合”でなければなりません．この意味で，集合は常に相対的なモノですが，この相対性は，論理の持つ相対性の一つの側面だと筆者は思っています.このような意図で筆者は新しい教科書「集合序説」（培風館）を書きました．この教科書の中で扱われている題材のうち，集合の大きさについて講義する場合に，常に気に留めておいていただきたいと筆者が思っていることをここではお話します．

ご承知のように，集合論の主な課題の一つは，集合の大きさについての明確な基準を作ることです．その基準を作るには，次の二つのことが必要です．その一つは，与えられた二つの集合の大きさを比較する方法です．もう一つは，物差しの役割を果たす集合，つまり，基準となる集合を作ることです．この二つが決まりますと，与えられた集合の大きさは，基準となる集合のそれぞれと比較することにより決めることができます．有限集合を扱う場合に基準となる集合は自然数ですが，無限集合も含めた一般の集合を扱う場合の基準となる集合は“**基数**”と呼ばれる集合です．基準となる集合についての議論は専門書に委ねるとして，ここでは集合の大きさを比較する場合の留意点について解説しようと思います．二つの集合の大きさを比較する場合，有限集合と無限集合とで比較の方法が本来は異なるはずですが，通常の集合論の教科書では，その点を避けた記述がなされているのが普通です．ここでは，集合の大きさを比較する場合の，有限集合と無限集合の違いを敢えて強調して説明しようと思います．そして，その違いを数学的に説明する定理として，単射分解定理と呼ばれる定理

について紹介しようと思います．なお，二つの集合の大きさを比較する場合，二つの集合から要素をそれぞれ取り出すことが必要になります．その操作には，通常，選択公理が必要になりまから，以下の議論では選択公理が仮定されています．しかし，選択公理のことは余り気にかけないで結構です．

1．有限集合の大きさ

a）玉入れの場合：二つの集合の大きさを比較する場合，私たちは何をするか，幼稚園や小学校の運動会でよく行われる玉入れという競技を取り上げて考えてみます．玉入れとは，二組に分かれて，籠に玉を投げ入れ，より多く玉を籠に入れた方が勝ちという競技です．その場合，玉の多い，少ないをどのように判定するのでしょうか．籠中の玉の個数の多い方が勝ち，同じときは引き分けといってしまえばそれまでですが，ここでは，小さい子供達が主役の競技ですから，数がまだ充分には数えられないとします．その場合には，二つの籠から玉を同時に一つずつ取り出し，先に玉が無くなった方が負け，同時に玉がなくなったときは引き分けになります．実に簡単な方法ですが，この判定方法には，有限集合固有の重要な事実が隠されています．

まず，誰かが判定に異議を申し立てたとします．そこで，判定をやり直すことにします．実際には，玉は既に捨てられていますから，籠の中を元の状態に戻すことができないかもしれません．それでも，もし，元の状態に戻すことができたとして，判定が覆ることがあるでしょうか．いま，元の状態からもう一度同じことをしたとします．インチキはないものとしたとき，結果は同じはずです．つまり，引き分けの時は，今回も同時に玉が無くなるはずですし，最初に勝負がついた時には，今回も，勝った方の籠の中に玉が残るはずです．

そして，この方法を何回やり直しても，不正行為がない限り，結果は同じです．だからこそ，取り出した玉を捨てられるのです．

b）比較原理（有限集合の場合）：玉入れで行われた方法を，一般の有限集合の大きさを比較する場合に適用してみます．つまり，比較の対象となる二つの集合について，それぞれの集合から一つずつ要素を取り出し，どちらかの集合の要素がなくなるまで，この操作を続けます．そして，もし，両方が同時になくなった場合は，同じ大きさ，そうでないときは，要素がなくなった方が小さく，要素が残っている方が大きいということになります．

この操作を，二つの集合間の単射，全単射を用いて説明してみます．二つの集合から一つずつ要素を同時に取り出すということは，それぞれの部分集合の間に全単射を作ることです．そして，両方の要素が同時になくなるということは，二つの集合の間に全単射ができたということです．また，片方の集合の要素がなくなり，もう一つの集合の要素が残ったということは，一方の集合からもう片方の集合への単射で，しかも，全射にならないモノが作れたということです．しかも，この事実は要素の取り出し方に依存しません．つまり，二つの集合の間に全単射ができたときは，何度やっても全単射ができるはずですし，片方からもう片方への，全射でない単射ができたときは，要素の取り出し方をどのように工夫しても，結果は

同じになるはずです．

この事実をまとめると次のようになります．

定理１（比較原理）二つの有限集合Ａ，Ｂに対して，次の３つの場合の一つが，しかも，一つだけが必ず起こる．

場合１：ＡからＢへの全単射が存在する．

場合２：ＡからＢへの単射で全射にならない写像が存在する．

場合３：ＢからＡへの単射で全射にならない写像が存在する．

そこで，二つの集合Ａ，Ｂについて，**“ＡとＢが同じ大きさである．”**（Ａ～Ｂと表示します．）ということと，**“Ａの大きさがＢの大きさより小さい．”**（Ａ＜Ｂと表示します．）ということを次で定義します．

定義１（有限集合の場合）：Ａ～Ｂ　⇔　ＡからＢへの全単射が存在する．

定義２（有限集合の場合）：Ａ＜Ｂ　⇔　ＡからＢへの全射でない単射が存在する．

すると，比較定理は次のようになります．

定理２（比較原理）二つの有限集合Ａ，Ｂに対して，Ａ＜Ｂ，Ａ～Ｂ，Ｂ＜Ａのどれか一つ，そして，一つだけが成り立つ．

二つの有限集合Ａ，Ｂが与えられたとき，それぞれから要素を一つずつ取り出すという操作を続けていけば，いつか，必ず，この操作は終わります．もし終わらないとすると，ＡもＢも無限集合になってしまいます．ですから，Ａ＜Ｂ，Ａ～Ｂ，Ｂ＜Ａのどれかが起こることは確かです．二つの場合が同時には起こらないことは，次のように説明できます．

いま，Ａ＜ＢとＡ～Ｂが同時に起こったとします．すると，ＡからＢへの全射でない単射ｆと，ＢからＡへの全単射ｇができます．すると，ｆとｇの合成写像ｆｏｇは，Ａから，その真部分集合への単射になります．つまり，ＡからＡへの全射でない単射が存在することになります．同様に，Ａ＜ＢとＢ＜Ａが同時に起こったときも，Ｂ＜ＡとＡ～Ｂが同時に起こったときも，ＡからＡへの全射でない単射が存在することになります．そのようなことが絶対起こらないことを次の定理が保証しています．

定理３（有限集合の基本定理）有限集合ＡからＡへの単射は全部全射になる．

では，この定理はどのように証明するのでしょうか．この定理を証明するには“有限”という言葉をきちんと定義する必要があります．教科書によっては，この基本定理が成り立つ集合を有限集合と定義しているものもあります．ですから，この基本定理は信じて下さい．

なお，有限集合の基本定理を言い替えますと“部分は全体より小さい”という原理，つまり

定理４　Ｂが有限集合のとき，Ｂ⊂Ａ　⇒　Ｂ＜Ａ

になります．

以上をまとめると

まとめ１：有限集合の大きさを比較する場合の基本原理は，有限集合の基本定理である．

となります．

２．無限集合の大きさ

ａ）玉入れの場合：籠の中に無限個の玉が入っている場合の玉入れについて考えます．もちろん，そんな玉入れは現実にはありません．そのような状況を想像したうえで，一種の思考実験をしようというのです．話しを簡単にするために，籠の中のすべての玉にはそれぞれ異なる自然数で番号が付けてあるとします．しかも，すべての自然数が使われているとします．このとき，二つの籠から玉を取り出すのに，番号順に，同じ番号の玉が同時に取り出されるようにしたとしましょう．すると，無限回の操作の末に籠の中の玉は同時に無くなります．その意味で，判定は引き分けになります．しかし，別の取り出し方があります．一つの籠からは，２番の玉から順に取り出すことにし，もう一つの籠からは１番の玉から順に取り出しますと，無限回の操作の末に，最初の籠には１番の玉が残り，もう一つの籠の中には玉が無くなります．ですから，この場合は，最初の籠の組が勝ちという判定になります．つまり，玉の取り出し方により勝敗が変わることになります．これでは誰も納得しないでしょう．

では，どのようにしたら皆が納得できるでしょうか．問題は，引き分けの場合と，勝負がつく場合の決め方です．上の例で分かるように，籠の中の玉が自然数全部を使って同じように番号付けされている場合は，引き分けにならないとまずいことになります．そうでないと，全く中味が同じなのに，勝ち敗けがつくことになってしまいます．ですから，二つの籠から玉を一つずつ取り出したとき，同時に玉がなくなった場合は，引き分けにすべきです．しかし，有限の場合と異なるのは，ある取り出し方で引き分けにならなくても，別の取り出し方をすれば引き分けになる可能性があることです．ですから，ありとあらゆる取り出し方を実行したうえで，一回も引き分けが起こらない場合，つまり，どんな取り出し方をしても，同時に玉が無くなることがない場合に，初めて勝敗が決まることにすべきです．さらに，その場合でも，どんな取り出し方をしても，玉が残る方が一定で無いと困ります．そうでないと，取り出し方により勝つ方が変化してしまいます．それでは，勝負の意味がありません．以上のことを考慮すると，無限集合についての大きさの決め方は次のようになります．

ｂ）比較原理：二つの集合Ａ，Ｂに対して，次の３つの場合を考えます．

場合１：ＡからＢへの全単射が存在する．

場合２：ＡからＢへの単射が存在し，そのような単射のどれも全射にならない．

場合３：ＢからＡへの単射が存在し，そのような単射のどれも全射にならない．

二つの集合Ａ，Ｂが与えられたとき，それぞれから要素を一つずつ取り出すという操作を続けたとします．無限回の操作を認めれば，いつか，必ず，この操作は終わります．もし，その結果，要素が同時になくなれば，ＡとＢの間に全単射ができたことになりますし，片方の集合の要素が残れば，要素が無くなった方の集合からの単射で，全射でないものができたことになります．しかし，どちらかの集合の要素が残ってしまう場合でも，別の取り出し方をすれば全単射ができる可能性があります．そこで，すべての取り出し方を実行しても全単射ができないとき，場合２か，場合３のどちらか一つが，そして一つだけが必ず起こることが説明できれば，場合１，場合２，場合３のどれか一つだけが必ず起こることの証明ができ

たことになります．その説明をします．

いま，二つの集合ＡとＢについて，場合１は起こらない，つまり，ＡとＢの間に全単射が存在しないと仮定します．すると，ＡからＢへの単射はすべて全射にはなりませんから，場合２は“ＡからＢへの単射が存在する場合”になりますし，ＢからＡへの単射はすべて全射にはなりませんから，場合３は“ＢからＡへの単射が存在する場合”になります．したがって，“ＡからＢへの単射が存在する場合”か“ＢからＡへの単射が存在する場合”のどちらかが起こることと，同時には起こらないことを示せればよいことになります．

二つの集合Ａ，Ｂから要素を一つずつ取り出すという操作を続ければ，いつか，必ず，この操作は終わります．しかも，場合１は起こらないのですから，“ＡからＢへの単射が存在する場合”か“ＢからＡへの単射が存在する場合”のどちらかが起こることは確かです．次に，もし，この二つの場合が同時に起こったとします．すると，ＡからＢへの単射と，ＢからＡへの単射が存在することになります．すると，ＡとＢの間に全単射が存在してしまいますから（この事実をカントール・ベルンシュタインの定理といいます），場合１が起こらないという仮定に反します．ですから，“ＡからＢへの単射が存在する場合”と“ＢからＡへの単射が存在する場合”が同時に起こることはありません．

そこで，一般の場合の“～”と“＜”の定義を

定義３　Ａ～Ｂ　⇔　ＡからＢへの全単射が存在する．

定義４　Ａ＜Ｂ　⇔　ＡからＢへの単射が存在しそのような単射のどれもすべて全射にならない．

としますと，次の比較原理が成り立ちます．

定理５（比較原理） 二つの集合Ａ，Ｂに対して，Ａ＜Ｂ，Ａ～Ｂ，Ｂ＜Ａのどれか一つ，そして，一つだけが成り立つ．

なお，“＜”の定義が有限集合の場合とそうでない場合とで見かけ上異なりますが，有限集合の基本定理から，この二つの定義は同値になります．

ついでに，蛇足ですが，“部分は全体より小さい”という原理は成り立ちません．例えば，偶数全体は自然数全体の真部分集合ですが，各自然数ｎにその２倍を対応させる写像を考えますと，それは，自然数全体から偶数全体への全単射になります．ですから，偶数全体は自然数全体の真部分集合であるにもかかわらず，その大きさは，自然数全体の大きさと同じということになります．つまり，部分が全体と同じ大きさになる場合があります．

以上から，一般の集合の大きさを比較する場合，

定理６（カントール・ベルンシュタインの定理）　二つの集合ＡとＢについて，ＡからＢへの単射とＢからＡへの単射が存在すれば，ＡからＢへの全単射が存在する．

が基礎になっていることが分かります．

以上をまとめると

まとめ２：一般の集合の大きさを比較する場合の基本原理は，カントール・ベルンシュタインの定理である．

となります．

３．整理

集合の大きさを旨く表現するための概念として“ＡとＢが同じ大きさである．”（すなわち，Ａ～Ｂ）と，“Ａの大きさがＢの大きさより小さい．”（すなわち，Ａ＜Ｂ）を導入しました．しかし，この二つの概念を基にして集合の大きさに関する議論をすることは，数学的には得策ではありません．その理由を次に説明します．

Ａ～ＢかＡ＜Ｂのどちらかが成り立つとき，“Ａの大きさはＢの大きさ以下である．”，あるいは，“Ｂの大きさはＡの大きさ以上である．”といい，“Ａ≦Ｂ”と表示します．つまり，

定義５　Ａ≦Ｂ　⇔　（Ａ＜Ｂ　または　Ａ～Ｂ）

となります．ところが，

Ａ＜Ｂ　または　Ａ～Ｂ　⇔　ＡからＢへの単射が存在し，それらはどれも全射にならない，
または，ＡからＢへの単射で，かつ全射になるモノがある．
⇔　ＡからＢへの単射が存在する．

となりますから，

Ａ≦Ｂ　⇔　ＡからＢへの単射が存在する．

となります．さらに，カントール・ベルンシュタインの定理から

（Ａ≦Ｂ　かつ　Ｂ≦Ａ）　⇔　ＡからＢへの単射とＢからＡへの単射が存在する．
⇔　ＡからＢへの全単射が存在する
⇔　Ａ～Ｂ

となります．また，比較定理から，

Ａ＜Ｂ　または　Ａ～Ｂ　または　Ｂ＜Ａ

が常に成り立ち，しかも，このどれか一つだけが成り立ちます．一方

Ａ＜Ｂ　または　Ａ～Ｂ　⇔　Ａ≦Ｂ

ですから，ここから

Ａ≦Ｂ　または　Ｂ＜Ａ

が常に成り立ち，しかも，両方が同時に成り立つことはありません．ですから

Ａ≦Ｂでない　⇔　Ｂ＜Ａ

が得られます．

以上から，“≦”を用いると“～”も“＜”も表すことができます．つまり，

定理７　Ａ～Ｂ　⇔　Ａ≦Ｂ　かつ　Ｂ≦Ａ
Ａ＜Ｂ　⇔　Ｂ≦Ａでない

となります．これらの考察から，

まとめ３：集合の大きさを考える場合，まず，“≦”という概念を，単射を用いて導入し，次に，カントール・ベルンシュタインの定理を用いて，“～”を導入，最後に，“＜”を導

入するほうが数学的にはスッキリしている．

となります．これが，集合論の教科書で通常採用されている方法です．しかし，この方法ですと有限集合の場合と無限集合の場合の違いが表面にでてこなくなります．

４．単射分解定理

有限集合の大きさを比較する場合の基本原理は有限集合の基本定理，一般の集合の大きさを比較する場合の基本原理はカントール・ベルンシュタインの定理であることを説明しました．

そこで，この二つの基本原理の関係について少し考察してみます．実は，集合ＡかＢが有限集合の場合，有限集合の基本定理からカントール・ベルンシュタインの定理が簡単に導かれます．もちろん，集合が有限集合であるということを，自然数で数えられる集合として定義しますと，その証明は余りに自明です．ここでやりたいことは，有限集合の基本定理を有限集合の定義として採用した場合，ＡまたはＢが有限という仮定の下でカントール・ベルンシュタインの定理の証明を与えることです．

いま，Ａを有限集合とし，ＡからＢへの単射ｆとＢからＡへの単射ｇが存在したとします．すると，ｆとｇの合成写像ｆｏｇはＡからＡへの単射になります．有限集合の基本定理から，合成写像ｆｏｇは全射になります．ここから，写像ｇも全射になります．（一般に，合成写像ｆｏｇが全射ならば，写像ｇも常に全射になります．）一方，ｇはもともと単射でしたから，これはｇが全単射になることを意味します．したがって，ｇの逆写像は集合Ａから集合Ｂへの全単射になります．つまり，ＡからＢへの全単射が存在したことになります．

最後に，この二つの基本原理を統合する定理として，単射分解定理と名づけた定理の紹介をします．

いま，集合Ａと，ＡからＡへの単射ｆが与えられたとして，単射ｆの構造を調べます．集合Ａから，単射ｆの値域$R(f)$を除いてできる集合をB_0で表しますと，ＡはB_0と$R(f)$に分割されます．つまり，

$$A=B_0\cup R(f),\quad B_0\cap R(f)=\phi\ \text{（空集合）}$$

が成り立ちます．ここで，この２式の両辺の集合の要素をそれぞれ単射ｆで移してできる集合を考えますと，等式

$$f[A]=f[B_0]\cup f[R(f)],\quad f[B_0]\cap f[R(f)]=\phi$$

が得られます．第二式を導くには，ｆが単射であるという事実が必要です．

なお，一般に，$f[C]$は集合$\{f(x)\mid x\in C\}$を表します．

ここで，$R(f)=f[A]$であることを用いると，集合Ａは，B_0，$f[B_0]$，$f^2[A]$に分割されることが分かります．つまり，

$$A=B_0\cup f[B_0]\cup f^2[A],\quad B_0\cap f[B_0]=(B_0\cup f[B_0])\cap f^2[A]=\phi$$

が得られます．ここで，$f^2[A]$は$f[f[A]]$を意味します．

そこで，この操作をｎ回繰り返しますと，集合Ａは，$n+2$個の集合B_0，$f[B_0]$，・・・，

$f^n[B_0]$，$f^{n+1}[A]$ に分割されます．つまり，

$$A = B_0 \cup f[B_0] \cup \cdots \cup f^n[B_0] \cup f^{n+1}[A]$$

$$f^i[B_0] \cap f^j[B_0] = \phi \quad (i \neq j)$$

$$(B_0 \cup f[B_0] \cup \cdots \cup f^n[B_0]) \cap f^{n+1}[A] = \phi$$

が成り立ちます．

ここで，０以上の各整数ｋに対して，集合 $f^k[B_0]$ を B_k で表し，Ａからすべての B_k を除いてできる集合，つまり，

$$A - (B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots)$$

を B_∞ で表すと，

事実１：集合族 $\{B_k \mid k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$ は集合Ａを分割する．

が成り立ちます．

次に，０以上の各整数ｋに対して，写像ｆを集合 B_k に制限して得られる写像（つまり，$f\restriction B_k$）を f_k で表しますと，f_k の定義域は B_k，値域は B_{k+1} になりますから，

事実２：f_k は B_k から B_{k+1} への全単射である．

が得られます．一方，

$$\begin{aligned} B_\infty &= A - (B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots) \\ &= (A - B_0) \cap (A - (B_0 \cup B_1)) \cap (A - (B_0 \cup B_1 \cup B_2)) \cap \cdots \\ &= f^1[A] \cap f^2[A] \cap f^3[A] \cap \cdots \end{aligned}$$

（$f^{n+1}[A] = A - (B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n)$ となることに注意）

ですから，ｆが単射であることと，$f^2[A] \subseteq f^1[A] = R(f)$ を用いますと，

$$\begin{aligned} f[B_\infty] &= f[f^1[A] \cap f^2[A] \cap f^3[A] \cap \ldots] \\ &= f[f^1[A]] \cap f[f^2[A]] \cap f[f^3[A]] \cap \ldots \\ &= f^2[A] \cap f^3[A] \cap f^4[A] \cap \ldots \\ &= (f^1[A] \cap f^2[A]) \cap f^3[A] \cap f^4[A] \cap \ldots \\ &= f^1[A] \cap f^2[A] \cap f^3[A] \cap f^4[A] \cap \ldots \\ &= B_\infty \end{aligned}$$

となります．ですから，単射ｆを集合 B_∞ に制限して得られる写像を f_∞ で表すと，

事実３：f_∞ は B_∞ から B_∞ への全単射である．

が成り立ちます．

また，写像 f_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ の作り方から，これらの写像をすべて張り合わせると，もともとの写像ｆが構成されます．つまり，

事実４：$f = f_0 \cup f_1 \cup f_2 \cup \cdots \cup f_\infty$，すなわち，

$$\begin{aligned} D(f) &= D(f_0) \cup D(f_1) \cup D(f_2) \cup \ldots \cup D(f_\infty) \\ &= B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f) &= R(f_0) \cup R(f_1) \cup R(f_2) \cup \ldots \cup R(f_\infty) \\ &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_\infty \end{aligned}$$

$$f(x)=f_k(x),\quad (x\in B_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ ....,\ \infty)$$

が得られます.

つまり，集合Ａから Ａへの単射ｆは，全単射だけで構成される写像の集まり（写像族といいます）$\{f_k \mid k=0,\ 1,\ 2,\ ....,\ \infty\}$ に分解されたことになります.

そこで，この状況を記述するための言葉を用意します.

一つの写像ｇと写像族 $\{g_k \mid k=0,\ 1,\ 2,\ ....,\ \infty\}$ に関する次の４条件

①$D(g_k)\cap D(g_j)=\phi\quad (k\neq j)$

②g_k は$D(g_k)$から$D(g_{k+1})$への全単射である.　$(k\neq\infty)$

③g_∞ は$D(g_\infty)$から$D(g_\infty)$への全単射である.

④$g=g_0\cup g_1\cup g_2\cup\cdots\cup g_\infty$

を考えますと，事実１から事実４は，単射ｆと写像族 $\{f_k \mid k=0,\ 1,\ 2,\ ....,\ \infty\}$ がこの４条件を満たしていることを示しています.

そこで，この４条件が写像ｇと写像族 $\{g_k \mid k=0,\ 1,\ 2,\ ....,\ \infty\}$ について成り立つとき，この写像族を写像ｇの **“分解”** ということにします.

すると，集合Ａから Ａへの単射ｆから構成された写像族 $\{f_k \mid k=0,\ 1,\ 2,\ ....,\ \infty\}$ はｆの分解になります. 分解があるとすれば，それが一つだけしかないことはその定義から明らかです. ですから，次の定理が得られたことになります.

定理８（単射分解定理）　集合Ａから Ａへの各単射ｆについて，ｆの分解が一意的に存在する.

これが求める結果ですが，そのことを納得していただくためには，単射分解定理から有限集合の基本定理とカントール・ベルンシュタインの定理が直接的に導かれることを示す必要があります. その作業を以下で行います.

いま，Ａを有限集合，ｆをＡからＡへの単射，$\{f_k \mid k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \infty\}$ をｆの分解としますと，①，②から各集合$D(f_k)$　$(k\neq\infty)$ は互いに共通部分のない，大きさの等しい集合になります. しかも，④より，それらの合併集合はＡの部分集合になります. Ａは有限集合ですから，このことは，$f_k=\phi$　$(k\neq\infty)$ を意味します.

したがって，$f=f_\infty$ となり，③より，ｆは全単射になります. したがって，単射分解定理から有限集合の基本定理が導かれました.

次に，単射分解定理からカントール・ベルンシュタインの定理が直接的に導かれることを示します. そのために，ｆを集合Ａから集合Ｂへの単射，ｇをＢからＡへの単射とします. ここで，ＡからＢへの全単射を，単射分解定理を用いて構成するのですが，集合Ｂと集合$g(B)$を同一視してしまえば，集合Ｂは集合Ａの部分集合で，$g(x)=x$　$(x\in B)$ となっている場合だけ考えればよいことは明らかです. そこで，ＢはＡの部分集合と仮定します.

写像ｆはＡからＢへの単射ですが，ＢはＡの部分集合ですから，ｆをＡからＡへの単射とみなせます. そこで，ｆをＡからＡへの単射とみなして，ｆの分解$\{f_k \mid k=0,1,2,...,\infty\}$ を取ります. すると，

$$R(f)\subseteq B\subseteq A$$

が成り立っていることに注意して下さい．

ここで，単射 f の分解を構成するときに，$A-R(f)$ を B_0 とおいて，この集合を単射 f で移して得られる集合列 B_0，B_1，B_2，・・・を作り，さらに，A からこれらの集合を全部取り除いてできる集合を B_∞ として，A の分割 $\{B_k \mid k=0, 1, 2, ..., \infty\}$ を作ったことを思い出して下さい．

ここでは，$A-B$ を C_0 と置くと，$C_0\subseteq B_0=D(f_0)$ となりますから，B_0 の代わりにこの C_0 を用いて A の分割を作ります．つまり，

$$C_0=A-B$$
$$C_{k+1}=f_k[C_k] \quad (k=0, 1, 2, ...)$$
$$C_\infty=A-(C_0\cup C_1\cup C_2\cup\cdots)$$

としますと，集合族 $\{C_k \mid k=0, 1, 2, ..., \infty\}$ は A の分割になります．なお，ここで，$C_k\subseteq D(f_k)$ $(k\neq\infty)$ が成り立っていることに注意して下さい．

次に，写像族 $\{h_k \mid k=0, 1, 2, ..., \infty\}$ と写像 h を

$$h_k=f_k\upharpoonright C_k \quad (k\neq\infty)$$
$$D(h_\infty)=C_\infty,\quad h_\infty(x)=x \quad (x\in C_\infty)$$
$$h=h_0\cup h_1\cup h_2\cup\cdots\cup h_\infty$$

で定義しますと，写像族 $\{h_k \mid k=0, 1, 2, ..., \infty\}$ は h の分解になり，しかも，

$$D(h)=A$$
$$R(h)=A-C_0=A-(A-B)=B$$

となりますから，h は A から B への全単射になります．つまり，A から B への全単射が構成されたことになります．

したがって，単射分解定理からカントール・ベルンシュタインの定理が導かれました．

以上から，集合の大きさを比較する場合の二つの基本原理，有限集合の基本定理とカントール・ベルンシュタインの定理が，単射分解定理に纏められることの説明を終わります．

集合について講義する場合に気にかけていただきたいことは他にもたくさんあります．興味のある方は是非，拙著「集合序説」をみて下さい．

（もとはし　のぶよし，筑波大学数学系）