2004 年度 現代数学入門市民講座

e と $n!$ から

– 微分方程式と差分方程式の世界を覗く –

「超気持いい〜 ！」は今年の流行語大賞となった言葉ですが、今日の話しは「超」と「超超」についてです。 e は超、$n!$ は超超とこじつけまして ⋯ 。「数学を勉強するって、超超気持いい〜 !?」という気分になって頂けたらと思います。 …… 湘南現代数学市民講座講演会にて

熊本大学 理学部 数理科学教室　河野 實彦

第 1 節 実数について

自然数 $\mathbf{N}$
$\Downarrow$
零の発見
$\Downarrow$
整数（負の数の概念） $\mathbf{Z}$
$\Downarrow$
有理数 $\mathbf{Q}$
$\Downarrow$
実数（無理数論） $\mathbf{R}$
$\Downarrow$
複素数 $\mathbf{C}$
$\Downarrow$
Hamilton の 4 元数（quaternion）等

- $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ である。
- 実数には**有理数**（rational number）と**無理数**（irrational number）とがある。
  有理数とは $\frac{q}{p}$ （$p,\ q$ は整数）と表される数で、有理数でない実数が無理数なのである。
  実数を小数（10 進法）で表したとき、次の定理が成り立つ。

定理

有理数は 必ず **循環小数**（recurring decimal）で 表される。

$$\frac{27}{2} = 13.5\underline{0}000000000000000\ldots\ldots$$
$$\frac{5}{13} = 0.\underline{384615}384615384615\ldots\ldots$$

- 上の定理より、循環小数でない無限小数は無理数である。

- 無理数には**代数的数**と**超越数**と呼ばれるものがある。

  $\sqrt{2}$ は $\frac{q}{p}$ と表されないことは、簡単に証明できるので、これは無理数である。 小数で書くと

  $$\sqrt{2} = 1.414213562373095...........$$

  なる無限小数となる。$\sqrt{2}$ は $x^2 - 2 = 0$ の根であり、一般に、整数を係数にもつ多項式の根である実数は **代数的数**（algebraic number） といわれる。$\sqrt[4]{p}$ や $\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ なども代数的数である。

  代数的でない無理数は **超越数**（transcendental number） と呼ばれる。

  例えば、

  $$\pi = 3.14159265358979323846264338327950 2884....\text{（円周率）}$$

  は超越数である。

- ここで、無理数というものの定義 について見てみよう。

  無理数 $\sqrt{2}$ は上に記したような無限小数であったが、

  $$a_1 = 1, \quad a_2 = 1.4, \quad a_3 = 1.41, \quad a_4 = 1.414, \quad \cdot\ \cdot\ \cdot$$

  というように有理数の列 $\{a_n\}$ を考えると、

  $$p > q \quad \text{ならば} \quad 0 < a_p - a_q < \frac{1}{10^{q-1}}$$

  が成り立つ。そこで、q を大きくとれば右辺の有理数はいくらでも小さくなる。

  このような列 $\{a_n\}$ を**基本列**といって、無理数は「有理数の集合 $\mathbf{Q}$ の中での 基本列によって定義されるものである」というのが **G. Cantor** (1872) の無理数論（実数論）である。 $\sqrt{2}$ は上の有理数の列 $\{a_n\}$ によって決定（定義）される数なのである。

  さらに付言すると、

> 実数の集合 $\mathbf{R}$ の中で、**基本列は必ず一つの数を決定し、その数を極限値とする。** この事実を「**実数の完備性**」といい、解析学の依拠するところである。また、Cantor の実数の定義によれば、実数のどんな近くにも必ず有理数があるわけで、この事を「有理数の集合 $\mathbf{Q}$ は実数の集合 $\mathbf{R}$ の中で稠密である。」とか、単に、「**有理数の稠密性**」という。

- 自然対数の底 e も無理数である。

e の定義

$$e \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

と定義する。ここで、

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1, \qquad 0! \equiv 1$$

とする。（この階乗に関しては、後で詳述する。）

実際、有理数の列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

によって定義すると、$p > q \geq 1$ ならば

$$\begin{aligned} 0 < a_p - a_q &= \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots + \frac{1}{p!} \\ &= \frac{1}{(q+1)!}\left\{1 + \frac{1}{q+2} + \cdots + \frac{1}{(q+2)(q+3)\cdots p}\right\} \\ &\leq \frac{1}{(q+1)!}\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-q}}\right\} \\ &< \frac{1}{(q+1)!}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right\} = \frac{2}{(q+1)!} \end{aligned}$$

と評価される。 q を大きくとれば、最後の有理数はいくらでも小さくなるから、列 $\{a_n\}$ は基本列をなす。この基本列から決まる数（極限値）を e と定義するのである。

小数では

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249\ldots. \quad \text{（自然対数の底）}$$

となる。

定理 （超越数）

e は超越数（transcendental number）である。

紙数の関係でこの証明は省かざるを得ないが、Alan Baker : Transcendental Number Theory, Cambridge Univ. Press, 1975 には、大変 明瞭な証明がある。積分

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} P(u)\, du \qquad (t \geq 0, \quad P(u) \text{ は多項式})$$

を導入して、e がある整数係数の代数方程式をみたすならば、矛盾が起こることを示す。 背理法によるその証明は、さして難しくはないので、一度、是非参照されたい。

注意

(i) 実数（無理数）論は **G. Cantor (1872)** と **R. Dedekind (1872)** によって確立された。Cantor は実数の 完備性 を論じ、 Dedekind は実数の 連結性 を論じた。

(ii) e が無理数であることは Euler (1744) と Liouville (1840) によって証明された。 それが 超越数であることを最初に証明したのは Hermite (1873) である。また、π の超越性は Lindeman (1882) によって証明された。

(iii) ある数が無理数であるか、またそれが超越的であるかどうかの証明は一般に、非常に難しい問題である。 例えば、**オイラー (Euler) の定数**

$$\gamma = 0.5772156649015328606065120900082402431....$$

は無理数であるか、また、超越数であるかについては未だ知られていないようだ。

第 2 節　指数関数 e^t

指数関数の定義

微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dy(t)}{dt} = y(t), \qquad y(0) = 1$$

をみたす連続関数を**指数関数**（exponential function）と定義する。

この微分方程式を通して、指数関数のいろいろな性質を導き出そう。

性質 （1）　任意の n に対して

$$y^{(n)}(t) = y^{(n-1)}(t) = \cdots = y(t)$$

が成り立っている。

証明　微分方程式をみたす関数は何回でも微分可能、すなわち、無限回微分可能である。 実際、 微分方程式をみたす連続関数 $y(t)$ は微分方程式自体から、微分可能な関数であり、導関数も連続であることが判る。そこで、両辺の微分を考えれば

$$\exists\, y''(t) = y'(t) = y(t)$$

を得る。 すなわち、$y(t)$ の 2 階導関数が存在して、それも連続関数であることが判り、 この考察を続けていけば、 $y(t)$ は無限回微分可能で、すべての導関数は連続である。さらに、任意の導関数は $y(t)$ に等しいことも示された。 ■

性質 （2）　微分方程式をみたす関数 $y(t)$ は

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \qquad (\,|t| < \infty\,)$$

と巾級数展開される。

<u>証明</u>

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \qquad y(0) = c_0 = 1$$

とおいて 微分方程式の解を求めてみよう。 いま、項別微分が許されると仮定すれば、 微分方程式の関係式は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

である。 両辺の同じ t の巾の係数は相等しいとおくと

$$c_0 = 1, \qquad n\,c_n = c_{n-1} \quad (\,n = 1, 2, \ldots\,)$$

なる関係式（**漸化式**という）を得る。 この漸化式より 直ちに

$$c_n = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1} \equiv \frac{1}{n!}$$

となることが判る。

よって、

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n$$

なる展開式を得る。 これは、上に述べた仮定の下での形式的な計算によって導出されたもので、**形式的巾級数解**（formal power series solution）という。

そこで、 級数が収束する t の範囲（**収束半径**）を調べると

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (\,n \to \infty\,)$$

より、巾級数は $|t| < \infty$ で収束することが直ちに判る。 ■

上の **ダランベール（d'Alembert）の判定法**を知らないとすると、次のように証明しても良い。
先ず、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad (\,a > 0\,)$$

に注意する。実際、N を $N > a$ なる最小の整数とする。 $r = a/N < 1$ とおくと、$n > N$ に対して $a/n < a/N = r$ であるから

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^N}{N!}\,\frac{a}{N+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^N}{N!}\, r^{n-N} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

証　任意の R に対して、$N > 2R$ なる十分に大きい正の整数 N をとると、 $|t| \leq R$ において

$$\frac{|c_{n+1}\,t^{n+1}|}{|c_n\,t^n|} = \frac{|t|}{n+1} < \frac{1}{2} \qquad (\,n \geq N\,)$$

が成り立つ。 これより、

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!}\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{t^n}{n\,!}\right| \leq \frac{R^N}{N\,!}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right\} = \frac{2\,R^N}{N\,!}$$

と評価され、十分大きい N に対して右辺はいくらでも小さくなるから、巾級数は $|t| \leq R$ において絶対一様収束する。
絶対一様収束性より これまでの形式的計算も正当であることが保証される。 ■

証　性質（1）と テイラー（Taylor） 展開を考慮すると、

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(0)}{n\,!}\,t^n + \frac{y^{(N+1)}(\theta t)}{(N+1)\,!}\,t^{N+1} \quad (\,0 < \theta < 1\,) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{y(0)}{n\,!}\,t^n + \frac{y(\theta t)}{(N+1)\,!}\,t^{N+1} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n\,!}\,t^n + \frac{y(\theta t)}{(N+1)\,!}\,t^{N+1} \end{aligned}$$

を得る。
$|t| \leq R$ においては連続関数 $y(t)$ は有界であるから、

$$|\,y(\theta t)\,| \leq M$$

とおけば

$$\left|\frac{y(\theta t)}{(N+1)\,!}\,t^{N+1}\right| \leq M\,\frac{R^{N+1}}{(N+1)\,!} \to 0 \qquad (\,N \to \infty\,)$$

よって、任意の R に対して $|t| \leq R$ において、右辺の級数は $y(t)$ に絶対一様収束している。 R は任意の正数で、いくらでも大きくとっても良いから $|t| < \infty$ なるすべての t に対して、巾級数は収束して、かつ、微分方程式をみたすのである。 ■

収束半径が無限大の無限巾級数

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,t^n \qquad (\,|t| < \infty\,)$$

は**超越整関数**（transcendental function）と呼ばれる。

初期値 $y(0) = 0$ をみたす微分方程式 $(*)$ の解は恒等的に零なる解 $y(t) \equiv 0$ に限る。何故ならば、$c_0 = 0$ ならば漸化式より $c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となることから直ちに知れる。

もっと一般に、ある一点 $t = a$ で $y(a) = 0$ となる解は恒等的に零である。それは、変数変換 $\tau = t - a$ を行い、$z(\tau) = y(\tau + a)$ とおけば

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = z(\tau), \qquad z(0) = 0$$

に帰着されることから判る。

この事は、初期値問題

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t), \qquad y(a) = b$$

の**解の一意性**を主張する。$y_1(t),\ y_2(t)$ が解とするとき、$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$ は初期値 $y(a) = 0$ をみたす解となり、上に述べたことから $y(t) \equiv 0$, よって、$y_1(t) \equiv y_2(t)$ となる。初期値問題の解の一意性とはこの意味である。

性質（3）　任意の $t,\ s$ に対して

$$y(t)\,y(s) = y(t+s)$$

が成り立つ。

証明　何故ならば、s を固定すれば両辺の関数は共に $t = 0$ のときに $y(s)$ なる値をとる微分方程式 $(*)$ の解である。よって、解の一意性から、両者は一致する。■

性質（4）　実直線上で $y(t)$ は**単調増加関数**で、次をみたす：

$$y(t) > 0 \qquad (-\infty < t < \infty)$$

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$$

証明　性質（1）より、任意の n に対して $y^{(n)}(0) = 1$ であり

$$y^{(n)}(t) \geq 1 \quad (t \geq 0)$$

が成り立つことが判る。$t > 0$ に対して

$$y(t) - y(0) = \int_0^t y'(t)\,dt \geq \int_0^t 1\,dt = t$$

より、$t \to \infty$ のとき $y(t) \to \infty$ となる。

他方、$t \leq 0$ ではどのような挙動をするであろうか。$t = 0$ の近傍では単調増加であったから、t が負の方へ進むとき $y(t)$ は小さくなって行く。もし、$y(t_2) < 0$ なる点 $t_2 < 0$ があったとすると、t_2 の右で $y(a) = 0$ $(t_2 < a)$ なる点が存在する。しかし、これは解の一意性のところで述べたように、$y(a) = 0$ なる点があれば $y(t) \equiv 0$ であるから、矛盾する。

よって、$t \leq 0$ においても $y(t) > 0$ であり、従って $y'(t) > 0$ である。 $t \to -\infty$ と小さくなるにつれて、$y(t)$ も単調に減少して、ある非負の値に近づくであろう：

$$y(t) \to \alpha \geq 0 \quad (t \to -\infty)$$

いま、極限値 α が正であるとすると、 $y'(t) = y(t) \geq \alpha$ であるから

$$y(0) - y(t) = \int_t^0 y'(t)\,dt \geq \alpha\,(-t)$$

この式で、$t \to -\infty$ とすれば、 $y(t) \to -\infty$ となる。 すると、また、 $y(a) = 0$ となる点 $t = a < 0$ がどこかにあることになり、矛盾である。 $\alpha = 0$ でなければならない。 ■

e の定義を思い出していただくと、微分方程式 $(*)$ の解 $y(t)$ に対して

$$y(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

が成り立つ。すなわち、初期値 $y(0) = 1$ をみたす微分方程式 $(*)$ の連続な解 $y(t)$ の $t = 1$ における値が e なのである。

さて、性質（３）を考慮すると、$p,\ q$ を正の整数として

$$y(q\,t) = y((q-1)\,t)\,y(t) = y((q-2)\,t)\,y(t)^2 = \cdots = y(t)^q$$

$$y\,(1) = y\left(\frac{p}{p}\right) = y\left(\frac{p-1}{p}\right)y\left(\frac{1}{p}\right) = \cdots = y\left(\frac{1}{p}\right)^p$$

を得る。$p,\ q$ が負の整数としても上式が成り立つことも容易に判るであろう。

よって、$p,\ q$ を任意の整数として

$$y\left(\frac{q}{p}\right) = y\left(q\left(\frac{1}{p}\right)\right) = y\left(\frac{1}{p}\right)^q = y\,(1)^{\frac{q}{p}}$$

が成り立つ。

ここで、有理数の稠密性（または、実数の定義）を考慮すると、任意の実数 t に対して、それに近づく有理数 $\frac{q}{p}$ が存在し、また、$y(t)$ は連続関数であるから

$$\frac{q}{p} \to t$$

$$y\left(\frac{q}{p}\right) \to y(t)$$

が成り立つ。 最後の式は

$$y\left(\frac{q}{p}\right) = y(1)^{\frac{q}{p}} \to y(1)^t = y(t)$$

である。

よって、次の結果を得る。

定理 （指数関数の表現）

微分方程式 $(*)$ の解 $y(t)$ は

$$y(t) \;=\; e^t \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^n \qquad (\,|t| \,<\, \infty\,)$$

なる**超越関数**である。また、次の性質をもつ：

$$(\,e^t\,)' \;=\; e^t, \qquad e^0 \;=\; 1$$

$$e^t \;>\; 0, \qquad \lim_{t \to -\infty} e^t \;=\; 0, \qquad \lim_{t \to \infty} e^t \;=\; \infty$$

$$e^t \cdot e^s \;=\; e^{t+s}, \qquad (\,e^t\,)^{-1} \;=\; e^{-t}$$

応 用

簡単な微分方程式

λ を定数として

$$\frac{dz(t)}{dt} \;=\; \lambda\, z(t) \quad \Longrightarrow \quad z(t) \;=\; c\, e^{\lambda\, t} \qquad (\,c \;=\; z(0)\,)$$

$$(\,e^{\lambda\, t}\,)' \;=\; \lambda\, e^{\lambda\, t}, \qquad (\,e^{\lambda\, t}\,)^{(n)} \;=\; \lambda^n\, e^{\lambda\, t}$$

証明　　変数変換 $s \;=\; \lambda\, t$ を行い、z を s の関数とみると

$$\frac{dz}{ds} \;=\; \frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{ds} \;=\; \frac{1}{\lambda}\,\lambda\, z(s) \;=\; z(s)$$

となり、これは $(*)$ と同じ微分方程式である。

初期値問題の解の一意性を考慮すると

$$y(s) \;=\; \frac{z(s)}{z(0)}$$

を得る。

よって、

$$z(t) \;=\; z(0)\, e^{\lambda\, t} \qquad (\,z(0) \;=\; c\,)$$

と表される。 $e^{\lambda\, t}$ の微分の関係式は、両辺を繰り返し微分すればよい。 ■

三角関数の定義と性質

三角関数は微分方程式

$$x'' \;=\; -\,x, \qquad x(0) \;=\; c_0, \qquad x'(0) \;=\; c_1$$

をみたす 解として定義する。

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0 \quad \text{をみたす解を} \quad \underline{\cos t}$$
$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1 \quad \text{をみたす解を} \quad \underline{\sin t}$$

と表し、それぞれ **余弦関数**（cosine function）、**正弦関数**（sine function）という。

(i) 上の微分方程式の初期値問題を考察する。 巾級数展開式

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

を代入して、両辺の等巾の係数は相等しいとおけば

$$n(n-1)\,c_n = -c_{n-2} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

なる漸化式が得られる。これから、係数は

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\,c_0, \qquad c_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\,c_1 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

となる。 この事から直ちに、解は初期値 $c_0,\ c_1$ によって 一意的に決定されること、収束半径は ∞ であることが判る。

初期条件より、三角関数の巾級数展開式は次の形である ：

$$\cos t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\,t^{2m} \qquad (|t| < \infty)$$
$$\sin t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\,t^{2m+1} \qquad (|t| < \infty)$$

(ii) 展開式を微分することによって、

$$(\cos t)' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)!}\,t^{2m-1} = -\sin t$$
$$(\sin t)' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\,t^{2m} = \cos t$$

が成り立つことが判る。

(iii) 上の微分の関係式より

$$\{(\cos t)^2 + (\sin t)^2\}' = 2\{\cos t\,(-\sin t) + \sin t\,(\cos t)\} = 0$$

となり、２乗の和は定数であり、初期条件を考慮して

$$\{(\cos t)^2 + (\sin t)^2\} = 1$$

を得る。 この式は、平面上の点 $(\cos t, \sin t)$ が単位円上を動くことを意味する。 よって、各成分の周期性が得られる。

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t, \qquad \sin(t + 2\pi) = \sin t$$

(iv)　いま、

$$y(t) = \cos t + i \sin t \qquad (i^2 = -1)$$

とおけば

$$y'(t) = -\sin t + i \cos t = i\,y(z) \qquad (\lambda = i)$$

を得る。 これは上で述べた指数関数のみたす微分方程式であり、初期条件 $y(0) = 1$ を考慮すれば、$y(t) = e^{i\,t}$ を得る。よって、Euler （オイラー）の公式

$$e^{i\,t} = \cos t + i \sin t$$

が、さらに、 de Moivre （ド・モアブル）の公式

$$e^{i\,n\,t} = \cos n\,t + i \sin n\,t = (e^{i\,t})^n = (\cos t + i \sin t)^n$$

が成り立つことが示された。

対数関数 $\log t$ の定義と性質

指数関数 $y(t) = e^t$ は単調増加関数であり、t と y とは **1 対 1** に対応している。 よって、$y(t)$ の**逆関数**として**対数関数**（logarithmic functio）を定義することができる ：

$$y = y(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \ell(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y \quad (y(0) = 1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{y} \quad (t(1) = 0)$$

$t = \ell(y)$ の微分方程式は単なる積分であり、対数関数 $\ell(y)$ は

$$\ell(y) = \int_1^y \frac{1}{x}\,dx \qquad (y > 0)$$

として定義される関数である。 明らかに、単調増加関数である。

指数関数の性質

$$y(t)\,y(s) = y(t+s)$$

において、$\xi = y(s)$ とおけば $s = \ell(\xi)$ であり

$$z \equiv y(t)\,\xi = y(t + \ell(\xi))$$

とおくと、右辺、左辺の関係式より

$$t = \ell\left(\frac{z}{\xi}\right), \qquad t + \ell(\xi) = \ell(z)$$

を得る。 よって、

$$\ell\left(\frac{z}{\xi}\right) + \ell(\xi) = \ell(z)$$

ここで、$\xi = y_1,\ \frac{z}{\xi} = y_2$ とおけば

$$\ell(y_1) + \ell(y_2) = \ell(y_1\, y_2)$$

を得る。この式は積分を通しても証明できる ：

$$\begin{aligned}\ell(y_1\, y_2) &= \int_1^{y_1\, y_2} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{y_1} \frac{1}{x}\, dx + \int_{y_1}^{y_1\, y_2} \frac{1}{x}\, dx \\ &= \int_1^{y_1} \frac{1}{x}\, dx + \int_1^{y_2} \frac{1}{\eta}\, d\eta \qquad (\, x = y_1\, \eta\,)\end{aligned}$$

対数関数を

$$\log y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ell(y)$$

と表す。この記法で、上の結果をまとめると

$$(\,\log y\,)' = \frac{1}{y}, \qquad \log y = \int_1^y \frac{1}{x}\, dx \qquad (\, y > 0\,)$$

$$\log y_1 + \log y_2 = \log\,(y_1\, y_2)$$

最後に、巾関数について言及しておこう。
任意の数 α に対して、**巾関数**（power）を

$$t^{\alpha} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exp\{\,\alpha\,(\log\, t)\,\}$$

によって 定義する。

上で定義した指数関数、三角関数、対数関数、巾関数等は**初等的特殊関数** または単に、**初等関数**と呼ばれ、一般の関数の表現に用いられる大切な関数である。

既に、階乗 $n\,!$ については述べた ：

$$n\,! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1, \qquad 0\,! = 1$$

この定義は非負の整数 n に対するものである。

２項展開式

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,)$$

に現れる係数も、階乗を用いて

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\,!} \qquad (\, k = 0, 1, 2, \ldots, n\,)$$

と表される。これは、確率・統計で教わる「組み合わせ」（combination）であり、${}_nC_k$ と書くこともある。

さて、これらは非負の整数に対してのみにしか定義できないものであろうか。 例えば、

$$(10.5)\,!, \qquad (-8.2)\,!, \qquad \binom{\pi}{k}$$

は如何なる数であろうか。 そこで、**階乗の拡張** を考察してみよう。

差分と和分

微分と積分に対比する**差分**（difference）と **和分**（summation）について説明しておこう。

$$\Delta\, y(t) = y(t+1) - y(t)$$

を**差分**という。Δ を**差分作用素**ということがある。

$$\Delta^0\, y(t) = y(t), \qquad \Delta^n\, y(t) = \Delta(\Delta^{n-1}\, y(z)) \qquad (n = 1, 2, \ldots\,)$$

を考慮して、例えば、２階の差分は

$$\Delta^2\, y(t) = \Delta(y(t+1) - y(t)) = y(t+2) - 2\, y(t+1) + y(t)$$

であり、一般に、

$$\Delta^n\, y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\, y(t+n-k)$$

が成り立つ。

未知関数 $y(t)$ とその差分 $\Delta\, y(t),\ \Delta^n\, y(t),\ \ldots\ ,\ \Delta^n\, y(t)$ の関係式

$$F(t,\, y(t),\, \Delta\, y(t), \ldots, \Delta^n\, y(t)) = 0$$

を n 階**差分方程式**（difference equation）という。上に述べた関係式より、差分方程式は

$$F(t,\, y(t),\, y(t+1),\, \ldots,\, y(t+n)) \;=\; 0$$

と書かれることが多い。

差分方程式の例

- **三角関数** $y(t) \;=\; \sin(2\pi\, t), \quad \cos(2\pi\, t)$

$$y(t+1) \;=\; y(t)$$

  をみたす。これらは周期１の周期関数である。 オイラーの公式から、

$$y(t) \;=\; e^{2\pi\, i\, t}$$

  も周期関数である。

- **指数関数** $y(t) \;=\; e^{t}$

$$y(t+1) \;=\; e\, y(t)$$

  をみたす。

さて、簡単な１階差分方程式

$$\Delta\, y(t) \;=\; a(t)$$

を考えてみよう。先ず、注意しなければならないのは

$$\Delta\, y(t) \;=\; y(t+1) \;-\; y(t) \;=\; 0$$

をみたす関数は、微分の場合と違って一般に、**「周期 １の周期関数」**である。 これより、上の差分方程式の解は

$$y(t) \;=\; \mathrm{S}\, a(t) \;+\; p(t)$$

と表される。 $p(t)$ は周期関数であり、記号は**和分**を意味する。積分の場合もそうであるように、いつも和分による関数が求まるわけではなく、記号は象徴的な意味 しか持たないこともある。

任意の数 t に対して

$$\begin{aligned} [t]_k &\;\equiv\; t\,(t-1)\,\cdots\,(t-k+1), \qquad [t]_0 \;\equiv\; 1 \\ (t)_k &\;\equiv\; t\,(t+1)\,\cdots\,(t+k-1), \qquad (t)_0 \;\equiv\; 1 \end{aligned}$$

と定義すると、前者は 階乗の一つの拡張 となっている。これらを**階乗関数**と呼ぶ。

負の整数 $k \;<\; 0$ に対しては

$$[t]_k \;=\; \frac{1}{[t-k]_{-k}} \;=\; \frac{1}{(t+1)\,(t+2)\,\cdots\,(t+(-k))} \qquad (\, k = -1,\, -2,\, \ldots\,)$$

と定義する。

２つの階乗関数の間には

$$(t)_k \;=\; (-1)^k\, [-\,t]_k$$

なる関係がある。

２項係数も

$$\binom{t}{k} \equiv \frac{t\,(t-1)\,\cdots\,(t-k+1)}{k\,!} = \frac{[t]_k}{k\,!}, \qquad \binom{t}{0} \equiv 1$$

と拡張される。

さて、階乗関数、２項係数の差分を計算すると

$$\begin{aligned}
\Delta\,[t]_k &= (t+1)t\cdots(t-k+2) - t(t-1)\cdots(t-k+1) \\
&= t(t-1)\cdots(t-k+2)\,\{(t+1) - (t-k+1)\} \\
&= k\,[t]_{k-1}, \qquad \Delta\,[t]_0 = 0
\end{aligned}$$

同様に、

$$\Delta\,(t)_k = k\,(t+1)_{k-1}, \qquad \Delta\,(t)_0 = 0$$

$$\Delta\binom{t}{k} = \binom{t}{k-1}, \qquad \Delta\binom{t}{0} = 0$$

が成り立つことが判る。

従って、

$$\mathop{\mathrm{S}} 1 = t, \qquad \mathop{\mathrm{S}} \binom{t}{k} = \binom{t}{k+1} \qquad (\,k = 1, 2, \ldots\,)$$

$$\mathop{\mathrm{S}} [t]_k = \frac{1}{k+1}\,[t]_{k+1}, \qquad \mathop{\mathrm{S}} (t)_k = \frac{1}{k+1}\,(t-1)_{k+1}$$

$$\mathop{\mathrm{S}} a^t = \frac{a^t}{a-1} \quad (\,a \neq 1\,), \qquad \mathop{\mathrm{S}} p(t) = t\,p(t) \quad (\,\Delta\,p(t) = 0\,)$$

が成り立つことは容易に判ろう。

多項式の和分を求めるには、各巾 t^n の和分を計算すればよい。そのためには、t^n を階乗関数や２項係数で表して、上の和分式を用いればよい。

ここに、

$$\Delta\,B_n(t) = n\,t^{n-1} \qquad (\,B_n(t) \text{ は } n \text{ 次の多項式}\,)$$

をみたす多項式がある。**ベルヌーイ**（Bernoulli）**の多項式**と呼ばれるものである。

よって、非負の整数巾 t^n に対する和分は直ちに

$$\mathop{\mathrm{S}} t^n = \frac{1}{n+1}\,B_{n+1}(t)$$

として与えられる。（補遺を参照）

定数係数の微分方程式と差分方程式

ここでは、定数係数の２階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + b\,y = 0 \qquad (\,a,\ b \text{ は定数}\,)$$

と定数係数の２階線形差分方程式

$$y(t+2) + a\,y(t+1) + b\,y(t) = 0 \qquad (\,a,\ b \text{ は定数}\,)$$

を扱うが、解き方はそのまま一般の場合に適用される。

これらの方程式に対して

$$f(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

なる代数方程式が定義される。これを**特性方程式**という。

代数学の基本定理

代数方程式は複素数の範囲では、必ず解けて、その次数と同じ個数（重複度も込めて）の根が存在する。

$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = 0 \qquad (\,\alpha,\ \beta \in \mathbf{C}\,)$$

２つの作用素

$$D\,y(t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \frac{dy(t)}{dt}, \qquad \mathcal{L}\,y(t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} y(t+1)$$

を定義する。

$$D^2\,y(t) \equiv D(D\,y(t)) = D\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$\mathcal{L}^2\,y(t) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{L}\,y(t)) = \mathcal{L}\,y(t+1) = y(t+2)$$

である。次に、これらの 作用素は定数と交換可能 である：

$$D\,(c\,y(t)) = c\,D\,y(t), \qquad \mathcal{L}\,(c\,y(t)) = c\,\mathcal{L}\,y(t)$$

このことから、

$$\begin{aligned}
&(D - \alpha)(D - \beta)\,y(t) = (D - \beta)(D - \alpha)\,y(t)\\
&= \{D\cdot D - (\alpha+\beta)D + \alpha\beta\}\,y(t)\\
&= \{D^2 + a\,D + b\}\,y(t) \equiv f(D)\,y(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L} - \alpha)(\mathcal{L} - \beta)\,y(t) = (\mathcal{L} - \beta)(\mathcal{L} - \alpha)\,y(t)\\
&= \{\mathcal{L}\cdot\mathcal{L} - (\alpha+\beta)\mathcal{L} + \alpha\beta\}\,y(t)\\
&= \{\mathcal{L}^2 + a\,\mathcal{L} + b\}y(t) \equiv f(\mathcal{L})\,y(t)
\end{aligned}$$

を得る。

よって、$\underline{\alpha \neq \beta}$ ならば

$$(D - \alpha)\, y(t) = 0 \quad \text{または} \quad (D - \beta)\, y(t) = 0$$

をみたす関数は微分方程式の解であり、

$$(\mathcal{L} - \alpha)\, y(t) = 0 \quad \text{または} \quad (\mathcal{L} - \beta)\, y(t) = 0$$

をみたす関数は差分方程式の解となることが判る。

$\underline{\alpha = \beta}$ のときは、解は

$$(D - \alpha)^2\, y(t) = 0, \qquad (\mathcal{L} - \alpha)^2\, y(t) = 0$$

をみたすものである。

微分方程式については、

$$(D - \lambda)\, y(t) = 0$$

の解は指数関数 $y(t) = c\, e^{\lambda\, t}$ であることは既に見たところなので、

$$(D - \lambda)^2\, y(t) = 0$$

について説明しよう。

$$y(t) = e^{\lambda\, t}\, z(t)$$

とおいて、代入すると

$$(D - \lambda)[e^{\lambda\, t}\, z(t)] = e^{\lambda\, t}\, [\lambda + D\, z(t) - \lambda] = e^{\lambda\, t}\, D\, z(t)$$

となり、さらに

$$(D - \lambda)^2\, [e^{\lambda\, t}\, z(t)] = (D - \lambda)\, [e^{\lambda\, t}\, D\, z(t)] = e^{\lambda\, t}\, D \cdot D\, z(t) = 0$$

を得る。 微分方程式

$$D^2\, z(t) = \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = 0$$

をみたす解として

$$z_1(t) = 1, \qquad z_2(t) = t$$

なる２つの解がある。 従って、元の微分方程式の解として

$$y_1(t) = e^{\lambda\, t}, \qquad y_2(t) = t\, e^{\lambda\, t}$$

なる２つの解が得られる。

他方、差分方程式

$$(\mathcal{L} - \lambda)\, y(t) = 0 \quad \text{すなわち、} \quad y(t+1) = \lambda\, y(t)$$

の解は $y(t) = p(t)\,\lambda^t$ で与えられる。 $p(t)$ は周期１の周期関数である。 この事を確かめるのは、さして困難ではないであろう。

次に

$$(\mathcal{L} - \lambda)^2\, y(t) = 0$$

の解について調べてみよう。 微分方程式の場合と同様に、

$$y(t) = \lambda^t\, z(t)$$

とおくと

$$(\mathcal{L} - \lambda)\, y(t) = \lambda^{t+1}\, z(t+1) - \lambda\,\lambda^t\, z(t) = \lambda^{t+1}\,\Delta\, z(t)$$

を得る。 さらに、

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L} - \lambda)^2\, y(t) &= (\mathcal{L} - \lambda)\,\{\lambda^{t+1}\,\Delta\, z(t)\} \\
&= \lambda^{t+2}\,\Delta\, z(t+1) - \lambda\,\lambda^{t+1}\,\Delta\, z(t) \\
&= \lambda^{t+2}\,\{\Delta\, z(t+1) - \Delta\, z(t)\} \\
&= \lambda^{t+2}\,\Delta\{\Delta\, z(t)\}
\end{aligned}$$

となることが判る。 よって、$y(t)$ が解となるためには、$z(t)$ が

$$\Delta^2\, z(t) = 0$$

の解となればよい。

２項係数の差分より、一般に

$$\Delta^m \binom{t}{p} = \binom{t}{p-m} = 0 \qquad (p < m)$$

が成り立つことに注意すると、$m = 2$ のとき

$$z_1(t) = 1, \qquad z_2(t) = \binom{t}{1}$$

が解となる。 従って、元の微分方程式の解として次の２つの解を得る ：

$$y_1(t) = \lambda^t, \qquad y_2(t) = \lambda^t \binom{t}{1}$$

以上の結果をまとめておこう。

特性方程式 $f(\lambda) \equiv \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の２根を $\alpha,\ \beta$ とする。

- 微分方程式 $f(D)\,y(t) = 0$ の解 ：

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y_1(t) = e^{\alpha t}, \qquad y_2(t) = e^{\beta t}$$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき

$$y_1(t) = e^{\alpha t}, \qquad y_2(t) = t\, e^{\alpha t}$$

一般解は

$$y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) \qquad (\, c_1,\ c_2 \quad \text{は定数}\ )$$

で与えられる。

- 差分方程式 $f(\mathcal{L})\,y(t) = 0$ の解 ：

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y_1(t) = \alpha^t, \qquad y_2(t) = \beta^t$$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき

$$y_1(t) = \alpha^t, \qquad y_2(t) = \binom{t}{1} \alpha^t$$

一般解は

$$y(t) = p_1(t)\, y_1(t) + p_2(t)\, y_2(t) \qquad (\, p_1(t),\ p_2(t) \quad \text{は周期関数}\ )$$

で与えられる。

上のような ２つの独立な解を**基本解系**という。

収束巾級数と漸近巾級数

微分方程式も係数に変数を含むと、解くことは大変難しい。

(Airy の微分方程式)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - t\,x = 0$$

(Bessel の微分方程式)

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t\,\frac{dx}{dt} + (t^2 - \nu^2)\,x = 0$$

エアリー（Airy）の微分方程式は形としては非常に簡単な方程式であるが、解の挙動を調べるには大変ハードな解析を要する。エアリーの微分方程式の解をエアリー関数といい、ベッセル（Bessel) の微分方程式の解をベッセル関数という。これらは古典的特殊関数の中でも貴重な関数である。

ここでは、ベッセルの微分方程式の解について調べよう。

$$x(t) \;=\; t^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, t^k \qquad (\, c_0 \neq 0\,)$$

なる巾級数解を求める。これを微分方程式に代入して、巾級数をまとめると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{\, [\rho+k]_2 + [\rho+k]_1 - \nu^2 \,\}\, c_k\, t^{\rho+k} \;=\; -\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, t^{\rho+k+2}$$

となる。両辺の等巾の係数を比較して、漸化式

$$(\rho+k-\nu)(\rho+k+\nu)\, c_k \;=\; -\, c_{k-2}$$

を得る。 $k=0$ の式より

$$\rho \;=\; \pm\nu$$

となり、"ν が整数とは異なる "と仮定すれば、$c_1 \;=\; 0$ となる。

よって、$\rho \;=\; \nu$ のとき

$$c_{2k} \;=\; \frac{-1}{2k\,\cdot\,2(k+\nu)}\, c_{2(k-1)} \;=\; \cdots \;=\; \frac{(-1)^k}{4^k\,(1)_k\,(1+\nu)_k}\, c_0, \qquad c_{2k+1} \;=\; 0$$

同様に、$\rho \;=\; -\nu$ のとき

$$c_{2k} \;=\; \frac{(-1)^k}{4^k\,(1)_k\,(1-\nu)_k}\, c_0, \qquad c_{2k+1} \;=\; 0$$

を得る。d'Alambert の判定法

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_{2k}}{c_{2(k-1)}} \;=\; 0$$

より、収束半径は ∞ であり、巾級数は $|t| \;<\; \infty$ で収束する。

２つの収束巾級数解

$$\begin{aligned} x_1(t) \;&=\; t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, c_0}{(1)_k\,(1+\nu)_k} \left(\frac{t}{2}\right)^{2\,k} && (\,|t| \;<\; \infty\,) \\ x_2(t) \;&=\; t^{-\,\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, c_0}{(1)_k\,(1-\nu)_k} \left(\frac{t}{2}\right)^{2\,k} && (\,|t| \;<\; \infty\,) \end{aligned}$$

を**第１種ベッセル関数**（Bessel function of the first kind）という。

この解の挙動を調べるため、別の解の存在について見てみよう。

$$x(t) \;=\; e^{\lambda\, t}\, z(t)$$

なる変換を行うと、微分方程式は

$$t^2 \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\lambda\, \frac{dz}{dt} + \lambda^2\, z \right) \;+\; t\, \left(\frac{dz}{dt} + \lambda\, z \right) \;+\; (t^2 - \nu^2)\, z \;=\; 0$$

となるが、ここで $\lambda^2+1 = 0$ とする。すると、微分方程式は

$$t^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + (2\lambda t + 1)\, t \frac{dz}{dt} + (\lambda t - \nu^2)\, z = 0$$

となる。

この解として

$$z(t) = t^\mu \sum_{k=0}^{\infty} d_k\, t^{-k} \qquad (\, d_0 \neq 0\,)$$

なる巾級数解を求める。代入、等巾の係数を合わせるという形式的計算を行うと、前と同様に漸化式

$$\lambda \{ (2\mu + 1) - 2\lambda (k+1) \}\, d_{k+1} + (\mu - k + \nu)(\mu - k - \nu)\, d_k = 0$$

を得る。 $d_0 \neq 0$ より

$$\mu = -\frac{1}{2}$$

となり、漸化式は

$$d_k = \frac{\left(k - \frac{1}{2} + \nu\right)\left(k - \frac{1}{2} - \nu\right)}{2\lambda k}\, d_{k-1}$$

となる。 よって、階乗関数を使って

$$d_k = \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)_k \left(\nu + \frac{1}{2}\right)_k}{(2\lambda)^k\, (1)_k} \qquad (\, d_0 = 1\,)$$

を得る。

以上より、$\lambda = \pm i$ に対応する 2 つの巾級数が求められる ：

$$\begin{aligned} \widehat{x_1}(t) &= e^{i t}\, t^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)_k \left(\nu + \frac{1}{2}\right)_k}{(1)_k} \left(\frac{1}{2 i t}\right)^{-k} \\ \widehat{x_2}(t) &= e^{-i t}\, t^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)_k \left(\nu + \frac{1}{2}\right)_k}{(1)_k} \left(\frac{-1}{2 i t}\right)^{-k} \end{aligned}$$

しかるに、

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d_k}{d_{k-1}} = \infty$$

であり、収束半径は零、すなわち、この級数は発散級数である。形式的に微分方程式をみたすのみなので、**形式解**（formal solution）と呼ばれる。

形式解が発散級数であるから、何も意味がないかというと実は、これが非常に大切で、有効的な級数なのである。 微分方程式の理論では、形式解を使って、真の解 $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ の存在と、**形式解が真の解の漸近挙動**（asymptotic behavior）となることを証明することができる。

$$y_i(t) \sim \widehat{x}_i(t) \qquad (\, t \to \infty\,)$$

証明は簡単ではないので、ここでは省くが、**漸近展開**（asymptotic expansion）の定義のみ述べておこう。

漸近展開の定義

$$y(t) \ \sim \ e^{\lambda t} t^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \, t^{-k} \qquad (\, t \to \infty \,)$$

$$\Updownarrow$$

任意の非負の整数 N に対して

$$\lim_{t \to \infty} |t|^N \left| e^{-\lambda t} t^{-\mu} y(t) \ - \ \sum_{k=0}^{N} d_k \, t^{-k} \right| \ = \ 0$$

が成り立つことである。

右辺の巾級数を関数 $y(t)$ の**漸近展開式** または **漸近級数**（asymptotic series）という。

ベッセル関数は、$t = \infty$ の近傍では、次のような漸近挙動をするのである ：

$$x_i(t) \ \sim \ \alpha_i \, \widehat{x_1}(t) \, + \, \beta_i \, \widehat{x_2}(t) \qquad (\, t \to \infty \,) \qquad (\, i \ = \ 1, 2 : \quad \alpha_i, \ \beta_i \ \text{は定数} \,)$$

第 4 節　ガンマ関数とプサイ関数

話が少し発散してしまったが、階乗の拡張の話に戻ろう。
$y(n+1) \ = \ n\,!$ とおけば

$$n\,! \ = \ n \, (n-1)\,! \qquad \Longrightarrow \qquad y(n+1) \ = \ n \, y(n)$$

であり、t を変数として

$$(**) \qquad y(t+1) \ = \ t \, y(t), \qquad y(1) \ = \ 1$$

なる関係式をみたすと見ることができる。これは１階差分方程式であり、変数係数をもつ差分方程式の中で、最も簡単そうに見える差分方程式である。

差分方程式 $(**)$ をみたす関数を**ガンマ関数**（gamma function）といい、 $\Gamma(t)$ で表す。

すなわち、**階乗は、ガンマ関数の非負の整数における値** なのである。

$$\Gamma(n+1) \ = \ n\,!$$

さて、前節の微分方程式の場合と同様な方法で、差分方程式 $(**)$ を解析しよう。
両辺の対数をとれば

$$\log \, y(t+1) \, - \, \log \, y(t) \ = \ \log \, t$$

である。そこで、$x(t) = \log y(t)$ とおくと

$$\Delta x(t) = \log t$$

これは**対数関数の和分**を求める問題である。解析は簡単そうであるが、そうはいかない。

$|t|$ が大きいとき、和分の大きさは

$$x(t) = \mathrm{S} \log t \sim t \log t$$

となるように思われる。そこで、

$$\varphi(t) = t(\log t - 1)$$

を考えると、その差分は

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(t) &= (t+1) \log(t+1) - t \log t - 1 \\ &= (t+1) \Delta \log t + \log t - 1 \end{aligned}$$

である。 このことを考慮して、

$$x(t) = \varphi(t) + w(t)$$

とおくと、結局、差分方程式 $(**)$ は

$$\Delta w(t) = -\Delta \varphi(t) + \log t = -(t+1) \Delta \log t + 1$$

に帰着される。

この差分方程式を解析するにあたって、少し準備をしよう。

準備

$|\xi| < 1$ に対して

$$\begin{aligned} f(\xi) &= (1 + \xi)^{-k} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \xi + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \xi^m + \cdots \\ &= 1 + \frac{[-k]_1}{1!} \xi + \frac{[-k]_2}{2!} \xi^2 + \cdots + \frac{[-k]_m}{m!} \xi^m + \cdots \end{aligned}$$

なる展開が成り立つ。

$|t| > 1$ が十分大きいとすると $|t^{-1}| < 1$ であり、上の関係式を用いると

$$\begin{aligned} \Delta t^{-k} &= t^{-k} \left\{ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-k} - 1 \right\} = t^{-k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[-k]_m}{m!} t^{-m} \\ \Delta \log t &= \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} t^{-m-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

さて、差分方程式の右辺の $\Delta \log t$ に上の展開式を代入すると

$$\Delta w(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)_2} t^{-m-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m)_2} t^{-m}$$

を得る。

<u>解として</u>

$$w(t) = \lambda \log t + \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{-k}$$

なる巾級数のものを求めてみよう。

$$\Delta w(t) = \lambda \Delta \log t + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Delta t^{-k}$$

に、上の負巾関数と対数関数の差分に対する展開式を代入すると

$$\begin{aligned}
\Delta w(t) &= \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} t^{-m-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[-k]_m}{m\,!} \right) t^{-k-m} \\
&= \frac{\lambda}{t} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\lambda}{m} t^{-m} + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m-1} c_k \frac{[-k]_{m-k}}{(m-k)\,!} \right) t^{-m} \\
&= \frac{\lambda}{t} + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{m-1}\lambda}{m} + \sum_{k=1}^{m-1} c_k \frac{[-k]_{m-k}}{(m-k)\,!} \right\} t^{-m}
\end{aligned}$$

を得る。

よって、

$$\frac{\lambda}{t} + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{m-1}\lambda}{m} + \sum_{k=1}^{m-1} c_k \frac{[-k]_{m-k}}{(m-k)\,!} \right\} t^{-m} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m)_2} t^{-m}$$

の両辺の等巾の係数を比較して、

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} c_k \frac{[-k]_{m-k}}{(m-k)\,!} = \frac{(-1)^m}{(m)_2} + \frac{(-1)^m \lambda}{m} \qquad (\, m = 1, 2, \ldots \,)$$

なる漸化式が得られる。 整理すると、漸化式は

$$(-1)^{m+1} (m)_3 \, c_m + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} c_k \, (k)_2 \binom{m+2}{k+1} = \frac{m}{2}$$

となる。 補遺の**ベルヌーイ数**（Bernoulli number）のみたす漸化式 (♡)

$$\sum_{k=-1}^{m} \binom{m+2}{k+1} B_{k+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+2}{k} B_k = 0$$

を考慮すると、

$$(-1)^{k+1}\,(k)_2\,c_k \;=\; B_{k+1} \qquad (\,k \;=\; 1,\,2,\,3,\;\cdots\,)$$

となることを証明できる（数学的帰納法で！）。

よって、次の結果を得る。

定理 (形式解の存在)

差分方程式

$$\Delta\,x(t) \;=\; \log\,t$$

は、次の形式解

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; t\,(\log\,t\,-\,1)\,-\,\frac{1}{2}\,\log\,t\,+\,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\,B_{k+1}}{(k)_2}\,t^{-\,k} \\ &=\; \left(t\,-\,\frac{1}{2}\right)\log\,t\,-\,t\,+\,\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m+2}}{(2m+1)_2}\,t^{-\,(2m+1)} \end{aligned}$$

をもつ。 係数に現れる定数 B_k はベルヌーイ数である。

この結果から、実は、ガンマ関数とは、十分大きい t に対して

$$\begin{aligned} \log\,\Gamma(t) \;&\sim\; \left(t\,-\,\frac{1}{2}\right)\log\,t\,-\,t\,+\,\log\,\sqrt{2\pi}\,+\,\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m+2}}{(2m+1)_2}\,t^{-\,(2m+1)} \\ \Gamma(t) \;&\sim\; \sqrt{2\pi}\,t^{t\,-\,\frac{1}{2}}\,e^{-\,t}\left\{1\,+\,\frac{1}{12\,t}\,+\,\frac{1}{288\,t^2}\,-\,\frac{139}{51840\,t^3}\,-\,\cdots\right\} \qquad (\,t\,\to\,\infty\,) \end{aligned}$$

なる 漸近挙動を示す関数として定義される のである。

また、ガンマ関数は**オイラー積分**（Euler integral）

$$\Gamma(t) \;=\; \int_0^{\infty} e^{-\,s}\,s^{t\,-\,1}\,ds \qquad (\,t\;>\;0\,)$$

によって定義される。$\Gamma(1)\;=\;1$ なることは直ちに判り、次のように部分積分することにによって差分方程式をみたすことも示される：

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) \;&=\; \int_0^{\infty} e^{-\,s}\,s^{t}\,ds \;=\; [\,-\,e^{-\,s}\,s^{t}\,]_0^{\infty}\;+\;\int_0^{\infty} e^{-\,s}\,t\,s^{t\,-\,1}\,ds \\ &=\; t\int_0^{\infty} e^{-\,s}\,s^{t\,-\,1}\,ds \;=\; t\,\Gamma(t) \end{aligned}$$

このオイラー積分を通して、漸近展開を求めることもできる。

ガンマ関数を用いれば、階乗関数、２項係数は

$$[t]_k \;=\; \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-k)}, \qquad (t)_k \;=\; \frac{\Gamma(t+k)}{\Gamma(t)}, \qquad \binom{t}{k} \;=\; \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-k)\Gamma(k+1)}$$

であり、さらに、

$$y(t+1) \;=\; \alpha\; \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{m} (t\,-\,b_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (t\,-\,a_k)}\; y(t)$$

の解が

$$y(t) \;=\; \alpha^t\; \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{m} \Gamma(t\,-\,b_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \Gamma(t\,-\,a_k)}$$

で与えられることも直ちに判る。

さて、差分方程式

$$\log\,\Gamma(t+1)\,-\,\log\,\Gamma(t) \;=\; \log\,t$$

の両辺を微分すると

$$\frac{\Gamma'(t+1)}{\Gamma(t+1)} - \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \;=\; \frac{1}{t}$$

となる。

$$\Psi(t) \;=\; \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \;=\; \frac{d}{dt}\,\log\,\Gamma(t)$$

を**プサイ関数**（psi function）という。 プサイ関数は差分方程式

$$\Psi(t+1)\,-\,\Psi(t) \;=\; \frac{1}{t}$$

をみたす関数である。この差分方程式の両辺の微分を繰り返せば

$$\frac{d^m}{dt^m}\,\Psi(t+1)\,-\,\frac{d^m}{dt^m}\,\Psi(t) \;=\; (-1)^m\,\frac{m\,!}{t^{m+1}}$$

このことから、負巾の関数の和分がプサイ関数で表されることが判る：

$$\mathrm{S}\,\frac{1}{(t\,-\,a)^m} \;=\; \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)\,!}\,\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\,\Psi(t\,-\,a) \qquad (\,m \;=\; 1,\,2,\,\ldots\,)$$

プサイ関数をガンマ関数の対数微分として定義したが、差分方程式論の立場から見ると、プサイ関数は

$$y(t+1)\,-\,y(t) \;=\; \frac{1}{t}$$

の解であり、この差分方程式を解析することによって

$$\begin{aligned}
\Psi(t) \;&=\; \lim_{n\to\infty}\left\{\log\,n - \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \;\cdots\; - \frac{1}{t+n}\right\} \\
&=\; -\gamma - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t+n} - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

なる収束する級数で表されることを証明できる。 ここで、定数 γ は

$$\Psi(1) = \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{1}{n-1} - \log n\right)$$

で、**オイラーの定数**と呼ばれる。 第 1 節で述べた実数である。

プサイ関数の漸近展開として

$$\Psi(t) \sim \log t - \frac{1}{2t} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m+2}}{2m+2}\, t^{-(2m+2)} \qquad (t \to \infty)$$

を得るが、差分方程式の理論では、右辺の形式解を用いて解の存在を証明するのが本来的、常套的な解析方法なのである。

第 5 節　違いは何か ？

前節までに、微分と差分についていろいろ述べてきたが、微分については馴染みがあっても、離散的な変数（整数変数）に関する差分方程式の問題（社会、経済問題等）以外には、実変数または複素変数の差分方程式にはあまり接する機会がないのではないかと思われる。

実は、第 2 節の指数関数の実軸上における増大度に関する証明以外は、変数は複素変数であっても成り立つことなのである。 微分方程式も、差分方程式も複素領域で考えるのである。

ここで、これまでの結果をまとめておこう。

微分 ・ 積分	**差分 ・ 和分**
$y'(t) = 0$ $\Longrightarrow\ y(t) = c$ (定数)	$\Delta\, y(t) = 0$ $\Longrightarrow\ y(t) = p(t)$ (周期関数)
$y'(t) = q(t)$ (多項式) $\Longrightarrow\ y(t) = Q(t)$ (多項式)	$\Delta\, y(t) = q(t)$ (多項式) $\Longrightarrow\ y(t) = Q(t)$ (多項式)
$y'(t) = \frac{1}{t}$ $\Longrightarrow\ y(t) = \log t$	$\Delta\, y(t) = \frac{1}{t}$ $\Longrightarrow\ y(t) = \Psi(t) \sim \log t$
$y'(t) = \log t$ $\Longrightarrow\ y(t) = t \log t - t$	$\Delta\, y(t) = \log t$ $\Longrightarrow\ y(t) = \log \Gamma(t) \sim \left(t - \frac{1}{2}\right) \log t - t$

有理関数

$$R(t) = \sum_{\ell=0}^{M} b_\ell\, t^\ell + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{c_{j\,k}}{(t - a_j)^k} \qquad (M \geq 0)$$

の積分は

$$\int R(t)\,dt \;=\; \sum_{\ell=0}^{M} \frac{b_\ell}{\ell+1}\,t^{\ell+1} \;+\; \sum_{j=1}^{N} c_{j\,1}\,\log\,(t\,-\,a_j) \;+\; \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=2}^{n_j} \frac{c_{j\,k}}{(1-k)(t\,-\,a_j)^{k-1}}$$

他方、和分については、多項式の部分はベルヌーイ多項式を用いて直ちに

$$\sum_{\ell=0}^{M} \frac{b_\ell}{\ell+1}\,B_{\ell+1}(t)$$

を得るが、多項式を２項係数（階乗関数）で

$$\sum_{\ell=0}^{M} b_\ell\,t^\ell \;=\; \sum_{\ell=0}^{M} \bar{b}_\ell \binom{t}{\ell}$$

と表せば、和分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\,R(t) \;&=\; \sum_{\ell=0}^{M} \bar{b}_\ell \binom{t}{\ell+1} \;+\; \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^{k-1}\,c_{j\,k}}{(k-1)\,!}\,\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\,\Psi(t\,-\,a_j) \\
&=\; \sum_{\ell=0}^{M} \bar{b}_\ell\,\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\ell-1)\Gamma(\ell+2)} \;+\; \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^{k-1}\,c_{j\,k}}{(k-1)\,!}\,\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\,\Psi(t\,-\,a_j)
\end{aligned}$$

のように、**ガンマ関数とプサイ関数で表される。**

次に、１階微分方程式と差分方程式を比較してみよう。

微分方程式	**差分方程式**
$y'(t) \;=\; \alpha\,y(t)$ $\Longrightarrow\quad y(t) \;=\; e^{\alpha\,t}$	$y(t+1) \;=\; \alpha\,y(t)$ $\Longrightarrow\quad y(t) \;=\; \alpha^t \;=\; e^{t\,\log\,\alpha}$
$y'(t) \;=\; \alpha\,t\,y(t)$ $\Longrightarrow\quad y(t) \;=\; e^{\frac{\alpha}{2}\,t^2}$	$y(t+1) \;=\; \alpha\,t\,y(t)$ $\Longrightarrow\quad y(t) \;=\; \alpha^t\,\Gamma(t)$
$y'(t) \;=\; \frac{\alpha}{t}\,y(t)$ $\Longrightarrow\quad y(t) \;=\; t^\alpha$	$y(t+1) \;=\; \frac{\alpha}{t}\,y(t)$ $\Longrightarrow\quad y(t) \;=\; \frac{\alpha^t}{\Gamma(t)}$
$y'(t) \;=\; t^\lambda\,y(t)$ $\Longrightarrow\quad y(t) \;=\; \exp\left(\frac{1}{\lambda+1}\,t^{\lambda+1}\right)$	$y(t+1) \;=\; t^\lambda\,y(t)$ $\Longrightarrow\quad y(t) \;=\; \exp\,(\lambda\,\log\,\Gamma(t)) \;=\; (\,\Gamma(t)\,)^\lambda$

差分方程式

$$y(t+1) \;=\; \exp\left\{\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \binom{t}{k} \;+\; \sum_{k=1}^{q} \beta_k\, t^{-k}\right\} y(t)$$

の解も

$$y(t) \;=\; \exp\left\{\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-k)\Gamma(k+1)} \;+\; \sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^{k-1}\beta_k}{(k-1)\,!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \Psi(t)\right\}$$

のように、ガンマ関数とプサイ関数で表される。

このように、差分方程式の理論の中では、$\Gamma(t)$ と $\Psi(t)$ は微分方程式論における巾関数や対数関数のような重要な役割を演じているわけである。

さらに、ガンマ関数 $\Gamma(t)$ や プサイ関数 $\Psi(t)$ は**差分方程式をみたす特殊関数**として、数理科学の中で貴重な存在でもある。次の定理がある。

定理 （超超越性）

ガンマ関数 $\Gamma(t)$ と プサイ関数 $\Psi(t)$ は、決して代数的微分方程式をみたさない。
このような関数を**超超越関数**（hypertranscendental function）という。（証明は補遺）

特殊関数と呼ばれるものの多くは、微分方程式の解として定義されるものである。 前述したように、微分方程式で定義される関数も差分方程式をみたす場合もある。三角関数や指数関数がそれである。 しかるに、一般的には、多くの差分方程式の解は超超越的なのである。

それでは、どこが、どう違うのであろうか。 その一端を見てみると、ガンマ関数 $\Gamma(t)$ の増大度は

$$|\, e^t \,| \;<\; |\, \Gamma(t) \;\sim\; e^{t\,\log\, t} \,| \;<\; |\, e^{t^2} \,|$$

であり、$\log\, t$ は如何なる巾 t^{ϵ} $(\epsilon > 0)$ の増大度より小さいから、$\Gamma(t)$ の増大度は e^t よりは**ほんの少しだけ**大きいに過ぎない。 この「ほんの」のために、微分方程式から離れているのであろうか。

第 6 節　補遺

ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式

階乗関数と巾との間には、次の関係式が成り立つ：

$$[t]_n \;=\; S_n^1\, t \,+\, S_n^2\, t^2 \,+\, \cdots \,+\, S_n^n\, t^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$t^n \;=\; \mathcal{S}_n^1\, [t]_1 \,+\, \mathcal{S}_n^2\, [t]_2 \,+\, \cdots \,+\, \mathcal{S}_n^n\, [t]_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

前者の $S_n^1,\ S_n^2,\ \cdots$ を第１種の**スターリング数**（Stirling number）といい、後者の $\mathcal{S}_n^1,\ \mathcal{S}_n^2,\ \cdots$ を第２種のスターリング数という。

多項式の差分、和分には後者の式を用いればよい、すなわち、多項式を階乗関数で表せばよい。そのことは**組立除法**で計算できる。

２つの展開式を考える。

$$\boxed{\frac{s}{e^s\,-\,1}\;=\;\sum_{k=0}^{\infty} B_k\,\frac{s^k}{k\,!}}$$

の係数 B_k を**ベルヌーイ数**（Bernoulli number）という。

漸化式

$$(\heartsuit)\qquad B_0\;=\;1,\quad (k+1)\,B_k\,+\sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{k+1}{\ell}B_\ell\;=\;0\qquad (k=1,2,\ \ldots\ )$$

によって、決定される数でもある。

$$B_1\;=\;-\frac{1}{2},\ B_2\;=\;\frac{1}{6},\ B_4\;=\;-\frac{1}{30},\ B_6\;=\;\frac{1}{42},\ B_8\;=\;-\frac{1}{30},\ \cdots$$

$$B_{2k+1}\;=\;0\qquad (k=1,2,\ \ldots\ )$$

B_1 以外、奇数の添数をもつ数が零であることは、展開式から $-s$ を代入した展開式をひくと

$$\frac{s}{e^s\,-\,1}\,-\,\frac{-s}{e^{-s}\,-\,1}\;=\;\frac{s}{e^s\,-\,1}\,-\,\frac{s\,e^s}{e^s\,-\,1}\;=\;-\,s$$

を得る。よって、$k=1$ を除いて奇数巾の係数は零となる。

次に、

$$\boxed{\frac{s\,e^{t\,s}}{e^s\,-\,1}\;=\;\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\,\frac{s^k}{k\,!}}$$

の係数 $B_k(t)$ を **ベルヌーイ多項式**（Bernoulli polynomial）という。

$$B_0(t)\;=\;1,\quad B_k(t)\;=\;\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}B_\ell\,t^{k\,-\,\ell}\qquad (k=1,2,\ \ldots\ )$$

この式はベルヌーイ数の展開式と指数関数 $e^{t\,s}$ の展開式から得られる。

さて、上の展開式から

$$\frac{s\,e^{(t+1)\,s}}{e^s\,-\,1}\,-\,\frac{s\,e^{t\,s}}{e^s\,-\,1}\;=\;\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\,B_k(t)\,\frac{s^k}{k\,!}$$

であるが、左辺を計算すると

$$s\,e^{t\,s} \,=\, s\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\,s)^k}{k\,!} \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} k\,t^{k-1}\,\frac{s^k}{k\,!}$$

よって、両辺の等巾の係数を比較することによって

$$\Delta\, B_k(t) \,=\, k\,t^{k-1}$$

を得る。この関係式より、巾の和分に関する次式が成り立つ。

$$\mathrm{S}\, t^k \,=\, \frac{1}{k+1}\,B_{k+1}(t)$$

ついでながら、 ベルヌーイ多項式の微分について述べておこう。展開式の両辺を t に関して微分して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{s\,e^{t\,s}}{e^s\,-\,1}\right) \,=\, \frac{s^2\,e^{t\,s}}{e^s\,-\,1}$$

展開式では

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{dB_k(t)}{dt}\,\frac{s^k}{k\,!} \,=\, s\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\,\frac{s^k}{k\,!}\right) \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} k\,B_{k-1}(t)\,\frac{s^k}{k\,!}$$

となる。両辺を比較して

$$\frac{dB_k(t)}{dt} \,=\, k\,B_{k-1}(t)$$

微分を繰り返せば

$$\frac{d^p B_k(t)}{dt^p} \,=\, [k]_p\,B_{k-p}(t) \qquad (p = 1, 2, \,\ldots\,)$$

を得る。

$\Gamma(t)$ と $\Psi(t)$ の超超越性

プサイ関数がある微分方程式をみたせば、

$$\Psi(t) \,=\, \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$$

なる関係式から、ガンマ関数も微分方程式をみたす。それゆえ、プサイ関数 $\Psi(t)$ が代数的微分方程式を決してみたさないことを示せばよい。

背理法で証明する。すなわち、プサイ関数 $\Psi(t)$ が微分方程式

$$(\sharp) \qquad G(t,\, u(t),\, u'(t),\, \cdots,\, u^{(n-1)}(t)) \,=\, 0$$

をみたすと仮定して、矛盾を引き出す。ここで、

$$G(t,\, y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n) \,=\, \sum_{\substack{0\,\le\,\nu_1,\,\nu_2,\,\cdots,\,\nu_n\,\le\,m \\ 0\,\le\,\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n\,\le\,m}} c_{\nu_1\,\nu_2\,\cdots\,\nu_n}\,y_1^{\nu_1}\,y_2^{\nu_2}\,\cdots\,y_n^{\nu_n}$$

なる $(y_1,\, y_2,\, \ldots\,,\, y_n)$ の多項式で、係数は t の有理関数とする。 最高次数 $m \,=\, \nu_1 \,+\, \nu_2 \,+\, \cdots \,+\, \nu_n$ を微分方程式 $(\sharp)$ の 次元 と呼ぼう。

証明を始める前に、有理関数について復習しておこう。

有理関数

有理関数 $R(t)$ とは

$$R(t) = \frac{Q(t)}{P(t)} \qquad (\ P(t) \text{ と } Q(t) \text{ は多項式}\ )$$

と表される関数である。$Q(t) = 0$ の根を**零点**といい、$P(t) = 0$ の根を**極**という。$Q(t),\ P(t)$ の次数をそれぞれ $q,\ p$ とするとき、$q < p$ ならば、無限大 $t = \infty$ は零点であり、$q > p$ ならば $t = \infty$ は極とする。いずれにしても、有理関数の零点と極の個数は有限個である。

上より、有限な点に極を持たない（無限大にのみ極をもつ）有理関数は多項式であり、無限大も込めて極をもたない（有界な）有理関数は定数である。

また、２つの有理関数の加減乗除したものも有理関数である。

さて、プサイ関数が (♯) をみたせば

$$\begin{aligned} G(t+1, u(t+1), u'(t+1), \quad \cdots \quad &, u^{(n-1)}(t+1)) \\ &- \quad G(t, u(t), u'(t), \cdots, u^{(n-1)}(t)) = 0 \end{aligned}$$

もみたす。これに、

$$u^{(k)}(t+1) = u^{(k)}(t) + \frac{(-1)^k\, k\,!}{t^{k+1}} \qquad (\,k = 0, 1, \ldots, n-1\,)$$

を代入すると、新たな微分方程式

$$(\sharp\sharp) \qquad H(t, u(t), u'(t), \cdots, u^{(n-1)}(t)) = 0$$

が得られる。

この変換で微分方程式がどの様に変わるかを見てみる。(♯) の最高次数 m の項を

$$P_{1\,m}(t) + R_2(t)\,P_{2\,m}(t) + \cdots + R_s(t)\,P_{s\,m}(t)$$

とする。ここで、$P_{j\,m}(t)$ は次数 m の単項式

$$\begin{aligned} &P_{j\,m}(t) = (u(t))^{\nu_{1\,j}}\,(u'(t))^{\nu_{2\,j}} \cdots (u^{(n-1)}(t))^{\nu_{n\,j}} \\ &0 \le \nu_{i\,j} \le m \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \nu_{1\,j} + \nu_{2\,j} + \cdots + \nu_{n\,j} = m \end{aligned}$$

で、係数 $R_j(t)$ は t の有理関数である。最初に割っておいて、$R_1(t) \equiv 1$ としている。

いま、

$$\begin{aligned} P_{1\,m}(t+1) &= (u^{(k_1)}(t+1))^{\alpha_1}\,(u^{(k_2)}(t+1))^{\alpha_2} \cdots (u^{(k_r)}(t+1))^{\alpha_r} \\ & \quad m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r \qquad (\,\alpha_j \neq 0\,) \end{aligned}$$

に上の関係式を代入すると

$$
\begin{aligned}
P_{1\,m}(t+1) \;&=\; \prod_{j=1}^{r}\left(u^{(k_j)}(t) \;+\; \frac{(-1)^{k_j}\,(k_j)\,!}{t^{k_j+1}}\right)^{\alpha_j} \\
&=\; P_{1\,m}(t) \;+\; \{\text{ 高々 } (m-1) \text{ 次数の項 }\}
\end{aligned}
$$

他の項については

$$
\begin{aligned}
&R_j(t+1)\,P_{j\,m}(t+1) \;-\; R_j(t)\,P_{j\,m}(t) \\
&=\; (\,R_j(t+1) \;-\; R_j(t)\,)\,P_{j\,m}(t) \;+\; \{\text{ 高々 } (m-1) \text{ 次数の項 }\}
\end{aligned}
$$

となる。

従って、($\sharp\sharp$) では $P_{1\,m}(t)$ は消えているし、また、$R_j(t+1) \;=\; R_j(t)$ に対応する項も消えている。すなわち、変換によって、次数 m の項は少なくなる。

$R_j(t+1) \;\neq\; R_j(t)$ なる項があれば、両辺を $(R_j(t+1) \;-\; R_j(t))$ で割れば、m 次の項が少なくなった ($\sharp$) の形である。そこで、また、上の変換を行う。 このようにして、m 次の項を次々と消して行って、最終的には微分方程式の次元を下げて行くことができる。

もし、すべての j に対して

$$R_j(t+1) \;=\; R_j(t)$$

となる場合はどうであろうか。

有理関数が周期関数となるのは、$R_j(t) \;\equiv\; c_j$ (定数) のときである。何故ならば、零点 $t = t_0$ をもてば、周期性より $t = t_0 \;-\; p$ (p は整数) は零点となり、無限個の零点をもつことになる。 極についても同様である。よって、$R_j(t)$ は変数 t を含まない。

そのとき、次数 m の項は

$$P_{1\,m}(t) \;+\; c_2\,P_{2\,m}(t) \;+\; \cdots \;+\; c_s\,P_{s\,m}(t)$$

の形である。この場合、一気に、高々 $(m-1)$ 次元の微分方程式になるが、微分方程式のすべての係数が 0 となる、すなわち、上の簡略化の方法で、恒等的に 0 なる微分方程式になってしまうという事が起こらないのであろうか？ そのような事は起こらない！

実際、m 次の項が一気に消える場合でも、少なくとも 1 つの恒等的に 0 ではない $(m-1)$ 次の項が残っている事を示そう。

$$
\begin{aligned}
&P_{1\,m}(t+1) \;-\; P_{1\,m}(t) \\
&=\; \left(u^{(k_1)}(t) \;+\; \frac{(-1)^{k_1}\,(k_1)\,!}{t^{k_1+1}}\right)\left(u^{(k_1)}(t) \;+\; \frac{(-1)^{k_1}\,(k_1)\,!}{t^{k_1+1}}\right)^{\alpha_1-1} \\
&\times\; \prod_{j=2}^{r}\left(u^{(k_j)}(t) \;+\; \frac{(-1)^{k_j}\,(k_j)\,!}{t^{k_j+1}}\right)^{\alpha_j} \;-\; \prod_{j=1}^{r}\left(u^{(k_j)}(t)\right)^{\alpha_j} \\
&=\; \frac{(-1)^{k_1}\,(k_1)\,!}{t^{k_1+1}}\left(u^{(k_1)}(t)\right)^{\alpha_1-1}\prod_{j=2}^{r}\left(u^{(k_j)}(t)\right)^{\alpha_j} \;+\; \cdots
\end{aligned}
$$

なる項を含む。 他の $P_{j\,m}(t)$ $(j \neq 1)$ から、上記の形の $(m-1)$ 次の項が出てくるか、どうかを考えてみると、例えば、

$$P_{j\,m}(t) \;=\; u^{(\ell)}(t)\left(u^{(k_1)}(t)\right)^{\alpha_1 - 1}\prod_{j=2}^{r}\left(u^{(k_j)}(t)\right)^{\alpha_j} \qquad (\,\ell \neq k_1\,)$$

の形をしていれば、同様に

$$c_j\,\frac{(-1)^{\ell}\,(\ell)\,!}{t^{\ell+1}}\left(u^{(k_1)}(t)\right)^{\alpha_1 - 1}\prod_{j=2}^{r}\left(u^{(k_j)}(t)\right)^{\alpha_j}$$

が出てくる。

よって、上の $(m-1)$ 次の項の係数は、一般に

$$\sum_{h=0}^{N}\frac{C_h}{t^{h+1}}$$

の形をしていて、係数 C_h の中には少なくとも 1 つ（例えば、$h = k_1$ ）は 0 ではない。

他方、微分方程式 $(\sharp\sharp)$ の中で、上記の $(m-1)$ 次の項は $(\sharp)$ の

$$R(t)\,\left(u^{(k_1)}(t)\right)^{\alpha_1 - 1}\prod_{j=2}^{r}\left(u^{(k_j)}(t)\right)^{\alpha_j}$$

なる項から生じるものもあることを考慮すると、結局、簡略化の後の

$$\widehat{R}(t)\,\left(u^{(k_1)}(t)\right)^{\alpha_1 - 1}\prod_{j=2}^{r}\left(u^{(k_j)}(t)\right)^{\alpha_j}$$

における係数は

$$\widehat{R}(t) \;=\; R(t+1) \;-\; R(t) \;+\; \sum_{h=0}^{N}\frac{C_h}{t^{h+1}}$$

となる。

さて、上の係数 $\widehat{R}(t)$ は決して 0 にはならない。互いに相殺して、0 となるならば、$t = 0$ なる極も相殺されなければならない。

$R(t)$ が多項式ならば、極 $t = 0$ を相殺することはない。有理関数の極の個数は有限個であるから、$R(t)$ の有限な位置にある極を実部の大きさの順に*

$$\mathrm{Re}\,t_1 \;\leq\; \mathrm{Re}\,t_2 \;\leq\; \cdots \;\leq\; \mathrm{Re}\,t_K \;<\; \infty$$

とする。（∞ も極の場合がある。）

すると、$R(t+1)$ より

$$t_1 \,-\, 1,\; t_2 \,-\, 1,\; \cdots\;,\; t_K \,-\, 1$$

---

*t が複素変数であることを避けてきたが、代数方程式の根は必ずしも、実根ではないので、極の位置も実数とは限らない。 複素数は $t \,=\, \mathrm{Re}\,t \,+\, i\,\mathrm{Im}\,t$ と表されるが、$\mathrm{Re}\,t$ を t の実部、 $\mathrm{Im}\,t$ を虚部という。

も極となり、

$$\mathrm{Re}\,(t_1 - 1) < \mathrm{Re}\,t_1, \qquad \mathrm{Re}\,(t_K - 1) < \mathrm{Re}\,t_K$$

である。 従って、$R(t)$ と $R(t+1)$ の極が互いに相殺したとしても、2つの極 $t = t_1 - 1$ と $t = t_K$ は相殺されない。しかも、これら2点が、1つの極 $t = 0$ と相殺することもない。よって、$\widehat{R}(t)$ は決して 0 とはならない。

以上の考察をまとめると、微分方程式 ($\sharp$) から微分方程式 ($\sharp\sharp$) に、$u(t)$ のみたす差分方程式を通して変換する。 この変換の繰り返しによって、m 次元の微分方程式を $(m-1)$ 次元の微分方程式にすることができる。その際、すべての係数が 0 となることは起こらないので、この簡略化を繰り返して、次元 1 の微分方程式へ、さらに、次元 0 の微分方程式に帰着することができる。次元 0 の微分方程式に帰着された式は容易に判るように

$$\widehat{R}(t) = R(t+1) - R(t) + \sum_{h=0}^{N} \frac{C_h}{t^{h+1}} \neq 0$$

の形の係数であって、これは矛盾である。 それゆえ、プサイ関数が微分方程式 ($\sharp$) をみたすことは決してない。 ■

代数的微分方程式をみたさない関数を**超超越関数**（hypertranscendental function）または**超越的超越関数**（transcendental-transcendent function）という。

参考文献

1. 河野 實彦 ：微分方程式とは何でしょうか ？
「数学っておもしろい (日本評論社)」, 2001, 165p - 194p

2. P.M. Batchelder ： An Introduction to Linear Difference Equations,
Dover Publications, 1967 (original edition 1927)

3. H. Meschkowski ： Differenzengleichungen,
Vandenhoeck and Ruprecht, 1959

4. M. Kohno ： Global Analysis in Linear Differential Equations,
Kluwer Academic Publishers, 1999