高木貞治に見る数学思想の変遷

足立恒雄 (早稲田大学理工学術院)

1　初めに

高木貞治（1875-1960）は若いころから数体系の基礎付けに関心が深かった．最初に著した『新撰算術』は高木が大学院在学中に書かれたものである．その後，ドイツへ留学し，帰国後，教授就任の年に『新式算術講義』を著した.『数の概念』は高木が最後に書いた数学書で，そのとき 74 歳であった．最初の著書から数えて 51 年，高木の数体系の基礎付けに対する関心は生涯にわたるものであったことがわかる．

本稿は，高木の数体系に関する思索を辿ることによって，日本における数学思想の歩みを知ることを目的とする．そのための予備知識として，まず数と量の概念の歴史を要約しておくことにする．なお，本稿は 2010 年 2 月 20 日に開かれた高木貞治没後 50 周年を記念する市民講演会で話した内容を元にしている．

2　数の背景をなす概念

2.1　西洋における伝統的見方

古代ギリシア以降，西洋数学では，数と量という二つの概念が峻別されてきた．エウクレイデスの『原論』を読むとギリシアでは次のように考えられていたと思われる．

1. 数とは，基数（事物の個数を表す数）のことである．
2. 量とは，長さ，広さなど（後世になると，これらに重さ，速さ等が加わった）互いに大小が比較可能なもののことである．
3. 同一種の量だけが比較し得る．

この数と量を厳密に区別する思想は 2000 年以上にわたって西洋数学を支配してきた．高度な認識ではあるが，数学の発展にとっては大きな足かせともなった．

その結果，たとえば負数が数と認知されるのには長大な時間を要したのである．また，同種の量しか比べられないということは，ギリシアには量の積の概念がないことを意味する．言い換えれば,「数とは量の比のことである」（オイラー）とい

う西洋の近代数学の伝統的な見解に立てば，数の積は何のことか説明がつかないのである．

現代的な目で見ると，実際には，数概念の背景には次のような事象が控えている．

個数 ：１個，２頭，３人，$\cdots \Rightarrow$ 基数

順序 ：１番，２等，三日目，$\cdots \Rightarrow$ 序数

大きさ ：長さ，広さ，重さ，$\cdots \Rightarrow$ 量

位置関係 ：昨日・今日・明日，利益・損失，１級・初段・２段，$\cdots \Rightarrow$ 数直線

序数と基数は印欧語族の言葉では区別が明確であるが，東洋では区別がない．つまり10日というと，10日目のこともあり，10日間のことでもある．したがって序数と基数は不即不離の関係にあり，独立の起源を持つものではない．

位置関係が数概念と深い関係があることが認識されなかった結果，負数が数と認識されるのには長大な年月を要した．無からは何も取り去れないから $0-4=0$ は自明であると主張したパスカルの例は，数とは基数のことであるとする考え方が西洋では遺伝子レベルに刷り込まれていることを立証するものであろう．

2.2 東洋，特にインドにおける負数の概念

東洋の数学では次のような特色がある．

- 東洋の数学は数と量，有理性と無理性などに厳密な区別を設けない．
- 東洋では数学書が登場する最初期から負数が扱われている．クリシュナの次の言葉は西洋数学の固執を知っている目には鮮烈な驚きである．とりわけ，時間を（正負の）数とみなすのはインドの発明ではなかろうか．
- クリシュナ（1600年頃：『ビージャガニタ』（AD12C）への注釈）：
  1. 数直線を使って実数の四則演算を説明．
  2. 東へ行くのが正なら西へ行くのが負である．上へ行くのが正なら，下へ行くのが負である．儲けが正なら，損失は負である．
  3. 数には空間的，時間的，物質的の三種がある．
  4. 負数の積が正数になることは羊飼いや牛飼いでも知っている．

3　量の追放＝純粋数学の成立

- 量とは正実数を使って大きさが測れるものだが，正実数とは何かに対して，量の比であると答えると循環的定義に陥る．現在では，実数体は量（の象徴する外的世界）とは独立して定義されている．
- 数体系の歴史を見ると，数学がごく最近まで自然科学と未分化であったことがよくわかる．
- 数体系を量，即ち外的存在，と無関係に確立する作業は 19 世紀後半以降 20 世紀の初めにかけて完成した．量という概念は現代数学ではほとんど扱われない．たとえば『数学辞典』には 1 回も登場しないが，数学の歴史では 19 世紀末までは最も重要な術語のひとつであった.（教育に量という概念が登場しないのが善いか悪いかは別問題である.）
- たとえば，最近まで使われた変量，定量といった用語も長い伝統の名残りである．
- 数概念の確立に至る歴史とは，ギリシア以来数学における最も重要な概念のひとつであった量という概念が抹殺されるまでの歴史と言うことができる．量という外的世界と連絡する概念が追放されたことと純粋数学という概念が成立したこととはほぼ同義と言えるだろう．
- 19 世紀に入って数学の算術化運動が起こった．これはすべての数学は算術に還元できるという思想に基づいていて，量概念が駆逐されたのもこの運動の一環である．
- ディリクレは常々算術化の可能性について語っていたとデデキントが書いているが，デデキントの仕事（切断による実数体の定義，および自然数論の研究）もさらにはクロネッカーの有名な主張も算術化運動の立場から理解することができる．
- 複素数を実数のペアと理解することはハミルトン（1835）に始まるが，この方法は分数（有理数）の定義，また負数（整数）の定義へと援用されて一般化して行った．こうした成功が算術化運動を加速する原動力となったのであろう．

4　量の概念

4.1　高木と量

高木の諸著作 ([4],[5],[8],[9]) の特徴は量の理論に関する考察がきわめて詳細であることである．量という概念の考察が数学の世界からほぼ消え去った時代にあり

ながら，高木は

1. 数は量を表すべく発展してきたという歴史的経緯.
2. 常識と学問とを連結する.

といった理由の下に量の理論と実数論との橋渡しを，煩を厭わず詳論する．どうして高木がこのように量の理論にこだわったのか，何か「文明開化」直後の時代という日本の特殊性を感じさせるのだが，はっきりとした理由はわからない．この辺りにも高木の言う「50 年の遅れ」というものを感じさせるとも言える．しかし，数学が現象世界から独立したからといって，量は一切扱わないというのも極端な純粋数学主義を感じさせるので，今後は量概念（＝現象世界）との連絡も考えるのが（応用に全く弱いという欠陥を矯正する意味で）教育上望ましいのではないだろうか.

高木の量の理論には，今となっては歴史的興味しかないが，そのおかげで,（それまで日本では深くは知られなかった）「数と量」という概念とその歴史がよく理解できるという効用はある.

高木の著作に従って量の定義を記しておこう．高木によれば，量とは次の性質を満たすものである：

1. 同種の量は大小の比較ができる.
2. X は加法 $+$ を持ち，足し算ができる.
3. 同種の量の足し算は順序を変えない.
   $(A < B \Rightarrow A + C < B + C)$
4. どの量も正である．$(A < A + B)$
5. 同種の量は大きいものから小さいものを引ける.
6. 同種の量の大きさには切れ目がない（連続性）.

現代の数学では，まず実数体 $\mathbb{R}$ の概念が確立されているので，その上に立って量とはどういうものかを捉えることができる.

量の現代的定義 1 次元実ベクトル空間 V の任意の元 $\overrightarrow{e} \neq \overrightarrow{0}$ を取って，

$$X = \{x\overrightarrow{e} \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$$

と表せるとき X は「同種の量の空間」であると言う.

「同種の量の空間」というのはこなれない言葉だが，術語を知らないので創作したまでのことである．ただし，小島順『線型代数』（日本放送出版協会）に「量の空間」という言葉はある（同書の 44 ページから 45 ページにかけて，現代の数学の教科書としては異例のことだが,「量に関する考察」が書かれている）.

量の積（たとえば 100 円と 100 円の積）というのは常識的には考え難い概念だが，現代数学の立場からは，同種の量の空間のテンソル積として説明することができる.

5　数と量の統合

5.1　数概念の確立に至る道に横たわる困難

物理的あるいは外的存在に依存している量という概念を前提に据えていては数学の真の厳密性は確保できず，自立性を確立できないが，その解消のためには歴史上次のような困難があった.

量と数の統合 ：量と数をどうやって同じカテゴリーの中に取りこむか.

負数の取り込み ：0（零），さらには負数をどう考えるのか．量（大きさ）と基数（個数）に固執する限り，負の概念は登場の余地がない.

西洋の本では例外なく「負数は減法の演算が例外なくできるように作られた」と述べている．しかし，そもそも「借金」という負の概念は引き算の概念とは独立である．負数は算法の汎通 (いつでも引き算ができるようにしたいという願望) のために創造されたのではない.

たとえば,

$$a - b = a + (-b)$$

という公式は東洋では紀元前から知られているが，西洋数学では 20 世紀になって登場したのではなかろうか.（$-a$ という概念がなかったからである.）

感情的な側面ばかりではなく，学問レベルでも，負数が自由に使える時代になっても，負数と負数の積が正数になることの合理的な説明ができなかった．19 世紀の代数学書の中には，負数とその演算を駆逐することによって基礎付けの厳密性を維持しようというものまであったという（『カッツ　数学の歴史』p.767 参照）.

5.2　数と量の統合に向けての歩み

1. ディオファントス（『算術』: AD 3 世紀頃）は分数（有理数）を数と認めた．これがアラビア世界，そして西洋に受け継がれ，中世以降「数」と言えば，分数を指すようになっていた.

2. 技術者シモン・ステヴィン（1548-1620）による小数の利用は数を線型的に捉え，それぞれの数を平等に見る方向性に大きく寄与した．次はステヴィンの著書『算術』（1585）に見られる言葉である：

   (a) 数はそれによって物の数量が説明されるものである．

   (b) 数は不連続ではない．連続的な水が連続的な湿度に対応するように連続量は連続数に対応する．

   (c) 馬鹿げた数，無理な数，不規則な数というようなものはない．

3. ヴィエト（1540-1576）は代数の曖昧さは幾何学的な次元を統一しないことに由来すると主張し，次元の統一を要請した．すなわち現行の記号で書けば，x^3 は立方体 (cube) を表し，x^2 は正方形 (square) を表すのだから $x^3 + 3x = 2$ といった式はナンセンスであるという指摘である．ヴィエトは自分の創始したパラメータを表す文字を使うことによって，たとえば

$$x^3 + 3a^2x = 2b^3$$

   というように次元を統一することを提案した（『解析法入門』: 1591）．これはデカルトの「すべての量は線分として把握できる」という主張の先駆であると評価される．

4. デカルト（1596-1650) は幾何学的な量の概念の 1 次元化を行った．すなわち，a^3 は $a^2 \cdot a$ と定義され，線分で表すことができる (『幾何学』: 1637）という主張である．しかし，負の量を扱っていないし，また座標系という概念を創始したと評価するのも誤っている．

5. オイラー（1707-1783) は「数とは，一つの選ばれた単位の量に対する比以外の何物でもない」（『代数学入門』: 1768）と述べた.（しかし，量を中心に考えると，負数には負債といった別の動機付けをする必要があった.）オイラーのこの言葉は数を論じるときの決まり文句となって流通し，明治時代の日本の教科書にまで登場するという．負まで込めた直交座標系はオイラーによって初めて使われた．数直線もオイラーが最初に導入したものであろう（『無限解析入門』: 1748）.

6. 有理数体から実数体を構成する（あるいは，説明する）方法は周知のようにメレーおよびカントル，ワイヤシュトラス，デデキントによってそれぞれ提案された．メレーが若干早かったとはいえ，1870 年代の初期に集中している．

7. メレーおよびカントルの方法は有理基本列によって，またデデキントは切断という手法によって，実数を定義する．ワイヤシュトラスは有理数団という方法を使うが，これについては高木の『数学雑談』に簡単な解説がある．

8. 論理哲学者フレーゲも『算術の基本法則』第 II 巻 (1903)（[2]）において独自の実数論を展開している．これは完全に伝統的な見方に従って，実数を量の比と捉え，基数と実数を截然と分離する考え方を貫いたものである．こういう場合，自然数も基数とは別物として実数に含めて考える．基数を対等な集合の類として定義する，現代の集合論でも時に見られる方式は西洋的な伝統という枠内で捉えることができるだろう．しかし実数を量の比と見る見方は現在では姿を消している．

5.3　19 世紀末の自然数論

有理整数環，実数体，複素数体などの代数系を厳密に定義（あるいは，説明，あるいは構成）する作業が一通り終わって，最後に残ったのが自然数論（算術）の体系の扱いであった．すべての数学を算術に還元する算術化運動は最終局面に達して，その算術そのものをどのように厳密で揺るぎないものとして捉えるかが問題にされるに至ったのである．

その中で大きな役割を果たしたのはデデキント (1831-1916) とフレーゲ (1848-1925) という二人のドイツ人であった．デデキントは『数とは何か』（1887：[1]）において素朴な立場で集合論を展開し，算術の体系の集合論的基礎付けを行った．この著作は，公理的集合論の先駆けとなるものであり，現在でも精読に値する歴史的名著である．この著作を現代数学の目で精査するとき，

1. 無限集合の存在の素朴な「証明」

2. デデキント無限と通常の無限の同値性の「証明」（選択公理を要することが見過ごされている.）

3. 性質 P を満たす要素 x の全体はつねに「集合」をなすという，素朴な「内包原理」

といった問題点をあげつらうことはできるが，時代を考えれば，これはデデキント個人に帰されるような欠陥ではない．

無数にある自然数に関する命題の本質を，数学的帰納法を含む幾つかの命題（いわゆる「ペアノの公理系」）に還元したのはデデキントの偉大な業績である．したがって，せめて**デデキント=ペアノの公理系**と呼ぶことにしてはどうだろうか．

一方，デデキントは，数学者の常として，数学的推論を精密に分析し，幾つかの基本的推論へ還元することには無関心だった．論理学者フレーゲは人間のあらゆる理性的な判断に普遍的な部分を論理学と捉え，数学も論理学の一部であると主張し，その観点から自然数論の基礎付け（論理学への還元）を探求した．デデキントもフレーゲも論理主義者ということになっているが，両者の間には徹底度という観点から見ると相当な違いがある．

フレーゲの論理哲学を理解する能力は私にはないが，数学に対する貢献という観点に絞るなら，フレーゲは現代の数学を支える述語論理の創始者であると同時にその事実上の完成者であるということができる．フレーゲの論理学は現今の言葉で言えば，2 階述語論理である.（しかし当時は 1 階も 2 階もなかった.）

1. デデキントは『数とは何か』において，X を無限集合とし，$S : X \to X$ を全射ではない単射とするとき $a \notin S(X)$ なる $a \in X$ を一つ取って，

$$a \in Y, \quad \forall x (x \in Y \Rightarrow S(x) \in Y)$$

   なる性質を持ったすべての $Y (\subset X)$ の共通部分集合をもって自然数の体系の定義とした．この定義は現今の集合論における自然数の体系の定義の先駆となっている．現今の定義は一般的な単射 S ではなく，

$$S(x) = x \cup \{x\}$$

   という特別な写像 S を取るところが異なるだけである．

2. デデキントは上記の定義に続いて，デデキント=ペアノの公理系を命題として導き出し，これらの基本命題からすべての算術的命題が導出できると主張している．ペアノ（1858-1932）は自分の著作がデデキントの仕事に基づくものであることを明確に認めた上で，集合論とは無縁に，原始命題と称して公理系を掲出している．

3. ペアノは集合にはほとんど言及しないので，ペアノの自然数論は論理に基づく算術の公理系であると言えよう（しかし，集合と論理の区別はあまり明確ではない）．したがってペアノの挙げた公理系は，現今の言葉で言えば，1 階の純粋算術の公理系（1 階ペアノ算術 **PA**）に近い．しかし推論をフレーゲのように簡単な基本的推論からなる体系に還元することはまったく考えていない．

4. ペアノは「数は定義できるものではない．しかし，無数の性質のすべてを導出できるような幾つかの性質を述べることはできる.（中略）これらを原始命題と呼ぶ.（中略）デデキントは数を定義しているので，ここが違うが，デデキントは上記の原始命題をすべて満たすものを数と呼んでいるので，実は両者は一致する」(1891:[3]) と述べている．

5. フレーゲの著作『算術の基本法則』第 II 巻が完結したちょうどそのときラッセルからその名を冠した有名なパラドクスの知らせが届いたため，歴史的にはフレーゲは偉大な失敗者であるとみなされてきたが，1980 年代に入ってフレーゲの算術上の仕事の研究が進み，大いにその名誉は回復された．すなわち性質 P に対して対象 $\sharp P$ を

$$\text{基数原理} \qquad \sharp P = \sharp Q \Longleftrightarrow P \approx Q$$

（ここに $P \approx Q$ は P なる x の全体と Q なる y の全体が 1 対 1 に対応することを意味する.）によって導入し公理として置くと，2 階述語論理によって，自然数論が展開できる．フレーゲは，集合論で言えば，任意のクラスを集合とする「誤った原理」（内包原理）を採用して，上記の基数原理を導き，この基数原理を元にして，いわゆる「ペアノの公理系」を導出しているのであるから，基数原理を公理として採用すれば，何も誤った推論を行っている個所はないことになる（C. Wright, R. Heck, G. Boolos 等の研究による）.

6. 基数原理と 2 階述語論理の組み合わせは「フレーゲ算術 **FA**」と呼ばれている．**FA** からいわゆる 2 階算術 $\mathbf{Z_2}$ を導出することができる.

6 『新撰算術』(1898)

さて，以上に述べ来ったような時代の趨勢を踏まえながら，高木の著作を検討すると当時の日本とヨーロッパの対比ができて興味深い.

6.1 『新撰算術』における自然数の定義

> ここにあまたの物のあるとき，その個々の物よりその一つの物なりということの外，すべての特性を抽出し去るときは即ち数の観念を生ず.（中略）一つの物に対する数を一と称し，これを表すに 1 の記号を以てす．あまたの 1 集まりて数を成す．数を表すには 1 を幾つか反復すれば足れり.

これは最も古典的伝統的な自然数の定義である.「抽出し去る」(＝抽象化) ということを数学的に厳密化すれば,「対等な集合の類」として基数を定義するという思想に至る.

6.2 『新撰算術』における整数，分数の扱い

自然数に続いて 0（零）の定義を「相等しき 2 数の差」として定義する．0 は本来何らの意義を有するものではなく，単に 1 個の符号に過ぎないけれども，この符号を数の中に編入することは大いに便宜を得ることになるのだ，という説明がされている．続いて分数が導入される.

> 分数の必要は，連続せる量を計らんとするより起こるものなることは読者の熟知するところなり．然りといえども，数の観念そのものと量との間には必至的の関係あるにはあらず，数は数として独立の存在を有し得べきものなり．量と数との関係は後章に至ってこれを詳論す

べければ，今この章において分数の観念を導入せんとするに当たりては単に解析的の側よりして之を考究するにとどむべし.（中略）

整数 (＝自然数）a が b の倍数にあらざるときは，$a \div b$ は本来何らの意義も有せざることはしばしば言へるところなり.（分数の四則などということは）まっく意義を有せざる語にして，こは自家撞着に陥らざる限り，吾輩の随意に規定し得べきことなり．然りといえども，吾輩がいたずらに数の観念を拡張せんと欲する所以のものはこれに依りて論理の汎通と学説の系統の統一とを得んがためなれば，今設けんとする諸々の規定はよくこの目的に叶わんことを要すべし．これに依りてこの新たに定むべきすべての分数に汎通する諸規定は特別の場合に於いて既に整数のために設けたる諸々の規約と一致せざるべからず.

ここに述べられている「論理の汎通」という考え方は,『新式算術講義』で詳述されるが,「自家撞着に陥らざる限り，吾輩の随意に規定し得べきことなり」から見られる通り，公理主義的な主張も含んでいる.

注：藤原松三郎『代数学 I』によれば,

1. 新しい数を定義するに，旧い数の一対を以てする思想はハミルトン（1837）が複素数を定義せしに始まる．これを自然数より分数を定義する時に用いたのはタヌリ (1894) であり，正数より負数を導く際に利用したのはワイヤシュトラスである.

2. 有理数はもと量の概念より生じたものである．量の概念を離れて，形式的に有理数を扱うことはグラスマン（1844）に始まり，ついでハンケル (1867) により論ぜられた.

次は西洋数学の伝統的な見解の紹介という意味で興味深い：

そもそも数の観念の久しく明確なるを得ざりしは，数と量とを混同せるに職由せずんばあらず．数と量とは観念そのものの間に必須的の関係あるにあらず，ただ量の大小を比較するに当たり，便利のため数の助けを借るに過ぎず.（中略）

分数をもって１の若干等分を集めたるものとなすが如き，数と量とを混同せる迷想に他ならず．元来１という観念は，既に分割すべからずという意義を含有せり．その等分を云々するが如きは，これ譫語（せんご）なり．かくの如きは量を測定する方便として吾人が随意に定めたる，単位と称する，特別なる１個の量と，１なる数とを混同せるものなり.（中略）もとより分数の導入せられたるは，単位の倍に等しからざる量を測定せんとするよりその必要を生じたるものなるべしといへども，こは単に数学の進歩が特殊の事情のために激成せられたりと

いふに過ぎず．畢竟，分数なるものは 2 個の整数の群にして，かくの如き群そのものは本来何らの意義をも有するものにあらず.

6.3 『新撰算術』における量と実数の関係

『新撰算術』では次のように事が運ばれている：

1. （正の）有理数を導入する.
2. 続いてデデキントの切断を用いて有理数から正実数を構成する.
3. その後，同種の量の定義をし，実数との連絡を図る.
4. 実例として,「直線の長さ」,「平面多角形の面積」,「曲線の長さ」等が連続量であることを証明する.

6.4 純粋数学への道程

『新撰算術』の「結論」として次が述べられる：

1. まず「解析的」方法によって数概念を確定した.（すなわち，数体系を量概念とは独立に確立した.）
2. ついで「総合的」方法によって数体系を定めた.（すなわち，数学の歴史に徴し，量を根拠として数概念を定めた.）

> 然れども純正数学の眼孔より考察するときは，かくの如き総合的の方法を採らんは望ましからぬ事なりと謂わざるを得ざるが如し．その故は数の観念をさらに拡張して，いわゆる複素数を導かんとするに至れば，この総合的の方法に於いてはにわかにその歩趨を転ぜざるを得ざれども，解析的の方法に依るときは終始一貫して「算法の汎通」を方針として，同一の歩武をとることを得べきによれり.

こうした結語に続いて，算法の汎通という思想の実例として負数の定義と虚数の定義が与えられる.「算法の汎通」というハンケルの用語は「形式不易の原理」と呼ばれて当時は一世を風靡した考え方であったらしい．歴史的には公理主義, あるいは抽象数学（外的世界との独立性という意味で）への途中の段階的概念であると位置づけられるだろう.

> $\alpha < \beta$ なるときは $\alpha - \beta$ の如き記号は意義を有せざるものなり．然れども吾輩は減法を汎通ならしめんが為に，かくの如き記号にある意義を付し，その四則の算法の約束を定め，しかもこの約束は意義ある減法の場合と同一の法則に従ふものとなさんと欲す.

7 『新式算術講義』(1904)

『新式算術講義』では，個数を数えるにしても順序を付けざるを得ないから序数が数の基本であるという見解に基づいて自然数の基礎付けが行われる．次の言葉は「数は人間精神の自由な創造物である」（デデキント）を連想させ印象的である：

> 吾人が数ふべき物の数には限りなし．限りなき物を代表せん為には又限りなき物を要す．この限りなき物を代表せんが為に，人の作り出せるを数（順序数）となす．数は人の理性を離れて先天的の実在を有するものに非ず．数の真相を知らんと欲せば，その起源に遡らざるべからず．

7.1 『新式算術講義』における自然数の定義

自然数の定義，すなわち，

1. 自然数は線型順序をなす．
2. 各自然数 a には直後の数 a' がある．
3. 最初の自然数がある．
4. b が a より後ならば，a から直後の数，その直後の数，と続けていけば，しまいには b に達する．

を与える．これは，集合という概念が意識されていないので当然のことであろうが，ペアノ算術 **PA** に近い定式化である．

7.2 『新式算術講義』における整数

「広義の数」，すなわち整数の「原則」（その脚注で「現代の数学では，公理と称すべし」と述べている）は簡単に言えば，双方向に直線的に無限に連なる列であるということを文章化したものである．引き算が何時でも出来るように，いわば，やむをえず導入するという姿勢から，一方向だけではなく両方向に数が並んでいる方が応用面ばかりではなく，本質的だという認識に変わったことが指摘できる．自然数の直後に整数を定義するのはきわめて斬新だっただろう．ランダウ ([7]: 1929) ですら，正実数の導入が終わってから負数の定義に入っていることを思えば，その先駆性が知られる．

以上は数及び大小という語の定義なり．なぜに数はかくあらざるべからざるかといふは意義なき疑問なり．しばらく吾人は数の観念を失へりとすべし．これ時に当たりて卒然吾人の面前に投ぜられたるは上文の定義にして，数とはかかるものぞと告げられたる吾人はこの三カ条の規定を前提となして，ここに定められたる「数」なるものの性質を研究せんとす．これ吾人の立脚点なり．

7.3 『新式算術講義』に見られる公理主義

『新撰算術』と比較するとき，たとえば $a+b$ の定義を，a^+ を a の直後の数として，回帰的に，

$$(a,\ 0)=a,\ \ (a,\ b^+)=(a,\ b)^+$$

で与えるなどの抽象主義が顕著となっている．次いで抽象的に負数の演算を定義したのに対して

一見はなはだ唐突，不自然，形式的なる観あるに似たりといへども，つらつら考ふれば，かく抽象的に根本的の観念を定むるは，かへってその観念の応用の区域を拡大する所以なるを知るべし．

と説明している．ヒルベルトの『幾何学の基礎』(1899) が出版されて間もないことも考えれば，公理主義に基づく最も初期の著作だっただろう．しかし公理主義の元祖ヒルベルトに師事したという割には公理主義を前面に押し出すことはしていない．その代わり，日本の読者のレベルを考えたものかどうか，定義の妥当性を読者に納得させるために「形式不易の原理」を詳細に論じている．数は矛盾なきようにわれわれが「定義する対象」であるという「形式不易の原理」の観点は公理主義への橋渡しの役割を果たしたということになろう．

ところで,『新式算術講義』においても集合についてはほとんど触れられていない．先述の通り，デデキントの『数とは何か』の歴史的意義の一つは集合の演算を取り入れたことだが，1904 年に至るも集合論が取り入れられていないというのは，ラッセルのパラドクスから生じたトラブルを避けようということなのか，日本の数学が集合を基礎とするようなレベルに達していなかったということによるのだろうか．この辺ははっきりとはしないが，中村幸四郎先生が後年「先生は帰朝後もわれわれが抽象的公理論的方法を採り入れるようになるまで放置されていたのはなぜか」と「執拗に」質問したのに対し,「時期が早すぎた」とのみ答えられた（『追想　高木貞治先生』: [10]）という文章から，当時の日本数学界の様子を窺うことができる．中村幸四郎さんが問題にしている事は公理的方法のみではなく，集合論的方法にも関わることだったことになるのである．

なお，公理主義という言葉には二通りの意味があることを指摘しておきたい．たとえば実数体の公理系を与えることは，その範疇性（一意的存在性）を前提にし

ているので，同型ではないものが無数に存在する群の公理などとは，大分異なる．こういう場合は，公理 (axiom) というよりは公準（postulate）と呼ぶ方がふさわしいのかもしれない.（もちろんこれらの歴史的意味とは無関係の話である.）あるいはまた，物理学における原理という用法に近いかもしれない．とにかく矛盾を生じなければ任意に選べる仮説的命題というわけではないのである．

7.4　『新式算術講義』における有理数

『新式算術講義』では，分数を順序関係を延長するという立場に立って導入している．直線上に整数をならべ，整数 k と $k+1$ の間を n 等分する．そこで (新しい記号が使われているが，結果としては）順番に $\frac{kn+1}{n}$，$\frac{kn+2}{n}, \cdots,$ $\frac{kn+n}{n}$ という分数を考えている．

7.5　形式不易の原理

『新式算術講義』では，整数や分数の概念の由来をハンケル (1839-1873) の「形式不易の原理」に帰している.「算法と論理の汎通の要求をもって数の範囲を拡張するの動因となす」というこの原理はハンケルが命名したもので，当時は広く支持されていたらしい．しかし，この思想は半世紀前のイギリスの数学者ピーコック（1791-1858）の著書『代数学』（1830）における『形式普遍の原理』にまで遡るのではないだろうか.

ピーコックの場合は正の数で成り立つ命題を負の数にも成り立つと認めるという方法であったが，ハンケルは汎通の要求に基づいて，新たに数を定義するという考え方であり，高木の場合はもう少し公理主義に近づく移行期として形式不易の原理を使っているので，これらの思想にも少しずつ違いが認められる．

なお，ヒルベルト『論理学および数論の基礎付け』（1904）は公理主義と記号論理とを融合して数体系を基礎づけようという最初の試みである．

7.6　『新式算術講義』における量

最初に量の公理的扱いを説明して，次に量の比として正の有理数を説明する．さらに有理数だけでは量の数値を尽くすことが出来ないとして正実数登場の必然性を説き，改めて切断による（正の）実数の定義が導入される．

『新式算術講義』の実数論の特徴はカントルやデデキントと違って公理的に実数体の特徴付けを行っていることである．現今の言葉で言えば，連続な順序体として実数体を定義するということである．この実数体の公理系を与える方法は高木のオリジナルではないかと思われる．

「これらの（カントルやデデキント等の）方法はすべて有理数を既知の観念として，これを基礎にして無理数の観念を定めている」ので，その方法は「開発的 (genetisch, heuristisch)」であると高木は指摘している．この開発的という言葉は（後に改めるように）構成的という方が正しいだろう．

それに対して，本書の方法はデデキントの法則に従いながらも「アキシオマチック（公理的)」の方法に準じて数の観念を説明したと書いている．ランダウの『解析学の基礎』（1929：[7]）も「開発的」な与え方をしているのを見ると，上の定義のような公理的特徴付けは高木のオリジナルなのではないだろうか．

実数の体系を公理的に与えた場合にその後どう展開していくのかの処方も脚注の最後に与えられている．すなわち，0 は与えられているので，それより大きい任意の一数を採り，これを 1 と名付ける．$1+1$ をもって 2 と名付ける．等々．さらに連続の公理から等分ができて分数が導入できる．といった次第で数の体系が定まっていくと述べている．既存の有理数体をこの体系の中に埋め込む方法が述べられているのである．

8 『数学雑談』（1935）

高木は数体系の理論を研究するために集合論を勉強したもののようである．あるいは，日本の数学界も集合という新概念を受け入れるまでに成長したということだろうか．

部分集合を表す $A \subset B$ という記号法は，だれの創始になるか寡聞にして知らないが，1935 年にはまだ普及しているというほどではなかったはずである.『数学雑談』では「A が B の部分集合であることを $A(B$ と略記する．記号 (は扁平なる形を用いたいのだけれども，とりあえずこれで間に合わせておく.」といった記述があって，日本で最初に使われた部分集合を表す記号であろうと思われる.（ランダウ [7] では部分集合を表す記号は使われていない.）

選択公理の理解が浅いなど,『数学雑談』では少しアマチュアっぽいところもあるが，次著『数の概念』では本格的になっている．なお，ツェルメロによる「選択公理からの整列定理の証明」を著書で紹介したのはわが国で最初の事だったと思われる．

量の理論の「附記」では，これまでの実数論に対する不満とそれを越えるための試行錯誤が赤裸々に語られていて興味深い．西洋の実数論の紹介にとどまらず，自ら満足のいく実数論を求めて悪戦苦闘した日本ではただ一人の数学者であったと言っても良いのではないだろうか．

8.1 『数学雑談』の自然数論

『数学雑談』ではランダウの『解析学の基礎』（1929）に基づき自然数論を展開している．すなわち次の通り：

定義　自然数と称する「もの」全部の集合が既に与えられてあるものとする．

公理 1　1 は自然数である．

公理 2　各自然数 x には「その次の自然数」x' が一つしかも唯一つある．

公理 3　x を自然数とすれば $x' \neq 1$

公理 4　$x' = y'$ ならば，$x = y$

公理 5（帰納公理）　M が自然数の集合で，

(I) M は 1 を含む．

(II) M が x を含むならば，また x' をも含む．

とする．しからば M はすべての自然数を含む．

8.2　数学的帰納法による関数の定義

以前に述べたが，デデキントの自然数論は集合論を背景にしており，ペアノの自然数論 **PA** は 1 階論理を元にしている．この観点から見たとき，自然数の加法に関する次の議論は興味深いだろう．

高木は，

$$x + 1 = x', \quad x + k' = (x + k)'$$

によって和 $x + y$ が定義されたと考えるだろうが,「それでは関数を定義したことにならない」というランダウの言葉に賛意を表して，回帰性定理の必要性を次のように述べている．

> ペアノ及び彼の追随者はこれで（次々に値が定まるので）問題が解かれたと思うているようだが，関数の存在は「一寸も証明されていないではないか」と L 君が言う．全く！　L 君の言う通りである.（ペアノの）証明は関数 $\Phi(y)$ の存在を仮定して掛っている.（中略）$\Phi(1)$ がきまれば $\Phi(2)$ がきまり, 従って $\Phi(3)$ がきまり，等等等又は $\cdots$ で，任意の n に対して $\Phi(n)$ がきまる．尤も千万ながら，その $1, 2, \cdots, n$ に困るのである．等等等や，$\cdots$！　それで自然数を統御する積りならば公理も何もない.（中略）イタリア語を使うていては論理が滑るからというて，思想記号（pasigraphy）まで編み出して論理の安全を保証しようという P 氏である．しかし思想は霊妙であって，言語や記号までは統制されない．既にイタリア語で滑る心配がある思想ならば，pasigraphy でも躓き得る可能性があるであろう．それが実演によって示されたのは，笑止ながら教訓的である．

さて問題の回帰性定理というのは，漸化式が与えられたとき，確かにそれによって数列（言い換えれば，$\mathbb{N}$ 上で定義された関数）が定まることを保証する命題である．正確に言えば，次のような定理がその一形である：

回帰性定理 $a \in \mathbb{N}$ とし，F を $\mathbb{N}$ 上で定義された関数とするとき，

$$\Phi(0) = a$$
$$\Phi(n') = F(\Phi(n)) \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たす関数 Φ が存在する．

デデキント=ペアノの公理系に基づく算術（集合論を元にした自然数論）では，確かに，関数は，この場合は自然数の全体の成す集合 $\mathbb{N}$ 上で定義されていなければならないが，ペアノ算術 **PA**（論理だけの世界）では,「任意の自然数に対して定義されていないから，次々定義されていくだけではダメだ」というのは，ペアノがどの程度理解していたかは別にしても，現代の目から見れば，誤解に基づく難癖であることになる．しかし，この違いを知らねばならないと要求するのも，時代と高木が基礎論の専門家ではなかったということを考えれば，無理筋というものであろう．

ところで回帰性定理は，高木の書き振りを読むと，如何にもランダウが初めてその重要性に気がついて定理として取り上げたように聞こえる．実際ランダウ [7] の序文に回帰性定理の必要性に気が付くようになったいきさつが詳細に描かれている．しかしながら，回帰性定理はすでにデデキント [1] において完璧に定式化され，加法や乗法などの演算の定義に使われているのである．つまりデデキントは「次々値が定まる」では不備だということを，ランダウを遡ること 40 年前にすでに明確に認識していたのである．

8.3 『数学雑談』における量の理論

『数学雑談』でも，無理数論の起源であるとして，量の理論の公理付けから入っている．その上で，デデキントに従って有理数体から実数体を構成している．

> 以上述べ来ったことは無理数の起源，無理数論の縁起である．連続的なる量の数値を得るために有理数以外に無理数を創造するに至った由来である．それ故に連続量に関する公理を考察の基礎としたのである．
>
> ここまでくれば，量などを追い離してしもうて，公理も仮定もなく，組み立て式（constructive）に無理数の定義を立てることができる．

と述べ，有理数体から実数体をデデキントに従って構成する．このとき負の実数を同時に扱っていることとともに,「発生式」と呼んでいたのを「組み立て式」と言い改めたのが注目される．

また，カントルの方法とワイヤシュトラスの方法にも言及している．後者について書いてある文献は珍しいだろう．

量の公理系はこれまで通りである：

(I) （順序性）量の比較に関する公理
(II) （加法性） 量の和に関する公理
(III)（連続性） 連続の公理

『数学雑談』の量の理論における最大の特徴はその「附記」に現れている．高木は (I),(III) は必然的だが，(II) は「規約的（conventional）である」として大いに不満を述べる．

8.4 高木のこだわり

> 加合の公理はあまりに幾何学的である．その思想上の基礎は「合同」の観念である．故に空間（長さ）を連続的量の標本とするときには先天的 à priori の威力を持つように感ぜられる．質量にしても同様である．今翻って時間を対象にして見れば，そこには「合同」の威力が著しく希薄なることを感ずるであろう.（中略）時計などを引き合いに出しても駄目である．時計は「コンヴェンション」で，時間を空間に従属せしめる機械に過ぎない．

集合論の勉強の結果,

C 公理 稠密に分布する可算個の量が取れる．

が（II) の加法公理に代用出来ることを知るが，次のような感想を述べる：

> 我々の立場においては，しかしながら（C) は用に耐えない．(II) は conventional でも不自然ではないが，(C) はあまりに技術的（artificial）である．しかし連続集合の標本として時刻の集合を取るならば，(C) も捨て難いところがある.（中略）もしも (II) は何やら conventinal で,(C) はどこやら artificial である所に不満を感じて，それらを鵜呑みにすることが出来かねるとしたならば，善後策は如何．無理にも問題を終結させるために，斉質（各区間が順序同型ー足立注）なる連続集合の「最小型」などをテイマとして持ち出して見る誘惑もあるが，やや「暴力的」に感ぜられる.（中略）そこで本稿が又しても未定稿で終るのである.（中略）第四回の無理数論を書くべき機会が筆者に与えられるや否や，段々覚束なくなるから,「何がこれを未定稿にしたか」を告白して，筆を置くのである.（昭和五年二月）

高木はこのように述べるが,「第四回の無理数論」を書く機会を得て，それが次の『数の概念』として結実する．結論から言えば，結局は「暴力的」なる連続集合の「最小型」を持ち出して結末を付けることになる．

9 『数の概念』(1949)

- 高木は『新撰算術』の発刊から数えて51年後に当たる1949年（74歳）最後の著書である『数の概念』を出版した．
- 前3著作から一転して『数の概念』では，量の概念にはまったく触れず,「哲学的傾向を有する人々の関心をひくべき問題」として，純然と数の体系の基礎を論じる．量を数概念に生かすのであろうと，数を量に応用するのであろうと，そうしたことにはまったく触れないのも数学観の変化に根差すのであろう．
- 「前書き」において集合，写像に関する基礎概念が説明される．記述は完全に公理主義的である．そのおかげで記述が明快，かつ簡潔になり，読み易さは前3著作とは比較にならない．この50年がどんなに著しい変化を数学にもたらしたかがよくわかる．同時に,『数の概念』が刊行されてから半世紀以上経つが，この間は記号法や記述の仕方，つまりは数学観に，大した変化がないこともよくわかるだろう．

9.1 『数の概念』における整数

第1章では自然数から入るのではなく最初から整数の体系が公理的に与えられる.「序」に，次のようなとても意味深い言葉がある．

> 我々の整数は，物の数でもなく，物の順序を示すものでもない．しかし，物の数を示すためにも，物の順序を示すためにも，なお一般に，物の標識（符牒）としても用いられる．0は加法の基準として，我々が任意に整数の体系の中から取り出した一つの整数である．それは，無を示すものではない.（中略）事実は，我々が常用の言語に順応して，我々の記号 $0, 1, 2$ を零，一，二と呼ぶことにしたのである．

整数の公理系の与え方は高木のオリジナルであると思われる．自然数をモノの勘定から生ずる特別な存在とのみ見る流儀は現在でも主流を保っていることを考えれば，新たな境地を開いたと評価することができるだろう．

しかしながら，高木は整数の体系を先以て作っておき，これとは別に新たに構成した実数体（1次元連続体）に整数の体系を埋蔵するという方法を取っているのは，数を量と同一視するという本稿で述べた歴史の流れから言うと，まだ徹底度

を欠いているのではないかと思うが，この点に関してはまた別の機会に論じることにしたい．

次がその整数の公理系であるが，記述の仕方は少し変えてある（たとえば全単射というような術語ではなく，1 対 1 の自己対応 $x \leftrightarrow \varphi(x)$ と書かれている）：

定義 次の性質を持つ写像 $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を備えた集合 $\mathbb{Z}$ を「全ての整数の集合」と言う：

公理 1 φ は $\mathbb{Z}$ 上の全単射である．

公理 2 $M \subseteq \mathbb{Z}$, かつ $\varphi(M) = M$ ならば $M = \mathbb{Z}$

公理 3 $\mathbb{Z}$ は（デデキントの意味で) 無限集合である．

$\mathbb{Z}$ の任意の点を取って 0 とし，$\varphi(0)$ を 1，$\varphi^{-1}(0)$ を -1 とするなど，その後の進め方はルーチンである．

「整数（の全体）を 1 対 1 の自己対応を許す不可分なる一体系として規定する」方法はきわめて斬新であり，それは「必ずしも不自然ではなく，数学的には，むしろ簡明である」という見方には大いに同感できる．

なお,「すべての無限集合は可算無限集合を含む」という命題を導くのに選択公理が必要なことが（『数学雑談』と違って）正しく認識されている．

10　連続体の定義 I

連続体（言い換えれば，実直線）の公理系はまず以前のものを踏襲する．

空でない線型順序集合 $\mathbb{L}$ は次の条件を満たすとき**連続体**と呼ばれる：

I　(無限界性) $\mathbb{L}$ は上下に非有界である．

II　(連続性) $\mathbb{L}$ は連続である．

III　(加法性) $\mathbb{L}$ は順序加群をなす．

連続体に体の構造を入れることは簡単で，これが実数体である．この実数体に，先に定義されてある整数環を埋蔵するのも簡単な作業である．しかし，高木は加法構造が表に出ていることには，再度時間の例を挙げて不満を述べる．

> 我々は実数の集合を，加法公理を許す連続体として規定した．加法公理は合同の概念を根拠とするもので，それは空間（直線）の場合，最も直感的というべきものであろうが，時間に適用するとき，事情は一変する．時間の合同ということは，間接的，規約的（conventional）である．

10.1　カントルによる実数体の特徴付け

高木は『数学雑談』に続いて順序性，加法性，連続性の３公理による実数体の特徴付けを取り上げ，再度時間の例を挙げて加法性に不満の意を表明する．その上でカントルによる連続体（実直線）の特徴付けを紹介する：

空ではない線型順序集合 $\mathbb{L}$ は次の性質を持つとき**連続体**と呼ばれる：

I（無限界性）$\mathbb{L}$ は上にも下にも有界ではない．

II（連続性）$\mathbb{L}$ は連続である．

III（可分性）$\mathbb{L}$ は稠密な可算部分集合を持つ．

連続体に実数体の構造を入れることは「無限界で稠密な可算順序集合は有理数体と順序同型である」（カントルの定理）によって容易である．問題点としては，カントルの定理の証明が自明とは言えないことともに，可算集合というような術語がこの段階で現れることが挙げられるだろう．

10.2　高木による連続体の特徴付け（最終形）

高木は「技巧的なる可附番を払拭」するとして次を提唱する：

IIIa.（最小性） 連続かつ無限界なる線型順序集合はすべて $\mathbb{L}$ と同型なる部分集合を持つ．

これが高木による連続体，実直線，実数体の特徴付け（＝公理系）の最終形であった．

IIIa と III との同値性の証明には選択公理が必要となるが，これに代えて次を採用すると選択公理は必要でなくなる（上江洲忠弘氏による）：

IIIb（最小性） $\mathbb{L}$ の部分集合が無限界で連続ならば $\mathbb{L}$ と同型である．

『数の概念』における数体系の基礎付けは，西洋の数学に 50 年遅れた状態から出発した高木の（ということは，つまり日本の）数学がその後 50 年かけてどのように発展したか，その到達点を示すものとして意義が深く，またその思想性，独創性という観点からも高く評価できる．

参考文献

[1] Dedekind, R., Was sind und was sollen die Zahlen? (1887) : 河野伊三郎訳『数について』, 岩波書店（1961）

[2] 『フレーゲ著作集』第 2 巻「算術の基礎」, 第 3 巻「算術の基本法則」, 勁草書房 (2001）

[3] ペアノ『数の概念について』, 共立出版（1969）

[4] 高木貞治『新撰算術』, 東京博文館　(1898)

[5] 高木貞治『新式算術講義』（1904 :ちくま学芸文庫 2008）

[6] 藤原松三郎『代数学 I』, 内田老鶴圃（1928）

[7] Landau, E. Grundlagen der Analysis, (1929)：英訳 Foundations of Analysis, Chelsea (1951)

[8] 高木貞治『数学雑談』, 共立出版 (1935)

[9] 高木貞治『数の概念』, 岩波書店（1949：改訂版 1970）

[10] 『追想　高木貞治先生』（1987）