書　　評

申正善・内藤敏機著「線形微分方程式序説」（牧野書店, ２００７年）

古用哲夫（島根大学総合理工学部）

常微分方程式に関する書物は数多く出版されているが, タイトルからも窺われるように, 本書は常微分方程式全般を扱うのではなく線形常微分方程式に関する基礎的な部分の解説に特化したユニークな好著である．また, 線形常微分方程式に関する理論を展開する際の常とう手段である行列のジョルダン標準形の代わりに行列のスペクトル理論を駆使している点でも本書は極めてユニークである．本書は, 第１巻＜基礎理論＞と第２巻＜差分方程式による方法＞の２部からなっており, 第１章から第４章までと付録の第１巻は古典的な内容, 第５章から第１０章の第２巻は著者達によって開発された新たな手法によって得られた結果で構成されている．その意味で本書は, 教科書と専門書の二つの性格を帯びていると言えよう．本書の紹介に当たって, 専門書の性格を帯びた第２巻が未刊であることから, 教科書の性格を帯びた２２８ページからなる第１巻の内容の紹介を大半とせざるを得ず, 従って紹介のための特別な準備は必要としない．以下では, 本書の内容の概略を紹介する．

第１章＜ベクトル値関数＞は３節からなり, 第２章以下で常微分方程式に関する理論を展開するために必要な基本的事項の説明に当てられている．まず第１節＜準備＞では, ２項定理, 多項式の素因数分解の一意性, 有理式の部分分数分解, 及び線形空間と線形写像について述べられている．次に第２節＜ベクトルと行列のノルム＞では, ベクトル・行列のノルム, 及び有限次元空間におけるノルムの同値性について解説されている．最後の第３節＜ベクトル値関数＞では, ベクトル値関数の微分・積分, 連続なベクトル値関数に関する有限増分の定理, 及びベクトル値関数列の一様収束性等について準備されている．第１章は僅か２８ページからなっているが, その中に数多くの重要事項が実に手際よく盛り込まれている．

第２章＜微分方程式の基礎定理＞は５節からなり, 線形常微分方程式に関する基本的事項について解説されている．まず第１節＜微分方程式とその解＞では, 初期条件, 初期値問題, 及び解の概念等について纏められている．次に第２節＜解の存在と一意性＞では, 解の存在と一意性がピカールの逐次近似法を用いて証明されると共に, 縮小写像の原理についても言及されている．更に第３節＜解の延長＞では, 解の延長に関する基本定理が証明されている．また第４

節＜比較定理と積分不等式＞では, 比較定理と Gronwall の不等式の間の関係について明快な解説が行われている．最後に第５節＜比較定理の応用＞では, 前節で得られた結果が解の一意性, 解の大域的存在性, 及び解の初期値・摂動に関する連続的依存性に応用されている．

第３章＜行列のスペクトル分解定理＞は６節からなり, 線形微分方程式及び線形差分方程式（第２巻）の理論を展開する際に必要な基本的事項, 特に, 線形空間 $\mathbb{C}^n$ の一般固有空間による直和分解及び行列のスペクトル分解定理について述べられている．まず第１節＜直和と射影＞では, 線形空間に関する基本的事項として, 線形空間の直和分解と射影分解, 直和空間, 次元定理, 直交補空間, 射影定理等について解説されている．次に第２節＜一般固有空間＞では, 正方行列の固有値と固有多項式の性質, ハミルトン・ケーリーの定理, 線形空間 $\mathbb{C}^n$ の一般固有空間による直和分解, 分解射影族等について纏められている．更に第３節＜最小多項式＞では, 最小多項式の概念及びその性質について述べると共に, 幾つかの具体例が示されている．第３章の中核をなす第４節＜スペクトル分解定理と $(\lambda E - A)^{-1}$ の表現＞では, 正方行列 A の表現が $\mathbb{C}^n$ の一般固有空間による直和分解に基づいてスペクトル分解定理として与えられると共に, $(\lambda E - A)^{-1}$ の表現が部分分数展開によって与えられている．また第５節＜行列のベキ級数＞では, 正方行列のベキ級数を定義して, 正方行列のスペクトル半径, 行列のベキ級数の和の表現, 及び一般スペクトル写像定理等について解説されている．最後に第６節＜行列の指数と対数＞では, 前節の結果を用いて正方行列の指数関数及び対数関数を定義すると共に, それらの表現としてのスペクトル表現定理について述べられている．

第１巻の最終章である第４章は６節からなり, 本書で主に扱われる定数係数線形常微分方程式及び周期的線形常微分方程式に関する基礎的な結果が詳しく述べられている．まず第１節＜線形微分方程式の一般論＞では, 線形微分方程式の解の一般的な性質である同次線形微分方程式の解空間, 解の基本行列, 解作用素の性質, 随伴方程式の解の性質, 及び非同次線形微分方程式に関する定数変化法の公式等について纏められている．次に第２節＜定数係数線形微分方程式＞では, 同次定数係数線形微分方程式の解の表現, 基本行列に関する極限公式, 解の漸近的挙動, 非同次定数係数線形微分方程式に対するグリーン関数, 及び解の有界性等について解説されている．次いで第３節＜線形微分方程式と特性量＞では, 線形微分方程式に対してリヤプノフ数を含む幾つかの特性量を導入し, それらの間の関係が示されている．更に第４節＜周期線形微分方程式＞では, 周期的線形常微分方程式の解作用素の性質, 解の表現としてのフロケの定理, 及び特性指数・特性乗数の概念とその性質について述べられている．ま

た第５節＜周期解の存在＞では, 同次周期的線形常微分方程式が周期解をもつための必要十分条件, 及び非同次周期的線形常微分方程式の周期解の存在と一意性について纏められている．最後に第６節＜単独高階線形微分方程式＞では, 単独高階線形常微分方程式を前節までの線形微分方程式系の特別な場合として論じると共に, ラグランジュの恒等式及びグリーンの公式に言及されている．

第１巻の巻末には付録が２０ページを割いて補足されており, ディニーの微分, 凸関数, 有限増分定理の微分形, アスコリ・アルツェラの定理, 微分方程式の解の存在, 延長不能な解の存在, １径数の連続半群等について詳しい解説がなされている．付録の性格上, その内容は本文の補足的事項であるが, 最初に取り上げられているディニーの微分に関する部分は特筆に値すると思われる。内容的には, 既知の事実について書かれているのではあるが、５ページを割いてディニーの微分について凸関数との関連まで含めて纏められている．ディニーの微分についてこのように纏まった形で記述された邦書は数少ないだけにユニークな解説となっている．

教科書的性格を帯びている第１巻では, 各章に適切な数の説問がなされていると共に, 巻末にはそれらの問に対する略解, 及び索引が準備されており, 読者に対する配慮が行き届いている．

刊行予定の第２巻については予定されている章名だけを記すことにすると, 第５章＜ベルヌーイ数とスターリング数＞, 第６章＜離散的な線形差分方程式＞, 第７章＜離散的な定数係数線形差分方程式＞, 第８章＜行列の指数に関する変換公式＞, 第９章＜周期外力をもつ定数係数線形微分方程式＞, 及び第１０章＜非同次周期線形微分方程式＞となっている．最初にも触れたように, 未刊の第２巻には著者達独自の手法を用いて展開されるオリジナルで豊富な専門的結果が盛り込まれる予定である．

次に, 本書の著者達が想定しているであろう読者層について述べる．本書は第２巻が専門書の性格を帯びているとは言え, 読者には高度な数学的予備知識は求められておらず, 微積分・線形代数, 常微分方程式の求積法, 及び複素関数論の初歩が理解出来ていれば十分である．また, 第１章から読み進めて行けば初学者であっても十分に理解出来るように工夫されている．従って, 微分方程式・差分方程式等の研究者から理工系の大学院生・学部学生までの幅広い読者層を対象とした好著であり, 未刊の第２巻の刊行が切に待たれるところである．

最後に, 本書のまえがきは「自然界を解明する道具としての数学はまだまだ未熟なのか? と思いつつ...」という一文で締め括られているが, 本書を通じて, 微分方程式や差分方程式に関心をもつ人が増えると共に, 自然界を解明する道具としての数学の研究が一層進展することを楽しみにしている．