

授賞報告

2007年度代数学賞

2007年度代数学賞は、吉岡康太氏（神戸大学大学院理学研究科）、坂内英一氏（九州大学大学院数理学研究院）の二人が受賞されました。以下両氏の業績を簡単に紹介いたします。

吉岡康太氏「ベクトル束のモジュライの研究」

吉岡氏は代数的ベクトル束、とくに代数曲面上のベクトル束のモジュライ空間について、精力的な研究を行なっています。代数曲面上のベクトル束は、いわゆる Hitchin-小林対応を通じて実4次元多様体上のインスタントンと結びつき、微分位相幾何の Donaldson 不変量や理論物理におけるゲージ理論とも関連します。当然さまざまな立場から数多くの研究があるわけですが、そのなかにあっても吉岡氏の成果は第一級のものであります。

吉岡氏の業績はおおむね三種類に分けることができます。第一はモジュライ空間のベッチ数の計算に関わるものです。 \mathbf{P}^2 上の場合にはじまり、さまざまな曲面上のベクトル束について計算を行なっていますが、まずは最初の公表論文である *The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on \mathbf{P}^2* (J. reine angew. Math. **453** (1994)) について説明します。この論文では \mathbf{P}^2 上階数が2で c_1 が $-H$ (H は超平面のコホモロジー類) となる安定ベクトル束のモジュライ空間 (の Gieseker コンパクト化) のベッチ数を決定しました。W. Barth らによる従前の研究では、 c_2 の値が小さい場合にしか計算ができていませんでしたから、画期的成果と言えます。証明は Weil の合同ゼータ関数を使って、有限体上定義される安定ベクトル束を数え上げる問題に帰着します。引き続き一連の論文では、線織面や楕円曲面上のベクトル束を扱いますが、そのさい、曲面を blow up したり偏極を取り替えたりすると、モジュライ空間のベッチ数がどう変化するか (爆発公式, モジュライ空間の chamber 構造) といった興味深い考察が行なわれます。

モジュライ空間のベッチ数についての吉岡氏の結果は、直後に Vafa-Witten が S 双対性予想を発表すると、予想を裏付ける実例として、一躍脚光を浴びることとなりました。S 双対性の物理的な意味は、高エネルギー領域と低エネルギー領域の対称性ですが、これを摂動級数に対する関数等式として翻訳すれば、インスタントンのモジュライ空間のオイラー数の母関数が保型性をもつ、という予想になります。吉岡氏の計算結果をながめると、 \mathbf{P}^2 上の場合には Hurwitz 類数が現れて、確かに保型形式になっていますし、線織曲面や楕円曲面の場合も母関数はテータ関数を用いて表示することができて、やはり保型形式が現れ

るのです。なお S 双対性予想自体の数学的に厳密な証明はまだ知られていませんし、母関数がなぜ保型性をもつべきなのか、という疑問に対する原理的説明も、数学サイドからは存在しないのが現状です。

吉岡氏の第二の業績は、K 3 曲面やアーベル曲面上のベクトル束のモジュライの詳細な構造論です。論文 *Some examples of Mukai's reflections on K3 surfaces* (J. reine angew. Math. **515** (1999)) では、 X を K3 曲面、 $v = (r, c_1, c_2) \in H^{\text{even}}(X, \mathbf{Z})$ を「向井ベクトル」としたとき、階数 r 、チャーン類 c_i をもつ X 上の安定ベクトル束のモジュライ空間 $M = M(v)$ (向井茂氏によって非特異な複素シンプレクティック多様体の構造をもつことがわかっているが、大域構造はよくわからない) が、 X 上の $d = d(v) = |v|$ 個 (ただし $d(v)$ は向井ベクトル v の自然な「長さ」で、Riemann-Roch 定理から M の次元の半分と一致します) の点をパラメトライズする Hilbert 概型 $X^{[d]}$ というわかりやすい複素シンプレクティック多様体から双有理変換や複素構造の変形を行なって得られること、また Bogomolov-Fujiki-Beauville 内積付き格子 $H^2(M, \mathbf{Z})$ が v の直交補空間と同型になることといった興味深い結果を、丸山正樹氏がベクトル束のモジュライ理論に導入した「初等変換」を一般化することによって示しています。一方 *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces*, (Math. Ann. **321** (2001)) では Fourier-Mukai 変換を駆使し、アーベル曲面上のベクトル束のモジュライについて K3 の場合と類似の結果を証明しました。

業績の第三は、H. NAKAJIMA AND K. YOSHIOKA, *Instanton counting on blowup, I* (Invent. Math. **162** (2005)) に始まる中島啓氏との共同研究で、物理学者 Nekrasov が定義したゲージ理論の分配関数に関わります。この分配関数は、無限遠直線に沿って frame づけられた \mathbf{P}^2 上の階数 r のベクトル束 (物理的対象としては無限遠方では消滅するインスタントン) のモジュライ空間から定義され、 \mathbf{R}^4 の $SU(r)$ 同変 Donaldson 不変量と考えられるものです。Nekrasov 予想とは、上の分配関数の主要項と、リーマン面上の周期積分で与えられる Seiberg-Witten プレポテンシャルと呼ばれる量が一致するであろう、という主張です。前掲論文では、広田方程式の一般化である blow-up equations という微分方程式系を詳しく解析することによって Nekrasov 予想の解決に成功しました (中島・吉岡論文とは独立に Nekrasov-Okounkov も同予想を証明しています)。低エネルギー極限 Donaldson 不変量と高エネルギー極限 Seiberg-Witten 不変量が等価であるという Witten 予想の背景にあるのが Seiberg-Witten プレポテンシャルですから、上の結果は、 \mathbf{R}^4 上における Witten 予想に対する数学的定式化を与えたこととなります。このテーマについては中島・吉岡両氏による解説 *Lectures on instanton counting* (in: *Algebraic Structures and Moduli Spaces*, CRM Proc. Lecture Notes **38**, AMS, Providence R.I., 2004) があります。

以上の簡単な解説では必ずしも意をつくしていませんが、代数曲面上のベ

クトル束のモジュライ理論における吉岡康太氏の業績は独創的であるとともに深い内容を含み、代数学賞を受賞するにふさわしいものです。

坂内英一氏「代数的組合せ論の研究」

多重可移群，距離正則グラフ，堅いデザイン，アソシエーションスキーム，ヤコビ形式とコードの重さ枚举多項式，4つの重さをもったスピンモデル，フュージョン代数，重複がない置換表現の指標表，... 坂内氏の業績リストは組合せ論を中心に，多岐な分野にわたる歴大なものです。しかしこれらの研究すべてを貫く中心軸は，坂内氏自ら命名し精力的に研究を推進した「代数的組合せ論 algebraic combinatorics」であるといっているでしょう。

アソシエーションスキームは，統計学の分野ではすでに60年にわたって使われている概念です。しかし1970年代後半，Delsarteの理論に触発された坂内氏は，アソシエーションスキームの中でもPスキームとQスキームと呼ばれるものの研究・分類が特に重要であることに気付きました。この発見から生まれたのが伊藤達郎氏との共著 *Algebraic Combinatorics I, Association Schemes* (Benjamin, 1984) です。PスキームかつQスキームであるようなアソシエーションスキームに重点をおいて記述したはじめての単行本（教科書）として，本書は広くこの分野の研究者の支持を受け，それに伴って「代数的組合せ論」という用語も普及定着していったのです。

アソシエーションスキームとは，可移置換群がみたす性質を組合せ論的概念に公理化したもので，有限集合 X とある公理系を満足する X の2項関係 R_0, R_1, \dots, R_d からなっています。その公理の一つは

- (*) $i, j, k \in \{0, \dots, d\}$ を任意に与え， $(x, y) \in R_k$ とする。このとき $(x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j$ をみたす $z \in X$ の個数は， (x, y) に依存せず i, j, k だけで決まる数 p_{ij}^k である

というものです。アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0, \dots, d})$ の関係 R_i の隣接行列 ($(x, y) \in R_i, \notin R_i$ に応じて (x, y) 成分を1または0とおいて得られる行列) を A_i とします。 A_0, \dots, A_d が生成する $M_X(\mathbf{C})$ の部分代数 (Bose-Mesner 代数) \mathfrak{A} の基底 A_0, \dots, A_d に関する構造定数が $\{p_{ij}^k\}$ です。各関係 R_i が対称であるとき \mathfrak{A} は可換代数で，原始巾等元 E_0, \dots, E_d を基底に選ぶことができます。基底の変換行列 P を $A_i = \sum E_j P_{ji}$ で定義し， $Q = nP^{-1}$ とおきます。有限群 G の共役関係が定めるアソシエーションスキームでは P が G の指標表になっているので，一般の場合にも P, Q を \mathfrak{X} の指標表といいます。

Bose-Mesner 代数 \mathfrak{A} は Hadamard 積に関しても閉じています。 $n = |X|$ とおいて，基底 nE_0, \dots, nE_d が定める Hadamard 積に関する構造定数を $\{q_{ij}^k\}$

としましょう. 二つの $d+1$ 次正方行列 $B_1 = (p_{1,i}^j)$, $B_1^* = (q_{1,i}^j)$ を考えます. B_1 が 3 重対角行列である \mathfrak{X} を P スキーム, B_1^* が 3 重対角行列であるとき Q スキームと呼びます (P スキームや Q スキームでは直交多項式が付随して定まることが本質的であって, 坂内氏の研究でも直交多項式は随所に使われ重要な役割を果たします). Delsarte は, P スキーム, Q スキームにおいては, コード理論, デザイン理論を統一的に扱うことができることを指摘しました. これが示唆するのは, P スキーム \cdot Q スキームを中心とする代数的組合せ論が, 幅広い分野の諸問題に対して統一的なアプローチを可能とするのではないかということです. 坂内氏は実際このことを積極的に主張し, かつ自ら結果を出すことで, 代数的組合せ論が多くの分野に関係し豊富な研究対象をもつことを実証してきたのでした.

1990年代以降坂内氏が行なってきた研究のいくつかをあげます.

- (a) **Subschemes:** アソシエーションスキームにおける関係をグループ分けして新たな関係を作るとき, いつまたアソシエーションスキームになるかを論じました. ここで得られた条件は “Bannai-Muzichuk condition” と呼ばれています (J. Algebra **144** (1991)).
- (b) **Fusion algebras:** 数理論理学の共形場理論に付随するフュージョン代数とアソシエーションスキームとの関係を論じました. 類似しながらまったく異なった立場から研究されてきた対象を, はじめて統一的にとらえたものと評価されています (J Algebraic Combin. **2** (1993)).
- (c) **Spin models:** 絡み目不変量を与える Jones のスピンモデルとアソシエーションスキームとの関係は F. Jaeger が注目したものです. 坂内悦子氏との共著では, 絡み目における有向交点の 4 つの型に対応して 4 種類の重さをもつスピンモデルを研究しました (Pacific J. Math. **170** (1995)).
- (d) **Jacobi forms:** Broué-Enguehard (1972) の結果を 4 変数多項式環の場合に拡張しました. すなわち小関道夫氏との共著論文で, 4 変数多項式環への複素鏡映群作用の不変式環から, コード理論を通して Jacobi 形式が構成できることを示しました (Proc. Japan Acad. **72** (1996)). この論文以後, 坂内氏と整数論研究者との共同研究が増加します.
- (e) **Multiplicity-free representations:** 最初期からの研究テーマですが, 近年の仕事としては, 未解決問題だった $1_{GL(2n,q)}^{GL(n,q^2)}$ の明示的分解がありません (J. Algebra **265** (2003). 田中太初氏との共著). 斜交群の誘導表現の自己準同型環の指標表の決定も重要な仕事でしょう (川中氏, Song 氏との共著, J. Algebra **129** (1990)).

以上の例が示すとおり坂内氏は幅広い研究分野で顕著な業績をあげており，現在も球面充填の代数的組合せ論を中心に精力的な研究を続けています．また代数的組合せ論の世界的リーダーとしての二十年にわたる活躍は，多数の若手研究者に強い刺激と鼓舞とを与え，同分野が今日の隆盛を見る原動力となりました．こうした功績は，代数学賞受賞にまことにふさわしいものです．

(代数学賞委員会委員長 伊吹山知義 大阪大学大学院理学研究科)