

# トポロジー最適化法による最適設計計算 — 流体関連分野での応用の試み

近藤 継男

(株) 豊田中央研究所

## 1 はじめに

CAE (Computer-Aided Engineering) という言葉が広く定着していることが物語るように、様々なモノづくりのなかで、シミュレーション技術は不可欠のものとなっている。自動車にかかわるモノづくりにおいても、構造・強度、衝突安全、熱・流体といった機械系の技術領域をはじめとして、エレクトロニクス、情報、材料などを含むあらゆる技術分野で、シミュレーション技術が活用されている。そして数学は、このようなシミュレーション技術を基礎から支える。

モノづくりにおける設計とは、大雑把に言えば、所望の性能を与えるように設計変数 (典型的にはモノの形すなわち設計対象の形状や寸法) を定めることである。そこで用いられる手法は、いまでも多くの場合、試作と性能評価を繰り返す試行錯誤的なものである。そのなかでシミュレーション技術は、実験とともに (あるいはその代りに) 主に性能評価の手段として利用され、費用の削減や時間の短縮、より良い性能の実現などを通じ、モノづくりに多大の貢献をしている。

最近では単一の技術領域にとどまらず、例えば「構造・強度 + 熱・流体 + 電磁気」など、複数の物理現象を同時に扱うマルチフィジクスのシミュレーション技術 (MP Sim) も開拓され、適用できる問題の範囲が広がるとともに、より現実に近い問題設定の下での性能評価が可能となってきた。加えて、例えば物性が不明の材料を扱う場合など、ミクロスケールでのシミュレーションにより材料の特性 (物性) を求めたうえで、そこで得られた物性をを用いたマクロスケールでのシミュレーションにより設計対象の性能を評価するという、マルチスケールのシミュレーション技術 (MS Sim) も生まれつつある。

このように、シミュレーション技術はモノづくりのなかで既に大きな役割を担い、またいまでも進歩を続けている。今後これがさらに発展し、所望の性能を実現する設計変数 (モノの形) を試行錯誤によることなく求めることができるようになれば、シミュレーション主導のモノづくりが実現することになる (図 1)。ここで必要となるのが最適化 (Opt) の方法論である。最適化を含むシミュレーション技術に関する研究は、その取り組み全体としては決して新しいものではないが、様々なモノづくりに適用できる汎用的な技術にまでは至っていない。そのなかで最近、トポロジー最適化法などの数理的最適化手法に基づくシミュレーション技術に実用の可能性が高まってきた。いまのところまだ適用できる問題の範囲は限られるが、その将来には大きな期待が持たれる。本稿では、筆者の周辺で最近行った、流体関連分野でのトポロジー最適化法の応用の試みを紹介する。なお本稿の内容は、2010年9月に開催された日本数学会秋季総合分科会において特別招待講演として講演した内容の主要部分をまとめたものである。

## 2 トポロジー最適化法の流体関連問題への応用— 低レイノルズ数の流れ のなかで抗力が最小あるいは揚力が最大となる物体形状の探索

物体の形状をそのトポロジー (穴の有無や領域の連結性など) も含めて最適化することが可能なトポロジー最適化法は、Bendsøe and Kikuchi [1] による先駆的な研究に端を発する。その後この方法は著しい発展を遂げ、構造・強度設計の分野では既に幅広く活用されているほか、伝熱、音響、電磁気などの分野にもその応用が広がっている [2]。そのなかで流体関連分野への展開はなかなか進まなかったが、比較的最近になって、Borrvall and Petersson [3] によりこの分野の問題を扱う方法が開拓された。そしてこれを契機として、Stokes 流や、レイノルズ数が 100 程度以下の非線形粘性流 (Navier-Stokes 方程式) を対象に、流路の壁面形状や流体中の物体形状を最適設計する問題への応用が試みられるようになった。ただし、これまでのところ、レイノルズ数が 100 程度を超える非線形粘性流を扱った研究や、非線形粘性流中での揚力の最大化を試みた研究は、ほとんど見られない。

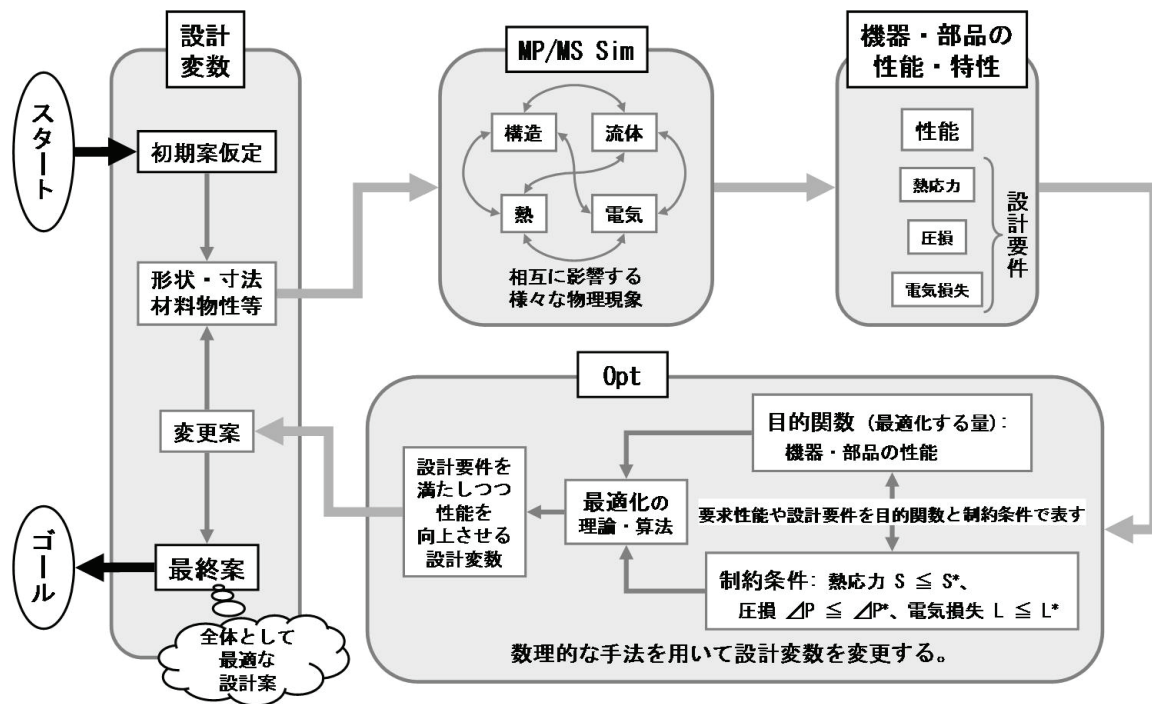


図 1: 数理最適設計システム— MP/MS Sim + Opt によるモノづくり

以下では、トポロジー最適化法の流体関連問題への応用に関し、問題の定式化を簡単に説明するとともに、この方法を用いて低レイノルズ数の流れのなかで抗力が最小あるいは揚力が最大となる二次元あるいは軸対称の物体形状を探索した結果を示す。二次元問題に関しては、レイノルズ数が 2,000 以下の流れを対象に、断面積一定の制約条件の下で抗力が最小となる二次元柱状物体の断面形状を求めた結果と、レイノルズ数が 10 の流れを対象に、断面積一定ならびに抗力上限の制約条件の下で揚力が最大となる二次元柱状物体の断面形状を求めた結果を紹介する。また軸対称問題については、やはりレイノルズ数が 2,000 以下の流れを対象に、体積一定の制約条件の下で抗力が最小となる軸対称物体の子午面形状を求めた結果と、Stokes 流中で抗力が最小となる軸対称物体の子午面形状を求めた結果を紹介する。詳細については文献 [4]、[5] を参照されたい。なお、本稿で紹介する計算には、有限要素法による汎用ソフトウェア COMSOL を利用した。

## 2.1 基礎方程式

**物体形状の表現** 領域  $\Omega$  内の任意の位置  $\vec{x}$  が流体で占められるか否かを、次に記すような関数  $\gamma(\vec{x})$  (流体分率あるいは無次元流体密度と解釈することができる) で表す。そして  $\gamma(\vec{x})$  の空間分布により、流体が存在する領域の形を表すとともに、その境界となる壁面や物体表面の形状をあわせて表現する。最適化問題の定式化をする際、この関数  $\gamma(\vec{x})$  が設計変数 (設計上変更し得る量) となる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\vec{x}) &= 0 && \text{固体部分} \\ 0 < \gamma(\vec{x}) < 1 && \text{中間部分} \\ \gamma(\vec{x}) &= 1 && \text{流体部分} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

**質量ならびに運動量の保存則** 定常、非圧縮性の粘性流体 (ニュートン流体) の流れは、速度ベクトル  $\vec{u}(\vec{x})$  と圧力  $p(\vec{x})$  を基本変数とする次のような質量ならびに運動量の保存則により記述される。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u}^T) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{f}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}p + \frac{1}{\text{Re}} \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \vec{f}(\vec{x}) \quad (3)$$

ただしすべての変数は流れ場の代表長さ  $L$  と代表速度  $U$  ならびに流体の密度  $\rho$  を用いて無次元化されている。なお、 $\bar{\sigma}$  は流体中の応力 (テンソル)、また  $\vec{f}(\vec{x})$  は流れのなかに存在する物体の影響を表す体積力 (ベクトル) で、その意味と具体的な数式表現はこのあとに説明する。

**構成方程式** 流体中の応力  $\bar{\sigma}$  は等方的な圧力  $p$  と、速度ベクトル  $\vec{u}$  の空間勾配の一次式 (ニュートン流体の場合) として表現される粘性応力 (テンソル)  $\bar{\tau}$  とから成る。

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau}, \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \vec{\nabla}\vec{u} + \left( \vec{\nabla}\vec{u} \right)^{\text{T}} \right\}; \quad \text{Re} \equiv \frac{UL}{\nu} \quad (4)$$

ただし、 $\bar{I}$  は 2 階の単位テンソル、 $(\cdot)^{\text{T}}$  はベクトルあるいは行列の転置、 $\nu$  は動粘性係数、Re はレイノルズ数である。

**境界条件** 領域  $\Omega$  の境界 (表面)  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$  において、例えば、下記のような境界条件が課せられる。

$$\vec{u} = \vec{u}_* \quad \text{on } \Gamma_u, \quad p = p_* \quad \text{on } \Gamma_p \quad (5)$$

**運動エネルギーの保存則** 質量ならびに運動量の保存則と独立なものではないが、式 (3) と速度ベクトル  $\vec{u}$  との内積をとることにより、次のような運動エネルギーの保存則が導かれる。

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{u} \frac{\vec{u}^2}{2} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left( \bar{\sigma}^{\text{T}} \vec{u} \right) - \Phi + \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{u} \quad (6)$$

ただし、 $\Phi$  は粘性により流体内部で散逸するエネルギーの量 (単位時間、単位体積あたり) を表す。

$$\Phi \equiv \bar{\tau} : \vec{\nabla}\vec{u} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \vec{\nabla}\vec{u} + \left( \vec{\nabla}\vec{u} \right)^{\text{T}} \right\} : \vec{\nabla}\vec{u} = \frac{1}{2\text{Re}} \left\{ \vec{\nabla}\vec{u} + \left( \vec{\nabla}\vec{u} \right)^{\text{T}} \right\}^2 \quad (7)$$

**多孔体モデル** 流れ場の最適化問題にトポロジー最適化法を適用するにあたり、求めるべき未知の物体や壁の存在を表すために流れ場のなかに仮想的な多孔体があるものとする [3]。実は先に定義した  $\gamma(\vec{x})$  は、このような多孔体の空間分布を表すものでもある。そして、このような仮想的な多孔体が流れに対して及ぼす影響を表すのが、運動量保存則 (3) の右辺に置かれた体積力  $\vec{f}(\vec{x})$  である。Borrvall and Petersson [3] にならい、この  $\vec{f}(\vec{x})$  を流れの速度に比例する抵抗力として

$$\vec{f}(\vec{x}) = -\alpha(\vec{x})\vec{u}(\vec{x}) \quad (8)$$

としたうえで、その比例係数  $\alpha(\vec{x})$  を下記のように設計変数  $\gamma(\vec{x})$  と関係付ける。

$$\alpha(\vec{x}) = \alpha(\gamma(\vec{x})) = \alpha_{\max} \frac{q \{1 - \gamma(\vec{x})\}}{q + \gamma(\vec{x})} \quad (9)$$

ここで  $q (> 0)$  は、 $\alpha(\gamma)$  の関数形状を制御するパラメータで、例えば  $q = 0.1$  とする。また  $\alpha_{\max}$  には、式 (3) 中の他の項の係数と比べて十分大きい値 (理想的には無限に大きい値) を与える必要があり、本研究ではこれを

$$\alpha_{\max} = \left( 1 + \frac{1}{\text{Re}} \right) \chi \quad (10)$$

としたうえで、 $\chi$  に十分大きい値 (例えば  $\chi = 10^4$ ) を与える。このように  $\gamma$  の関数として表現された  $\alpha(\gamma)$  を通じ、流れ場の基本変数である速度ベクトル  $\vec{u}$  と圧力  $p$  は、設計変数  $\gamma$  に依存する量となる。

## 2.2 目的関数— 流れが物体に及ぼす抵抗力ならびに揚力の表現

最適化問題では、設計上最大あるいは最小にしたい量を何らかの形で設計変数  $\gamma$  の関数として表現する。このような関数  $J = J(\gamma)$  は目的関数と呼ばれる。実際には扱う問題に現れる基本変数 (ここでは速度ベクトル  $\vec{u}$  と圧力  $p$ ) の関数として表現されることが多く、その場合  $J$  は  $\gamma$  の陰的な関数となる。

ここでの目的は、流れが物体に及ぼす力  $\vec{F}$  のうち、その  $x$  方向成分である抗力  $D$  を最小化、あるいはその  $y$  方向成分である揚力  $Y$  を最大化することである。これらの力は、最も直接的には物体表面にはたらく応力 (圧力と粘性応力) の積分として表現することができる。しかしトポロジー最適化法で多孔体モデルを用いて物体周りの流れを計算する場合には、このような物体表面積分による  $\vec{F}$  の表現は困難である。そこでそれとは異なる形で  $\vec{F}$  を表現することが必要となる。その際、先に記した三つの保存則を流れ場全体で積分したものがよりどころとなる。

**流れ場全体での保存則の積分** 質量 (2)、運動量 (3)、ならびに運動エネルギー (6) の保存則を流れ場の領域全体  $\Omega$  で積分すると、流れ場全体での質量、運動量ならびに運動エネルギーの保存を表す次のような式が得られる。

$$\int_{\Gamma} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma} \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \vec{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}) d\Omega \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma} \left( p + \frac{\vec{u}^2}{2} \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \left\{ \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{u} - \Phi \right\} d\Omega \quad (13)$$

ただし、 $\Gamma$  は領域  $\Omega$  の境界、 $\vec{n}$  は境界  $\Gamma$  上での (流れの側から見た) 外向き単位法ベクトル、 $\vec{\sigma} = \tilde{\sigma}\vec{n} = -p\vec{n} + \vec{\tau}$  と  $\vec{\tau} = \tilde{\tau}\vec{n}$  は  $\Gamma$  上にはたらく応力ベクトル (全応力) と粘性応力ベクトルである。

**保存則の積分に関する補助的な関係式**  $\vec{V}$  を任意の定ベクトルとして  $\vec{V}$  と式 (12) との内積をとると、

$$\int_{\Gamma} (\vec{u} \cdot \vec{V}) (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \vec{\sigma} \cdot \vec{V} d\Gamma + \vec{V} \cdot \int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}) d\Omega \quad (14)$$

となるが、この式は下記のように書き改めることができる。

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ \vec{u}^2 + \vec{V}^2 - (\vec{u} - \vec{V})^2 \right\} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \vec{\sigma} \cdot (\vec{u} - \vec{V}) d\Gamma - \int_{\Gamma} (-p\vec{n} + \vec{\tau}) \cdot \vec{u} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ \left( p + \frac{\vec{u}^2}{2} \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) - \vec{\tau} \cdot \vec{u} + \vec{\sigma} \cdot (\vec{u} - \vec{V}) - \frac{1}{2} (\vec{u} - \vec{V})^2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

ただし式を変形する過程で式 (11) を用いた。さらに式 (13) を考慮すると、この式は次のように変形することもできる。

$$\vec{V} \cdot \int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{u} - \Phi \right\} d\Omega + \int_{\Gamma} \left\{ \vec{\sigma} \cdot (\vec{u} - \vec{V}) - \frac{1}{2} (\vec{u} - \vec{V})^2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) \right\} d\Gamma \quad (16)$$

### 2.2.1 流れが物体に及ぼす力

流れが物体に及ぼす力  $\vec{F}$  は、物体表面  $\Gamma_S$  上での応力 (の反力)  $-\vec{\sigma}$  の積分として表現される。

$$\vec{F} = - \int_{\Gamma_S} \vec{\sigma} d\Gamma = - \int_{\Gamma_S} (-p\vec{n} + \vec{\tau}) d\Gamma \quad (17)$$

物体周りの流れの問題を扱う普通の計算法では、物体が占める領域を外界として扱い、その表面で非滑り境界条件 ( $\vec{u} = \vec{0}$ ) を課す。このように流れに対する物体の影響を非滑り境界条件により表現する場合には、 $\vec{F}$  を評価する式として式 (17) をそのまま用いることができる。あるいは、運動量保存則の積分 (12) を用いて (このような計算法の場合体積力  $\vec{f}$  は存在しない)、これを遠方境界  $\Gamma_{\infty}$  で運動量流束  $-\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n})$  と応力  $\vec{\sigma}$  を積分した量として表すこともできる。

$$\vec{F} = - \int_{\Gamma_S} \vec{\sigma} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\infty}} \left\{ -\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \vec{\sigma} \right\} d\Gamma \quad (18)$$

一方、トポロジー最適化法で用いられる多孔体モデルのように、流れに対する物体の影響を空間に分布する体積力  $\vec{f}$  を通じて表現する場合には、物体が占める領域でも運動量保存則が適用される。このとき、体

積力  $\vec{f}$  を領域全体  $\Omega$  で積分した量は物体が流れに及ぼす力の総量に等しく、したがってその反力は流れが物体に及ぼす力  $\vec{F}$  に等しいはずである。すなわち、 $\vec{F}$  を体積力の反力  $-\vec{f}$  の領域積分として表現することができる。

$$\vec{F} = - \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega = \int_{\Omega} \alpha(\vec{x}) \vec{u} d\Omega \quad (19)$$

この場合も、実は運動量保存則の積分 (12) を用いるとこの量は式 (18) の右辺と等しく、このことから、式 (19) により  $\vec{F}$  を評価することの妥当性が確かめられる。

$$\vec{F} = - \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega = \int_{\Gamma_{\infty}} \{-\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \vec{\sigma}\} d\Gamma \quad (20)$$

あるいはまた、 $-\vec{f}$  を積分する領域を純流体領域  $\Omega_F$  ( $\gamma = 1$  の部分) と、それ以外の純固体領域と中間領域をあわせた「擬固体領域」 $\Omega_{S^*}$  ( $0 \leq \gamma < 1$  の部分) のふたつに分けると、 $\Omega_F$  での積分は  $\vec{f} = \vec{0}$  により消滅し、また  $\Omega_{S^*}$  での積分は運動量保存則 (3) をもとに  $\vec{f}$  を  $\vec{f} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} - \vec{u}\vec{u}^T)$  に置き換えたうえで、ガウスの発散定理を利用して  $\Omega_{S^*}$  の表面  $\Gamma_{S^*}$  での積分に置き換えると

$$\vec{F} = - \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega = \int_{\Omega_{S^*}} \{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} - \vec{u}\vec{u}^T)\} d\Omega = \int_{\Gamma_{S^*}} \{\vec{\sigma} - \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n})\} d\Gamma = \int_{\Gamma_{S^*}} \{-p\vec{n} + \vec{\tau} - \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n})\} d\Gamma \quad (21)$$

となる。ここで  $\Gamma_{S^*}$  は  $\Omega_F$  と  $\Omega_{S^*}$  との界面であるが、これは擬似的な物体表面といってもよく、そこでの運動量流束  $\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n})$  はゼロに近いと考えられる。したがってこの式は

$$\vec{F} = - \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega \approx \int_{\Gamma_{S^*}} \vec{\sigma} d\Gamma = \int_{\Gamma_{S^*}} (-p\vec{n} + \vec{\tau}) d\Gamma \quad (22)$$

となり、初めに記した式 (17) と同等のものとなる。なお、 $\Gamma_{S^*}$  は擬固体領域  $\Omega_{S^*}$  の表面であり、したがって  $\vec{n}$  は (流れの側からではなく) 固体の側から見た外向き単位法ベクトルである。そのため式 (17) とは符号が反対になっている。

### 2.2.2 抗力最小化問題の目的関数

流れが物体に及ぼす抗力  $D$  は、式 (19) あるいは (20) の  $x$  方向成分として下記のように表すことができる。

$$D = \int_{\Omega} \alpha(\vec{x}) u d\Omega \equiv J_1 \quad (23)$$

$$D = \int_{\Gamma_{\infty}} \{-u(\vec{u} \cdot \vec{n}) - pn_x + \tau_x\} d\Gamma \equiv J_{2a} \quad (24)$$

$$\approx - \int_{\Gamma_{\infty}} \{u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + pn_x\} d\Gamma \equiv J_{2b} \quad (25)$$

ただし、 $u$  は速度ベクトル  $\vec{u}$  の  $x$  方向成分である。あるいは、領域全体  $\Omega$  でのみ一つの保存則の積分表現 (11)–(13)、ならびに先に導いた補助的な関係式 (16) において任意の定ベクトル  $\vec{V}$  を一様流の速度  $\vec{U}$  に等しい ( $\vec{V} = \vec{U} = [U, 0, 0]$ ) としたものをあわせて用いることにより、 $D$  を下記のように書き改めることもできる (詳しい説明は文献 [4] 参照)。なお無次元の計算では通常  $U = 1$  であるため、係数  $1/U$  は省略してもよい。

$$D = \frac{1}{U} \int_{\Gamma_{\infty}} \left\{ - \left( p + \frac{\vec{u}^2}{2} \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) - \vec{\sigma} \cdot (\vec{u} - \vec{U}) + \vec{\tau} \cdot \vec{u} + \frac{1}{2} (\vec{u} - \vec{U})^2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) \right\} d\Gamma \equiv J_{3a} \quad (26)$$

$$\approx - \frac{1}{U} \int_{\Gamma_{\infty}} \left( p + \frac{\vec{u}^2}{2} \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma \equiv J_{3b} \quad (27)$$

$$D = \frac{1}{U} \left[ \int_{\Omega} \{\Phi + \alpha(\vec{x}) \vec{u}^2\} d\Omega - \int_{\Gamma_{\infty}} \left\{ \vec{\sigma} \cdot (\vec{u} - \vec{U}) - \frac{1}{2} (\vec{u} - \vec{U})^2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) \right\} d\Gamma \right] \equiv J_{4a} \quad (28)$$

$$\approx \frac{1}{U} \int_{\Omega} \{\Phi + \alpha(\vec{x}) \vec{u}^2\} d\Omega \equiv J_{4b} \quad (29)$$

トポロジー最適化法による抗力最小化問題においては、目的関数  $J$  (この場合は最小化する量) にこれらのうちのいずれかの表現を与えればよい。

$$J = \text{one of } \{J_1, J_{2a}, J_{2b}, J_{3a}, J_{3b}, J_{4a}, J_{4b}\} \quad (30)$$

### 2.2.3 揚力最大化問題の目的関数

流れが物体に及ぼす揚力  $Y$  は、式 (19) あるいは (20) の  $y$  方向成分として下記のように表すことができる。

$$Y = \int_{\Omega} \alpha(\vec{x}) v d\Omega \equiv K_1 \quad (31)$$

$$Y = \int_{\Gamma_{\infty}} \{-v(\vec{u} \cdot \vec{n}) - pn_y + \tau_y\} d\Gamma \equiv K_{2a} \quad (32)$$

$$\approx - \int_{\Gamma_{\infty}} \{v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + pn_y\} d\Gamma \equiv K_{2b} \quad (33)$$

ただし、 $v$  は速度ベクトル  $\vec{u}$  の  $y$  方向成分である。トポロジー最適化法による揚力最大化問題においては、目的関数  $J$  (この場合は最大化する量) にこれらのうちのいずれかの表現を与えればよい。

$$J = \text{one of } \{K_1, K_{2a}, K_{2b}\} \quad (34)$$

なお、抗力  $D$  あるいは揚力  $Y$  を表す各式において近似符号 ( $\approx$ ) のあとに記された表現は、物体から十分離れたところに設けられた遠方境界  $\Gamma_{\infty}$  では速度が一様流の速度とほぼ等しく ( $\vec{u} \approx \vec{U}$ )、また粘性応力が十分に小さい ( $\tau \approx \vec{0}$ ) という近似に基づくものである。

## 2.3 制約条件

一般的な最適化問題においては、何らかの制約を設けたうえで目的関数を最小化あるいは最大化することが多い。本研究における抗力最小化あるいは揚力最大化の問題においても、流れ場の基本変数である速度  $\vec{u}(\vec{x})$  と圧力  $p(\vec{x})$ 、あるいは物体の大きさや形状、配置 (設計変数  $\gamma(\vec{x})$  がそれらを表す) に関する制約を設けることが考えられ、これを次のように書き表すことにする。

$$G(\vec{u}(\vec{x}; \gamma(\vec{x})), p(\vec{x}; \gamma(\vec{x})); \gamma(\vec{x})) = 0 \quad (35)$$

具体的には、例えば物体の前方投影面積や体積 (二次元問題であれば物体の断面積) を一定とする制約条件などが考えられる (実はこのような制約を課さないで、例えば物体の体積や断面積を小さくすることにより抗力をいくらでも小さくすることができる)。後で示す計算例においては、二次元柱状物体の断面積を一定 (無次元断面積 = 1) あるいは軸対称物体の体積を一定 (無次元体積 = 1) とする下記のような制約条件を与えている。

$$G(\gamma(\vec{x})) := \int_{\Omega} \{1 - \gamma(\vec{x})\} d\Omega - 1 = 0 \quad (36)$$

なお、無次元の断面積や体積を 1 に等しいとするのは、長さの基準量  $L$  を物体断面積  $A$  の平方根 ( $A/L^2 = 1$ ) あるいは物体体積  $V$  の三乗根 ( $V/L^3 = 1$ ) とするためである。

## 2.4 計算手順

抗力最小化問題においては、例えば式 (36) のような制約条件の下で、式 (23) のような目的関数  $J = J_1(\vec{u}(\vec{x}; \gamma(\vec{x})); \gamma(\vec{x}))$  を最小化する設計変数  $\gamma(\vec{x})$  の分布を計算により求める。その手順の概略を下に記す。

1. はじめに、 $\gamma(\vec{x})$  の分布を適当に仮定する (有限要素法による実際の計算では、有限な  $n$  個の離散的な位置  $\vec{x}_i$  での  $\gamma$  の値  $\{\gamma_i = \gamma(\vec{x}_i); i = 1, \dots, n\}$  を与える)。例えば、二次元柱状物体の初期形状として原点に置かれた単位面積の円柱を設定するものとして、その値が円柱の内部で 0、外部で 1 となるような  $\gamma(\vec{x})$  の分布を与える。

表 1: 断面積一定の制約条件下で抗力が最小となる二次元柱状物体の抵抗係数

Re	0.1	1	10	20	50	100	200	500	1,000	2,000
$C_D$	90.8	12.1	2.69	1.81	1.10	0.76	0.53	0.33	0.22	0.15

表 2: 断面積一定ならびに抗力上限の制約条件下で揚力が最大となる二次元柱状物体の揚力係数と揚抗比 (Re = 10)

$\beta \equiv C_D/C_{Dmin}$	1	1.1	1.2	1.5	2
$C_L$	0	1.89	2.84	5.27	8.72
$C_L/C_D$	0	0.64	0.88	1.31	1.62

2. 流れの基礎方程式 (2) と (3) を解き、速度分布  $\vec{u}(\vec{x})$  を求める。
3. 目的関数  $J = J_1(\vec{u}(\vec{x}); \gamma(\vec{x}); \gamma(\vec{x}))$  の値を評価する。また、随伴変数法を用いて、設計変数  $\gamma_i$  の変化に対する目的関数と制約条件の変化率、すなわち感度  $\partial J/\partial \gamma_i$  と  $\partial G/\partial \gamma_i$  を評価する。随伴変数法による感度解析については付録 A 参照。
4. 上記感度が十分に小さければ、最適解が得られたものとして計算を終了する。このときの  $\gamma(\vec{x}) = 0$  の領域が抗力が最小となる物体の形状を表す。
5. 感度が十分に小さくなければ、適当な最適化の手法 (例えば逐次二次計画法 [6]) を用い、求められた上記感度をもとに、制約条件を満たしつつ目的関数を小さくする方向に  $\gamma(\vec{x})$  の分布 (実際には  $\gamma$  の離散値  $\gamma_i$ ) を変化させる。
6. 手順 2 に戻る。

## 2.5 応用例

### 2.5.1 流れのなかに置かれた二次元柱状物体の抗力最小化と揚力最大化

**Navier-Stokes 流における抗力最小二次元柱状物体**  $x$  方向の様な流れ (その速度  $U$  を速度の基準量とする) のなかに置かれた二次元柱状物体に関し、その断面積  $A$  を一定とする制約条件下で、抗力が最小となる断面形状を求める。最適化の過程で物体の位置が大きく移動することを防止するため、その重心位置を定点 (原点) に固定する制約条件をあわせて課す。目的関数  $j$  の表現は式 (23) による。なお長さの基準量  $L$  を物体断面積  $A$  の平方根すなわち  $L = \sqrt{A}$  とし、レイノルズ数  $Re$  を  $Re \equiv U\sqrt{A}/\nu$ 、また抗力  $D$  の無次元量である抵抗係数  $C_D$  を  $C_D \equiv 2D/(\rho U^2 A)$  と定義する。レイノルズ数  $Re$  が 0.1 から 2,000 の範囲の様々な値の流れに対して得られた結果を図 2 と表 1 に示す。

**Navier-Stokes 流における揚力最大二次元柱状物体** 抗力最小化と同様の条件の下で、揚力が最大となる二次元柱状物体の断面形状を求める。実は揚力最大化問題では、物体の断面積を一定 (無次元断面積=1) とする制約条件を課しても、例えば迎え角をもつ扁平な形状の物体の厚さをどんどん薄くしていくことによりいくらかでも揚力を大きくすることができる。そこで制約条件として、断面積ならびに重心位置に関する制約条件に加え、抵抗係数  $C_D$  の上限を規定する制約条件をあわせて課す (結果として  $C_D$  は上限値となる)。実際にはレイノルズ数  $Re$  を 10 に固定し、このレイノルズ数での抗力最小形状の抵抗係数 ( $C_{Dmin} = 2.69$ ) との比を表す  $\beta \equiv C_D/C_{Dmin}$  に 4 つの値  $\beta = \{1.1, 1.2, 1.5, 2\}$  を設定し、揚力が最大となる二次元柱状物体の断面形状を求めた。その結果を図 3 に示す。また各抵抗係数比  $\beta$  での揚力最大形状の揚力係数  $C_L \equiv 2L/(\rho U^2 A)$  と揚抗比 ( $C_L/C_D$ ) を表 2 に示す。なお目的関数  $J$  の表現は式 (31) に記した体積力の  $y$  方向成分の積分による。

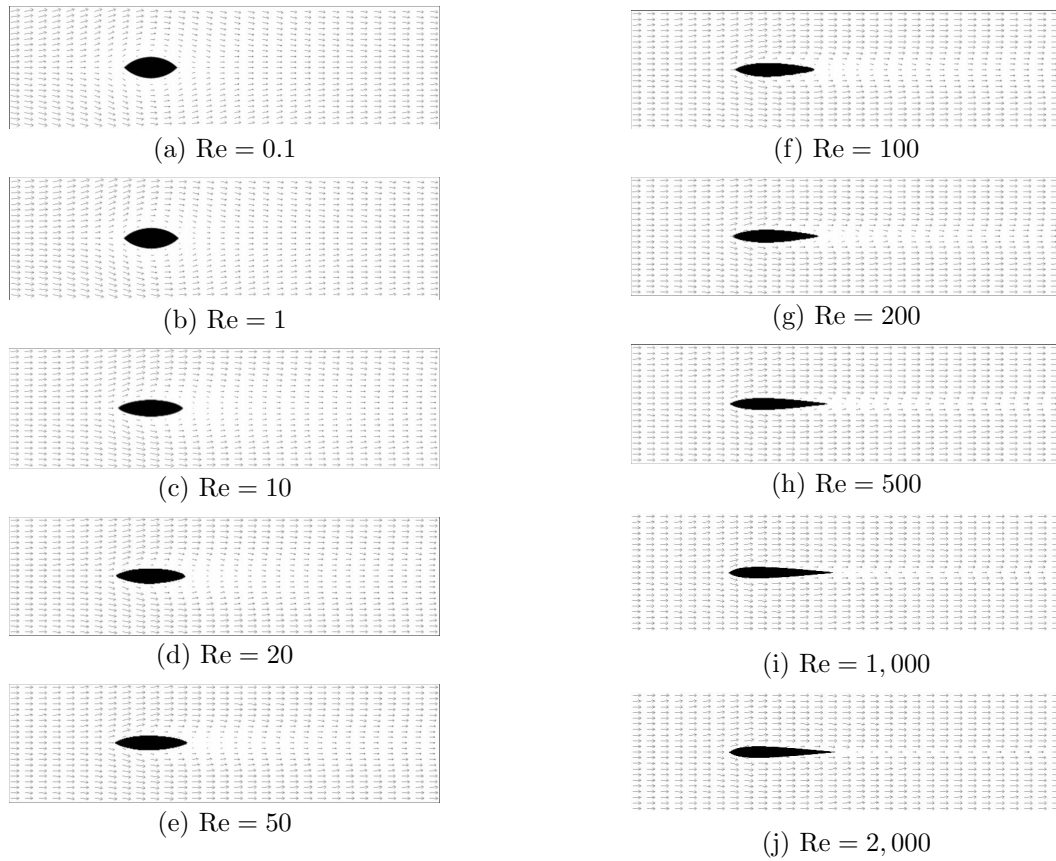


図 2: 断面積一定の制約条件下で抗力が最小となる二次元柱状物体の断面形状とその周りの速度分布

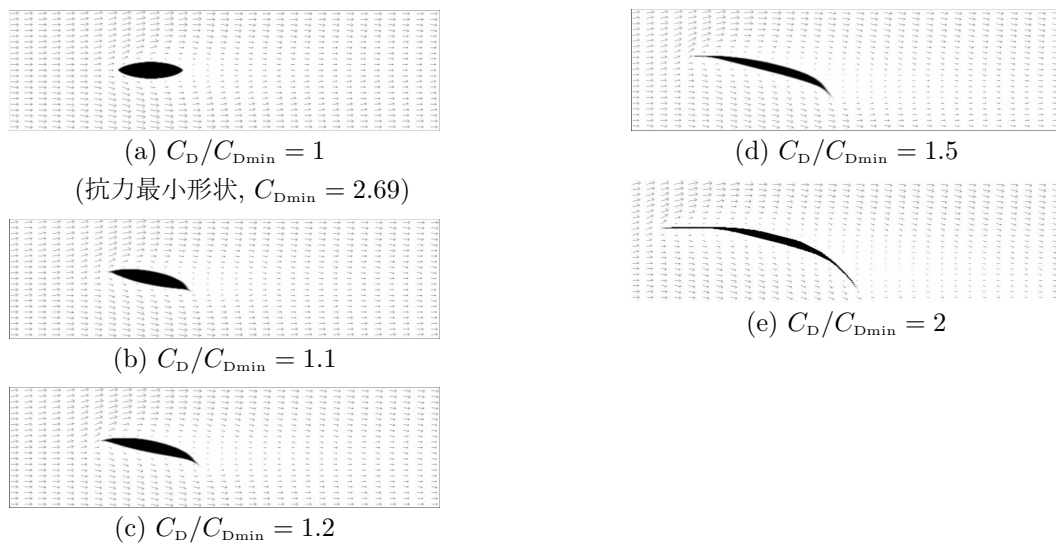


図 3: 断面積一定ならびに抗力上限の制約条件下で揚力が最大となる二次元柱状物体の断面形状とその周りの速度分布 ( $Re = 10$ )



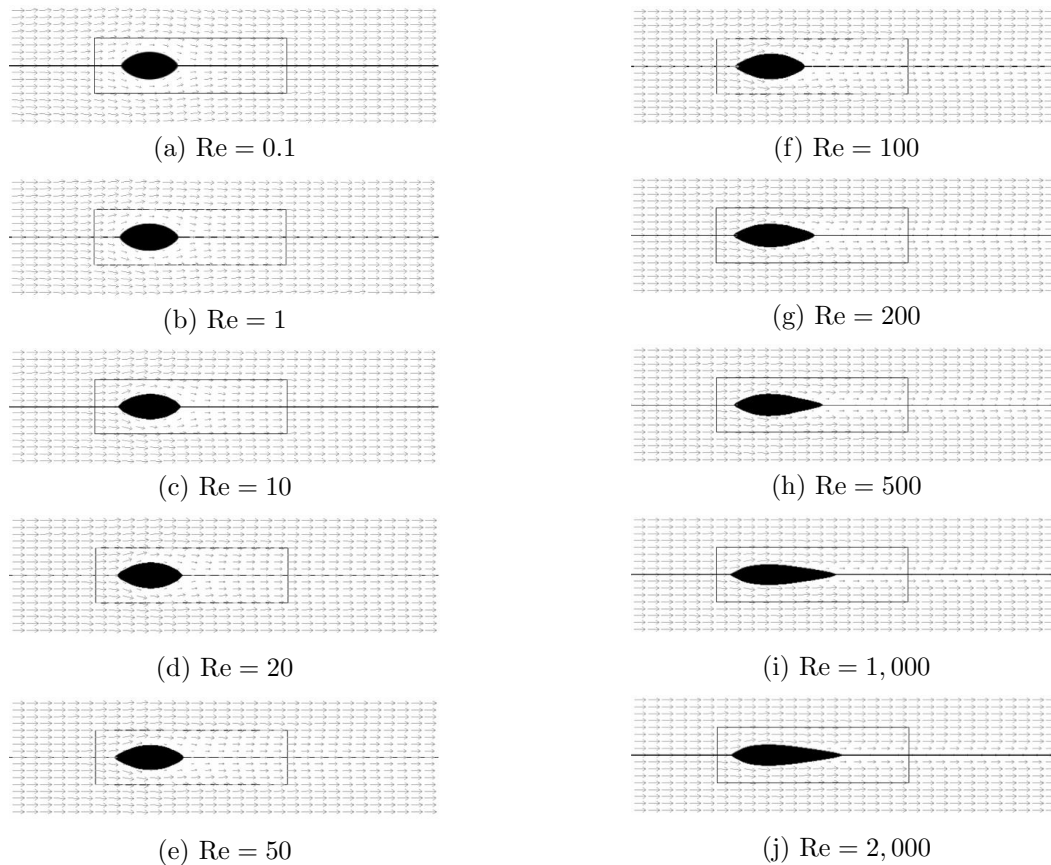


図 4: 体積一定の制約条件下で抗力が最小となる軸対称物体の子午面形状とその周りの速度分布

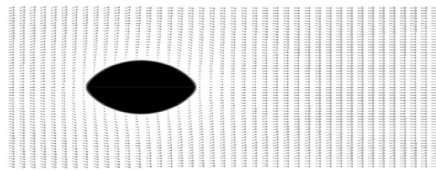
### 2.5.2 流れのなかに置かれた軸対称物体の抗力最小化

**Navier-Stokes 流における抗力最小軸対称物体**  $x$  方向の一様な流れ (その速度  $U$  を速度の基準量とする) のなかに置かれた軸対称物体に関し、その体積  $V$  を一定とする制約条件の下で抗力が最小となる子午面形状を求める。二次元柱状物体の場合と同様に、重心位置を定点 (原点) に固定する制約条件をあわせて課す。また目的関数  $j$  の表現は式 (23) による。なお長さの基準量  $L$  を物体の体積  $V$  の三乗根すなわち  $L = V^{1/3}$  とし、レイノルズ数  $Re$  を  $Re \equiv UV^{1/3}/\nu$ 、また抗力  $D$  の無次元量である抵抗係数  $C_D$  を  $C_D \equiv 2D/(\rho U^2 V^{2/3})$  と定義する。レイノルズ数が 0.1 から 2,000 の範囲の様々な値の流れに対して得られた結果を図 4 と表 3 に示す。

表 3: 体積一定の制約条件下で抗力が最小となる軸対称物体の抵抗係数

Re	0.1	1	10	20	50	100	200	500	1,000	2,000
$C_D$	230	25.5	3.96	2.42	1.30	0.83	0.55	0.32	0.21	0.14

**Stokes 流における抗力最小軸対称物体** 上に示したような Navier-Stokes 流における抗力最小化の結果が正しいことを検証することは困難である。しかし、レイノルズ数がゼロの極限にあたる Stokes 流に関しては、Pirroneau [7] により理論的な予測がなされているので、本研究でもこれと同じ問題を扱った。その結果を図 5 に示す。計算の結果得られた抗力最小物体の子午面形状は、前縁と後縁の頂角がともに約 120 度であることを含め、Pirroneau による予測と非常に良く一致する。Navier-Stokes 流においても正しい結果を与えるという保証はないが、本研究で用いる方法 (特に目的関数の表現) の妥当性が、部分的にとはいえ、検証されたといつてよい。



(a) 最適化計算の結果



(b) 抗力最小軸対称物体の子午面形状

図 5: Stokes 流中の抗力最小軸対称物体 (体積一定制約)

### 3 おわりに

数理的最適化手法に基づく設計計算の例として、流体関連分野でのトポロジー最適化法の応用の試み (低レイノルズ数流れにおける抗力の最小化と揚力の最大化) を紹介した。先行する構造・強度や固体熱伝導の分野を含めても、いまのところまだ適用できる問題の範囲は限られるが、シミュレーション主導のモノづくりの実現に向け、このような技術の将来には大きな期待が持たれる。そのなかで、これを支える基盤として、数学の役割はより重要なものとなる。

### 参考文献

- [1] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197–224, 1988.
- [2] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer, second edition, 2003.
- [3] T. Borrvall and J. Petersson. Topology optimization of fluids in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 41, pp. 77–107, 2003.
- [4] 近藤, 松森, 川本. 低レイノルズ数流れにおける最適物体形状の探索 (トポロジー最適化法による抗力最小化と揚力最大化). 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 76, No. 768, pp. 1152–1161, 2010.
- [5] 近藤, 松森, 川本. トポロジー最適化法による軸対称物体の抗力最小化. 日本応用数理学会 2010 年度 年会 講演予稿集, pp. 79–80, 2010.
- [6] P. E. Gill. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 12, No. 4, pp. 979–1006, 2002.
- [7] O. Pironneau. On optimum profiles in Stokes flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 59, pp. 117–128, 1973.

## A 感度解析について

### A.1 感度解析とそれを用いた最適設計

設計とは所望の性能を実現する (性能を最良化する) ように設計変数を定めることとあってよい。ある設計案が存在するものとして、これをよりよい設計案とするためには、設計変数  $\rho$  に対する性能  $j$  の変化率すなわち「感度」 $\delta j / \delta \rho$  に基き、 $j$  がよりよくなる方向に  $\rho$  を変更すればよい。この感度を求める方法のひとつは技術者の直感に頼ることであろう (図 6)。熟練技術者の直感は、しばしば、非常によい精度の感度を与えるものと考えられる。これに代わり、数理的な方法論に基き感度を求めようというのが感度解析であるが、その際、「主変数」すなわち当該問題を記述する基本的な変数 (基本物理量)  $y$  の設計変数  $\rho$  に対する変

化率  $dy/d\rho$  が必要となる (図 7)。しかし、多くの場合、この量 ( $dy/d\rho$ ) は簡単には求まらない。実は随伴変数法と呼ばれる非常に巧妙な方法があり、これによれば、 $dy/d\rho$  を用いることなく感度を評価することができる (図 8)。

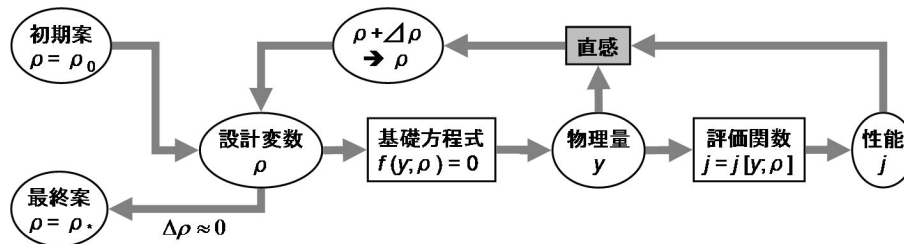


図 6: 技術者の「直感」に基づく設計

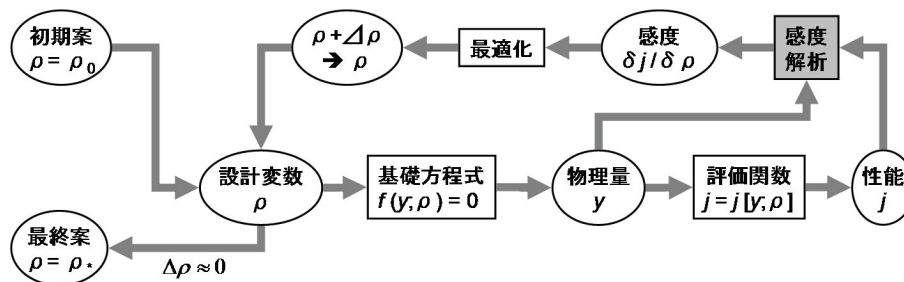


図 7: 数理的な方法論 (感度解析) に基づく設計

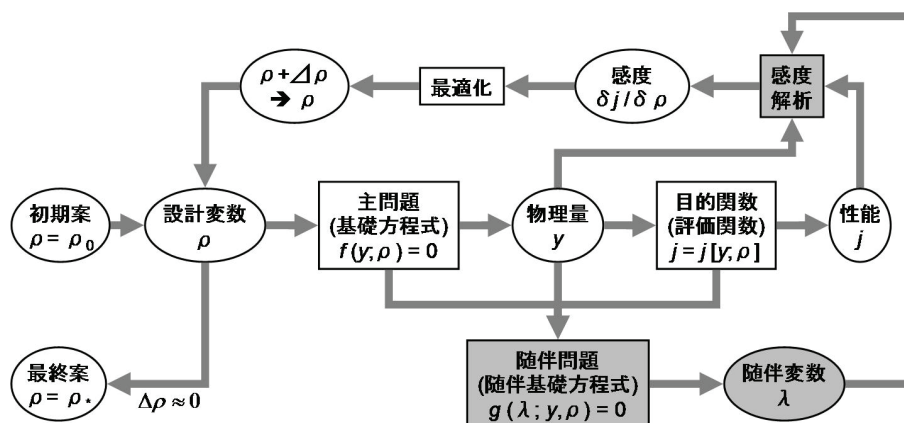


図 8: 随伴変数法を用いた感度解析に基づく設計

## A.2 随伴変数法による感度解析— 概念

随伴変数法による感度解析については、あまり広くは知られていないと思われるので、数学的に厳密とはいえない内容であることはご容赦いただくとして、その概念を説明する。

**設計変数** 感度解析とは、設計対象の性能や特性が設計上制御できる量 (設計変数) とともにどのように変化するか (感度) を求めることである。ここでは設計変数を簡単に  $\rho$  と表すが、例えば  $\rho$  を無次元材料密度とすれば、その空間分布により物体形状を表現することができる。

**主問題** 設計対象の振舞あるいは状態を表す変数 (状態変数と呼ばれることが多いが、ここでは主変数と呼ぶ) を  $y$  とする。そして  $y$  の振舞を記述する数学的な表現 (基礎方程式) を主問題と呼ぶことにする。またここでは主問題が下記のような式 (代数方程式あるいは微分方程式) として表現されるものとする。この式には設計変数  $\rho$  が必ず含まれているはずであり、したがってその解である  $y$  は  $\rho$  の関数 (汎関数) となる。

$$\begin{array}{ccc} \text{設計変数} & \text{基礎方程式} & \text{解} \\ \rho & \Rightarrow f[y; \rho] = 0 & \Rightarrow y = y[\rho] \\ \text{e.g. 無次元材料密度} & & y: \text{主変数} \end{array}$$

例えば温度が主役となる設計問題であれば、状態変数  $y$  は温度分布、基礎方程式は熱伝導方程式である。

**目的関数** 設計の目的は、多くの場合、設計対象の性能や特性を最大化あるいは最小化することである。そこで最大化あるいは最小化すべき量を目的関数  $j$  として表現する。 $j$  は一般的には  $\rho$  と  $y$  の関数であるが、 $y = y[\rho]$  であることから、結局、 $j$  は設計変数  $\rho$  のみの関数とみなすことができる。

$$j = j[y[\rho], \rho] \quad \text{目的関数} \quad (37)$$

なお主問題が境界値問題 (微分方程式) として記述される場合には、目的関数  $j$  は領域積分あるいは境界積分として表現されることが多い。

次に  $\rho$  が変化したときにその関数である  $j$  がどのように変化するか ( $j$  の  $\rho$  に対する変化率、すなわち感度) を求めるため、 $j$  の  $\rho$  に対する変分 (全微分) をとる。

$$\delta j = \frac{\partial j[y[\rho], \rho]}{\partial y} \delta y + \frac{\partial j[y[\rho], \rho]}{\partial \rho} \delta \rho = \left( \frac{\partial j[y[\rho], \rho]}{\partial y} \frac{dy}{d\rho} + \frac{\partial j[y[\rho], \rho]}{\partial \rho} \right) \delta \rho \quad (38)$$

そしてこれを (形式的に) 下記のような微分 (汎関数微分) で書き表すことにする。

$$\frac{\delta j}{\delta \rho} = \frac{\partial j[y[\rho], \rho]}{\partial y} \frac{dy}{d\rho} + \frac{\partial j[y[\rho], \rho]}{\partial \rho} \quad j \text{ の } \rho \text{ に対する変化率 (感度)} \quad (39)$$

ところでここで主問題の解が解析的に求められない限り、主変数  $y$  の  $\rho$  に対する変化率  $dy/d\rho$  を求めることは困難なため、この式から感度を求めることは難しい。そこで、任意の変数  $\lambda$  を導入し、下記の式のように主問題の左辺 (残差)  $f$  と  $\lambda$  との積<sup>1</sup>を目的関数  $j$  に加えた量として、拡張目的関数  $J$  を定義する。 $J$  は  $\rho$  と  $y$  ならびに  $\lambda$  の関数となる。なお基礎方程式より  $f = 0$  であるため、実は  $J = j$  である。

$$J = j[y[\rho], \rho] + \lambda f[y[\rho], \rho] = J[y[\rho], \rho; \lambda] = j[y[\rho], \rho] \quad \text{拡張目的関数} \quad (40)$$

そして先と同様に  $J$  の  $\rho$  に対する変分をとり、微分で書き表すと、次のようになる。

$$\frac{\delta J}{\delta \rho} = \underbrace{\frac{\partial J[y[\rho], \rho; \lambda]}{\partial y}}_{\equiv g[\lambda; y[\rho], \rho]} \frac{dy}{d\rho} + \frac{\partial J[y[\rho], \rho; \lambda]}{\partial \rho} = \frac{\delta j}{\delta \rho} \quad J \text{ の } \rho \text{ に対する変化率 (感度)} \quad (41)$$

ここで  $dy/d\rho$  の係数を  $g$  とする。 $g$  も  $\rho$  と  $y$  ならびに  $\lambda$  の関数となっている。

**随伴問題** 次にこの式のなかでの  $dy/d\rho$  の影響をなくすことを考える。すなわち任意であった  $\lambda$  を適切に選び、 $g = g[\lambda; y[\rho], \rho]$  がゼロとなるようにする。

$$\begin{array}{ccc} \text{基礎方程式} & \text{解} & \\ g[\lambda; y[\rho], \rho] = 0 & \Rightarrow & \lambda \\ \lambda: \text{随伴変数} & & \end{array}$$

このような目的で導入された変数  $\lambda$  は随伴変数と呼ばれる。そして随伴変数  $\lambda$  が満たすべきこの様な基礎方程式 (代数方程式あるいは微分方程式) は随伴方程式、またそれにより定義される問題は随伴問題と呼ばれる。

<sup>1</sup>主問題が境界値問題 (微分方程式) として記述される場合には、「主問題の残差  $f$  と  $\lambda$  との積」は実際には「主問題の残差  $f$  と  $\lambda$  との積の領域積分」である。

**感度**  $\lambda$  が随伴問題の解であるならば、目的関数  $j$  (あるいは拡張目的関数  $J$ ) の設計変数  $\rho$  に対する変化率すなわち感度を、 $dy/d\rho$  を用いることなく、表現することができる。

$$\frac{\delta j}{\delta \rho} = \frac{\delta J}{\delta \rho} = \frac{\partial J[y[\rho], \rho; \lambda]}{\partial \rho} \quad (42)$$

この式の右辺は解析的あるいは数値的に評価することが可能であり、これから、主問題の解  $y$  と随伴問題の解  $\lambda$  (ならびに設計変数  $\rho$ ) が与えられると感度が求められることになる。

**最適解の探索** 設計対象の性能や特性を最良化するために、上で得られた感度をもとに何らかの方法で  $j$  をよりよくする方向に設計変数  $\rho$  を更新する。その方法として最も一般的なのは数値計画法 (逐次二次計画法など、いろいろな方法がある) であるが、そのほかにも擬似的な時間  $\tau$  を導入し、設計変数  $\rho$  を  $\tau$  の関数として、 $\rho(\tau)$  が感度に基き時間的に変化する現象を表す時間発展方程式の収束状態として  $\rho$  の最適解を求めるといったこともできる。

### A.3 流体問題における随伴変数法による感度解析— 抗力最小化問題

流れのなかで抗力が最小となる物体の形状を求める問題を例として、随伴変数法により感度を評価する方法について説明する。

**設計変数** 流れのなかに置かれた物体の形状を無次元流体密度  $\rho$  の分布で表現するものとし ( $0 \leq \rho \leq 1$ : 物体部分で  $\rho = 0$ 、多孔体部分で  $0 < \rho < 1$ 、流体部分で  $\rho = 1$ )、これを最適化問題の設計変数とする (本文中では  $\rho$  を  $\gamma$  と記した)。そして、物体が流れから受ける抵抗力 (抗力) が最小となる  $\rho$  の分布を求める。

**主問題** 定常・非圧縮性の流れを扱うものとする。主変数は速度ベクトル  $\vec{u}(\vec{x})$  と圧力  $p(\vec{x})$ 、主問題 (の基礎方程式) は主変数が領域  $\Omega$  で満たすべき連続式と Navier-Stokes 方程式である。 $\Omega$  の境界  $\Gamma$  は、速度ベクトル  $\vec{u} = \vec{u}_*$  が規定される境界  $\Gamma_u$  と応力ベクトル  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_*$  が規定される境界  $\Gamma_\sigma$  から成るものとする。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u}^T - \vec{\sigma}) - \vec{f} = \vec{0} \quad \text{in } \Omega \quad \text{連続式と Navier-Stokes 方程式} \quad (43)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_* \quad \text{on } \Gamma_u, \quad \vec{\sigma} = \vec{\sigma}_* \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad \text{境界条件} \quad (44)$$

$$\vec{\sigma} \equiv -p\vec{I} + \vec{\tau}, \quad \vec{\tau} = \frac{2}{\text{Re}}\vec{\varepsilon}, \quad \vec{\varepsilon} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^T \right\}, \quad \vec{\sigma} = \vec{\sigma}\vec{n} = -p\vec{n} + \vec{\tau}, \quad \vec{\tau} = \vec{\tau}\vec{n} \quad (45)$$

ここで Navier-Stokes 方程式中の  $\vec{f}$  は流れのなかに置かれた物体の存在を表す体積力で、下記のように表される (多孔体モデル [3]、本文参照)。

$$\vec{f} = -\alpha\vec{u}, \quad \alpha = \alpha_{\max} \frac{q(1-\rho)}{q+\rho}, \quad \alpha_{\max} = \left(1 + \frac{1}{\text{Re}}\right)\chi, \quad \chi = 10^4 \text{ e.g.}, \quad q = 0.1 \text{ e.g.} \quad (46)$$

これより、設計変数である無次元流体密度  $\rho$  に依存する  $\alpha = \alpha(\rho)$  を通じ、 $\vec{u}$  と  $p$  は  $\rho$  に依存する量となる。

**目的関数** 設計の目的 (最大化あるいは最小化すべき量) を目的関数  $j$  として表現する。抗力最小化問題の目的関数は、下記のように表すことができる (本文参照)。

$$j = \int_{\Omega} L_j d\Omega + \int_{\Gamma} \ell_j d\Gamma; \quad L_j = \alpha u, \quad \ell_j = 0 \quad (47)$$

**拡張目的関数** 任意のスカラー変数  $\nu$  とベクトル変数  $\vec{\lambda}$  を導入し、 $-\nu$  (便宜上マイナスの符号をつける) を連続式の左辺に、また  $\vec{\lambda}$  を (内積として) Navier-Stokes 方程式の左辺に乗じたくえで領域  $\Omega$  で積分する。そしてこれを目的関数  $j$  に加えた量として拡張目的関数  $J$  を定義する。

$$J \equiv j - \int_{\Omega} \nu (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\lambda} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u}^T - \vec{\sigma}) - \vec{f} \right\} d\Omega = j \quad (48)$$

$j$ に加えられたのは本来ゼロとなる量であるため、拡張目的関数  $J$  はもとの目的関数  $j$  と等しい。Gaußの発散定理を利用してこの式を変形すると、下記のような表現が導かれる。

$$J = \int_{\Omega} \underbrace{\left\{ L_j - \vec{u}^T (\vec{\nabla} \vec{\lambda}) \vec{u} - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{\lambda}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) \cdot \vec{u} - \vec{\lambda} \cdot \vec{f} \right\}}_{\equiv L} d\Omega + \int_{\Gamma} \underbrace{\left\{ \ell_j + (\vec{u} \cdot \vec{n}) (\vec{u} \cdot \vec{\lambda}) - \vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma} + \vec{\pi} \cdot \vec{u} \right\}}_{\equiv \ell} d\Gamma \quad (49)$$

ここで領域積分の被積分量を  $L$ 、境界積分の被積分量を  $\ell$  とする。 $L$  のなかで主変数  $\vec{u}$  と  $p$  には微分演算がかかっていない (そのように  $J$  の表現を変形した)。なお  $\vec{\pi}$ 、 $\vec{\kappa}$ 、 $\vec{\pi}$ 、 $\vec{\kappa}$  は下記で定義される量である。

$$\vec{\pi} \equiv -\nu \vec{I} + \vec{\kappa}, \quad \vec{\kappa} = \frac{2}{\text{Re}} \vec{\epsilon}, \quad \vec{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \vec{\nabla} \vec{\lambda} + (\vec{\nabla} \vec{\lambda})^T \right\}, \quad \vec{\pi} = \vec{\pi} \vec{n} = -\nu \vec{n} + \vec{\kappa}, \quad \vec{\kappa} = \vec{\kappa} \vec{n} \quad (50)$$

**随伴問題** ここでこれまで任意であったスカラー変数  $\nu$  とベクトル変数  $\vec{\lambda}$  を随伴変数 (随伴圧力と随伴速度ベクトルと呼ぶ) と考える。随伴変数としての  $\nu(\vec{x})$  と  $\vec{\lambda}(\vec{x})$  の満たすべき基礎方程式は、 $dL/dp = 0$  ならびに  $dL/d\vec{u} = \vec{0}$  より導かれる、領域  $\Omega$  で成り立つべき微分方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\lambda} = 0, \quad -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\lambda} \vec{u}^T + \vec{\pi}) - (\vec{\nabla} \vec{\lambda})^T \vec{u} - \vec{g} = -[\alpha, 0, 0]^T \quad \text{in } \Omega; \quad \vec{g} = -\alpha \vec{\lambda} \quad (51)$$

と、 $dL/dp = 0$  ならびに  $dL/d\vec{u} = \vec{0}$  (あるいは  $dL/d\vec{u} = \vec{0}$  ならびに  $dL/d\vec{\sigma} = \vec{0}$ ) より導かれる、境界  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_{\sigma}$  で成り立つべき境界条件

$$\vec{\lambda} = \vec{0} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad \vec{\pi} + (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{\lambda} + (\vec{u} \cdot \vec{\lambda}) \vec{n} = \vec{0} \quad \text{on } \Gamma_{\sigma} \quad (52)$$

とで構成される。これらが随伴問題を定義する。

**感度** 拡張目的関数  $J$  の感度、すなわち  $J$  の設計変数  $\rho$  に対する変化率を求める。これは、もともとの目的関数  $j$  の感度でもある。感度は、一般的には、領域積分と境界積分の和として表わされる。

$$\delta j = \delta J = \int_{\Omega} S_{\Omega} \delta \rho d\Omega + \int_{\Gamma} S_{\Gamma} \delta \rho d\Gamma \quad \text{あるいは (形式的に)} \quad \frac{\delta j}{\delta \rho} = \frac{\delta J}{\delta \rho} = \int_{\Omega} S_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} S_{\Gamma} d\Gamma \quad (53)$$

ここで領域積分の被積分量  $S_{\Omega}$  は、領域内の各位置での局所的な感度を表し、抗力最小化問題では次のように表わされる。

$$S_{\Omega} = \frac{\partial L}{\partial \rho} + \frac{dL}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\rho} = \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \vec{f}} \cdot \frac{d\vec{f}}{d\alpha} \right) \frac{d\alpha}{d\rho} = \left( \vec{u} + \vec{\lambda} \cdot \vec{u} \right) \underbrace{\frac{d\alpha}{d\rho}}_{<0}$$

また境界積分の被積分量  $S_{\Gamma}$  は、境界上の各位置での局所的な感度を表し、抗力最小化問題では下記のようにゼロとなる。

$$S_{\Gamma} = \frac{\partial \ell}{\partial \rho} + \frac{d\ell}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\rho} = \left( \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} + \frac{\partial \ell}{\partial \vec{f}} \cdot \frac{d\vec{f}}{d\alpha} \right) \frac{d\alpha}{d\rho} = 0 \quad (54)$$