授賞報告

2009年度代数学賞

２００９年度代数学賞は，小木曽啓示氏（慶応義塾大学経済学部) および雪江明彦氏（東北大学大学院理学研究科）両氏が受賞されました．

小木曽啓示氏「一般化されたカラービ・ヤウ多様体の研究」

小木曽氏は K3 曲面・楕円曲面の研究から出発し，その高次元版である広義のカラービ・ヤウ多様体の研究に進みました．これらの多様体は数論・群論・複素幾何学といった数学の諸分野とかかわるだけでなく，数理物理学とも密接に関係する重要な研究対象です．

小木曽氏の研究成果に共通する特徴は，一般論を展開するだけではなく個々の対象を深く掘り下げ，美しく興味深い現象を探求，発見していることです．氏が研究してきた分野はきわめて多岐にわたりますが，主要なものを分類すると，1) 楕円曲面の Mordell–Weil 格子，2) K3 曲面の自己同型群，3) 狭義のカラービ・ヤウ多様体，4) K3 曲面のフーリエ・ 向井パートナー，5) ハイパーケーラー多様体になろうと思われます．以下上記５種類のトピックスについて，簡単に解説します．

1) 楕円曲面の Mordell–Weil 格子 : 塩田徹治氏は 1990 年代初頭，楕円曲面の切断がつくる有限生成アーベル群に自然な内積を導入して， Mordell–Weil 格子理論を確立しました．なかでも最も単純かつ基本的なのが有理楕円曲面の Mordell–Weil 格子で，その完全な記述は小木曽氏と塩田氏との共著 “The Mordell–Weil lattice of a rational elliptic surface”, Comment. Math. Univ. St. Pauli **40** (1991) で得られました．現在に至るまで内外の研究者に頻繁に引用されている基本的文献です．

2) K3 曲面の自己同型群 : この話題に関する小木曽氏の論文は１０篇近くありますが，代表的なものとして，K3 曲面の射影的な変形によって自己同型群がどう変動するかを明らかにした “Local families of K3 surfaces and applications”, J. Algebraic Geom. **12** (2003) があります．この論文では，射影的 K3 曲面に非自明な射影的変形を施すと，自己同型群が無限群となる K3 曲面が必ず稠密にあらわれる，という驚くべき事実が指摘されました．

3) 狭義のカラービ・ヤウ多様体 : 微分幾何学的には単連結な n 次元リッチ平坦多様体で $U(n)$ ホロノミー 群をもつものが狭義のカラービ・ヤウ多様体です（弦理論で問題とされたのは $n = 3$ の場合）．この方面における小木曽氏の初期の仕事は，３次元カラービ・ヤウ多様体に入るファイバー空間構造の大まかな分類を与えた一連の研究で，その業績により氏は 1998 年度建部賞を受賞しています．また “Two remarks on Calabi–Yau Moishezon threefolds”, J. Reine Angew. Math. **452** (1994)

では，$\mathbb{P}^5$ 内の $(2,4)$ 完全交差多様体 X と任意の自然数 d を与えると，X に含まれる次数 d の $\mathbb{P}^1$ で負の法束をもつものがあること，この X に双有理型変換を施すことにより，どんなケーラー多様体とも同相でない Moishezon 多様体ができること，を示しました．Nam-Hoon Lee 氏との最近の共同研究では，滑らかな変形をもたず互いに双有理な二つの３次元 Calabi–Yau 多様体であるが，互いに同相ではなく，しかし平坦な変形ではつながっているという例があることを，Hartshorne の古い定理を用いて示しています．上のような結果は，簡単そうな多様体に潜む，ある意味で病理的でありつつ，反面では非常に興味深い現象を発見したものであって，小木曽氏の数学の特徴を如実に表すものといえます．

4) K3 曲面のフーリエ･向井パートナー：Kontsevich が提唱したホモロジー･ミラー対称性は，広義のカラービ･ヤウ多様体の研究に新たな視点を付け加えました．その枠組みでは，多様体 X そのものよりも，X 上の連接層の複体からできる導来圏 $\mathcal{D}(X)$ が本質的です．$X_1, X_2, \ldots$ が互いにフーリエ・向井パートナーであるとは，$\mathcal{D}(X_i)$ が互いに同値であることをいいます．小木曽氏は “K3 surfaces via almost-primes”, Math. Res. Lett. **9** (2002) で，向井や Orlov の導来圏の理論を Iwaniec の疑素数 (almost prime number) 理論と結びつけ，フーリエ・向井パートナーの個数が無限に増大していくような K3 曲面の列があることを証明しました．この研究を機縁として，小木曽氏は細野忍，B.H. Lian，S.-T. Yau ３氏と Harvard での共同研究を開始します．これらの共著論文のうち “Kummer structures on K3 surface: an old question of T. Shioda”, Duke Math. J. **120** (2003) では，クンマー曲面からもとのアーベル曲面は復元できるかという問題に対する否定的完全解決を与え，“Autoequivalences of derived category of a K3 surface and monodromy transformations”, J. Algebraic Geom. **13** (2004) では K3 曲面 X に対して $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}(X))$ の向井格子への表現を（指数２の不確定性を除いて）決定しました（この不確定性は後に Huybrechts らが解決）．

5) ハイパーケーラー多様体：ハイパーケーラー多様体（リッチ平坦でホロノミーが $Sp(2n)$）は複素シンプレクティック多様体とも呼ばれ，広義カラービ・ヤウ多様体の基本構成要素のひとつです．小木曽氏の最近の仕事は主にこのクラスに関するもので，McMullen の複素力学系の仕事に触発された，位相的エントロピーと自己同型群の関係についての結果や，正則なラグランジアン・ファイバー空間（アーベル多様体が一般ファイバーとなります）を変形したときの Mordell–Weil 群のふるまいの研究，といった著しい成果が次々にあがっています．一例をあげると，ラグランジアン・ファイバー空間の一般ファイバーのピカール数は常に１であるという定理は，結果も意外ですし，松下大介と C. Voisin 両氏によるファイバー空間構造の変形法を比較するという証明法も斬新です．

以上のように，代数幾何学における最も基本的な研究対象である広義カラービ・ヤウ多様体に関し，小木曽氏は重要で多彩な結果を次々と発表しており，国際的に

きわめて高く評価されています．代数学賞にふさわしい業績であり，また今後のさらなる発展がまたれるところです．

雪江明彦氏「概均質ベクトル空間の数論的・幾何学的研究」

雪江明彦氏は，概圏質ベクトル空間の軌道の研究とその数論への応用に関して，優れた幾何学的方法を数多く提案し，概均質ベクトル空間のゼータ関数の解析に応用することによって，数論的な密度定理を得るなど，概均質ベクトル空間の理論およびその数論的応用の研究を大きく飛躍発展させました．

体 k 上定義された線形代数群 G が作用する概均質ベクトル空間 V を考えると，閉体 $\overline{k}$ 上で見た場合 V は単一の開軌道（生成点）をもっているわけですが，有理軌道（rational orbit），つまり $G(k)$ の $V(k)$ における開軌道（Zariski 稠密軌道）を記述することは重要かつ困難な問題です．連作 “Prehomogeneous vector spaces and field extensions” I. (D. Wright との共著）Invent. Math. 1992; II. (A. Kable との共著）Invent. Math. 1997; III. J. Number Theory 1997 において，雪江氏は１３個の概均質ベクトル空間に対して有理軌道を決定しました．多くの場合，有理軌道の集合から５次以下の多項式の分解体の同型類への自然な写像が構成されて，しかも個々の同型類に写される有理軌道が具体的に記述できる，というのが主要結果です，これは概均質ベクトル空間の有理軌道を調べることによって 2, 3, 4, 5 次拡大体の密度定理（判別式の絶対値が T 以下の拡大体の個数 $N(T)$ の漸近挙動）が得られる可能性を示唆するものであり，その後の雪江氏の研究の出発点となりました，

さて概均質ベクトル空間の軌道の情報は，ゼータ関数の係数にエンコードされます．直接関係するのは有理軌道ではなくて整軌道（integral orbit）です．整軌道の情報から有理軌道の情報を引き出す方法として，D. Wright が考案した filtering process がありますが，その方法を実行するにはゼータ関数の解析的性質について詳細な情報が必要で，そのためには開軌道でない有理軌道の考察が不可欠です．著書 “Shintani zeta functions”, London Math. Soc. Lecture Note Series 183 (1993) において，雪江氏は幾何的不変式論 (GIT) の立場から軌道を考察し，ゼータ関数の解析的性質を有理軌道の Morse stratification を用いて研究する一般的プログラムを提案するとともに，４次拡大体に対応する概均質ベクトル空間の場合にこのプログラムを膨大な計算により実行，ゼータ関数の主要部を決定しました．またこの結果に基づき，２つの素点での条件を付した４次拡大の個数の密度を決定し，素点での条件をつけない場合についての予想を提出しました（$k = \mathbb{Q}$ の場合は 2005 年 M. Bhargava が解決）．３次体に関する B. Davenport–H, Heilbronn および B. Datskovsky–D. Wright の結果からの大きな前進です．

その後雪江氏は，２変数エルミート形式の対がなす概均質ベクトル空間に対しても一般的プログラムを実行し，A. Kable との共著 “The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields", I: Tohoku Math. J. **54** (2002); II: J. Math. Soc. Japan **55** (2003); III: J. Number Theory **99** (2003) において，与えられた２次拡大を含む $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 拡大について，類数と単数基準の積の密度を与えました．こちらは２次拡大に対する結果（D. Goldfeld と J. Hoffstein）の拡張です．

概均質ベクトル空間のうち最も複雑なものは５次拡大に対応するものです．A. Kable 氏との共著になる連作 "On the space of quadruples of quinary alternating forms", J. Pure Appl. Algebra **186** (2004), "A construction of quintic rings", Nagoya Math. J **173** (2004), "On the number of quintic fields", Invent. Math. **160** (2005) においては，５次の交代行列４個の組のなす概均質ベクトル空間の整軌道から整数環上５次の環の同型類への対応を構成し，２変数３次形式から３次の環を構成する B.N. Delone–D.K. Faddeev の結果を大きく一般化しました．この構成とゼータ積分の収束域の決定により，５次体の個数の判別式による評価が得られました．

以上に述べてきた系列とはやや色彩を異とするものとして，雪江氏には概均質ベクトル空間とエルゴード理論のかかわり合いに関する仕事があります．不定値二次形式の整数点での値に関する Oppenheim 予想を，Margulis はエルゴード理論の問題と解釈して証明しました．雪江氏の論文 "Prehomogeneous vector spaces and ergodic theory", I : Duke Math J. **90** (1997); II: Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000) [joint with D. Witte, R. Zierau]; III. J. Number Thory **70** (1998) では，Margulis の解釈を対称行列のなす概均質ベクトル空間についての命題と再解釈したうえで，Margulis 理論を一般の概均質ベクトル空間に拡張せよという問題を提出しました．いくつかの場合には自ら拡張を実行し，概均質ベクトル空間に関係して現れる高次形式について数論的結果を得ました．また直近の仕事では，対称行列のなす概均質ベクトル空間を用いて正規化されない玉河数の密度を研究しています（N. Hayasaka and A. Yukie, "On the density of unnormalized Tamagawa numbers of orthogonal groups. I", Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008)）．

新谷卓郎氏が創始した概均質ベクトル空間による数論研究に関して，雪江氏は幾何学から優れた方法を導入し，当初の予想を超える多くの深い結果を示すことで，分野全体を大きく発展させました．代数学賞を受賞するにふさわしい業績です．

（代数学賞委員会委員長　宮岡洋一　東京大学大学院数理科学研究科）