

魔方陣の話

東川 和夫 (富山大学 理学部)

0. はじめに

2006年1月9日(月・祝)に湘南国際村センターで「現代数学入門市民講座」が行われ「 17×17 の完全魔方陣」という題目で講演を行いました。また1月14日(土)・15日(日)に同センターで中学・高校生対象の「湘南数学セミナー」において「魔方陣の話」と題してセミナーを行いました。「市民講座」と「セミナー」の両方において、各出席者にある数の並びの変換を選んでいただき、144種類ある 5×5 の完全魔方陣のうちのひとつを自作していただきました。以下にセミナーでの講義内容を報告致します。

1. 奇数次の魔方陣の2つの作り方

$n \times n$ の魔方陣(n 次の魔方陣)とは、 $1, \dots, n^2$ の数を $n \times n$ の正方形のまですに入れ縦・横・斜めの数の和が一定になるものである。ここでは出来上がった魔方陣から一斉に1を引くことによって、 $0, \dots, n^2 - 1$ の数を使うことにする。これらの数を n 進法で表すと2桁で書くことが出来て取扱いが便利だからである。一定の和 c_n を定和という。 $c_n = n(n^2 - 1)/2$ である。奇数次の魔方陣の作り方が、古くから2とおり知られている。それらを $n = 5$ の場合で復習する。

< 奇数次魔方陣の第1の作り方 >

スタートの0を中央列の一番下に置く。

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| | 8 | 1 | 17 | 10 |
| 9 | 2 | | 11 | 9 |
| 3 | | | 12 | 5 |
| | 15 | 13 | 6 | 4 |
| 16 | 14 | 7 | 0 | 16 |
| | 8 | 1 | 17 | |

次に順に斜め左に下がりながら 1, 2, 3, 4 を入れる．ここで 5×5 の正方形の下端の辺と上端の辺を同一視する．したがって 1 は 1 番上の左から 2 つ目に入る．右端の辺と左端の辺も同一視する．3 は一番右の列の上から 3 番目に入り, 4 は 3 の左下に入る．そこの左下には最初に入れた 0 があるので, 次の 5 を 4 の上に置く．次に 6, 7, 8, 9 を順に斜め左に下がりながら入れる．10 を 9 の上に置く．同じようにあとを続け, 出来上がったものを M とおく． M を 5 進法で書くと

$$\begin{bmatrix} 13 & 01 & 44 & 32 & 20 \\ 02 & 40 & 33 & 21 & 14 \\ 41 & 34 & 22 & 10 & 03 \\ 30 & 23 & 11 & 04 & 42 \\ 24 & 12 & 00 & 43 & 31 \end{bmatrix}$$

となる．5 の位と 1 の位の表を分けて書き

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

とおけば, 5 進法の定義から $M = 5M_1 + M_2$ である．ここで $5A$ は A の成分ごとに 5 倍したもの, $A + B$ は A と B の成分ごとに加えたものであ

る .

< 奇数次魔方陣の第 2 の作り方 >

第 2 の方法は , まず 0 を中央の一つ下のますに置く . 次に 1, 2, 3, 4 を斜め左下に順に置く . ここでも第 1 の作り方と同じように , 下端の辺と上端の辺を同一視し , 左端の辺と右端の辺を同一視する . 今度は 5 を 4 の 2 つ下に置き , 10 を 9 の 2 つ下に置く . あとは第 1 と同様である . 出来た上がったものを N とし , それを 5 進法で書くと

$$\begin{bmatrix} 02 & 34 & 11 & 43 & 20 \\ 30 & 12 & 44 & 21 & 03 \\ 13 & 40 & 22 & 04 & 31 \\ 41 & 23 & 00 & 32 & 14 \\ 24 & 01 & 33 & 10 & 42 \end{bmatrix}$$

となるので

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

とおけば $N = 5N_1 + N_2$ である．この第 2 の方法は

| | | | | | |
|---|--|----|----|----|----|
| | | | 0 | | |
| | | 1 | | 5 | |
| | | 2 | 6 | 10 | |
| 3 | | 7 | 11 | | 15 |
| 4 | | 8 | 12 | 16 | 20 |
| 9 | | 13 | 17 | | 21 |
| | | 14 | 18 | 22 | |
| | | 19 | | 23 | |
| | | | 24 | | |

のように数を順に規則正しく並べて，中央の 5×5 の枠からはみ出た部分を 3 つずつ組にして 5 だけ中央方向に平行移動したものである．すなわち左にはみ出ている 3, 4, 9 を右方向に 5 だけ平行移動して中央の枠内に入れるのである．他も同様にすれば N を得る．

さて M_j, N_j ($j = 1, 2$) の各行（横の並び）および各列（縦の並び）には 0, 1, 2, 3, 4 のすべてが現れている．このことから M, N の縦・横の数の和が

$$5(0 + 1 + 2 + 3 + 4) + (0 + 1 + 2 + 3 + 4) = 60 = c_5$$

であることが分る．もっと詳しく次が言える． M_1 の第 2 行は第 1 行 (10432) の 1 つ右にずれた場所から始まって並び方の順序は右端と左端をつなげば同じになっている．第 i 行から第 $i + 1$ 行に移るときも同様である．これをシフト +1 で表そう． M_2 の第 $i + 1$ 行は第 i 行の 3 つ右に移動した場所から始まる並びである．したがってこれはシフト +3 をもつ． N_1 はシフト +1, N_2 はシフト +4 をもつ． M_1 の左下がりが対角線（副対角線）および N_j の片方の対角線は (22222) であり，2 は 0, 1, 2, 3, 4 の平均である． M_1 と N_j の他の対角線および M_2 の両対角線は 0, 1, 2, 3, 4 の全てが現れている．これらのことより M, N の斜めの和も 60 であることが分る．

注意 一般の奇数 n の場合, M_2 の右下がり対角線 (主対角線) は n が 3 の倍数でないとき $0, 1, \dots, n-1$ のすべてが現れる. n が 3 の倍数 $n = 3k$ である奇数のとき

$$1, 4, \dots, 1 + 3(k-1)$$

の 3 回の繰り返しが現れる. それらの数の和は

$$3 \sum_{j=0}^{k-1} (1 + 3j) = 3 \left(k + \frac{3k(k-1)}{2} \right) = \frac{n(n-1)}{2} = 0 + \dots + (n-1)$$

である. $n = 2m + 1$ としたとき, M_1, N_j ($j = 1, 2$) の片方の対角線は (m, m, \dots, m) で, 他の対角線には $0, 1, \dots, n-1$ のすべてが現れる. また N_2 は主対角線について対称であり N_1 を 90° 回転したものである.

2. 5×5 の完全魔方陣の存在性

正方形に並べた数の表を行列という. これ以降行列を考えるとき, 上から順に第 0 行, 第 1 行, \dots , 第 4 行と言い, また左から順に第 0 列, 第 1 列, \dots , 第 4 列というように 0 から始めることにする. 次のやり方で 5×5 の魔方陣 M を作ろう. まず設計図として第 1 節で出てきた補助行列 M_1, M_2 を作る. M_1 の第 0 行を (01234) とする. 次に下の行に移るとき $+2$ の演算を行う. ただし 5 以上になったら 5 を引く. これは前節で述べたシフト $+2$ を施しているのである. M_2 の第 0 行を (01234) とする. M_2 にはシフト $+3$ を施す.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

すると M_1 の第 (i, j) 成分 (第 i 行第 j 列の数) は $(M_1)_{ij} = r_5(2i + j)$, M_2 の第 (i, j) 成分は $(M_2)_{ij} = r_5(3i + j)$ である. ここで 整数 x に対して $r_n(x)$

は x を自然数 n で割った余りを表す. そこで $M = 5M_1 + M_2$ とおく. すると $n = 5$ として M_1, M_2 は次の性質をもつ:

- (1) M_1, M_2 の各行各列に $0, 1, \dots, n-1$ のすべてがある.
- (2) M_1, M_2 のすべての一般対角線に $0, 1, \dots, n-1$ のすべてがある.

ここで一般対角線とは, M_j のコピー 4 枚を田の字型にくっつけたもの \widetilde{M}_j 上で斜めに n 個とったものである.

- (3) \widetilde{M}_j 上の任意の 2×2 の 4 個とその正方形の対角線方向に行と列一つ離れたところにある 1 個の合計 5 個のますに $0, 1, \dots, 4$ のすべてがある (ルーペ性という).
- (4) \widetilde{M}_j 上の任意の 5 個の十字形のますに $0, 1, \dots, 4$ のすべてがある (ダイヤモンド性という).
- (5) M_1 の 0 のある n 個の場所の M_2 には $0, 1, \dots, n-1$ のすべてがある.

性質 (5), (1), (2) それぞれより, 次のそれぞれがいえる:

- (6) M には $0, 1, \dots, n^2 - 1$ のすべてがある.
- (7) M の任意の縦・横の和が c_n になる.
- (8) M の任意の一般対角線上の和が c_n になる.

性質 (6),(7),(8) をみたととき M を完全魔方陣という. 性質 (3) より次がいえる:

- (9) \widetilde{M} の任意の 2×2 の 4 個の和は, その対角線方向に行と列一つ離れた所にある数を m とすれば $c_5 - m$ となる.

このことは 2×2 のところにルーペ (虫めがね) を置けばその和が 1 回の引き算で出せることを示しているので, 性質 (9) を M のルーペ性という.

性質 (4) より次の M のダイヤモンド性がいえる:

(10) \widetilde{M} の任意の 5 個の十字形 (ダイヤモンド形) の和が c_5 である .

さて $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ を $1, 2, 3, 4$ の並べ替え (順列, 置換ともいう) とし $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ を $2, 3, 4$ の並べ替えとする. N_1 を M_1 における $0, 1, 2, 3, 4$ をそれぞれ $0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ に替えたもの, N_2 を M_2 における $0, 1, 2, 3, 4$ をそれぞれ $0, 1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ に替えたものとし, $N = 5N_1 + N_2$ とおく. すると N もルーペ性・ダイヤモンド性をもつ完全魔方陣になる. 次の節で 5×5 完全魔方陣の代表系がこれに尽きることを見る.

注意 本節の魔方陣の構成法は n が次をみたす奇数のときに一般化される ($[A1], [A2], [A3], [A4]$): 互いに素な自然数 $A, B (A > B)$ をとって $n = A^2 + B^2$ と書ける. このとき

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{p-1}} + \frac{1}{a_p}$$

を有理数 B/A の連分数展開として B/A の第 p 近似分数を

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{p-1}}$$

と書き, $k = aA + bB$ と置く. 補助行列 M_1 と M_2 を次のように決める: M_1 と M_2 の第 0 行は $(0, 1, \dots, n-1)$ とし, M_1 にはシフト $+k$, M_2 にはシフト $+(n-k)$ を施す. すなわち $i, j = 0, 1, \dots, n-1$ に対して $(M_1)_{ij} = r_n(ki + j)$, $(M_2)_{ij} = r_n((n-k)i + j)$ である. そして $M = nM_1 + M_2$ と置く. また $d = (n - (A + B))/2$ と置く. すると M_j は性質 (1), (2) をみだし, 性質 (3) も次の形でみだす: \widetilde{M}_j 上の対角的に d 離れた位置にある $A \times A$ の正方形 P と $B \times B$ の正方形 Q に対して, $P \cup Q$ 上に $0, \dots, n-1$ のすべてがある. また M は性質 (6), (7), (8) をみだし, 性質 (9) も次の

形でみたとす: \widetilde{M} 上の対角的に d 離れた位置にある $A \times A$ の正方形 P と $B \times B$ の正方形 Q に対して, $P \cup Q$ 上にある数の和が c_n である.

3. 5×5 の完全魔方陣の一意性

次の定理が成立する. その証明は次節で行う.

定理 1. M が $0, 1, \dots, 24$ を使った 5×5 の正方行列であるとき, 次は互いに同値である:

- (1°) M は完全魔方陣.
- (2°) M はルーペ性をもつ.
- (3°) M はダイヤモンド性をもつ.

系 2. M が $0, 1, \dots, 24$ を使った 5×5 完全魔方陣ならば

$$M = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & B & & \\ & & & A & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & A & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & B \end{bmatrix}$$

において $\Sigma A = \Sigma B$ である.

ここで ΣA は A の場所にある数の和を意味する. また行列 M の平行移動とは, M を下図左のように横線で裁ってから平行移動によって合わせ, 次に縦線で裁ち平行移動し下図右のように合わせたものである.

$$M = \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline C & D \\ \hline A & B \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline D & C \\ \hline B & A \\ \hline \end{array}$$

系 2 の証明 定理 1 の (2°) が成立つ . したがって

$$M = \begin{bmatrix} A & & & & \\ & A & A & & \\ & A & A & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & & & & \\ & B & & & \\ & & B & & \\ & & & B & \\ & & & & B \end{bmatrix}$$

において $\Sigma A = \Sigma B$ なので系 2 の主張を得る . 証明終り .

魔方陣において $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 回転したもの及び正方形の対称軸に対して鏡映したものは同じとみなす (1 つの同値類とする) . したがって 1 つの同値類に 8 個の魔方陣が含まれる . また完全魔方陣においては平行移動したものは同じとみなす (1 つの同値類とする) . よって $n \times n$ 完全魔方陣の同値類には $8n^2$ 個の魔方陣が含まれる .

さて M を任意にとった 5×5 完全魔方陣とする . 平行移動の同一視により $(0, 0)$ 成分を 0 としてよい .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & A & a & & \\ & d & & B & \\ & D & & & b \\ & & c & C & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & p & A & a & q \\ & d & x & y & B \\ & D & w & z & b \\ & s & c & C & r \end{bmatrix}$$

上左図の 8 つの定められた場所の数をそれぞれ A, a, B, b, C, c, D, d とする . 上右図に定められた場所の数を未知数 x, y, z, w, p, q, r, s とする . 系 2 より $0 + x = C + b, 0 + y = D + c, 0 + z = A + d, 0 + w = B + a$ および $0 + p = B + c, 0 + q = C + d, 0 + r = D + a, 0 + s = A + b$ を得る .

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ B+c & A & a & C+d & \\ d & C+b & D+c & B & \\ D & B+a & A+d & b & \\ A+b & c & C & D+a & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & x & p & q & y \\ w & B+c & A & a & C+d \\ s & d & C+b & D+c & B \\ r & D & B+a & A+d & b \\ z & A+b & c & C & D+a \end{bmatrix}$$

よって上左図を得る．次に改めて新しい未知数 x, y, z, w, p, q, r, s を上右図のようにおく．系 2 より $x + B = C + (B + a)$, $y + D = A + (D + c)$, $z + A = B + (A + d)$, $w + C = D + (C + b)$ および $p + C = D + (C + d)$, $q + A = B + (A + b)$, $r + B = C + (B + c)$, $s + D = A + (D + a)$ を得る．故に

$$M = \begin{bmatrix} 0 & C & D & B & A \\ D & B & A & 0 & C \\ A & 0 & C & D & B \\ C & D & B & A & 0 \\ B & A & 0 & C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a & d & b & c \\ b & c & 0 & a & d \\ a & d & b & c & 0 \\ c & 0 & a & d & b \\ d & b & c & 0 & a \end{bmatrix}$$

となる．このことは a, b, c, d, A, B, C, D の値により M が一意的に定まることを示している．

魔方陣 M において主対角線で鏡映にしたもの M' は M と同一視される．今の場合、最初の a, b, c, d, A, B, C, D の置き方を見れば分るように、 M' は M における A, B, C, D を一斉に d, c, b, a と入れ替えたものである． A, B, C, D, a, b, c, d は $1, 2, \dots, 24$ のうちのどれかであり相異なる．よって $\min\{a, b, c, d\} \neq \min\{A, B, C, D\}$ である．必要なら M の代わりに M' をとればいいので $\min\{a, b, c, d\} < \min\{A, B, C, D\}$ と仮定してよい． a, b, c, d を小さいもの順に並べ替えたものを a', b', c', d' とし A, B, C, D を小さいもの順に並べ替えたものを A', B', C', D' とする．次の命題 3 より $(a', b', c', d') = (1, 2, 3, 4)$, $(A', B', C', D') = (5, 10, 15, 20)$ となる．命題 3 の

証明は次々節で行う.

命題 3. 8 個の自然数 a, b, c, d, A, B, C, D が $a < b < c < d, A < B < C < D, a < A$ および

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, A, B, C, D, \\ a, a+A, a+B, a+C, a+D, \\ b, b+A, b+B, b+C, b+D, \\ c, c+A, c+B, c+C, c+D, \\ d, d+A, d+B, d+C, d+D \end{array} \right\} = \{0, 1, \dots, 24\}$$

をみたせば, $(a, b, c, d, A, B, C, D) = (1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20)$ である.

したがって a, b, c, d は 1, 2, 3, 4 の並べ替えであり, A, B, C, D は 5, 10, 15, 20 の並べ替えである. さらに魔方陣は $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 回転したものは同じものとみなされる. M を 90° 回転して 1 行を平行移動してみよう.

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & & & & \\ \hline & A & a & & \\ \hline & d & & B & \\ \hline & D & & b & \\ \hline & & c & C & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & B & b & \\ \hline & a & & C & \\ \hline & A & & c & \\ \hline & & d & D & \\ \hline 0 & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & & & & \\ \hline & B & b & & \\ \hline & a & & C & \\ \hline & A & & c & \\ \hline & & d & D & \\ \hline \end{array}$$

すると最後のものは M の A, B, C, D, a, b, c, d を B, C, D, A, b, c, d, a に替えたものになり M と同一視される. 180° 回転, 270° 回転をも考えることにより $a = 1$ と仮定してよい. 故に M の同値類の代表は

$$M = \begin{bmatrix} 0 & C & D & B & A \\ D & B & A & 0 & C \\ A & 0 & C & D & B \\ C & D & B & A & 0 \\ B & A & 0 & C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & d & b & c \\ b & c & 0 & 1 & d \\ 1 & d & b & c & 0 \\ c & 0 & 1 & d & b \\ d & b & c & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．ここで d, b, c は $2, 3, 4$ の並べ替え C, D, B, A は $5, 10, 15, 20$ の並べ替えである．したがって 5×5 完全魔方陣は第 2 節の作り方のものに限ることがわかった．同値類の個数は $3! \times 4! = 144$ である．

4. 定理 1 の証明

$N = c_5 = 60$ とおく．

< (1°) \Rightarrow (2°) の証明 >

一点を通る縦・横・2つの一般対角線が通る回数の行列を 5 組加えると次がいえる（ここで行列内の空白は 0 を意味する）：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & \\ 1 & & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & \\ 1 & & 1 & 1 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

すべての成分が 1 である $n \times n$ 行列を E_n で表したとき，最後の行列が

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} + 3E_5$$

となるので (2°) の主張が得られる．

< (3°) \Rightarrow (1°) の証明 >

$i = 0, 1, \dots, 4$ に対して a_i, b_i, c_i, d_i をそれぞれ第 i 行, 第 i 列, 第 i 右下がり一般対角線, 第 i 右上がり一般対角線上にある数の和とする. 5×5 正方形内に 5 個のダイヤモンドを縦に並べ (はみ出た分は辺で切って対辺にくっ付け) たときダイヤモンドの乗った回数の行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

等となることより

$$\begin{cases} b_0 + 3b_1 + b_2 = 5N \\ b_1 + 3b_2 + b_3 = 5N \\ b_2 + 3b_3 + b_4 = 5N \\ b_0 + b_3 + 3b_4 = 5N \\ 3b_0 + b_1 + b_4 = 5N \end{cases}$$

を得る . $x_i = b_i - N$ と置けば

$$x_0 + 3x_1 + x_2 = 0 \tag{1}$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \tag{2}$$

$$x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \tag{3}$$

$$x_0 + x_3 + 3x_4 = 0 \tag{4}$$

$$3x_0 + x_1 + x_4 = 0 \tag{5}$$

となる . (4) - (1) より

$$-3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \tag{4}'$$

(5) - 3 × (1) より

$$-8x_1 - 3x_2 + x_4 = 0. \tag{5}'$$

(4)' + 3 × (2) より

$$8x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0. \quad (4)^{(2)}$$

(5)' + 8 × (2) より

$$21x_2 + 8x_3 + x_4 = 0. \quad (5)^{(2)}$$

(4)⁽²⁾ - 8 × (3) より

$$-20x_3 - 5x_4 = 0. \quad (4)^{(3)}$$

(5)⁽²⁾ - 21 × (3) より

$$-55x_3 - 20x_4 = 0. \quad (5)^{(3)}$$

(4)⁽³⁾ / (-20) より

$$x_3 + (1/4)x_4 = 0. \quad (4)^{(4)}$$

(5)⁽³⁾ + 55 × (4)⁽⁴⁾ より

$$-(25/4)x_4 = 0. \quad (5)^{(4)}$$

すると次の方程式系の同値性が得られる:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4)' \\ (5)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4)^{(2)} \\ (5)^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4)^{(3)} \\ (5)^{(3)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4)^{(4)} \\ (5)^{(4)} \end{cases}$$

最後の (5)⁽⁴⁾, (4)⁽⁴⁾, (3), (2), (1) より順に $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_0 = 0$ がいえる. よってすべての i について $b_i = N$ がいえる. 同様な考え方によって, すべての i について $a_i = N$ となる. またダイヤモンドを対角線上に 5 個並べることによって, $2c_0 + c_1 + 2c_2 = 5N$ 等を得, この連立方程式を解くことによって, すべての i について $c_i = N$ を得る. 同様にすべての i について $d_i = N$ となる. これで (1°) が示せた.

< (2°) ⇒ (3°) の証明 >

c_i を前段に述べたものとする． 2×2 の正方形とひとつ飛びの右下にある 1 個の場所をペアにしたものを右下がり一般対角線上に 5 組並べて， $c_0 + 3c_1 + c_2 = 5N$ 等を得る．これは前段の b_i に関する連立方程式系と全く同じなので，すべての i について $c_i = N$ を得る．すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

は 1 つのダイヤモンドなので (3°) がいえる．定理 1 の証明終り．

5. 命題 3 の証明

次の補題を準備する．

補題 4. 命題 3 の仮定の下で， $a = 1$ ， $d = c + 1$ ， $D \geq C + 2$ ， $D + d = 24$ ．

証明 $a = \min\{a, b, c, d, A, B, C, D\}$ より $a = 1$ である． $D + d = \max\{X + Y \mid X \in \{a, b, c, d\}, Y \in \{A, B, C, D\}\}$ より $D + d = 24$ である．よって $23 = D + c$ または $23 = C + d$ である．すなわち $d - c = 1$ または $D - C = 1$ である． $D - C = 1$ とすれば $C + a = D$ となり，命題 3 の与式の左辺のすべての要素が相異なっていることに矛盾する．故に $D - C \geq 2$ ， $d = c + 1$ ．証明終り．

補題 5. 命題 3 の仮定の下で， $b = 2$ ．

証明 補題 4 より $a = 1$ なので $2 = A$ または $2 = b$ ． $2 = A$ と仮定する．すると $4 = b$ または $4 = B$ ．

- (1) $4 = b$ のとき . $5 = c$ または $5 = B$ である .
 (11) $4 = b, 5 = c$ のとき . $d = c + 1$ より 6 が 2 つ現れ矛盾 .
 (12) $4 = b, 5 = B$ のとき . 6 が 2 つ現れ矛盾 .
 (2) $4 = B$ のとき . $6 = C$ または $6 = b$ である .
 (21) $4 = B, 6 = C$ のとき . $8 = b$ または $8 = D$ である .
 (211) $4 = B, 6 = C, 8 = D$ のとき . $d = c + 1$ を使って 12 が 2 つ現れ矛盾 .
 (212) $4 = B, 6 = C, 8 = b$ のとき . $9 = D$ または $9 = c$ である .
 (2121) $4 = B, 6 = C, 8 = b, 9 = D$ のとき . 10 が 2 つ現れ矛盾 .
 (2122) $4 = B, 6 = C, 8 = b, 9 = c$ のとき . 10 が 2 つ現れ矛盾 .
 (22) $4 = B, 6 = b$ のとき . $7 = C$ または $7 = c$ である .
 (221) $4 = B, 6 = b, 7 = C$ のとき . 8 が 2 つ現れ矛盾 .
 (222) $4 = B, 6 = b, 7 = c$ のとき . $d = c + 1$ より 8 が 2 つ現れ矛盾 .
 以上より $4 \neq b$ かつ $4 \neq B$. したがって $2 \neq A$. よって $2 = b$ である . 証明終り .

命題 3 の証明 命題 3 の仮定の左辺の各数を $D + d = 24$ から引くと次を得る:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} D + d, & D - A + d, & D - B + d, & D - C + d, & d, \\ D + d - a, & D - A + d - a, & D - B + d - a, & D - C + d - a, & d - a, \\ D + d - b, & D - A + d - b, & D - B + d - b, & D - C + d - b, & d - b, \\ D + d - c, & D - A + d - c, & D - B + d - c, & D - C + d - c, & d - c, \\ D, & D - A, & D - B, & D - C, & 0 \end{array} \right\}$$

また $0 < d - c < d - b < d - a < d, 0 < D - C < D - B < D - A < D$ である . 補題 4 より $D - C \geq 2 > 1 = d - c$ である . よって補題 5 より $d - b = 2$. 故に $d = 4, c = 3$ を得る . これより $A = 5, B = 10, C = 15, D = 20$ がいえる . 証明終り .

5. 6×6 の完全魔方陣の非存在性

6×6 の完全魔方陣は存在しない . もっと一般に次がいえる .

定理 6. $n = 4m + 2$, m は自然数としたとき $n \times n$ の完全魔方陣は存在しない.

証明 ([Y] による) 先ず $n = 4m + 2$ のとき $c_n = (2m + 1)(4m + 1)(4m + 3)$ は奇数であることに注意する. $n \times n$ の完全魔方陣 M が存在したと仮定する. 簡単のため $n = 6$ の場合で説明する.

$$M = \begin{bmatrix} A & B & A & B & A & B \\ & C & & C & & C \\ A & B & A & B & A & B \\ & C & & C & & C \\ A & B & A & B & A & B \\ & C & & C & & C \end{bmatrix}$$

と置けば A の場所と B の場所すべてで 3 本の行を占め, B の場所と C の場所すべてで 3 本の列を占めるので

$$\Sigma A + \Sigma B = 3c_n, \quad \Sigma B + \Sigma C = 3c_n$$

である. このことから $\Sigma A = \Sigma C$ となる. また A の場所と C の場所すべてで 3 本の一般対角線を占めているので

$$\Sigma A + \Sigma C = 3c_n$$

である. するとこの左辺は $2\Sigma A$ だから偶数であり, 右辺は最初に述べたことにより奇数である. 矛盾が生じたので証明終了.

6. 4×4 の完全魔方陣

この節では 4×4 の完全魔方陣が 3 つの同値類をもつことを示そう.

命題 7. 4×4 行列が第 2 節の (6), (7) をみたすとき, 次のそれぞれにおいて $\Sigma A = \Sigma B$, $\Sigma C = \Sigma D$ が成立つ:

$$\begin{array}{l}
(1) \begin{bmatrix} A & A & C & C \\ A & A & C & C \\ D & D & B & B \\ D & D & B & B \\ B & C & C & B \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} D & A & A & D \\ D & A & A & D \\ B & C & C & B \\ B & C & C & B \\ A & C & A & C \\ D & B & D & B \\ A & C & A & C \\ D & B & D & B \end{bmatrix}, \quad (3) \begin{bmatrix} D & D & B & B \\ A & A & C & C \\ A & A & C & C \\ D & D & B & B \end{bmatrix}, \\
(4) \begin{bmatrix} B & C & C & B \\ D & A & A & D \\ D & A & A & D \\ B & C & C & B \end{bmatrix}, \quad (5) \begin{bmatrix} A & C & A & C \\ D & B & D & B \\ A & C & A & C \\ D & B & D & B \end{bmatrix}.
\end{array}$$

証明 各 (j) において $\Sigma A + \Sigma C = 2c_4$, $\Sigma C + \Sigma B = 2c_4$ なので $\Sigma A = \Sigma B$ が得られる. 他も同じ. 証明終り.

4×4 魔方陣の同値類は 880 個であることが知られている.

命題 8. 命題 7 の仮定の下で次の 3 条件は同値である:

- (1°) 完全である.
- (2°) 命題 7 において等しい値が定和 $c_4 = 30$ になる.
- (3°) 任意の 3×3 小行列の 2 つ対角線の隅にある数の和がいずれも $c_4/2 = 15$ になる.

証明 $(2^\circ) \Rightarrow (3^\circ) > ([U] \text{ による}) (2^\circ)$ を仮定する.

$$M = \begin{bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \\ i & h & g \end{bmatrix}$$

とすれば仮定より $(a+b+c+d)+(c+f+g+h) = (b+e+f+c)+(d+c+h+i)$.
よって $a+g = e+i$. $a+g+e+i = 30$ より $a+g = e+i = 15$. よって
(3°) が得られた. (1°) \Rightarrow (2°) と (3°) \Rightarrow (1°) の証明は演習問題とする.

系 9. $0, \dots, 15$ を使った 4×4 完全魔方陣 M において

$$M = \begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & B & \\ & & B & \end{bmatrix}$$

ならば, $\Sigma A = \Sigma B$.

証明 命題 8 の (2°) を使えばよい. 証明終り.

上の結果を使って 4×4 完全魔方陣の同値類の代表系を決定しよう. M を任意の 4×4 完全魔方陣とする. $(0,0)$ 成分は 0 と仮定してよい. 下図左の M の指定された場所の値を a, b, c, d とする. 下図右の指定された場所の値を未知数 x, y, z, w とする.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & a & & \\ & d & b & \\ & & c & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & w & a & x \\ & d & b & \\ & z & c & y \end{bmatrix}$$

系 9 より $x = c + d$, $y = a + d$, $z = a + b$, $w = b + c$ を得る. したがって性質 (2°) より

$$(1) \quad c_4 = x + y + z + w = 2(a + b + c + d).$$

下図左において未知数 p, q, r, s を考える. p を含む縦と q を含む縦に (1) を使って $p = a + c + d$, $q = a + b + c$ を得る. また r を含む横と s を含む横に (1) を使って $r = b + c + d$, $s = a + b + d$ を得る. 残りの空白も (1) を使って下図右のように一意的に決まる.

$$\begin{bmatrix} 0 & p & q & \\ s & b+c & a & c+d \\ & d & b & \\ r & a+b & c & a+d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & a+c+d & b+d & a+b+c \\ a+b+d & b+c & a & c+d \\ a+c & d & a+b+c+d & b \\ b+c+d & a+b & c & a+d \end{bmatrix}$$

さて a, b, c, d を小さいもの順に並べたものを a', b', c', d' とする．次の命題（証明は演習問題とする）より $(a', b', c', d') = (1, 2, 4, 8)$ となる．

命題 10. 4 つの自然数 a, b, c, d が $a < b < c < d$ をみたし

$$\left\{ \begin{array}{l} a, b, c, d, a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d, \\ b+c+d, a+c+d, a+b+d, a+b+c, a+b+c+d \end{array} \right\} = \{1, 2, \dots, 15\}$$

ならば, $(a, b, c, d) = (1, 2, 4, 8)$.

したがって a, b, c, d は $1, 2, 4, 8$ の並べ替えである．さて M を 90° 回転すると a, b, c, d の代わりに d, c, b, a にしたものと同値になることがわかる（第 3 節の議論参照）．さらに $180^\circ, 270^\circ$ の回転をも考慮すれば $a = 1$ と仮定してよい．そして下左図 M を主対角線に対して鏡映してそれを 270° 回転し 1 列を平行移動したものを M' とおく．

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & d & b & \\ & & c & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & d & & \\ & 1 & c & \\ & & b & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & & 0 & \\ & 1 & & \\ b & d & & \\ & c & & \end{bmatrix} \rightarrow M' = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & b & d & \\ & & c & \end{bmatrix}$$

M' は M の b と d が入れ替わったものであり M と M' は完全魔方陣として同値である．したがって 4×4 の完全魔方陣の代表系は $b < d$ と仮定した次の 3 つである:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ただし $(c, b, d) = (2, 4, 8), (4, 2, 8), (8, 2, 4)$.

参考文献

[A1] Azukawa, K., Completely magic, Lupe, and diamond properties of number squares, Math. J. Toyama Univ., 26(2003), 14-152.

[A2] 東川 和夫, 魔方陣, 数学文化, 2(2004), 93-104.

[A3] Azukawa, K., Construction of Lupe magic squares, Toyama Math. J., 28(2005), 139-151.

[A4] 東川 和夫, 17 と 2005 とルーペ魔方陣, 数学文化, 5(2005), 109-112.

[U] 内田 伏一, 魔方陣にみる数のしくみ, 日本評論社, 2004.

[Y] 山本 行雄, 数のふしぎ・数のたのしみ, ナカニシヤ出版, 2000.

(あずかわ かずお)