第13回おもしろ数学教室
正多面体の中に正多面体：複合正多面体

川﨑徹郎

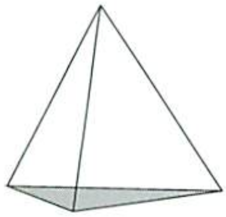
正 12 面体という図形を聞いたことがあると思います。それはこのような形です。各面は正 5 角形です。

その各面の正 5 角形を 5 角星形で置き換えてみましょう。すると、そこには 60 本の線からなる複雑な図形ができます。しかし、よく見ると 5 個の立方体の辺の作る図形になっていることがわかるのです。本当でしょうか。なぜでしょうか。よく調べてみましょう。

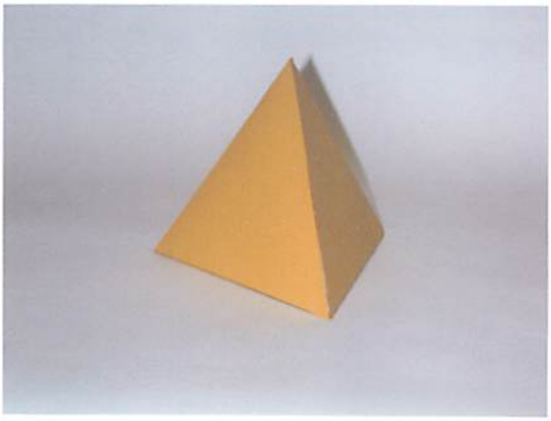
1　プラトンの正多面体

正多面体は 5 種類しかありません。まず、それらを見てみましょう。

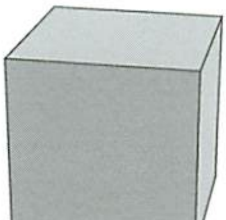
- **正 4 面体**　正 3 角形を底面とする 3 角錐を考えましょう。その高さを調整して、側面をすべて正 3 角形とすることができます。



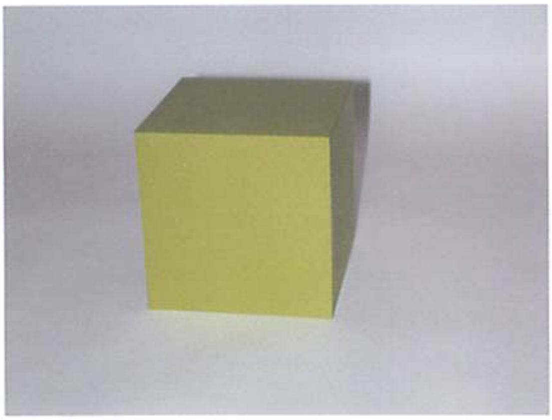
すべての面は正 3 角形で、各頂点には 3 つの正 3 角形が集まります。



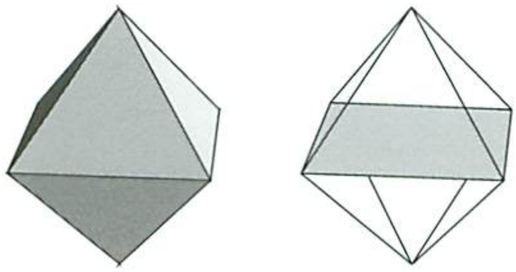
- **立方体**　断面が正方形の柱を考えます。正しい高さのところで切ると、側面を正方形にすることができます。



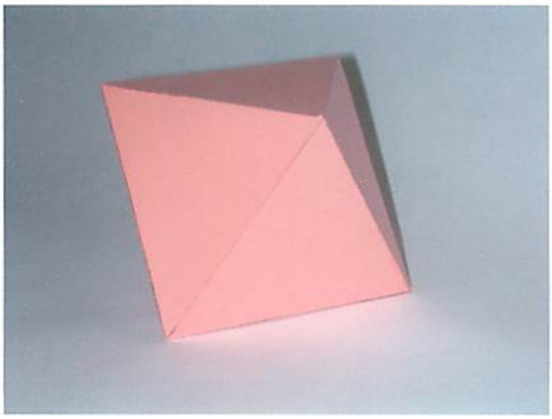
すべての面は正方形で、各頂点には 3 つの正方形が集まります。



- **正 8 面体**　正方形を底面とする 4 角錐（ピラミッド形です）を考えましょう。その高さを調整して、側面をすべて正 3 角形とすることができます。それを正方形の上下につけます。



すべての面は正 3 角形で、各頂点には 4 つの正 3 角形が集まります。



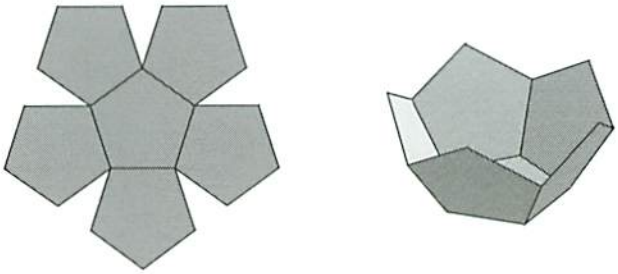
- **正 20 面体**　断面が正 10 角形の角柱を考えます。その上下の底面の頂点を 1 つおきに取り、上底が正 5 角形、下底も正 5 角形で、上下の頂

点が互い違いとなるようにできます。さらに、高さを調整して、側面を10 個の正 3 角形にすることができます。

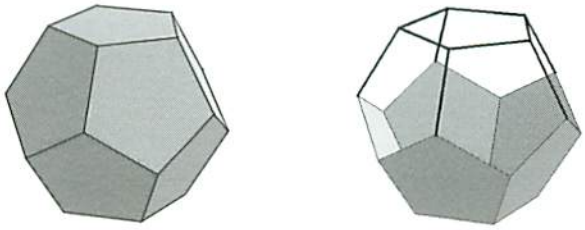
さらに、その上下に 5 角錐をつけます。高さを調整して側面をすべて正 3 角形とすることができます。

すべての面は正 3 角形で、各頂点には 5 つの正 3 角形が集まります。

- **正 12 面体**　5 角形のまわりに 5 角形をつけた図形を展開図とする、皿状の容器を考えます。



同じものをもう１つ作り、ふたとしてかぶせます。



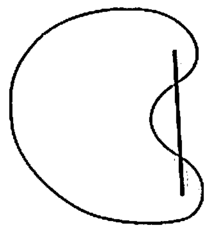
すべての面は正５角形で、各頂点には３つの正５角形が集まります。

以上５つの正多面体を**プラトンの正多面体**といいます。古代ギリシャの哲学者のプラトンは正多面体はこの５つに限ると知っていました。そして、彼の考える宇宙の基本的構成物（火、土、水、空気、宇宙全体）とこれらの正多面体を結びつけて考えました。

これから、正多面体は５種類に限ることを証明するのですが、そのためには、正多面体の定義をはっきりさせる必要があります。この５種類に共通に成り立つ性質を見つけ出し、その性質をもつものが他にないことを示すことになります。

定義（正多面体） 凸多面体で、各面がすべて等しい正多角形で、各頂点を囲む正多角形の枚数がすべて等しいものを**正多面体**といいます。

空間の中の図形が**凸**であるとは、その任意の 2 点を結んだ線分がその図形に属するときです。



凸でない図形

別のいい方をすると、凹んだところがないということで、たとえば、その図形の表面上の任意の 1 点に対し、その点で机の表面（平面）に接するように、置くことができるということになります。プラトンの正多面体はすべて凸です。

ここで、上の定義を満たす正多面体が与えられたとします。各面はすべて等しい正多角形ですから、ある数 p が定まって、すべての面が正 p 角形になります。また、どの頂点でも同じ枚数の面が集まるのですから、ある数 q が定まって、各頂点を q 枚の正多角形がで囲んでいることになります。このような正多面体を $\{p,q\}$ と表しましょう。この記号を**シュレーフリの記号**といいます。

定理（プラトン） 正多面体は次の 5 種類に限られます。

$$\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,3\},\{5,3\}$$

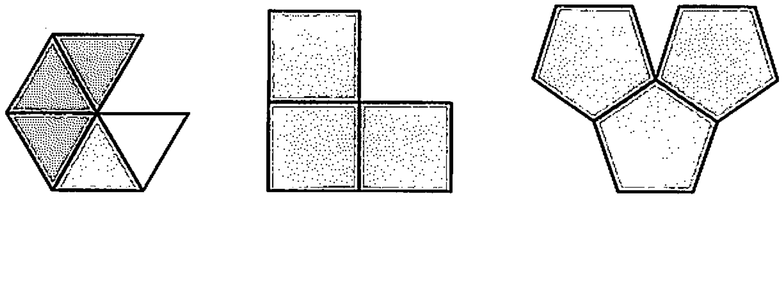
証明 あきらかに $p \geqq 3$ ですが、q についても $q \geqq 3$ です。1 つの頂点に面が 2 枚しか集まらないということはありません。凸であることから、1 つの頂点のところでは、q 角錐の頂点のようになっています。したがって、そこに集まる正 p 角形の内角の和は $360°$ より小さくなります。

$p \geqq 6$ とすると、正 p 角形の内角は $120°$ 以上です。ですから、3 枚で $360°$ 以上になり、そのようなことはありません。したがって、可能性の残るのは、$p = 3,4,5$ です。

$p = 3$ なら、6 枚で $360°$ です。したがって、$q = 3,4,5$ です。

$p = 4$ なら、4 枚で $360°$ になってしまいます。したがって、$q = 3$ だけです。

$p = 5$ でも、$q = 3$ だけは残ります。



■

2 オイラーの多面体定理

江戸時代の初期の頃、数々の画期的な研究をした数学者オイラーは次の定理を発見しました。

定理 (オイラー) 凸多面体の頂点の個数を V、辺の個数を E、面の個数を F とすると

$$V - E + F = 2$$

が成り立ちます。(V は頂点 vertex、E は辺 edge、F は面 face の頭文字です)

オイラーの多面体定理のアイディアは、その後大発展をして、現代幾何学の非常に強力な定理に生まれ変わりました。大発展をするきっかけは、明治時代の大数学者ポアンカレによるホモロジー群というものの発見でした。多面体定理とホモロジー群は非常に相性がよく、2 つを組み合わせることにより、大きな理論が生まれてきたのです。

ここでは、多面体定理の証明はしません。成り立つものと仮定をして、正多面体 $\{p, q\}$ の性質を導きます。

面の数 F と辺の数 E の関係に注目します。正多面体の各辺は、ちょうど 2 枚の面の共通辺になっています。辺の集まりをクラスの友達のように考えましょう。各面ごとに、その面の辺になっている人は手をあげて、と数えると、1 つの面につき p 人が手をあげますから、合計 pF 回手をあげたことになります。ところが、各辺はちょうど 2 回ずつ手をあげますから、辺の数 E について、次式が成り立ちます。

$$E = \frac{pF}{2}$$

同様に、頂点の数 V についても、各面ごとに数えると、合計 pF 回手をあげたことになり、各頂点はちょうど q 個の面の共通の頂点ですから

$$V = \frac{pF}{q}$$

となります。したがって、オイラーの定理より

$$V - E + F = \left(\frac{p}{q} - \frac{p}{2} + 1\right) F = 2$$

が成り立ちます。この式より、F, E, V を p, q で表す式が得られます。

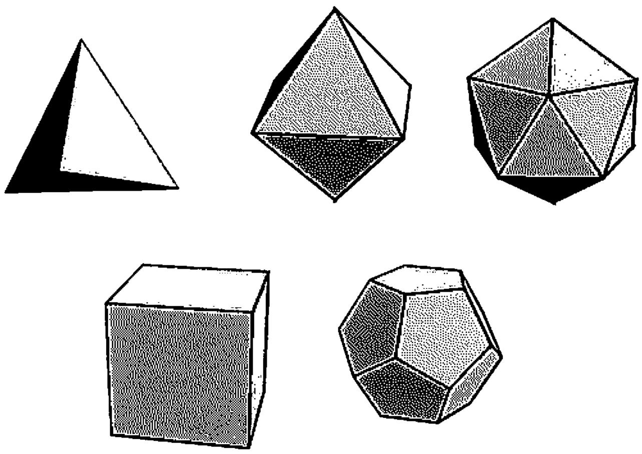
$$F = \frac{2}{\dfrac{p}{q} - \dfrac{p}{2} + 1} = \frac{4q}{2p - pq + 2q}$$

$$E = \frac{2pq}{2p - pq + 2q}$$

$$V = \frac{4p}{2p - pq + 2q}$$

すなわち、正多面体 $\{p,q\}$ の、面、辺、頂点の数は p,q から決まってしまいます。$\{p,q\}=\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,3\},\{5,3\}$ を代入するすることにより、あらためて、以下のことが分かります。

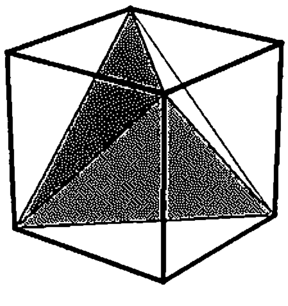
- $\{3,3\}$ は正 4 面体で、辺は 6 本、頂点は 4 個です。
- $\{3,4\}$ は正 8 面体で、辺は 12 本、頂点は 6 個です。
- $\{3,5\}$ は正 20 面体で、辺は 30 本、頂点は 12 個です。
- $\{4,3\}$ は正 6 面体（立方体）で、辺は 12 本、頂点は 8 個です。
- $\{5,3\}$ は正 12 面体で、辺は 30 本、頂点は 20 個です。



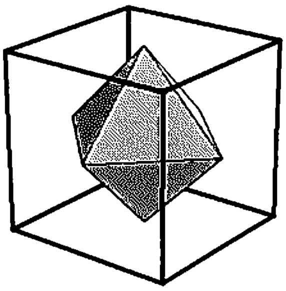
3　正多面体の構成

今まで、5 種類の正多面体をひとつひとつ独立に扱ってきましたが、相互の関係が分かるように、立方体から、他の 4 つの正多面体を構成することを考えてみましょう。

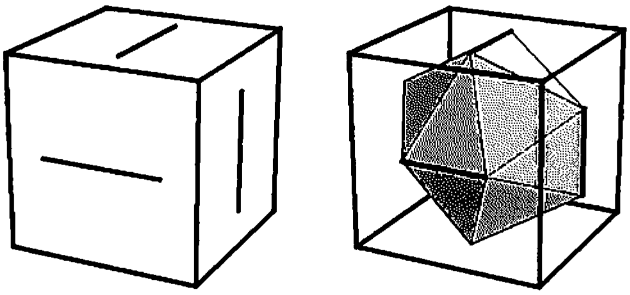
- **正 4 面体** $\{3,3\}$　立方体の 8 頂点から 1 つおきに、4 頂点を選ぶことができます。それらを結ぶと正 4 面体が得られます。



- **正 8 面体** $\{3,4\}$　立方体の 6 つの面の中心を新たな頂点とし、それらを結ぶと正 8 面体が得られます。

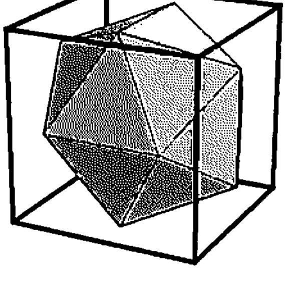


- **正 20 面体** $\{3,5\}$　立方体の 6 つの面に図のように中線をとり、一定の割合 r で縮めてみましょう。

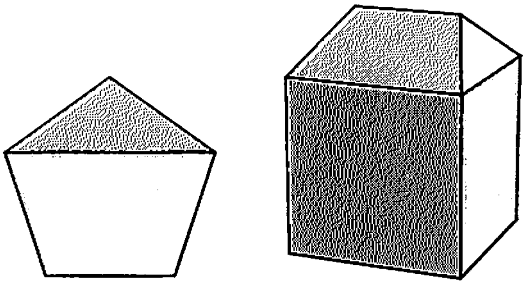


縮小された中線の両端を新たな頂点として、それらを結ぶと、上の図のような立体が得られます。頂点は 12 個です。面は 20 枚の三角形で、それらは、6 個の縮小中線に接する 12 枚の 2 等辺三角形と立方体の頂点に対応する位置にある 8 つの正三角形たちです。

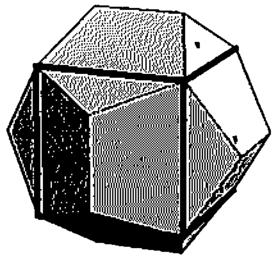
計算すると、$r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき、すべての面が正三角形になることが分かります。再び、正 20 面体が得られました。



- **正 12 面体** $\{5,3\}$　正 5 角形を上部の 2 等辺三角形と下部の等脚台形に分けます。2 組用意して、うまく組み立てると、正方形の部屋を覆う屋根形ができます。等脚台形を屋根の斜面に、2 等辺三角形を屋根の妻面にします。立方体の上面にこの屋根をのせます。



立方体の残る5面にも屋根を、正20面体の場合と同じパターンになるようにつけます。すると、屋根の斜面と妻面の斜面がつながって、正5角形の面が得られます。このことは計算で確かめることができます。このようにして、再び、正12面体が構成できました。

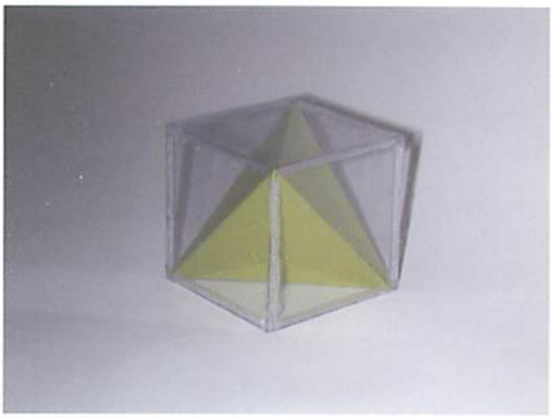


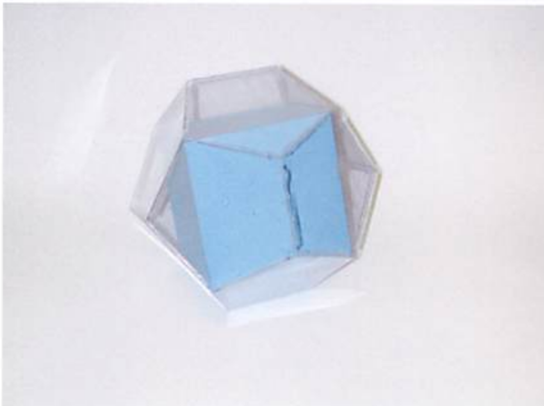
4 複合正多面体

正多面体の中に正多面体ということを考えましょう。はじめのアイディアは、大きな正多面体の頂点の一部が小さな正多面体の頂点になっているということです。前節の正多面体の構成でいくつかの例が見つかりました。最初の例では、立方体の8つの頂点のうち、4つを選んで正4面体の頂点とすることができました。最後の例では、正12面体の20個の頂点から、8つの頂点を選んで、立方体の頂点が得られます。さらにそこから4頂点を選んで正4面体の頂点も得られます。まとめると、次の3つの場合があります。

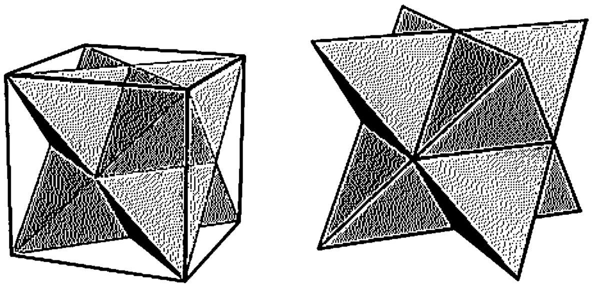
- 立方体の中に正4面体
- 正12面体の中に立方体
- 正12面体の中に正4面体

これ以外にはそのようなことはないことも知られています。これらを利用して、複合正多面体をつくることができます。



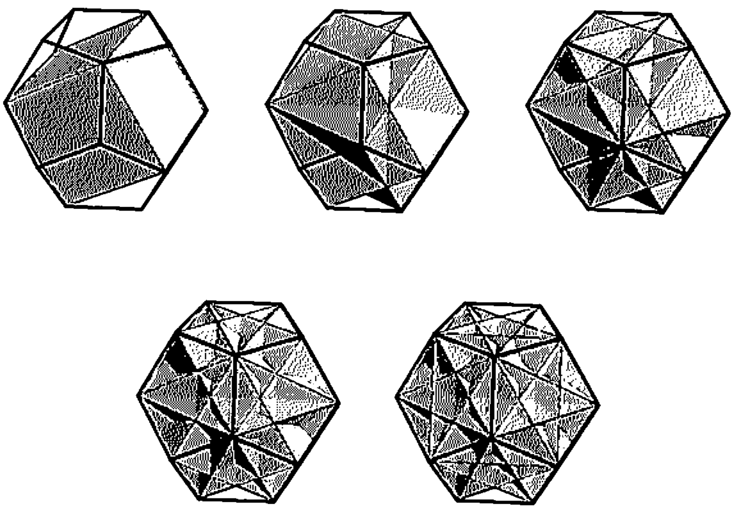


- 8 角星形（2 つの正 4 面体の複合体）　立方体の中には正 4 面体が 2 つ入ります。合わせた図形（右図）を 8 角星形といいます。

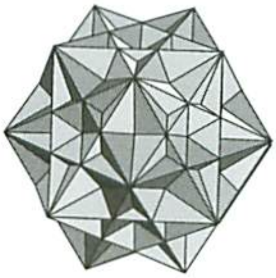


できた形は、正 8 面体の各面に正 4 面体を貼り付けた形で、立方体と同じ回転対称性をもっています。すなわち、立方体をそれ自身に重ね合わせるような回転があると、中の 8 角星形もそれ自身に重なります。そのような回転としては、立方体の頂点を通る軸に関する 120° 回転、面の中心を通る軸に関する 90° 回転、辺の中点を通る軸に関する 180° 回転（線対称）があります。

- **5 つの立方体の複合体**　立方体を入れた正 12 面体の置き方を変えて、面が水平になるようにします。垂直な軸に関して、$\frac{1}{5}$ 回転すると、立方体の位置が変わります。さらに、$\frac{2}{5}$ 回転、$\frac{3}{5}$ 回転、$\frac{4}{5}$ 回転したものを重ねてみましょう。5 つの立方体の複合体が得られます。

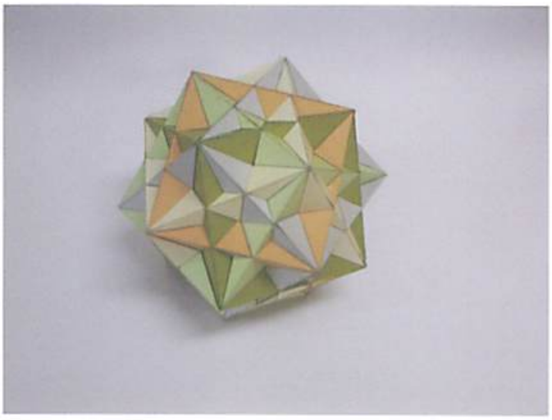


少々見にくいので、正 12 面体の枠を消して、5 つの立方体を色分けして描いてみます。

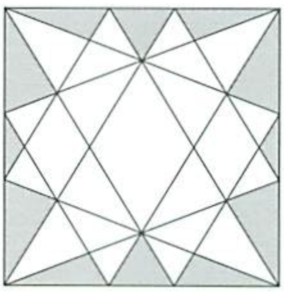


冒頭の部分で述べた、正 12 面体の各面に 5 角星形がはめ込まれた美しい形が得られました。正 12 面体と同じ回転対称性をもっています。

模型の写真です。



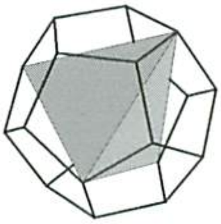
その設計図です。



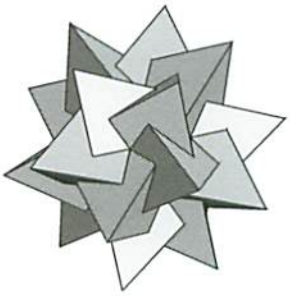
正方形の 1 辺を、大、小、大と 3 つに分けていますが、大と小の比は黄金比 $\tau = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ です。

- **5 つの正 4 面体の複合体**　5 つの立方体の複合体のときと同じように、面が水平になるように置いた正 12 面体の中に正 4 面体を入れます。垂

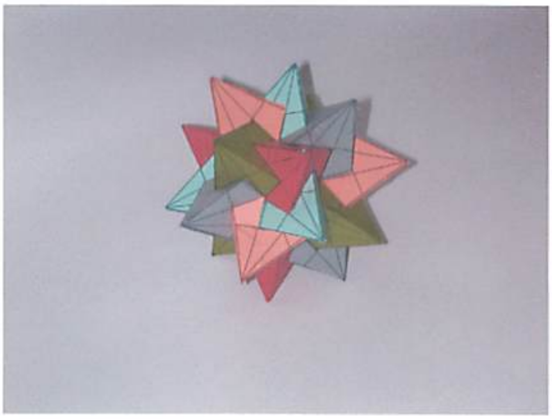
直な軸に関して、$\frac{1}{5}$ 回転ずつ移動して得られる 5 つの正 4 面体を合わせたものが 5 つの正 4 面体の複合体です。



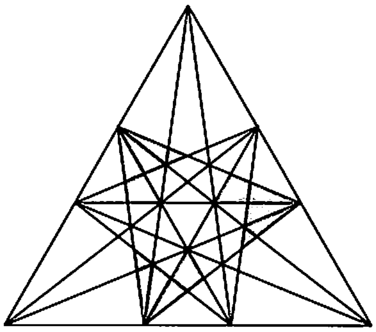
5 つの正 4 面体を色分けして描いてみます。



模型の写真です。

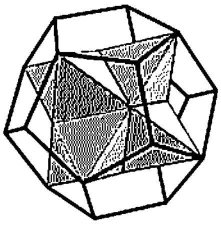


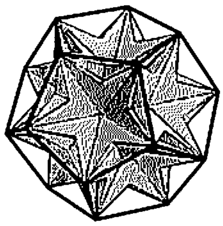
その設計図です。内側の斜めに置かれた正三角形を使います。



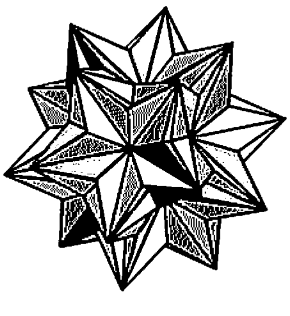
大きな正三角形の1辺を、大、小、大と3つに分けていますが、大と小の比は黄金比 τ です。

- **10個の正4面体の複合体**　正12面体の中に立方体を入れて、その中に8角星形を入れます。正4面体を2個入れたと考えます。垂直な軸に関して、$\frac{1}{5}$ 回転ずつ移動して得られたものが10個の正4面体の複合体です。

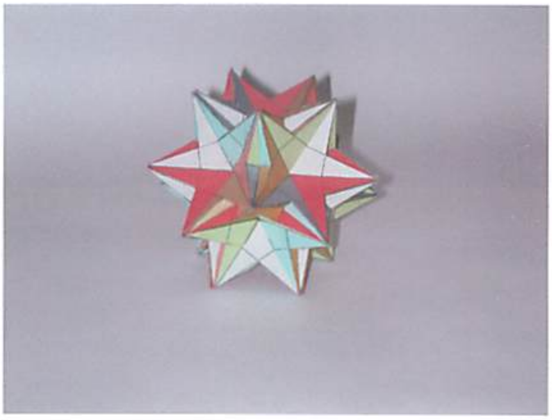




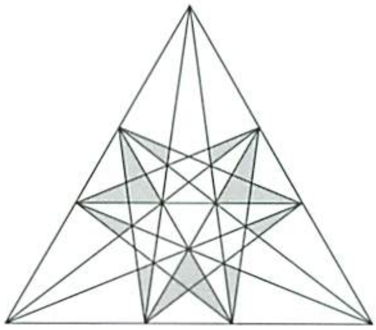
5つの8角星形を色分けして描いてみます。



模型の写真です。上図と色分けの方法が違います。

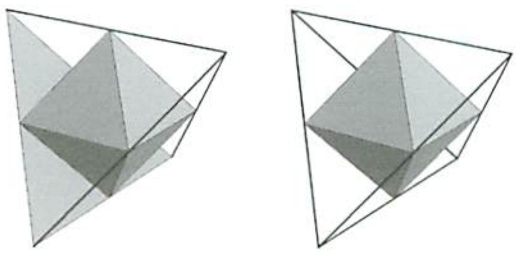


その設計図です。灰色の部分を使います。

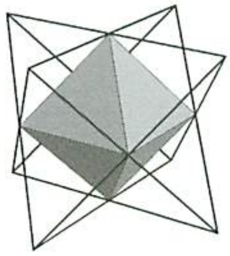


実は、複合正多面体を得るもう１つの方法があります。今まで、正多面体の中に正多面体を考えるとき、内側の方が面数が少ない場合を考えてきました。ところが逆に、面数の少ない正多面体を面数の多い正多面体の外に配置することができます。

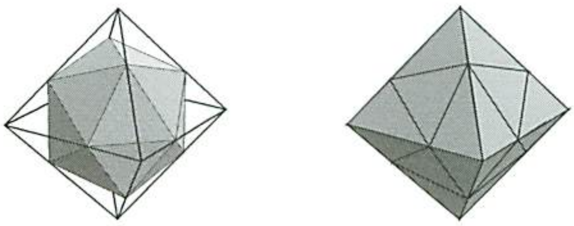
例えば、正８面体の８面から、１つおきに面を選んで４面を選ぶことができます。それらを延長すると、正４面体の４面が得られます。

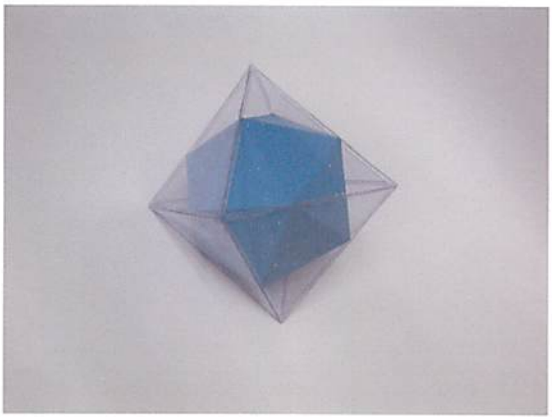


正８面体の８面から、１つおきに４面を選ぶ選び方は２通りあります。２つの正４面体が得られますが、それは８角星形をつくります。

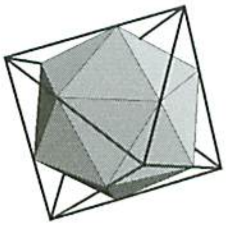


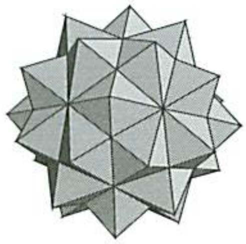
正 20 面体を構成するとき、12 個の 2 等辺三角形と 8 個の正三角形に分けて考えました。この 8 個の正三角形を延長すると、正 8 面体の 8 面が得られます。



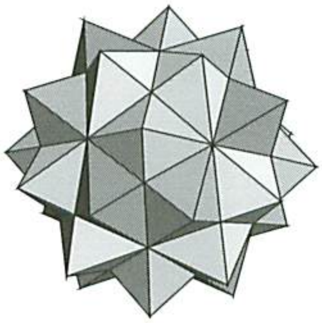


- **5 つの正 8 面体の複合体**　正 20 面体の位置を変えて、相対する 1 組の頂点が z 軸上にのるようにします。z 軸に関して、$\dfrac{1}{5}$ 回転ずつ移動すると、正 8 面体の位置が変わります。重ねると、5 つの正 8 面体の複合体が得られます。

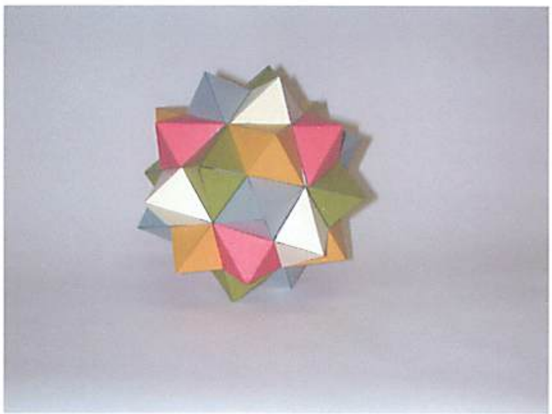




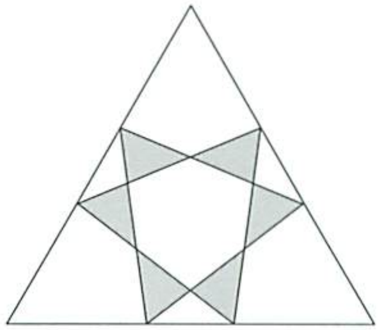
5つの正8面体を異なる色で描きました。



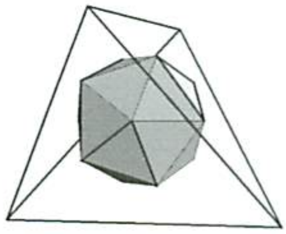
模型の写真です。



その設計図です。灰色の部分を使います。



正 20 面体の外側に、面を共有して正 8 面体が接します。さらに、正 8 面体の外側に、面を共有して正 4 面体または 8 角星形が接します。その結果、正 20 面体の外側に、面を共有して正 4 面体または 8 角星形を配置することができます。



その状態で、正 20 面体を $\frac{1}{5}$ 回転して、複合正多面体を構成することができますが、5 つまたは 10 個の正 4 面体の複合体が再び得られることになるだけです。