# 図形に数を対応させて...

## —幾何などの問題に不変量と最小値原理を応用する—

北海道大学　　西 森　敏 之

はじめに

Part I. 幾何学と不変量

Part II. 奇妙な解法... 最小値原理

Part III. 付録... 練習問題

## はじめに

2006年12月23日（土），24日（日）の２日間に神奈川県三浦郡葉山町にある湘南国際村センターで行われた「湘南数学セミナー」と「現代数学入門市民講座」で話をさせていただきましたので,その報告をします。

「湘南数学セミナー」は，23日の午後と夕食後そして24日の午前の３コマからなる高校生を対象とする授業で，講義と演習を行うものです。全体のテーマは「現代数学の２つのアイデア... 不変量と最小値原理」として，１コマ目は「幾何学と不変量」，２コマ目は「奇妙な解法... 最小値原理」，３コマ目は「結び目の多項式不変量」という話をしました。いずれも「幾何学的な対象のある集合を考えて，そのおのおのの要素に何らかの方法で数を対応させる」ということがキー・ステップです。数学者たちにはお馴染みですが，高校生たちには初めて出会う考え方で数学の面白さを体験していただくという試みです。受講生にこちらから質問しながら50分程度の講義をして，そのあと受講生がそれぞれ演習問題を解くという形式で授業をすすめました。１コマ目と２コマ目の内容を本文で紹介します（３コマ目の内容は省略します)。今回はタイミ

ングが悪かったそうで受講生が少なかったのですが, その分丁寧な対応ができました。

「現代数学入門市民講座」のテーマは「算木... 中国古代の計算機」として, 満員のホールで話をさせていただきました。内容は数学通信 2006 年 5 月号で藤岡市での講演の報告で紹介した「算木による加減乗除, 1 変数高次方程式の解法」です。それは中学生向けの講演会でしたので, 今回は少し大人向けにしましたが, 本質的には同じ内容です（それでこの報告では内容の説明を省略します)。この市民講座はリピーターが多く, 地域の皆さんが毎年楽しみにしているとのことでした。

この楽しい機会をいただいたことと, 日本数学会の担当の川崎徹郎さんにずっと付き合っていただいたことに感謝いたします。

# Part I. 幾何学と不変量

Part I では, 数学の長い歴史の中で見つけられた, 不変量とよばれるものの考え方を, 実際に問題を解きながら, 解説する。

## §1. 不変量とは何か？

まず, 少し脳細胞のウオーミング・アップをする。

高校生の皆さんは, 三角形や四角形の合同ということはよく知っているので, それを少しひねって,「分割合同」ということを考える。

**定義**　平面上の 2 つの多角形 $P$ と $Q$ が **分割合同** とは, 多角形 $P$ をいくつかの直線で切って小片に分けてから, それらの小片を重ならないように辺で張り合わせてやって, 多角形 $Q$ が得られることをいう.

それでは次の問題を考えてみよう.

**問題 1a**　一辺が長さ 1 の正三角形 $P$ は, 一辺が長さ 1 の正方形 $Q$ と分割合同であるか？

＜ここで, 何人かの受講生に答えを聞いてみる。
全員が「分割合同でない」と答える（と想定している)。＞

<次に,「その答えの根拠は何ですか」と聞く。
何人かは「面積が違うから」と答える。>

<そこで,「それが不変量の極意です」といって本論に入る。>

**解答**　試してみなくても，すぐに答がわかる。答は「$P$ と $Q$ は分割合同ではない」。□

ここで大事なのは，なぜこれらの図形が分割合同でないと判断したかということである。その理由は，皆さんお気づきの通り「分割合同なら面積が変わらない」ということである。(このことを現代の幾何学者風に表現すると「面積は分割合同に関する不変量である」ということになる。) このことに気付いたひとは，すでに「不変量」の極意をマスターしているといえる。

問題 1a のような場合，すなわち，ふたつの図形がある不変量によって区別される場合は，実際に分割合同かどうかと切ったり貼ったりの試行錯誤をしないですむ。これが「不変量」の威力である。

しかし,「不変量」も万能というわけにはいかない。次の問題を考えてみよう。

**問題 1b**　一辺が長さ 1 の正三角形 $P$ は，同じ面積の正方形 $Q$ と分割合同であるか？

**解答**　答は「$P$ と $Q$ は分割合同である」。

実は,「2 つの多角形が分割合同であるためには，それらの面積が同じであることが必要十分である」ということが成り立つ。証明には論理的かつシステマティックに考えていく必要があるが，予備知識としては中学生程度の幾何学の知識があれば十分であるので，挑戦してみてほしい。□

不変量が考えられるような問題は，ここで考えた問題 1a, 問題 1b のように，逆方向の問題がセットになっている。不変量の議論が効くのはそのうちの一方だけであるが，不変量の快刀乱麻の切れ味はエキサイティングである。

## §2. 碁盤と碁石の問題

次の問題は, (チェス盤を碁盤に変えてあるが) ある年の数学オリンピックの問題である。

**問題 2**　碁盤上に石をいくつか格子点上に並べて，次の操作を考える。ある石 $A$ の縦または横に石 $B$ が並び，その次の格子点には石が無いとする。このとき，$A$ を持ち上げて $B$ を飛び越して空いている格子点に置き，$B$ を取り除く。（ただし 2 つ以上の石を飛び越すことはできないものとする。）

```
∗ ∗ ∗ ∗ ∗        ∗ ∗ ∗ ∗ ∗        ∗ ∗ ∗      ∗ ∗ ∗
∗ ○ ○ ・ ∗        ∗ ・ ○ ○ ∗        ∗ ・ ∗      ∗ ○ ∗
∗ ∗ ∗ ∗ ∗        ∗ ∗ ∗ ∗ ∗        ∗ ○ ∗      ∗ ○ ∗
                                  ∗ ○ ∗      ∗ ・ ∗
                                  ∗ ∗ ∗      ∗ ∗ ∗

    ⇓                ⇓               ⇓          ⇓

∗ ∗ ∗ ∗ ∗        ∗ ∗ ∗ ∗ ∗        ∗ ∗ ∗      ∗ ∗ ∗
∗ ・ ・ ○ ∗        ∗ ○ ・ ・ ∗        ∗ ○ ∗      ∗ ・ ∗
∗ ∗ ∗ ∗ ∗        ∗ ∗ ∗ ∗ ∗        ∗ ・ ∗      ∗ ・ ∗
                                  ∗ ・ ∗      ∗ ○ ∗
                                  ∗ ∗ ∗      ∗ ∗ ∗
```

（ただし，「○」は碁石がある場所，「・」は空いている場所，

「∗」には碁石があってもなくてもよい。）

さて（無限に大きな）碁盤上に $n^2$ 個の石を一辺 $n$ の正方形のかたちに並べる。上の操作をうまい手順で行って，最後に碁盤上に石が 1 個だけ残るようにできる $n$ はどのような自然数であるか。

**この問題を少し考えてみよう。**

＜ここで，受講生に碁石と紙の碁盤に配る＞

まず，$n = 1$ のときは既に 1 個しか石がないので，問題の条件をみたす。

**次に，$n = 2$ のときはどうか。**

＜ここで，受講生に実際に試してもらう。＞

＜全員がすぐにできる（はずである)。＞

**また，$n = 3$ のときはどうか。**

この場合には，うまい手順が見つからずに，操作を何回か繰り返したあとに，石がバラバラの状態になって先に進めなくなる。しかし，「色々試したけれども

最後に 1 個になるまでいけなかった」からといって，それではできないことの数学的な証明にはならない。

この問題を解くためには，ふたつの方向から問題を考える必要がある。ひとつは，とにかく試行錯誤によって問題を攻める方法で，もうひとつは，不変量を見つけてうまい手順が存在しないことを証明する方法である。

## §3. 試行錯誤による方法

まず，つぎのことを簡単に示しておく。

**定理 1**　自然数 $n$ が 3 で割りきれないとする。このとき，一辺 $n$ の正方形に石を並べたものは，うまい手順によって最後に石が 1 個になるまで操作を続けることができる。

このことを証明するために少し準備する。次のような手順がある。

**T-補題**　下図の (A) のようなT型の石の配置があると，3 回の操作によって (B) のようにできる：

$$
\begin{array}{ccc}
\bigcirc & \bigcirc & \cdot \\
* & \bigcirc & * \\
* & \bigcirc & * \\
 & (A) &
\end{array}
\quad => \quad
\begin{array}{ccc}
\bigcirc & \cdot & \cdot \\
* & \cdot & * \\
* & \cdot & * \\
 & (B) &
\end{array}
$$

**証明**　実際つぎのような手順で操作を行えばよい。まず,「上左」の碁石を「上中」の碁石の上を飛び越して「上右」に移し，上中」の碁石を取り去る。次に,「下中」の碁石を「中中」の碁石の上を飛び越して「上中」に移し,「中中」の碁石を取り去る。最後に,「上右」の碁石を「上中」の碁石の上を飛び越して「上左」に移し,「上中」の碁石を取り去る。証明おわり。□

**定理 1 の証明**　「一辺 $n+3$ の正方形」に石を並べたものは，うまい手順によって「一辺 $n$ の正方形」になるように操作を続けることができる。次のようにすればよい。

まず,「一辺 $n+3$ の正方形」を，左下に「一辺 $n$ の正方形」，右下に「$3\times n$ の長方形」，右上に「$n\times 3$ の長方形」，左上に「一辺 3 の正方形」の 4 つの

ブロックに分ける。次に，右下のブロックを下からT-補題を使って3個ずつ取り去る。さらに，右上のブロックを右からT-補題を使って3個ずつ取り去り，左上のブロックを上からT-補題を使って3個ずつ取り去る。このようにして，最後に左下の「一辺 $n$ の正方形」が残る。

従って，自然数 $n$ が3で割りきれないときは，$n=1$ かまたは $n=2$ の場合に帰着する。証明おわり。□

## §4. 不変量による方法

碁盤上の格子点に石をいくつか置いた状態は，石が乗っている格子点の集合のことであると考える。

$$
\begin{array}{cccccc}
3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & \cdot & \cdot & \bigcirc & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \bigcirc & \bigcirc & \cdot \\
0 & \cdot & \bigcirc & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3
\end{array}
\qquad \Longleftrightarrow \qquad G = \left\{ \begin{array}{ll} (0,0), & (1,1), \\ (2,1), & (1,2) \end{array} \right\}
$$

石の操作は，次の4つの操作 (R), (L), (U), (D) に言い替えることができる。この言い替えでは，操作をする前の状態を $G$ として，操作をした後の状態を $G'$ と書いている。

(R)（右飛び越し）$(m,n)$, $(m+1,n) \in G$ かつ $(m+2,n) \notin G$ とする。（これは，2つの格子点 $(m,n)$, $(m+1,n)$ 上に石があり，格子点 $(m+2,n)$ 上には石がないということ。）このとき，集合 $G$ から2つの元 $(m,n)$, $(m+1,n)$ を取り除き $(m+2,n)$ をつけ加えたものを，$G'$ とおく。

(L)（左飛び越し）$(m,n)$, $(m-1,n) \in G$ かつ $(m-2,n) \notin G$ とする。このとき，集合 $G$ から2つの元 $(m,n)$, $(m-1,n)$ を取り除き $(m-2,n)$ をつけ加えたものを，$G'$ とおく。

(U)（上飛び越し）$(m,n)$, $(m,n+1) \in G$ かつ $(m,n+2) \notin G$ とする。このとき，集合 $G$ から2つの元 $(m,n)$, $(m,n+1)$ を取り除き $(m,n+2)$ をつけ加えたものを，$G'$ とおく。

(D)（下飛び越し）$(m,n)$, $(m,n-1) \in G$ かつ $(m,n-2) \notin G$ とする。このとき，集合 $G$ から2つの元 $(m,n)$, $(m,n-1)$ を取り除き $(m,n-2)$ を

つけ加えたものを，$G'$ とおく。

さてここで，不変量としては次に定義するようなものを考えてみる。

**不変量の定義** 各々の石の置き方 $G$ に対して，ひとつの実数 $\Phi(G)$ を定める規則 $\Phi$ を考える。この規則 $\Phi$ が次の条件を満たすとき，$\Phi$ を**不変量** とよぶ：

もし $G$ から $G'$ が上の (R)，(L)，(U)，(D) のどれかのようにして得られるなら，$\Phi(G) = \Phi(G')$ が成り立つ。

この定義の $\Phi(G)$ は，石の操作をしてもその値は変わらない，すなわち，不変である。この性質が不変量という名の由来である。

このような $\Phi$ をつくる方法が問題の核心である。ここでは，各格子点 $(m,n)$ に適当に数 $x_{(m,n)}$ を置いていくことから始める。次に，ある石の配置 $G$ があったときに，石が乗っている格子点 $(m,n)$ の数 $x_{(m,n)}$ の総和を $\Phi(G)$ と定める。

もちろん，数 $x_{(m,n)}$ の置き方が問題であって，いつでも不変量になるわけではない。では，いつ $\Phi(G)$ が不変量になるだろうか？　そのための条件を書いてみると次のようになる。

**不変量になる条件**　$\Phi(G)$ が不変量になるための数 $x_{(m,n)}$ の置き方に対する必要十分条件は，次の 4 条件がすべての格子点 $(m,n)$ に対して成り立つことである：

$$
\begin{array}{lrcl}
(R) & x_{(m,n)} + x_{(m+1,n)} & = & x_{(m+2,n)} \\
(L) & x_{(m,n)} + x_{(m-1,n)} & = & x_{(m-2,n)} \\
(U) & x_{(m,n)} + x_{(m,n+1)} & = & x_{(m,n+2)} \\
(D) & x_{(m,n)} + x_{(m,n-1)} & = & x_{(m,n-2)}
\end{array}
$$

ここで，この条件から数 $x_{(m,n)}$ の置き方についてどんなことがいえるか少し調べてみる。2 つの式 (R) と (L) から次の式が得られる。

$$
\begin{array}{rcl}
x_{(m-1,n)} + x_{(m,n)} & = & x_{(m+1,n)} \\
x_{(m+1,n)} + x_{(m,n)} & = & x_{(m-1,n)}
\end{array}
$$

この 2 式を足した式から

$$
(:) \qquad x_{(m,n)} + x_{(m,n)} = 0
$$

が出てくる。すると $x_{(m,n)} = 0$ がすべての格子点 $(m,n)$ で成り立たないといけない。これでは「すべての石の配置 $G$ に対して $\Phi(G) = 0$ 」となって，$\Phi(G)$ は不変量であっても何の役にも立たない。

不変量を使うアイデアはここまできて，困ったことに挫折してしまった。

今までに負けたことがないスポーツ選手または棋士がいないように，新工夫のアイデアが失敗しなかった数学者もいない。失敗は日常茶飯事である。失敗にめげないで，プラス思考で失敗に対処することが重要だ。

## §5. 不変量の改良

それはさておき，何か上のアイデアをよみがえらせる方法はないか。

**式 $(\sharp)$ はどうしても成り立つわけだが，その式から $x_{(m,n)} = 0$ が出てこなければよいと考えたらどうか。**

現代の数学者なら誰でも,「ある数を 2 倍したら 0 になるが，その数自身は 0 でない」ということがおこる世界についてよく知っている。

それは，$\bar{0}$ と $\bar{1}$ という 2 つの元からなる集合（ふつう $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ とかく）を考えて，足し算を

$$\begin{aligned}\bar{0}+\bar{0} &= \bar{0}\\ \bar{0}+\bar{1} &= \bar{1}\\ \bar{1}+\bar{0} &= \bar{1}\\ \bar{1}+\bar{1} &= \bar{0}\end{aligned}$$

というふうに定義して得られる。この世界では，すなわち，数は $\bar{0}$ と $\bar{1}$ の丁度 2 つだけ存在するのである。ある数 $x$ を $p$ 倍するということは，$p$ 回 $x$ を足すということとする：

$$p \cdot x = x + x + \cdots + x \qquad (\text{ただし } p \text{ は自然数})$$

このとき，$2 \cdot \bar{0} = \bar{0}$ と $2 \cdot \bar{1} = \bar{0}$ がなりたつ。この世界では，$\bar{0}$ が 0 の役目をはたす。もちろん，$\bar{1} \neq \bar{0}$ であるので，困難を回避することが出来る。（さらに，実数のときと同じく,「この世界の数をいくつか足すときには，足し算の順序をどのように変えてもよい」ということもわかる。）

さて，各格子点に置く数 $x_{(m,n)}$ を，この 2 つの数 $\bar{0}, \bar{1}$ のどちらかであるということにしよう。

条件 $(R)$, $(L)$, $(U)$, $(D)$ をみたすような数 $x_{(m,n)}$ の置き方を求めよう。まず，4 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ のそれぞれに，$\overline{1}$, $\overline{0}$, $\overline{0}$, $\overline{0}$ をおいてみる。このとき，$(R)$ が成り立つようにしたければ

$$\begin{aligned}
x_{(2,0)} &= x_{(0,0)} + x_{(1,0)} = \overline{1} + \overline{0} = \overline{1} \\
x_{(3,0)} &= x_{(1,0)} + x_{(2,0)} = \overline{0} + \overline{1} = \overline{1} \\
x_{(4,0)} &= x_{(2,0)} + x_{(3,0)} = \overline{1} + \overline{1} = \overline{0} \\
x_{(5,0)} &= x_{(3,0)} + x_{(4,0)} = \overline{1} + \overline{0} = \overline{1} \\
x_{(6,0)} &= x_{(4,0)} + x_{(5,0)} = \overline{0} + \overline{1} = \overline{1} \\
x_{(7,0)} &= x_{(5,0)} + x_{(6,0)} = \overline{1} + \overline{1} = \overline{0} \\
x_{(8,0)} &= \cdots
\end{aligned}$$

のようにして，$x$ 軸上の点に対して，右側に順に数 $x_{(m,n)}$ が定まっていく。よく見ると，$\overline{1}$, $\overline{1}$, $\overline{0}$ が繰り返されている。また，$(L)$ が成り立つようにすると，左側にも順に数 $x_{(m,n)}$ が定まっていく。

次に，$x_{(0,0)} = \overline{1}$, $x_{(0,1)} = \overline{0}$ から出発して，$(U)$, $(D)$ が成り立つようにすると，$y$ 軸上の点に対して数 $x_{(m,n)}$ が定まっていく。同様に，直線 $x = 1$ 上の点でも定まっていく。

最後に，$y$ 軸上の点と直線 $x = 1$ 上の点から出発して左右に値を決めていけば，全平面で，数 $x_{(m,n)}$ が定まり，次の図のようになる。

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

(ただし，図にかくときは，わずらわしいので，$\overline{0}$, $\overline{1}$ の代わりに $0, 1$ とかくことにする。また，太字は最初の 4 点である。)

上の数の置き方は条件 $(R)$, $(L)$, $(U)$, $(D)$ をみたすので，この数の置き方から得られる $\Phi(G)$ は不変量になる。

最初に 4 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ のそれぞれに，$\bar{1}$ または $\bar{0}$ を独立に選んで良いので，$2^4(=16)$ 通りの不変量が得られる。その内のひとつはすべての格子点上で $\bar{0}$ になっていて役にたたないが，残りの 15 個は立派な不変量になっている。

不変量が得られたので，問題 2 に戻ろう。

**定理 2**　「一辺が 3 の倍数である正方形に石を並べたものをどういう手順で操作をおこなっても，最後に石が 1 個だけになるまでは続けられない」

**証明**　次の三つの数の置き方 $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ から定まる不変量 $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ を使って証明する。

$$\varphi_1 : \quad \begin{array}{cccccccc} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}, \qquad \varphi_2 : \quad \begin{array}{cccccccc} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$$\varphi_3 : \quad \begin{array}{cccccccc} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

ここで,「数の置き方 $\varphi_1$ を右に 1 だけ平行移動すると $\varphi_2$ になり，さらに 1 だけ平行移動すると $\varphi_3$ になる」ことに注意せよ。このことから，平面上のどこでもいいから石を一個おいた配置を $G_1$ とすると，$\Phi_1(G_1)$, $\Phi_2(G_1)$, $\Phi_3(G_1)$ の値は，$\bar{0}$ が 1 個で，$\bar{1}$ が 2 個になることがわかる。

$n$ が 3 で割り切れるときに，一辺 $n$ の正方形に石を並べ石の配置を $G$ とする。このとき，$G$ は横に連続して並んだ 3 つの石の組にわけることができる

ので，

$$\Phi_1(G) = \Phi_2(G) = \Phi_3(G) = \overline{0}$$

が成り立つ。

従って，$G$ からどんな手順で石の操作を行っても，石が 1 個になるまで操作が続けられない。□

以上で証明した定理 1 と定理 2 を合わせれば，問題 2 の解答が得られる。すなわち，$n$ が 3 で割り切れない自然数であるとき，問題 2 の条件をみたすということになる。

## §6. もう一つの問題

もうひとつ問題を考えてみよう。(多分，この問題については説明する時間がないと思われるが，この問題もおもしろい。)

**問題 3**　$xy$ 平面上で，石をいくつか格子点に並べたものに対して，問題 2 と同じ操作を考える。石を $x$ 軸以下にいくつか並べて石の操作を行い，最後に $y$ 軸上の点 $(0, n)$ にだけに石が残るようにする。

さて，このようなことが可能な $n$ はどのような自然数であるか。

**解答**　答は「$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき可能であり，$n > 4$ のときは不可能である」となる。

「$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき可能という部分は，実際にそうなるような石の配置をつくればよい。例えば，$n = 1,\ 2$ のときは次のように置けばよい。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | · | · | · | · | · |
| 1 | · | · | · | · | · |
| 0 | · | · | ○ | · | · |
| $-1$ | · | · | ○ | · | · |
| $-2$ | · | · | · | · | · |
| | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |

( $n$ = 1 )

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | · | · | · | · | · | · | · |
| 1 | · | · | · | · | · | · | · |
| 0 | · | · | ○ | ○ | ○ | · | · |
| $-1$ | · | · | ○ | · | · | · | · |
| $-2$ | · | · | · | · | · | · | · |
| | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

( $n$ = 2 )

$n = 3, 4$ のときは，だんだん難しくなっていくが，解答は練習問題として残す。

「$n>4$ のときは不可能」という部分は不変量のアイデアが必要である。問題 2 でつくった不変量は，問題 3 の役には立たない。そこで，新しい不変量を探す必要がある。

まず，2 次方程式 $x^2+x-1=0$ の正数解を $\alpha$ とする。このとき，

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1, \qquad 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots=\frac{1}{1-\alpha}$$

であり，

$$\alpha^2+\alpha-1=0, \qquad \alpha^2+\alpha=1, \qquad \alpha^2=1-\alpha$$

が成り立つ。

議論を簡単にするため，$n=5$ に対して不可能であることを証明しよう。

平面上の格子点 $(p,q)$ に対して，$x_{(p,q)}=\alpha^{|p|+|q-5|}$ とおき，石の置き方 $G$ に対して，石が置いてある格子点に対する正数 $x_{(m,n)}$ の総和を $\Psi(G)$ とかく。

このとき『もし $G$ から $G'$ が 4 つの石の操作 (R)，(L)，(U)，(D) のどれかのようにして得られるなら，$\Psi(G')\leq\Psi(G)$ が成り立つ』ということが成り立つ（このことを証明せよ）。

従って，今度つくった $\Psi(G)$ は本当の不変量ではないが，それでも上の性質は役に立つ。

点 $(0,5)$ だけに石を置いた状態を $G_0$ とすると

$$\Psi(G_0)=x_{(0,5)}=\alpha^{|0|+|5-5|}=\alpha^0=1$$

である。

$x$ 軸以下の全ての格子点に石を置いた状態を $G_\infty$ とする。このとき，$\Psi(G_\infty)$ を計算してみよう。まず，$x$ 軸上だけに石を置いた状態を $G_{y=0}$ とおくとき，

その総和 $\Psi(G_{y=0})$ を考えてみると，

$$\begin{aligned}
\Psi(G_{y=0}) &= \alpha^{|0|+|0-5|} + (\alpha^{|1|+|0-5|} + \alpha^{|2|+|0-5|} + \alpha^{|3|+|0-5|} + \cdots) \\
&\quad + (\alpha^{|-1|+|0-5|} + \alpha^{|-2|+|0-5|} + \alpha^{|-3|+|0-5|} + \cdots) \\
&= \alpha^5 + 2(\alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^8 + \cdots) \\
&= \alpha^5 + 2\alpha^6(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots) \\
&= \alpha^5 + 2\alpha^6 \ \frac{1}{1-\alpha} \\
&= \alpha^5 + 2\alpha^6 \ \alpha^{-2} \\
&= \alpha^5 + 2\alpha^4
\end{aligned}$$

となる。直線 $y=-1$ 上の格子点に与えられた数は，すぐ上の点に与えられた数の $\alpha$ 倍なので，直線 $y=-1$ 上での総和は，$\alpha(\alpha^5+2\alpha^4)$ となる。以下同様にして，直線 $y=-2$ 上での総和は，$\alpha^2(\alpha^5+2\alpha^4)$ となり，$x$ 軸以下での総和 $\Psi(G_\infty)$ は

$$\begin{aligned}
\Psi(G_\infty) &= \Psi(G_{y=0})(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots) \\
&= (\alpha^5 + 2\alpha^4) \ \frac{1}{1-\alpha} \\
&= (\alpha^5 + 2\alpha^4) \ \alpha^{-2} \\
&= \alpha^3 + 2\alpha^2 \\
&= (\alpha+2)(-\alpha+1) \\
&= -\alpha^2 - \alpha + 2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

となる。

さて「$x$ 軸以下のいくつかの格子点に石を置いた状態を $G$ とし，石の操作を繰り返して最後に，$G_0$ になった」と仮定してみる。このとき，途中の状態を書き上げて

$$G \to G_1 \to G_2 \to \cdots \to G_k = G_0$$

とすると

$$1 = \Psi(G_\infty) > \Psi(G) \geq \Psi(G_1) \geq \Psi(G_2) \geq \cdots \geq \Psi(G_k) = \Psi(G_0) = 1$$

となり，矛盾が起こる。□

以上で,「幾何学と不変量」という話は終わる。

# Part II. 奇妙な解法… 最小値原理

Part II では，最小値原理（または極値原理）の話である。ここで取りあげる「最小値原理」は，かなり応用範囲の広い考え方で，フェルマーの定理で有名なフェルマーが得意としていた降下型帰納法ともよべる証明法や，現代物理学でよく使われる変分原理などを含む。

変分原理の一例を挙げると,「光は最短時間の経路を進む」という原理があり，この原理で，鏡で反射するときの入射角と反射角が等しいことや，光が空気中から水中に進むときの屈折率が説明できる。

## §7. 最小値原理とは

問題を解くための数学的手法としての最小値原理の方法を説明する。この方法は４つのステップからなるが，初めて聞くと，何のことやら分からない，いい加減な方法と思うかも知れない。しかし，この方法はある種の問題には恐るべき威力を発揮する。「奇妙な解法」という題をつけた理由である。

**最小値原理の方法**

**＜ステップ１＞**　与えられた問題について,「答の候補者たち」の集合 $\mathcal{A}$ を考える。

**＜ステップ２＞**　この集合 $\mathcal{A}$ の各々の要素 $a$ に何らかの方法で数 $f(a)$ を対応させる。

$$A = \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ \vdots \end{array} \right\} \quad \begin{array}{c} \mapsto \\ \mapsto \\ \mapsto \\ \vdots \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} f(a) = 5 \\ f(b) = 3 \\ f(c) = 1 \\ \vdots \end{array} \right\} = \text{数}$$

**＜ステップ３＞**　$f(a)$ が最小になっている $a$ を考える。

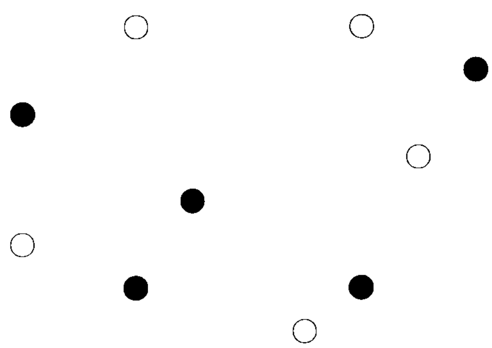
**＜ステップ４＞**　もし運がよければ，$f(a)$ が最小になっている $a$ が問題の答であることが分かる。

説明を読めば，この方法は，さらに運頼みの少しいいかげんな方法に見えるかも知れないが，実に有効なのである。しかし，実際に奇妙なことは事実で，なぜこの方法で問題が解けるのか，問題が解けた後でも良く分からないことがある。

## §8. 農場と井戸の問題

では，幾何学の問題を例にとって，最小値原理の方法を試してみよう。

**問題 4**　平面上に $n$ 個の点が 2 組あり，一方の組の点を農場，他方の組の点を井戸と呼ぶことにする。これらの $2n$ 個の点のうち，どの 3 点も一直線上にはないものとする。さて，各々の農場にひとつずつ井戸を選んで，まっすぐな道で結びたいのであるが，どの 2 つの道も交わらないようにできるか？



**解答**　最小値の原理の方法に従って，問題 4 を考えよう。§1 で説明した各ステップを順にたどってみる。

**＜ステップ 1＞**

**Q.**「答の候補者の集合」として何を考えればよいか？

**A.** 各々の農場にひとつずつ井戸を選ぶすべてのやり方の集合を考えて，$\mathcal{A}$ とおこう。答があるとすれば，この集合 $\mathcal{A}$ のなかに必ずあるはずである。

＜ここで，受講生の誰かに「$\mathcal{A}$ の要素はいくつあるか？」と聞く。＞

＜「集合 $\mathcal{A}$ の要素は $n!$ 個ある（これは順列の数）」という答えが返ってくる（はずである）。＞

<ステップ2>

**Q.** 各々の農場にひとつずつ井戸を選ぶやり方をひとつきめて，その選び方を $a$ とよぶとき,「数 $f(a)$ 」として何を考えればよいか?

**A.** とりあえず，農場と対応する井戸を結ぶ $n$ 本の道の長さの総和を考えよう。

<ステップ3>

**Q.** 数 $f(a)$ （道の長さの総和のこと）が最も小さくなる井戸の選び方が存在するか?

**A.** 井戸の選び方はちょうど $n!$ 種類だけなので，数 $f(a)$ たちは有限個だから最小値は確かに存在する。

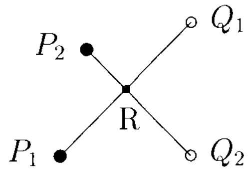
<ステップ4>

**Q.** 道の長さの総和が最も小さくなる井戸の選び方は問題4の条件を満たすか?

**A.** そのような選び方は条件を満たす。従って，問題4の答えは「Yes」。

**このことを背理法で証明する。**

まず，道の長さの総和が最も小さくなる井戸の選び方をとったが，問題1の答ではなかったと仮定する。このとき，ある農場 $P_1$ と対応する井戸 $Q_1$ およびもうひとつの農場 $P_2$ と井戸 $Q_2$ を結ぶ道が交わっていることになる。




線分 $P_1Q_1$ と線分 $P_2Q_2$ の交点を $R$ とすると，三角形の2辺の和は残りの一辺より大きいので，

$$\begin{aligned} P_1Q_1 + P_2Q_2 &= P_1R + RQ_1 + P_2R + RQ_2 \\ &= P_1R + RQ_2 + P_2R + RQ_1 \\ &> P_1Q_2 + P_2Q_1 \end{aligned}$$

となる。したがって，2つの農場 $P_1$ と $P_2$ が互いに井戸を取り替えれば，道の長さの総和は小さくなる。

ところが，もともとの井戸の選び方は道の長さの総和が最小になるようにとってあったはずなので，これは矛盾である。したがって，問題1.1の答えではなかったと仮定したことが間違っていたのである。これで，道の長さの総和が最も小さくなる井戸の選び方が問題1の条件を満たすことが証明された。□

## §9. 平面上の点の問題

もうひとつ幾何学の問題を考えてみよう。

**問題 5** 平面上に 有限個の点があり，どの 3 点も一直線上にはなく，面積が 1 以下の三角形をつくるものとする。このとき，面積が 4 以下のある三角形に，すべての点が含まれることを証明せよ。

**解答** この問題に対しては，最小値の原理の方法を少し一般化して応用する。

**＜ステップ1＞**

**Q.** 「答の候補者の集合」として何を考えればよいか？

**A.** いまの場合，平面上のすべての三角形は無限個あるので「答の候補者」としてはふさわしくない。そこで，与えられた点の中から3点を選んでできる三角形の集合を $\mathcal{A}$ として考える。これらの三角形はそのまま答になる可能性はないが，自然に考えつくものである。

**＜ステップ2＞**

**Q.** では，$\mathcal{A}$ の要素である三角形にどういう数が考えられるか？

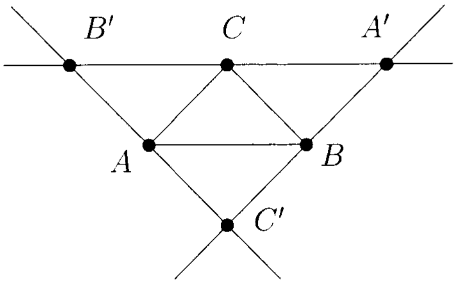
**A.** とりあえず，三角形の面積を考えてみよう。

**＜ステップ3＞**

今回は最初に与えられた点がある範囲におさまるということを示したいので， $\mathcal{A}$ の要素である三角形のなかで面積が最小のものより最大のものが役に立ちそうである。 面積が最大のものを $\triangle ABC$ とする。

**＜ステップ4＞**

頂点 $A$, $B$, $C$ を通って，それぞれ辺 $BC$, $CA$, $AB$ に平行な直線をひくと，大きな三角形 $\triangle A'B'C'$ が得られる。




このとき $\triangle A'B'C'$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の 4 倍なので，4 以下になる。従って，全ての点が $\triangle A'B'C'$ の中に入っていればよい。このことを背理法で証明する。

「最初に与えられた点の中に $\triangle A'B'C'$ に入っていない点 $P$ がある」と仮定してみよう。このことから矛盾が起これぱよい。

この仮定から

(a)　点 $P$ は辺 $B'C'$ に関して $\triangle A'B'C'$ の反対側にある
(b)　点 $P$ は辺 $C'A'$ に関して $\triangle A'B'C'$ の反対側にある
(c)　点 $P$ は辺 $A'B'$ に関して $\triangle A'B'C'$ の反対側にある

のどれかが起こることがいえる。

(a) の場合を考えてみよう。このとき，$\triangle PBC$ と $\triangle ABC$ を較べてみると，底辺が同じだが，高さは，$\triangle PBC$ のほうが高くなっている。従って，$\triangle PBC$ の面積は $\triangle ABC$ の面積よりも大きくなる。ところが，$\triangle ABC$ は $\mathcal{A}$ の要素である三角形のなかで面積が最大のものであったので，これは矛盾である。

(b) の場合も (c) の場合も同様に矛盾がでる。従って，「最初に与えられたはすべて $\triangle A'B'C'$ に入っいる」ということになって，証明が終わる。□

## §11.　シルベスターの問題

最後に，シルベスター（1814-1897）が 1893 年に出した問題を考える。この問題は 40 年後の 1933 年になって T. ガレという人が非常に込み入った議論をして解いた。ところが，1948 年になって L. M. ケリーという人が最小値の原理を使って数行の解を与えた。

**問題 6（シルベスターの問題）**　平面上に有限個の点があり，その内の 2 点を通る直線は少なくとももう一つの点を通るとする。このとき，すべての点が一直線上にあることを証明せよ。

**解答**　背理法で証明する。「すべての点が一直線上にはない」と仮定する。

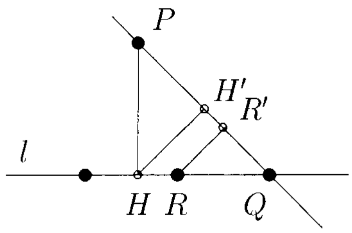
**<ステップ 1>**

集合 $\mathcal{A}$ として，2 点を通る直線 $l$ とその上にない点 $P$ の組 $(l,\ P)$ 全体の集合を考える。

**<ステップ 2，3>**集合 $\mathcal{A}$ の要素 $(l,\ P)$ であって，点 $P$ と直線 $l$ の距離が最小のものが存在する。

**<ステップ 4>**

点 $P$ から直線 $l$ に垂線をおろし，その足を $H$ とする。直線 $l$ 上には，最初に与えられた点が 3 点以上存在するので，点 $H$ から見て同じ側に 2 点 $Q,\ R$ があるとしてよい。さらに，$QH > RH$ としてよい。




上図のように，点 $H$ と点 $R$ から直線 $l$ に垂線をおろし，その足をそれぞれ $H'$ と $R'$ とする。このとき，

$$PH > HH' \geq RR'$$

であるので，点 $R$ と直線 $PQ$ の距離 $RR'$ が点 $P$ と直線 $l$ の距離 $PH$ よりも小さい。ところが，直線 $PQ$ と点 $R$ の組 $(PQ,\ R)$ は集合 $\mathcal{A}$ の要素であるので，要素 $(l,\ P)$ の取り方に矛盾している。

従って，「すべての点が一直線上にある」ことが示された。□

最小値原理は，数学の長い歴史の中で，数え切れない人々のの努力によって，得られたものである。最小値原理は適用できる問題を選ぶ。しかし，最小値原

理で解ける解ける問題は重要な問題であることが多い。いつかそのような問題に出会うことを期待したい。

# Part III. 付録... 練習問題

＜次の２題は「不変量」の練習問題である。＞

**練習問題 1** 黒板上に，数 0 と 1 がいくつか書いてある。いま，次の操作（♯）を考える。

（♯）2 つの数を自由に選んで消し，同じ数の場合は 0 を書き，
違う数の場合は 1 を書く。

操作（♯）を次々に行うと最後に黒板上には数字がひとつ残る。「この残った数字は操作（♯）のやり方によらないで最初の状態で決まる」ことを証明せよ。

**練習問題 2** 3 行 3 列に数字が

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}$$

の 2 つの例のように並んでいるとする。いま，次の操作（♯）を考える。

（♯）縦または横に隣り合った 2 つの数を選び，同じ整数を加える。

上の図の左のものから，操作（♯）を次々に行って，右のものにできるか？

＜次の２題は「最小値原理」の練習問題である。＞

**練習問題 3** 凸多面体には，2 つの面で同じ数の辺をもつものが，少なくとも一組は存在することを証明せよ。

**練習問題 4** ある立体があって，どの平面でこの立体を切っても切り口が円になっているとする。このとき，この立体が球であることを証明せよ。