2005年秋の日本数学会市民講演会:
“直線”と幾何学—真っ直ぐなものと曲がったもの—

酒井　隆（岡山理科大学理学部）

2005年9月18日

要旨

距離の幾何では，考えている“空間”で曲線の長さや角の大きさ，図形の面積・体積等計量の基準（計量構造）を定めることによって様々な幾何を扱います．これはユークリッド・非ユークリッド幾何に端を発しますが，B. リーマンによる画期的な見解によって大きく発展し，非常に多様な“曲がった空間”を考えることができます．そこでも真っ直ぐに進む“直線”（最短線）が重要な役割を果たします．この講演では，距離の幾何の多様性と“直線”の役割を中心に，幾何の歴史や時には寄道も交えてお話しする積りです．

1　ユークリッドとヒルベルト

直線ってなに？と問われれば，例えば“真っ直ぐに進む点の描く軌跡”といったり，実際に定木を使って書いて説明する人もいるでしょう．紀元前300年頃のギリシアで，ユークリッドは図形に関する様々な事実を体系的に「原論」という書物にまとめましたが,「原論」では次の点，直線等の「定義」から始めています：

定義：

1. 点とは部分を持たないものである．
2. 線とは幅の無い長さである．
3. 線の端は点である．
4. 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である．

…………

以下，角や円等の定義がこのように続いて，平行線の定義

23. 平行線とは同一の平面上にあって両方向に限りなく延長してもいずれの方向においても互いに交わらない直線である．

で「定義」が終わっています．次に幾何学の5つの「公理（公準)」が挙げられています：

公準（要請） 次のことが要請されているとせよ．

1．任意の点から任意の点へ直線を引くこと．

2．および有限直線を連続して 1 直線に延長すること．

3．および任意の点と距離（半径）をもって円を描くこと．

4．およびすべての直角は等しいこと．

5．および 1 直線が 2 直線に交わり同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば，この 2 直線は限りなく延長されると 2 直角より小さい角のある側において交わること．

上記のもの以外に論理的な推論をする際の共通の要請として，次のような「公理」が挙げられています．

公理（共通概念）

1．同じものに等しいものはまた互いに等しい．

2．また等しいものに等しいものが加えられれば，全体は等しい．

…………

8．また全体は部分より大きい。

9．また 2 線分は面積をかこまない。

こうして議論が始まり，第 1 巻（全 13 巻）はピタゴラスの定理（とその逆）の証明で終わっています．ところで，この「原論」の公理系を現代数学の群の定義（公理）を習った数学科の学生に見せますと，こんなのは定義ではないと評判は良くないのです．実際，ユークリッドの（定義も込めた）公理系に対しては古くから様々な批判がありました．その一つは平行線の公理（公準 5）で非ユークリッド幾何の発見につながりましたが，これについては後で述べることにします．もう一つは，「原論」の表現や公理系が論理的にも不備であるという批判で，特に 19 世紀になって数学という学問の体系が論理的に厳密になるにつれて起こりました．

100 年ほど前に，ヒルベルト (1862–1943) によって与えられた幾何学の公理系と較べてみましょう．ヒルベルトは幾何学の基礎を論じて次のように始めています（ヒルベルトは空間幾何の公理系を与えていますが，ここでは平面幾何に読み替えておきます）．

定義

平面内の点 (それを $A, B, C, \cdots$ で表す)，**直線** (それを $a, b, c, \cdots$ で表す)，と呼ばれる 2 つの体系があり，それらの間に‘$\cdots$ の上にある’，‘$\cdots$ と $\cdots$ との間にある’，‘合同’，‘平行’ などの関係が成り立つものとし，それらの関係の間には次の 5 題の公理 I) - V) を要請する：

I) **結合公理**

1) A, B が 2 点ならば，A, B ともその上にあるような直線 a が存在する．——‘a が A, B を通る’ ともいう．

2) A, B が相異なる 2 点ならば，A, B を通る直線 a はただ 1 つしかない．——この a を，A, B の‘定める’直線，または直線 $A^{\vee}B$ という．

3) 1 つの直線上には，少なくとも 2 つの相異なる点がある．少なくとも 3 つの，1 直線上にはない点が存在する．

II) **順序公理**

次に，1 直線上にある点に関して‘間にある’という関係があり，次の公理 1)-4) が成り立つ．

1) ‘B が A, C の間にある’というときは，A, B, C は 1 直線上の相異なる 3 点で，そのとき B は C, A の間にもある．

2) A, C が 1 直線 a の上の相異なる 2 点ならば，a の上に点 B を見出して C が A, B の間にあるようにすることができる．

3) B が A, C の間にあれば，A が B, C の間にあることはない．

4) A, B, C は 1 直線上にはない 3 点とし，A, B, C のどれをも通らない直線を a とする．a が線分 AB の内部の点を通るならば，a は線分 BC または CA の内部の点をも通る (M. パッシュの公理).

これより A, B を 1 直線 a の上の相異なる 2 点 とするとき，線分 AB （または BA），線分 AB の内点，端点，半直線等が定義される． また，1)-4) から‘直線上の点は線形に順序づけられる ’ことが証明される．

III) **合同公理**

2 つの線分 $AB, A'B'$ の間に記号 $AB \equiv A'B'$ で表される **合同**とよばれる関係があり，それについて次の公理 1)-3) が成り立つ．

1) A, B を直線 a 上の相異なる 2 点，A_1 を直線 a_1 上の 1 点（a, a_1 は同じでも異なっていてもよい）とし，A_1 を発し a_1 に属する半直線の 1 つを a_1' とすれば，a_1' 上にただ 1 点 B_1 が存在して $AB \equiv A_1B_1$ にすることができる．——このとき，a_1' 上に AB に合同に A_1B_1 をとったという．

2) $AB \equiv A_1B_1, AB \equiv A_2B_2$ ならば $A_1B_1 \equiv A_2B_2$ である．——このことから，線分の合同関係が同値関係であることが示される．

3) A, B, C は a 上の 3 点で B は A, C の間にあり，A_1, B_1, C_1 は a_1 上の 3 点で B_1 は A_1, C_1 の間にあり，かつ $AB \equiv A_1B_1, BC \equiv B_1C_1$ ならば $AC \equiv A_1C_1$ である．

また，角の概念が定義され，線分の場合と同様に合同の概念とそれに関する公理が与えられる．

IV) **平行線公理**

平面上の 2 直線が平行であることの定義が（原論と同様に）与えられ，平行線公理は，与えられた直線 a とその上にない 1 点を通り a に平行な直線はたかだか 1 つしか存在しないことを要請する．

公理 $I) - IV)$ を満足する‘平面幾何学’では，1 直線上の合同な線分の同値類に和，積の演算が定義され，これより（直線によらない）順序体 K が定まる．‘単位線分’を指定すれ

ば，任意の線分に対してその長さが K の正の数として定まる．

V) **連続性公理**

1) AB, CD を任意の 2 つの線分とする．直線 $A^\vee B$ 上に有限個の点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ をとり， $CD \equiv AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \cdots \equiv A_{n-1}A_n$ かつ B は A, A_n の間にあるようにできる (**アルキメデスの公理**).

2) 直線上の点の集合は，順序公理 $\mathrm{II}_{1)-3)}$，線形順序の定理，合同公理 $\mathrm{III}_{1)-3)}$，および Archimedes の公理 $\mathrm{V}_{1)}$ を満足するが，この集合をさらに拡張して，拡張された集合もこれらの公理を満足するようにすることはできない (**直線の完備性公理**) ——これから次の**完備性定理**が証明される：平面の点，直線の集合は公理 I)-IV), $\mathrm{V}_{1)}$ を満足するが，この集合にさらに新しい点，あるいは直線を追加して，それらもまた以上の公理を満足するようにすることはできない．

ヒルベルトも予断を持たず根本に戻って概念を徹底的に明確にしようとする立場ですが，ユークリッドの公理系と較べるとヒルベルトの公理系では点，直線，平面等の定義は直接には与えられていません．むしろこの公理系が点，直線，平面等の概念を規定していると考えます（ヒルベルトはこの公理系を満たせば椅子とテーブルとジョッキとで幾何学ができると言ったそうです）．実際，ヒルベルトの目的はこの公理系の無矛盾性や公理群の間の独立性を証明することでした．彼は諸公理の間の関係を吟味し，無矛盾性の証明は解析幾何学を用いて実数論の無矛盾性に依存しています．

寄道 最近，といっても 10 年ほど前から，大学でも学生や高校生・社会人の方に対する一般向けの講義・講演をすることが要求され，その機会が増えてきました．専門の話の場合と違って，聞く人の身になって話そうとすると，例えば幾何学はギリシアに始まると言ってもその時代のことを知っているわけではないので困ります．それでそのような機会に「ソクラテスの弁明」（これは文庫本で 40 ページ程なので）を読んでみたことがあります．著者のプラトンは幾何学（数学）を重要視し，ユークリッドにも影響を与えたといわれますが，ギリシアで理詰めの議論をしたソフィスト達はソクラテスの敵も含めて多くいた訳です．ソクラテスの議論から受けた印象として，理想の高さ・倫理性・徹底性（それと共にアグレッシブな妥協のなさ—それ故敵も作ったのでしょう—）を感じます．そう思うとユークリッドの次々と続く 23 個の定義は，点・直線・... はこのようなものと考えこれのみを前提にして議論するぞという気迫を感じさせます．公準は 5 番目を除いてむしろすっきりしています．なお，ユークリッドの幾何学では平面や空間の概念は理想的・絶対的なもので，定義・公理により完全な体系として展開しようとしています．

その後ヒルベルトはさらに数学の体系を数学基礎論として形式化し，その中で無矛盾性を証明しようとしましたが，この考え方はヒルベルトの希望のようには行かない事が判明しました．

さて，ユークリッドは線分の合同の概念と長さの概念は与えましたが，長さを（実）数で表すことはしませんでした．他方ヒルベルトは公理系から，直線上の線分（の同値類）全体

が加法・乗法の代数構造を持つことを示し，順序・線分の長さの概念を用いて直線が（実）数全体の集合と同じ構造を持つことを導いています．さらに，実数より一般の（順序）体を基にする幾何学を考え，ヒルベルトの立場では代数との密接な結びつきが見られます．

寄道 原論のピタゴラスの定理の証明について触れておきましょう．ギリシアでは図形の面積も実数で表されることはなく，ピタゴラスの定理も「直角３角形の斜辺を１辺とする正方形の面積は，他の２辺を１辺とする２つの正方形の面積の和に等しい」という形で（斜辺を c，他の２辺を a, b とするとき $c^2 = a^2 + b^2$ が成り立つという形ではなく）与えられています．証明も等積な図形に変形していく方法をとっていました（図 1）．

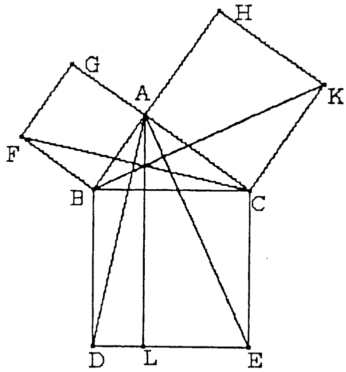
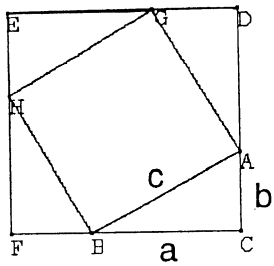


図 1



$(a+b)^2 = 4\times(ab/2) + c^2$ より
$a^2 + b^2 = c^2$

図 2

ところで，非常に多くのピタゴラスの定理の証明が知られていて，例えば次の図２のものはインドで知られていたといわれますが，代数の性質も使っています．多くの証明が考えられるのは数学の特徴ですが，逆に「証明」とは論理だけではなく，なぜそれが成り立つかを成程と納得させ確信させる説明といってよいでしょう．したがって多様性が許される訳です．その例を挙げましょう．明治以前の日本には（今は和算と呼ばれる）数学があり，江戸時代には教育においても使われていました．江戸末期に函館に幽閉されたロシア海軍仕官ゴロヴニンは幕府役人の取り調べの様子や，当時の日本の様子を記録に残しています．日本人の科学知識や教育の実情を知ろうとして，獄中接した新進の蘭学者にピタゴラスの定理の内容を知っているかと尋ねた所もちろん知っているとの返事でした．それでは証明はどうするのかと聞いたところその人は図を描いてちゃんと説明したそうです（数学セミナーに確かその図というのが出ていたと思いますが）．エリートとはいえ，文化のまったく違う二つの国の人たちが数学の話をしたというのは興味深いことです．

前に，ヒルベルトが直線の幾何と実数の集合の構造の関係を重視したと述べました．既に16世紀にデカルトにより，平面や空間の点を座標によって表し，図形の性質を方程式によって表現して解析する解析幾何学が提唱されました．解析幾何学では，実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ により直線を表します．平面（空間）の点に座標を導入することにより，平面（空間）を実数の組の集合 $\boldsymbol{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}\}$ （$\boldsymbol{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \boldsymbol{R}, i = 1, 2, 3\}$）で表しました．このとき，2点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ （$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$）の距離（2点を結ぶ線分の長さ）$d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ はピタゴラスの定理によって

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \ \ (\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2})$$

で与えられます．平面では直線が1次方程式を用いて表されることはご承知のことと思います．このとき，一般に3角形 ABC で $\alpha = \angle BAC, a = BC, b = CA, c = AB$ とすると，ピタゴラスの定理を一般にした余弦公式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{1}$$

が成り立ち，これが距離 $d_0(B, C)$ を定めています．

なお，一般の平面（空間）の連続曲線 γ はパラメータ表示を用いて

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \boldsymbol{R}^2 \ \ (\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \boldsymbol{R}^3),\ a \leq t \leq b$$

と表すことができますが，γ を折れ線で近似した時の折れ線の長さの極限（無限大に発散することもある）として長さ $L(\gamma)$ を定めることができます：

$$L(\gamma) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{k} d_0(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid a = t_0 < t_1 < \ldots t_k = b\right\}.$$

このとき，2点 $\gamma(a), \gamma(b)$ を結ぶ最短線が，線分に他なりません．この事実は，3角形の2辺の長さの和は他の1辺の長さより大きいという3角不等式（「原論」の第1巻命題20）から示されます．特に，2点間の距離が2点を結ぶ S 上の曲線の長さの下限に等しいことも分かります．なお，γ が滑らかな曲線ならば，長さはその接線ベクトルの長さの積分

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \| \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2} dt$$

で与えられることが分かります．

この立場から，一般に n 個の実数の組 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ の集合 $\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \boldsymbol{R}\}$ を考え，2点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ 間の距離 $d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を

$$d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \tag{2}$$

で定義したものを n 次元ユークリッド空間と呼びます．内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ を用いれば，距離は

$$d_0(x, y) = \|x - y\| (= \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}) \tag{3}$$

で，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\neq 0)$ のなす角 $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は

$$\cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \tag{4}$$

で与えられます（コーシー・シュワルツの不等式から，角は $0°$ と $\pi = 180°$ の間の値として一意に定まります）．この解析幾何学の立場からはユークリッド幾何学はピタゴラスの定理によって距離が定められた幾何学ということが出来ます．

2　非ユークリッド幾何の発見とガウス・リーマン

さて，原論の公準のうち最後の5番目のものは他と較べて複雑です．与えられた直線 a 上にない点 P を通って a に平行な直線が引けることは他の公準を用いて示せますが，ただ1本に限ることを示すのにはこの第5公準が必要です．この事実は，3角形の内角の和が180°であるという定理（内角の和が180°以下であることは第5公準なしに示せます）や，ピタゴラスの定理，比例の理論の基になっています．第5公準がこのような形で与えられたのは，これを他の公準から証明しようという試みが早い時期から続けられたことを意味しているといわれています．すなわち，第5公準の否定から矛盾を導こうとしたのです．2000年にわたる多くの試みが続けられそれらはすべて失敗しましたが，そこで得られた矛盾を導くとされた多くの結論（例えば，3角形の内角の和は180°より小さい，等々）は実は非ユークリッド幾何学の定理であった訳です．19世紀に入ってロバチェフスキー（1793–1856, ロシア）とボーヤイ（1802–1860, ハンガリー）が他の公理はそのままにし，第5公準をその否定に置き換えたものを公理に採用して新たな幾何学の体系を構成できることを主張しました．ガウス (1777–1855) も若い頃からこの問題に関心を持ち，同じ結論に達していましたが発表することはありませんでした．

注意　平行線が存在しない場合，考えている“平面”は閉じた面になります．例えば半径1の球面 S^2 は3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の中で，

$$S^2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

と表せますが，これを地球（の表面）と考えて1点から真っ直ぐに進むと元に戻ってくることはギリシャの時代から良く知られており，球面は無限に広がっている平面とは区別されていました．球面上真っ直ぐに進む直線に当たるものは $\boldsymbol{R}^3$ の原点を通る平面と球面の交線である大円弧に他なりません．また，その2点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 間の距離は経験上

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (\leq \pi = 180°) \tag{5}$$

（これは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を結ぶ短いほうの大円弧の長さに等しい）すなわち

$$\cos d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\ (= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \tag{6}$$

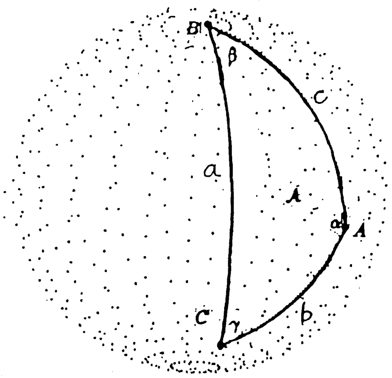
で与えるのが自然であることもよく知られていました．この場合，3 角形 ABC で $\alpha = \angle BAC, a = BC, b = CA, c = AB$ とすると球面余弦公式は

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \tag{7}$$

となり，3 角形 ABC の角を α, β, γ，その面積を $\mathcal{A}$ とすれば

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \mathcal{A} \tag{8}$$

となります（図 3）．この余弦公式が球面の距離を定め，ピタゴラスの距離とは異なる基準によっていますがやはり内積を基にしています．



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \mathcal{A}$$

図 3

なお，一般に n 次元の（単位）球面 S^n が

$$S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

で定義されます．

ガウスが非ユークリッド幾何学の存在を信じた背景には，曲面論があると思います．微積分の発展とともに，3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲線や曲面を微積分を用いて調べることは，既にオイラー・モンジェ等が行っていました．ガウスはパラメータ表示を用い，第 1, 2 基本形式を導入して組織的，徹底的に研究したのです．

寄道 ガウスは 1821 年から 30 年近くハノーバー政府とオランダ政府の測地事業の学術顧問を務めました．3 つの山の頂点を結ぶ 3 角形の内角の和を測量して実際に 180° となるかを調べましたが，曲面論もそのような経験の数学への反映であると思います．ドイツの旧 10 マルク紙幣にはガウスの肖像と共に，測量器械と彼が測量に携わった地域が示されてい

ました．なお，非ユークリッド幾何の二人の発見者はその当時の数学の最先進国には属していませんでしたが，間接的にはガウスと関係がありました．

まず曲線の曲がり具合を考えましょう．もし一定の速度で車が（曲がった）道路を走れば曲がり具合は遠心力の大きさに反映され，それに応じてハンドル操作が忙しくなります．一般に，曲線 γ はパラメータ t を用いて

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \boldsymbol{R}^3$$

と表示されます．単位速度（接線ベクトル $\dot\gamma(t) = (\dot x_1(t), \dot x_2(t), \dot x_3(t))$ の長さ $\|\dot\gamma(t)\|$ が常に 1 であること）であれば，接線ベクトルの変化を表す加速度ベクトル $\ddot\gamma(t)$ の大きさが曲がり具合を表し，これを γ の $\gamma(t)$ における曲率と呼びます（平面曲線の場合は向きに応じて $\pm$ の符号をつけることができます）．

次に曲面の場合ですが，これは 2 つのパラメータ u_1, u_2 を用いて表すことにします：D を (u_1, u_2)-平面の領域とし，曲面（片）S が写像 $\boldsymbol{x} : D \to \boldsymbol{R}^3$

(9) $$\boldsymbol{x}(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$$

によるパラメータ表示で与えられたとします（図 4）．座標関数の微分可能性（と 2 次元で

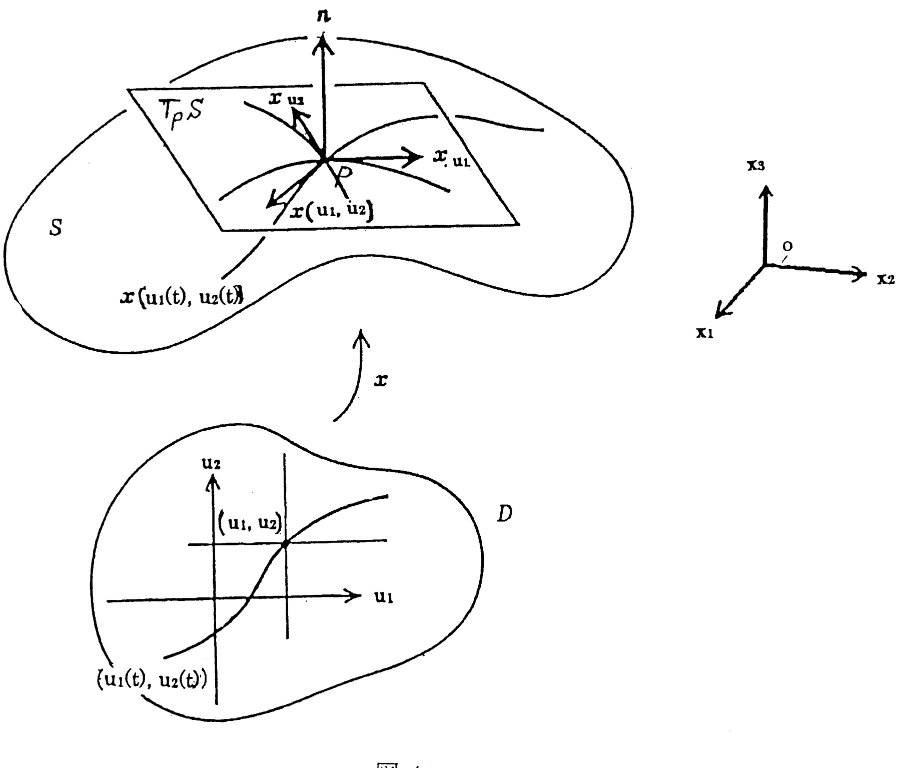


図 4

ある条件）を仮定すると，S の各点 p での接平面 T_pS を考えることができ，$\boldsymbol{R}^3$ の内積 $x \cdot y$ により，T_pS の接ベクトルの内積を考えることができます．すなわち，

$$g_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_j} = \frac{\partial x_1}{\partial u_i}\frac{\partial x_1}{\partial u_j} + \frac{\partial x_2}{\partial u_i}\frac{\partial x_2}{\partial u_j} + \frac{\partial x_3}{\partial u_i}\frac{\partial x_3}{\partial u_j} \quad (i, j = 1, 2; \quad g_{ij} = g_{ji}) \tag{10}$$

と置くと，T_pS の接ベクトルに対する線素が第 1 基本形式

$$ds^2 = g_{11}du_1du_1 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2du_2 \; (= \sum_{1 \le i,j \le 2} g_{ij}du_idu_j) \tag{11}$$

によって与えられます．これによって，S 上の曲線の長さが（その接線ベクトルの長さの積分として）与えられ，S の 2 点間の距離が 2 点を結ぶ S 上の曲線の長さの下限として定義されます．例えば，先の球面 S^2 の距離は S^2 を曲面と見たときのこの距離と一致します．この距離は曲面 S 上に住んでいる（2 次元の）人が（S が 3 次元空間内にあることを知らずに）第 1 基本形式のみから求めることができる量です．

この立場から真っ直ぐに進む S 上の曲線が考えられますが，これを説明してみましょう．S の p における単位法線 $\boldsymbol{n}$ を取ります（法線方向は曲面 S 上に住んでいる人は感知しません）．さて，S 上の曲線 $\gamma(t)(= \boldsymbol{x}(u_1(t), u_2(t)))$ を空間曲線とみなし，通常の加速度ベクトル $\ddot{\gamma}(t)$ を考えます．もし，$\ddot{\gamma}(t)$ が常に法線方向を向いていれば，S 上の人は加速度を感知せず真っ直ぐ進んでいると思うでしょう．このような（直線の性質を満たす）S 上の曲線を**測地線**と呼びます．ガウスは曲面上の（第 1 基本形式のみにより決まる）微分法を開発して，測地線をその速度ベクトルの自身の方向への“微分”が常に 0 となる曲線として特徴付けました．（この条件は微分方程式の形で具体的に表せます．球面の場合は $\ddot{\gamma}(t) = -\gamma(t)$ となることを確かめてみてください．）

他方，S の p における単位法線 $\boldsymbol{n}$ と $x_i = x_i(u_1, u_2)$ の 2 階（偏）微分を用いて

$$h_{ij} = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u_i \partial u_j} \; \left(= -\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_i}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_j} = -\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_j}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i} \right), \quad (i, j = 1, 2)$$

と置いて，第 2 基本形式

$$\mathrm{II} = \sum_{1 \le i,j \le 2} h_{ij}du_idu_j \tag{12}$$

を考えることができます．これは単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の変化を記述し，曲面 S が空間内でどのように曲がっているかを示します．

さて，ガウスは点 $p \in S$ の周りで p での曲面 S の法線を含む平面達と S の交わりである曲線の p における曲率の最大・最小値（主曲率）の相和平均と積を考えました．前者を平均曲率 H_S（平均曲率も重要ですがここでは触れません），後者をガウス曲率 K_S と呼びます．K_S は第 1 基本量 g_{ij} と第 2 基本量 h_{ij} によって，

$$K_S = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \tag{13}$$

と表されることが分かります．ガウスは（C^3 級）曲面 S に対して，ガウス曲率 K_S を第 1 基本量 g_{ij} とその 2 階までの偏導関数のみを用いて具体的に表し，K_S が曲面 S の内在的な不変量であることを示しました（これをガウスは Theorema Egregium—驚異の定理—と呼びました）．先の球面 S^2 の場合，ガウス曲率は $K_S \equiv 1$ となります（半径が r の球面の曲率は $1/r^2$ です—曲率が大きいほど球面は小さくなることに注意されたい）．

第 1 基本形式を基にして曲面の幾何が展開されますが，そこではガウス曲率が重要な役割を果たします．例えば，S 上測地線を 3 辺とする 3 角形 Δ の内角を α, β, γ，S の面積要素を $dS = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}du_1du_2$ とすると

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_\Delta K_S dS \tag{14}$$

が成立します．特に半径 1 の球面の場合は (8) に他なりません．

ところでガウスは，$\boldsymbol{R}^3$ 内の（局所的な）曲面片で $K_S \equiv -1$ となるものの例は知っていました．このときは，3 角形の内角の和の公式は

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \mathcal{A} \quad (\mathcal{A} \text{ は } \Delta \text{ の面積}) \tag{15}$$

となり，双曲幾何の公式と一致するのです（図 5）．しかし，球面の場合と異なり，双曲平面全体を $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面として実現できるかは分からず，ガウスが発表を躊躇した一因のようです（実際，このことが不可能なことは後にヒルベルトによって示されました）．

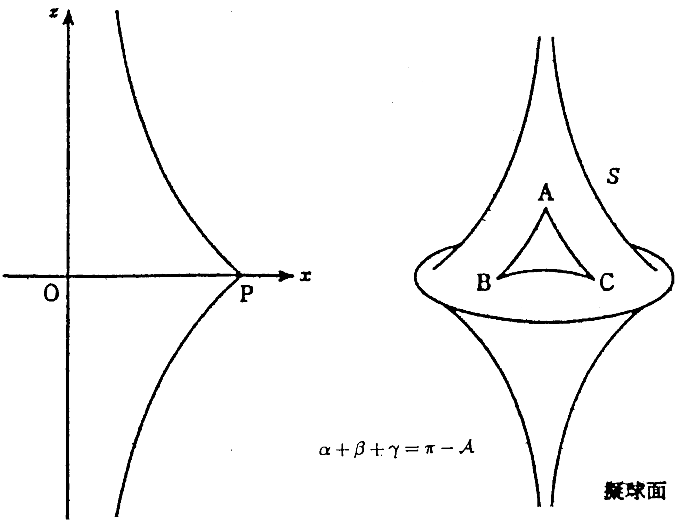


図 5

その後，ポアンカレやクライン等により，ユークリッドの平面（空間）の計量を取り替えることによって双曲平面全体を表現できることが示されました．従って，論理的には非ユークリッド幾何とユークリッド幾何の無矛盾性は同値であることになります．

注意　双曲平面の実現には多くのやり方がありますが，空間 $\boldsymbol{R}^3$ に異なる内積を導入して，球面との類似を考える方法を述べておきます．$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$ に対して,（ローレンツ）内積をあらたに

$$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

によって定義します．ローレンツ内積を持った空間を $\boldsymbol{R}^{1,2}$ と書いて $\boldsymbol{R}^3$ と区別します．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{1,2}$ に対して $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}<0$ となることもありますが，このとき $\boldsymbol{x}$ は時間的である（特に，第1座標 $x_1>0$ のとき正の時間的ベクトル）と呼びます．例えば，$(1,0,0)$ は正の時間的ベクトルです．また，$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}>0$ ならば空間的と言います．さて，

$$H^2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\boldsymbol{R}^{1,2}\mid\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}=-1,x_1>0\} \tag{16}$$

は空間の2葉双曲面のひとつの葉です (図6)．このときコーシー・シュワルツの不等式に

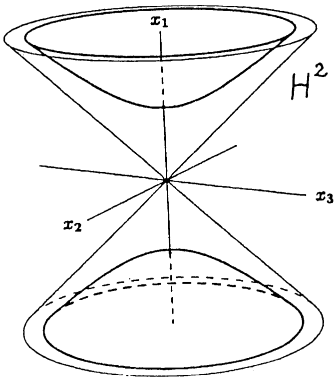


図6

対応して，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ が正の時間的ベクトルならば

$$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}\le\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \tag{17}$$

が成り立ちます．ただし $\|x\|=\sqrt{-\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}}\,i$ は純虚数で，(15) の両辺は負です．これより，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in H^2$ ならば,

$$\cosh\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$$

をみたす $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ge 0$ が一意に定まり，これが双曲幾何の意味で $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in H^2$ の距離を与えます．ここで，$\cosh x$ は双曲線余弦関数で $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$ で与えられます．$\cosh x$ は $x\ge 0$ で単調増加で $\cosh x\ge 1$ を満たします．このとき，原点をとおり正の時間的ベクト

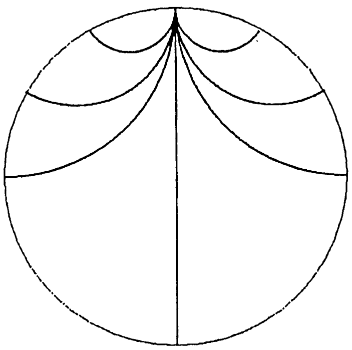
ルを含む平面と H^2 の交線が双曲幾何の意味での直線（測地線）となります．また３角形 ABC で $\alpha = \angle BAC, a = BC, b = CA, c = AB$ とすると双曲幾何の余弦公式は

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha \tag{18}$$

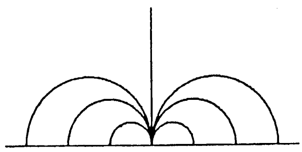
となり（ここで，$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ と置いた），３角形 ABC の角を α, β, γ，その面積を $\mathcal{A}$ とすれば

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \mathcal{A} \quad (\pi = 180^\circ) \tag{19}$$

となります．このように，双曲幾何における距離はピタゴラスの距離とは異なる基準によっていますが，やはり内積の概念を用いています．なお，双曲幾何のモデルは，他にも単位円板や上半平面上に構成することが出来ます．ここでは図だけ示しておきます（図７）．



線素：$ds^2 = 4(dx_1^2 + dx_2^2) / (1-x_1^2 - x_2^2)^2$
距離：$\cosh d(x, y) = 1 + 2\|x - y\|^2 / (1-\|x\|^2)(1-\|y\|^2)$



線素：$ds^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) / x_2^2$
距離：$\cosh d(x, y) = 1 + \|x - y\|^2 / (2 x_2 y_2)$

図７

非ユークリッド幾何の発見は空間の概念について深刻な反省をもたらしましたが，G. F. B. リーマン (1826–1866) は 1854 年に画期的な見解を与えました．その要点は

1．空間の概念の基礎として，一般に何重にも拡がった多次元の‘多様体’（Mannigfaltigkeit, manifold）の概念を考える必要がある；

ことを指摘し

2．多様体で，曲線の長さを与える基準である線素 ds をどのように定めるのが良いか；

を論じたことです．例えば，２重に広がった（２次元）多様体はその各点 p の近所 U の点は平面（$\boldsymbol{R}^2$）の領域の点と一対一双連続に対応し，その座標，すなわち一枚の地図で U が表せ，多様体全体は何枚もの地図を用意することによって表せるようなものです．$\boldsymbol{R}^3$ の（境界を持たない）曲面はその例ですが，球面の対蹠点を同一視して得られる図形も２次元多

様体となります（射影平面と呼ばれ，$\boldsymbol{R}^3$ 内の閉曲面としては実現されません）．同様に，n 次元多様体を $\boldsymbol{R}^n$ の地図（局所座標系といいます）を用いて考えることができます（リーマンは関数や図形の集合を考えれば無限次元の多様体になるといっています）．一般には多様体を表すには何枚もの地図が必要でそれらをつなぎ合わせるには「位相」の言葉が必要です．以下，同じ点を表す 2 枚の地図の座標の変換が滑らかなものを考えます．滑らかな多様体では，その各点の近所を接空間とよばれるベクトル空間で近似することが出来ます．他方，接ベクトルの長さや角を考えようとすると $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面の場合と違って基準の線素 ds を与える必要があります．

そこで，リーマンは ds は位置を表す量 x の増分 dx に関する正値 2 次形式（第 1 基本形式) の平方根として与えるのが自然であるとしました：現在の数学の言葉で言えば，ds^2 は多様体 M の各点 p における接空間 T_pM 上で内積 g により，局所座標系 $\{x_i\}$ に関して

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j \tag{20}$$

の形で与えられます．これをリーマン計量，ひとつのリーマン計量が与えられた多様体をリーマン多様体と呼びます．このとき，曲面の場合と同様の“微分法（レビ・チビタ接続)”が適用されて，M 上“真っ直ぐ”に進む直線にあたる測地線を考えることができます．測地線は次の微分方程式（記号の意味は説明しませんが)

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{dx_j}{dt}\frac{dx_k}{dt} = 0,\ (i = 1, \ldots, n) \tag{21}$$

を用いて定義され，始点と方向を与えれば一意に定まります．また，曲線の長さを用いて M の 2 点間の距離が曲面の場合と同様に定まります．測地線の十分短い弧はその両端を結ぶ距離を実現する最短線になります．

なお，1 つの多様体上には非常に多くのリーマン計量を（無限次元の自由度で）与えることが出来ることを注意しておきます．

3. さて，リーマンは ds^2 を（“正規”座標系と呼ばれる局所座標系に関して）原点でテイラー展開するとき，最初の項はユークリッドの計量

$$\sum (dx^i)^2$$

に等しいこと，次の次数の項は

$$x^i dx^j - x^j dx^i \,(i < j; n \text{ 次元なら } n(n-1)/2 \text{ 個の独立な量})$$

の 2 次斉次多項式で与えられ，それを

$$(0, \ldots, 0),\ (x^1, \ldots, x^n),\ (dx^1, \ldots, dx^n)$$

を頂点とする無限小測地 3 角形の面積の平方で割り $-3/4$ をかけた量が，対応する曲面の（原点での）ガウス曲率に他ならないことを述べました．この量はまた，無限小測地 3 角形

の内角の和から 2 直角を引いたものに等しく，無限小測地 3 角形の定める（接空間の）2 次元平面 σ の断面曲率と呼ばれますが，ここでは $K_M(\sigma)$ と表します．

4. さらに，リーマンは曲率 K_M が至る所一定である定曲率多様体の重要性を指摘して（実際，空間を曲率 0 の平坦な 3 次元多様体として特徴付けた），そこでは計量の基準は位置と方向に依らずに定まり，したがって図形はその中で伸び縮みなしに動かせることを注意しました．また，定曲率多様体の線素は，k を（定）曲率の値とするとき

$$ds^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} dx_i^2}{\left(1 + \frac{k}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right)^2} \tag{22}$$

という解析的な表現を持つことを述べましたが，k の符号 $k = 0\,(> 0, < 0)$ に応じて，これらは n 次元ユークリッド空間（球面，開円盤）上で，ユークリッド幾何（球面幾何，双曲幾何）のモデル空間 M_k^n として実現されます．特に，M_k^n の測地 3 角形 Δ に対しては，（非）ユークリッド幾何における次の余弦公式：Δ の 3 辺（の長さ）を a, b, c，辺 b, c のなす角を α とするとき

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad (k = 0 \text{ の場合}), \\ \cos\sqrt{k}a = \cos\sqrt{k}b\cos\sqrt{k}c + \sin\sqrt{k}b\sin\sqrt{k}c\,\cos\alpha \\ (k > 0 \text{ の場合}), \\ \cosh\sqrt{|k|}a = \cosh\sqrt{|k|}b\cosh\sqrt{|k|}c - \sinh\sqrt{|k|}b\sinh\sqrt{|k|}c\,\cos\alpha \\ (k < 0 \text{ の場合}) \end{cases} \tag{23}$$

が成り立ち，この余弦公式によって M_k^n の距離の制御が具体的に可能となります．

寄道 リーマンの見解（‘幾何学の基礎をなす仮説について’）はゲッティンゲン大学における教授資格講演で与えられました．学位取得後，教授資格（Habilitation）取って初めて大学に正規の職を得ることが出来るのですが，教授資格受験者は資格論文の提出の他にテストの講議を行う義務があります．予め 3 つのテーマを用意し，審査側でその中からひとつを選ぶ．リーマンの場合には，ガウスがこのテーマを選んだそうです．（この伝統は，現在もドイツの大学で続いているとのことです.）その後 20 世紀初頭まではリーマンのアイデアは主に形式的な絶対微分学（接続，テンソル解析）として発展しました．絶対微分学は 1916 年の A. アインシュタインによる一般相対性理論の構築の際に必要な数学の手段を与え，以後多方面に大きな影響を及ぼすことになりました．

リーマン幾何学は 20 世紀を通じて数学の他分野と関連して大きく発展しましたが，一般の曲がった空間を扱うため複雑な様相を呈します．例えば，2 点を結ぶ測地線は必ずしもその長さが距離を実現する最短線になるとは限りません（2 点を結ぶ曲線全体の空間で，“長さ”を関数と考えたときの極値をとる曲線にはなります）．また，測地線の挙動を調べることにより多様体の構造が分かる場合がありますが，測地線の挙動は曲率に依存し，一般には（ユークリッド・非ユークリッド幾何の場合と異なり）多様で複雑になります．実際，

R^3 内の楕円面と呼ばれる閉曲面は球面を少し変形した曲面ですが，一般の楕円面

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2=1 \qquad (a_1>a_2>a_3>0)$$

の任意の点から発する測地線の挙動がはっきり捕られたのはごく最近のことで，岡山大学の清原さん達によります．

3 諸々の幾何学の織り成す世界

リーマンの見解によって，非常に多様な（距離に関する）幾何を考えられる事が分かりました．その上で幾何が展開される多様体も非常に沢山ありますが，1つの多様体を決めてもその上に無限次元の自由度でリーマン計量が入るのでした．そこで出来るだけ普遍的な立場に立って次のような方針が考えられます．

(I) ひとつの幾何だけを取り扱うのではなく，多くのリーマン多様体からなるクラスを考えてその族としての性質を調べる．例えば，(数列のように）リーマン多様体のなす列を考え，その列の挙動を考察するなどです（この立場は M. グロモフにより明確に述べられました）．

(II) 多様体を与えたとき，その構造に最も適合したリーマン計量はなにか？

最初の問題を考えるとき，距離の持つ最も基本的な性質を抜き出してその構造を持つもっと一般の空間を考えることが必要になります：

定義（距離空間） X は点の集合で，任意の 2 点 $x,y\in X$ に対してその距離 $d(x,y)\in \boldsymbol{R}$ が定まって次の性質を満たす．

(D1) 任意の $x,y\in X$ に対して $d(x,y)\geq 0$ で，等号成立は $x=y$ のときかつそのときに限る．

(D2) 任意の $x,y\in X$ に対して $d(x,y)=d(y,x)$.

(D3) 任意の $x,y,z\in X$ に対して

$$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$$

が成り立つ（これはユークリッド幾何との類似で 3 角不等式と呼ばれます）．

これを例えば群の公理と比べてみると，同じように簡明ですが，実数で距離が表されていること，等式の代わりに不等式が用いられていることが特徴です（3 角不等式から驚くほど多くの事実が導かれます）．ユークリッド，非ユークリッド幾何における距離，またリーマン多様体の先に述べた距離は上の公理を満たします．しかし，この公理を満たす距離空間ははるかに一般の概念で数学の種々の分野でこの構造が現れます．例えば，任意の集合 X 上

$$x\neq y \text{ ならば } d(x,y)=1,\quad x=y \text{ ならば } d(x,y)=0$$

と定義すれば X は距離空間になりますが，これは自明な（意味のない）例です．距離と曲線の長さが関連するためにはさらに条件が必要で，次の

(D4)　任意の $x, y \in X$ に対して，x, y を結ぶ連続曲線 γ で $L(\gamma) = d(x, y)$ を満たす最短線が存在する．

が成り立つとき，距離空間 X は測地空間であるといいます．

先に述べたように，リーマン多様体のクラスは距離空間全体のクラスに含まれますが，一般の距離空間を考える利点の1つとして2つの距離空間の間に自然な‘距離’を考えることが出来る点があります．以下簡単のためコンパクトと呼ばれる（大雑把に言って閉じた有界な）距離空間の場合を考えます．コンパクトなリーマン多様体は測地空間になります．

まず，ユークリッド平面 $\boldsymbol{R}^2$ のコンパクト集合 X, Y 間のハウスドルフ距離と呼ばれる距離 $d_H(X, Y)$ が

$$d_H(X, Y) := \max\{\max_{x \in X} d(x, Y), \max_{y \in Y} d(y, X)\} \tag{24}$$

で与えられます．ここで，$d(x, Y) = \min_{y \in Y} d(x, y)$ は点 x と集合 Y の間の距離で，この場合 x から集合 Y に下ろした垂線の長さです．なお，max, min は最大値・最小値の略記です．このハウスドルフ距離は $\boldsymbol{R}^3$ や $\boldsymbol{R}^n$ の場合や，さらに一般の距離空間 (Z, d) の（コンパクト）部分集合 X, Y に対してもまったく同様に定義（この場合は $d_H^Z(X, Y)$ と表す）できます．さて一般に，距離空間 X, Y に対してグロモフは

$$\begin{aligned} d_{GH}(X, Y) := \inf\{d_H^Z(f(X), g(Y)) \mid f : X \hookrightarrow Z,& \\ g : Y \hookrightarrow Z \text{ は距離を保つ埋め込み}&\} \end{aligned} \tag{25}$$

で X, Y の間の距離を定義しました．具体的な距離空間の間のこの距離を求めるの困難ですが，d_{GH} はコンパクト距離空間（の等長類）全体のなす族 $\mathcal{MET}$ 上で，距離の公理をみたすことが分かります．さて，コンパクト・リーマン多様体からなる族に共通な性質（例えば d_{GH} に関するコンパクト性）を考えるときには，計量不変量が適当な条件をみたす族を考えるのが自然です．その際，特に曲率は（直径・体積といった不変量とともに）最も基本的な役割をはたし，これらは d_{GH} と不思議に相性がよいのです．例えば曲率が定符号のリーマン多様体は古くから興味を持たれてきましたが，リーマン多様体 M と定数 k に対して，$K_M \geq k (K_M \leq k)$ という条件は M の測地3角形の辺や角を定曲率空間 M_k^n の対応する測地3角形の辺や角と比較することによって特徴付けることができます．

また，$d(M) = \max_{x, y \in M} d(x, y)$ を M の直径として，$\mathcal{MET}$ の部分族

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(k, D) := \{M;\ n\text{次元コンパクト・リーマン多様体} \mid& \\ K_M \geq k,\ d(M) \leq D&\} \end{aligned} \tag{26}$$

を考えると，$\mathcal{M}_n(k, D)$ の元からなる任意のリーマン多様体の列は d_{GH} に関して収束する部分列を持つことが分かります．ただし，$\mathcal{M}_n(k, D)$ の収束列 $\{M_i\}$ の極限のコンパクト距

離空間 X は，一般に特異点を許容しリーマン多様体とは限らず，従ってリーマン多様体の時のように曲率を定義できるとは限りません．しかし，極限空間 X は測地空間であり，曲率が k 以上という性質も測地3角形を用いて X に遺伝されます．X の幾何から，十分大きな i に対して M_i の（位相的）性質を知ることが出来る場合があります．

次に，問題2について簡単に触れておきます．2次元の場合は非常にうまくいきますが，双曲幾何が大きな役割を果たします．2次元の向きの付いた閉曲面は位相的には，球面 S^2 と穴の g 個あいたドーナツ（の表面）Σ_g のいずれかです．これらは $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面として実現されますが，球面を除いてそのガウス曲率は正負の両符号を持ちます（球面は正定曲率曲面として実現されます）．しかし，$g=1$ のとき Σ_1 は平面の正方形の向かい合う辺をそれぞれ同一視して得られます．このとき正方形の同一視される点の近所はユークリッド平面の点の近所と区別がつかず，Σ_1 には曲率が0の（リーマン）計量が入ることになります．同様に Σ_g $(g \geq 2)$ は正 $4g$ 角形の辺を同一視して得られ，特に $4g$ 個の頂点は Σ_g の1点に同一視されます．もし，ユークリッド平面で正 $4g$ 角形を考えると $4g$ 個の内角の和は $2(2g-1)\pi > 2\pi$ となり，この点の近所は滑らかになりません．しかし双曲平面では3角形の内角の和は π より小さい任意の正の値を取ることが出来，特に内角が $\pi/2g$ の正 $4g$ 角形を作ることが出来ます．その辺の同一視をすると同一視された頂点の周りの角を合わせるとちょうど 2π になります．すなわち，双曲幾何を使うと Σ_g $(g \geq 2)$ を定曲率 -1 のリーマン計量を持った滑らか曲面として実現できます（図8）．実際 Σ_g $(g \geq 2)$ には互いに異なる（等長的でない）多くの定曲率 -1 のリーマン計量を導入することが可能です．

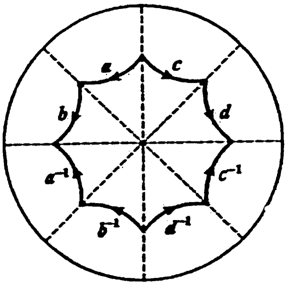


図8

このように，2次元の場合は3種類の定曲率の幾何学で多様体の構造を記述できますが，一般次元の多様体の場合にはこのようなことは期待できません．一般に，1つの多様体 M 上のリーマン計量全体の空間 $\mathcal{M}$ と幾何学的に意味のある $\mathcal{M}$ 上の汎関数 $\mathcal{F}: \mathcal{M} \to \boldsymbol{R}$ を考えて，その極値をとるようなリーマン計量（例えば，アインシュタイン計量や山辺計量と呼ばれるもの）が M 上標準的なリーマン計量であろうと考えられます．しかし，このような計量が実際に存在することを示すには強力な解析学の助けが必要です．

ただしコンパクトな3次元多様体の場合，これを幾つかのピースに分解してそれぞれのピースを8種類の標準的な幾何で説明できるであろうという予想があります（サーストン：ここでも双曲幾何が大きな役割を果たします）．これに対してハミルトンは与えられたリーマン多様体上で最初のリーマン計量を（リッチ曲率と呼ばれる曲率に関連して）うまく変形していくリッチ・フローと呼ばれる手法を用いて解くプログラムを与えました．このプログラムを実行して予想を解くには多くの困難を解決する必要があります．ペレルマンは2002-2003年にかけての幾つかのプレプリントで最終的な解決に向けての多くの重要なアイデアを与え，現在専門家によってそのチェックが行われています．

参考文献

[1] C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas (Allgemeine Flächentheorie), 1827 (Werke, IV); (邦訳) 幾何学 II（数学の歴史 VIIIb），共立出版, 1982;

[2] 日本幽囚記，ゴロヴニン手記 (1811-1813)，岩波文庫.

[3] M. Gromov, Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces, Birkhäuser, 1999;

[4] R. Hartshorne, Geometry: Euclid and Beyond, Springer, 2000.

[5] T. L. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements (translated from the text of Heiberg), Cambridge Univ. Press, 1908(Dover 1956); (邦訳) ユークリッド原論，共立出版，1971;

[6] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Teubner, 1899, 第 13 版 1987, (邦訳) 幾何学の基礎他，共立出版, 1970;

[7] 小林昭七，ユークリッド幾何から現代幾何へ，日本評論社，1990;

[8] プラトン，ソクラテスの弁明・クリトン，岩波文庫.

[9] G. F. B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsschrift, 1854 (Gesammelte mathematische Werke, Teubner, 1892, Springer,1990, p.272-287), (邦訳) リーマン幾何とその応用，共立出版，1971 所収.

[10] 特集リッチ・フロー，数学セミナー (2004年9月号)．